۷) اعداد حقیقی $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{20}$ مفروض‌اند. برای هر $1 \le i \le 20$، تابع $b_i : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ را به صورت $b_i(x) = \begin{cases} \frac{a_i}{x} & x \le a_i \\ \frac{x}{a_i} & x > a_i \end{cases}$ تعریف می‌کنیم. تابع $f(x) = \prod_{i=1}^{20} b_i(x)$ در چه نقاطی مینیمم مقدار خود را اختیار می‌کند؟

پاسخ:

برای هر $1 \le i \le 10$ تابع $C_i(x) = b_i(x) b_{21-i}(x)$ را در نظر بگیرید. به سادگی دیده می‌شود $C_i(x) \ge \frac{a_{21-i}}{a_i}$ برای هر $x \in (0,\infty)$ و مینیمم $C_i(x)$ که همان $\frac{a_{21-i}}{a_i}$ است در بازهٔ $a_i \le x \le a_{21-i}$ اختیار می‌شود بنابراین مینیمم تابع $f(x) = \prod_{i=1}^{10} C_i(x)$ دقیقاً وقتی اتفاق می‌افتد که $a_i \le x \le a_{21-i}$ برای هر $1 \le i \le 10$.
بنابراین نقاطی که $f(x)$ مینیمم خود را اخذ می‌کند همان بازه $[a_{10}, a_{11}]$ است.

۸) حلقهٔ یکدار R مفروض است. می‌دانیم برای هر $a \in R$ عضو $x \in R$ وجود دارد که $a = a^2 x$. ثابت کنید برای هر $a \in R$ عضو $y \in R$ وجود دارد به گونه‌ای که $a = ya^2$.

پاسخ: ابتدا نشان می‌دهیم اگر s, r اعضای حلقه باشند و $rs = 0$ آن‌گاه $sr = 0$: طبق فرض عضو x وجود دارد که $sr = (sr)^2 x = s\underbrace{rs}rx = 0$. حال اگر $a \in R$ آن‌گاه x را چنان می‌گیریم که $a = a^2 x$ پس $a(1 - ax) = 0$ و طبق آن‌چه در بالا گفته شد داریم $(1 - ax)a = 0$ پس $a - axa = 0$ یعنی $a(1 - xa) = 0$ و معمولاً می‌توان نتیجه گرفت $(1 - xa)a = 0$ پس $a = xa^2$.

۹) فرض کنیم $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ تابعی تحلیلی باشد. ثابت کنید $z_۰ \in \mathbb{C}$ موجود است که $|z_۰| = ۱$ و $|f(z_۰) - \bar{z}_۰| \geq ۱$.

پاسخ:

(برهان خلف) فرض کنید برای هر $z_۰ \in \mathbb{C}$ که $|z_۰| = ۱$، داشته باشیم $|f(z_۰) - \bar{z}| < ۱$. با توجه به این که روی واحد $\bar{z} = \frac{۱}{z}$ داریم:

$$|zf(z) - ۱| < |z| = ۱.$$

تابع $zf(z) - ۱$ تحلیلی است پس نرم آن ماکزیمم خود را روی مرز ناحیه می‌گیرد لذا نابرابری بالا که برای نقاط روی مرز دیسک واحد برقرار است برای نقاط داخل دیسک نیز برقرار است. یعنی برای هر $z \in \mathbb{C}$ که $|z| \leq ۱$ نیز $|zf(z) - ۱| < ۱$. اگر z را برابر صفر قرار دهیم داریم $۱ < ۱$ که تناقض است.

۱۰) نشان دهید تابع $f(x_{11},\dots,x_{nn})=\det\begin{bmatrix} x_{11}\dots x_{1n}\\ \vdots \quad\quad \vdots\\ x_{n1}\dots x_{nn}\end{bmatrix}$ به عنوان یک چندجمله‌ای n^2 متغیره، تحویل‌ناپذیر است.

(یک چندجمله‌ای چند متغیره را تحویل‌ناپذیر می‌گوییم اگر نتوان آن را به صورت حاصل ضرب دو چند جمله‌ای غیر ثابت تجزیه کرد.)

