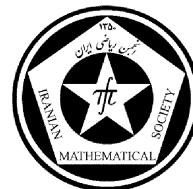




پاسخ سؤالات نوبت دوم
سی و پنجمین مسابقه
ریاضی دانشجویی کشور
۹۰/۲/۱۵



دانشگاه شهید بهشتی

انجمن ریاضی ایران

(۷) اعداد حقیقی $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_p$ مفروض اند. برای هر $1 \leq i \leq 20$ ، تابع $b_i: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت

$$b_i(x) = \begin{cases} \frac{a_i}{x} & x \leq a_i \\ \frac{x}{a_i} & x > a_i \end{cases}$$

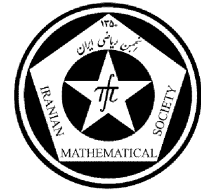
تعریف می کنیم. تابع $f(x) = \prod_{i=1}^{20} b_i(x)$ در چه نقاطی مینیمم مقدار خود را اختیار می کند؟

پاسخ:

برای هر $1 \leq i \leq 10$ تابع $C_i(x) = b_i(x)b_{21-i}(x)$ را در نظر بگیرید. به سادگی دیده می شود $C_i(x) \geq \frac{a_{21-i}}{a_i}$ برای هر $x \in (0, \infty)$ و مینیمم $C_i(x)$ که همان $\frac{a_{21-i}}{a_i}$ است در بازه $a_i \leq x \leq a_{21-i}$ اختیار می شود بنابراین مینیمم تابع $f(x) = \prod_{i=1}^{10} C_i(x)$ دقیقاً وقتی اتفاق می افتد که $a_i \leq x \leq a_{21-i}$ برای هر $1 \leq i \leq 10$. بنابراین نقاطی که $f(x)$ مینیمم خود را اخذ می کند همان بازه $[a_{10}, a_{11}]$ است.



پاسخ سؤالات نوبت دوم
سی و پنجمین مسابقه
ریاضی دانشجویی کشور
۹۰/۲/۱۵



دانشگاه شهید بهشتی

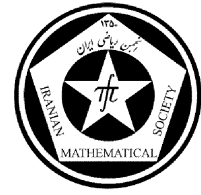
انجمن ریاضی ایران

۸) حلقه یکدار R مفروض است. می‌دانیم برای هر $a \in R$ عضو $x \in R$ وجود دارد که $a = a^2x$. ثابت کنید برای هر $a \in R$ عضو $y \in R$ وجود دارد به گونه‌ای که $a = ya^2$.

پاسخ: ابتدا نشان می‌دهیم اگر s, r اعضای حلقه باشند و $rs = 0$ آن‌گاه $sr = 0$: طبق فرض عضو x وجود دارد که $sr = (sr)^2x = s \underbrace{rs} rx = 0$. حال اگر $a \in R$ آن‌گاه x را چنان می‌گیریم که $a = a^2x$ پس $a(1 - ax) = 0$ و طبق آن‌چه در بالا گفته شد داریم $(1 - ax)a = 0$ پس $a - axa = 0$ یعنی $a(1 - xa) = 0$ و معمولاً می‌توان نتیجه گرفت $(1 - xa)a = 0$ پس $a = xa^2$.



پاسخ سؤالات نوبت دوم
سی و پنجمین مسابقه
ریاضی دانشجویی کشور
۹۰/۲/۱۵



دانشگاه شهید بهشتی

انجمن ریاضی ایران

(۹) فرض کنیم $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ تابعی تحلیلی باشد. ثابت کنید $z_0 \in \mathbb{C}$ موجود است که $|z_0| = 1$ و $|f(z_0) - \bar{z}_0| \geq 1$.

پاسخ:

(برهان خلف) فرض کنید برای هر $z_0 \in \mathbb{C}$ که $|z_0| = 1$ ، داشته باشیم $|f(z_0) - \bar{z}_0| < 1$. با توجه به این که روی واحد $\bar{z} = \frac{1}{z}$ داریم:

$$|zf(z) - 1| < |z| = 1.$$

تابع $zf(z) - 1$ تحلیلی است پس نرم آن ماکزیمم خود را روی مرز ناحیه می گیرد لذا نابرابری بالا که برای نقاط روی مرز دیسک واحد برقرار است برای نقاط داخل دیسک نیز برقرار است. یعنی برای هر $z \in \mathbb{C}$ که $|z| \leq 1$ نیز $|zf(z) - 1| < 1$. اگر z را برابر صفر قرار دهیم داریم $1 < 1$ که تناقض است.

(۱۰) نشان دهید تابع $f(x_{11}, \dots, x_{nn}) = \det \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix}$ به عنوان یک چندجمله‌ای n^2 متغیره، تحویل ناپذیر است.

(یک چندجمله‌ای چند متغیره را تحویل ناپذیر می‌گوییم اگر نتوان آن را به صورت حاصل ضرب دو چند جمله‌ای غیر ثابت تجزیه کرد.)