پاسخ:

فرض کنید $det[x_{ij}]_{1\le ij\le n}=gh$ که g,h دو چند جمله‌ای چند متغیره هستند. نخست توجه کنید که برای i,j مشخص، مثلاً به کمک بسط دترمینان بر حسب سطر i ام، دیده می‌شود که سمت چپ بر حسب x_{ij} از درجهٔ یک است بنابراین با مرتب کردن g,h به عنوان چندجمله‌ای‌هایی برحسب x_{ij} دیده می‌شود که درجه x_{ij} در یکی از h یا g یک و در دیگری صفر است. پس هر متغیر x_{ij} فقط (و بنابراین دقیقاً) در یکی از h یا g ظاهر می‌شود. اکنون دو متغیر که همزمان در یک سطر آمده‌اند مثل x_{ik} و x_{ij} را در نظر بگیرید. اگر سمت چپ را به عنوان چندجمله‌ای بر حسب این دو متغیر مرتب کنیم و به بسط دترمینان بر حسب سطر iام توجه کنیم، دیده می‌شود که ضریب حاصل ضرب $x_{ij}x_{ik}$ صفر است. اما اگر در سمت راست x_{ik} و x_{ij} یکی در h و دیگری در g آمده باشد باز با مرتب کردن h و g به عنوان چندجمله‌ای‌های درجه یک از این دو متغیر، دیده می‌شود که ضریب $x_{ij}x_{ik}$ ناصفر است. این تناقض نشان می‌دهد که هر دو متغیر هم‌سطر همزمان در یکی از h یا g ظاهر می‌شوند پس همهٔ متغیرهای یک سطر باید در یکی از h یا g بیایند. مشابه همین استدلال در مورد متغیرهای یک ستون هم صادق است. بنابراین هر n^2 متغیر در یکی از h یا g ظاهر می‌شوند و دیگری چندجمله‌ای ثابت است.

۱۱) فرض کنیم $U \subseteq [۰, \infty)$ مجموعه‌ای باز و بی‌کران باشد. ثابت کنید عددی مانند x وجود دارد که $U \cap \{x, ۲x, ۳x, \dots\}$ نامتناهی است.

پاسخ:

فرض کنیم $V_m = \bigcup_{n=m}^{\infty} \frac{۱}{n} U$. ابتدا نشان می‌دهیم برای هر بازه مانند (α, β) که $۰ < \alpha < \beta$ داریم $V_m \cap (\alpha, \beta) \neq \emptyset$. به برهان خلف فرض می‌کنیم این مجموعه تهی باشد. بنابراین به ازای هر $n \geq m$ داریم $U \cap (n\alpha, n\beta) = \emptyset$. بنابر خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی، $n_۰ \geq m$ ی هست که $\frac{۱}{n_۰} < \frac{\beta - \alpha}{\alpha}$. بنابراین $(n+۱)\alpha < n\beta$ برای هر $n \geq n_۰$. در نتیجه $\bigcup_{n=n_۰}^{\infty} (n\alpha, n\beta) = (n_۰\alpha, \infty)$. پس $U \cap (n_۰\alpha, \infty) = \emptyset$ و این با بی‌کران بودن U در تناقض است.

حال فرض کنیم $V_۰ = (۱, ۲)$. طبق آنچه در بالا گفته شد داریم $V_۱ \cap V_۰ \neq \emptyset$. چون این مجموعه باز است پس $x_۱$ و $r_۱ < ۱$ ی موجودند که $N_{r_۱}[x_۱] \subseteq V_۱ \cap V_۰$. حال با همین استدلال می‌توان به‌صورت بازگشتی دنباله‌های $\{x_m\}$ و $\{r_m\}$ را یافت که

$$N_{r_m}[x_m] \subseteq V_m \cap N_{r_{m-۱}}(x_{m-۱}) \qquad ۰ < r_m < \frac{۱}{m} \tag{$*$}$$

ادعا می‌کنیم $\{x_m\}$ دنباله‌ای کوشی است زیرا برای $m \geq k$ داریم $x_m \in N_{r_k}(x_k)$ و لذا

$$|x_m - x_k| < ۲r_k < \frac{۲}{k}.$$

حال چون $[۰, \infty)$ تام است پس xی هست که $x_m \to x$. بنابر $(*)$ داریم

$$x \in \bigcap_{m=۱}^{\infty} N_{r_m}[x_m] \subseteq \bigcap_{m=۱}^{\infty} V_m = \bigcap_{m=۱}^{\infty} \Big(\bigcup_{n=m}^{\infty} \frac{۱}{n} U \Big).$$

پس برای هر m عددی مانند $n_m \geq m$ هست که $x \in \frac{۱}{n_m} U$ یا به طور معادل $n_m x \in U$. این نشان می‌دهد که

$$\{n_۱ x, n_۲ x, n_۳ x, \dots\} \subseteq U \cap \{x, ۲x, ۳x, \dots\}$$

و لذا حکم برقرار است.

۱۲) تابع $f: M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ را شبه اثر می‌نامیم اگر ماتریس صفر را به عدد صفر تصویر کند و برای هر $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ داشته باشیم $f(AB) = f(BA)$. ثابت کنید ماتریس $A \in M_n(\mathbb{R})$ پوچ‌توان است اگر و تنها اگر برای هر تابع شبه اثر مانند $f: M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ داشته باشیم $f(A) = ۰$.

پاسخ:

می‌دانیم ماتریس A پوچ‌توان است اگر و فقط اگر همهٔ مقادیر ویژهٔ آن صفر باشد. تابع $f: M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(A) = \max\{|\lambda_۱|, \dots, |\lambda_n|\}$ که ماکزیمم روی همهٔ مقادیر ویژهٔ A گرفته می‌شود یک تابع شبه اثر است زیرا چند جمله‌ای مشخصه AB و BA یکی هستند. پس اگر $f(A) = ۰$ آنگاه $\lambda_۱ = \cdots = \lambda_n = ۰$ پس A پوچ‌توان است.

برای اثبات طرف دیگر ابتدا توجه کنید که اگر f شبه اثر باشد آنگاه $f(A) = f(SAS^{-۱})$ برای هر A و هر S وارون‌پذیر. پس می‌توان A را با یک ماتریس متشابه بدون آن‌که مقدار آن برای توابع شبه اثر تغییر کند، جایگزین کرد. (چون هر ماتریس پوچ‌توان با یک ماتریس پایین مثلثی که درایه‌های روی قطر اصلی آن صفر است متشابه است.) پس بدون از دست دادن کلیت فرض می‌کنیم

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & & ۰ \\ & \ddots & \\ * & & ۰ \end{bmatrix}$$

بگیرید $E_i = diag(۱, \dots, ۱, ۰, ۱, \dots, ۱)$ یک ماتریس قطری با درایه‌های یک روی قطر (اصلی) به جز درایه (i,i) که ۰ است. آنگاه $E_۱ A = A$ ولی $AE_۱$ ماتریسی است که ستون اول آن صفر است پس می‌توان فرض کرد ستون اول A نیز صفر است. حال $E_۲ A = A$ ولی $AE_۲$ ماتریسی است که ستون دوم آن نیز صفر است. با ادامهٔ این روش A به ماتریسی تبدیل می‌شود که همهٔ ستون‌های آن صفر است پس $f(A) = ۰$.

راه حل دوم:

برای قسمت اول می‌توان از تابع شبه اثر $f(A) = tr(A^k)$ استفاده کرد: از آنجایی که

$$\begin{aligned} f(AB) = tr((AB)^k) &= tr(B(AB)^{k-۱}A) \\ &= tr((BA)^k) = f(BA) \end{aligned}$$

این تابع شبه اثر است. پس اگر $f(A) = ۰$ برای هر شبه اثر آنگاه نتیجه می‌شود که برای هر k، $tr(A^k) = ۰$ یعنی برای هر k، $\sum_i \lambda_i^k = ۰$ و به سادگی می‌توان نتیجه گرفت برای هر i، $\lambda_i = ۰$ و این این معادل پوچ‌توانی A است.