پاسخ:

فرض کنید g, h دو چند جمله‌ای چند متغیره هستند. نخست توجه کنید که برای i, j مشخص، مثلاً به کمک بسط دترمینان بر حسب سطر i ام، دیده می‌شود که سمت چپ بر حسب x_{ij} از درجه یک است بنابراین با مرتب کردن g, h به عنوان چندجمله‌ای‌هایی بر حسب x_{ij} دیده می‌شود که درجه x_{ij} در یکی از g یا h یک و در دیگری صفر است. پس هر متغیر x_{ij} فقط (و بنابراین دقیقاً) در یکی از g یا h ظاهر می‌شود. اکنون دو متغیر که همزمان در یک سطر آمده‌اند مثل x_{ij} و x_{ik} را در نظر بگیرید. اگر سمت چپ را به عنوان چندجمله‌ای بر حسب این دو متغیر مرتب کنیم و به بسط دترمینان بر حسب سطر i ام توجه کنیم، دیده می‌شود که ضریب حاصل ضرب $x_{ij}x_{ik}$ صفر است. اما اگر در سمت راست x_{ij} و x_{ik} یکی در g و دیگری در g آمده باشد باز با مرتب کردن g و h به عنوان چندجمله‌ای‌های درجه یک از این دو متغیر، دیده می‌شود که ضریب $x_{ij}x_{ik}$ ناصفر است. این تناقض نشان می‌دهد که هر دو متغیر هم‌سطر همزمان در یکی از g یا h ظاهر می‌شوند پس همه متغیرهای یک سطر باید در یکی از g یا h بیایند. مشابه همین استدلال در مورد متغیرهای یک ستون هم صادق است. بنابراین هر n^2 متغیر در یکی از g یا h ظاهر می‌شوند و دیگری چندجمله‌ای ثابت است.

(۱۱) فرض کنیم $U \subseteq [0, \infty)$ مجموعه‌ای باز و بی‌کران باشد. ثابت کنید عددی مانند x وجود دارد که $U \cap \{x, 2x, 3x, \dots\}$ نامتناهی است.

پاسخ:

فرض کنیم $V_m = \bigcup_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n}U$. ابتدا نشان می‌دهیم برای هر بازه مانند (α, β) که $0 < \alpha < \beta$ داریم $V_m \cap (\alpha, \beta) \neq \emptyset$. به برهان خلف فرض می‌کنیم این مجموعه تهی باشد. بنابراین به ازای هر $n \geq m$ داریم $U \cap (n\alpha, n\beta) = \emptyset$. بنابر خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی، $n_0 \geq m$ هست که $\frac{1}{n_0} < \frac{\beta - \alpha}{\alpha}$. بنابراین $(n_0 + 1)\alpha < n_0\beta$ برای هر $n \geq n_0$. در نتیجه $\bigcup_{n=n_0}^{\infty} (n\alpha, n\beta) = (n_0\alpha, \infty)$. پس $U \cap (n_0\alpha, \infty) = \emptyset$ و این با بی‌کران بودن U در تناقض است.

حال فرض کنیم $V_0 = (1, 2)$. طبق آنچه در بالا گفته شد داریم $V_1 \cap V_0 \neq \emptyset$. چون این مجموعه باز است پس x_1 و $r_1 < 1$ موجودند که $N_{r_1}[x_1] \subseteq V_1 \cap V_0$. حال با همین استدلال می‌توان به صورت بازگشتی دنباله‌های $\{x_m\}$ و $\{r_m\}$ را یافت که

$$N_{r_m}[x_m] \subseteq V_m \cap N_{r_{m-1}}(x_{m-1}) \quad 0 < r_m < \frac{1}{m} \quad (*)$$

ادعا می‌کنیم $\{x_m\}$ دنباله‌ای کوشی است زیرا برای $m \geq k$ داریم $x_m \in N_{r_k}(x_k)$ و لذا

$$|x_m - x_k| < 2r_k < \frac{2}{k}.$$

حال چون $[0, \infty)$ تام است پس x هست که $x_m \rightarrow x$. بنابر (*) داریم

$$x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} N_{r_m}[x_m] \subseteq \bigcap_{m=1}^{\infty} V_m = \bigcap_{m=1}^{\infty} \left(\bigcup_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n}U \right).$$

پس برای هر m عددی مانند $n_m \geq m$ هست که $x \in \frac{1}{n_m}U$ یا به طور معادل $n_m x \in U$. این نشان می‌دهد که

$$\{n_1 x, n_2 x, n_3 x, \dots\} \subseteq U \cap \{x, 2x, 3x, \dots\}$$

و لذا حکم برقرار است.

(۱۲) تابع $f : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ را شبه اثر می نامیم اگر ماتریس صفر را به عدد صفر تصویر کند و برای هر $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ داشته باشیم $f(AB) = f(BA)$. ثابت کنید ماتریس $A \in M_n(\mathbb{R})$ پوچ توان است اگر و تنها اگر برای هر تابع شبه اثر مانند $f : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ داشته باشیم $f(A) = 0$.

پاسخ:

می دانیم ماتریس A پوچ توان است اگر و فقط اگر همه مقادیر ویژه آن صفر باشد. تابع $f : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(A) = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$ که ماکزیمم روی همه مقادیر ویژه A گرفته می شود یک تابع شبه اثر است زیرا چند جمله ای مشخصه AB و BA یکی هستند. پس اگر $f(A) = 0$ آنگاه $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ پس A پوچ توان است.

برای اثبات طرف دیگر ابتدا توجه کنید که اگر f شبه اثر باشد آنگاه $f(A) = f(SAS^{-1})$ برای هر A و هر S وارون پذیر. پس می توان A را با یک ماتریس متشابه بدون آن که مقدار آن برای توابع شبه اثر تغییر کند، جایگزین کرد. (چون هر ماتریس پوچ توان با یک ماتریس پایین مثلثی که در درایه های روی قطر اصلی آن صفر است متشابه است.) پس بدون از دست دادن کلیت فرض می کنیم

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & * & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

بگیرید $E_i = \text{diag}(1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1)$ یک ماتریس قطری با درایه های یک روی قطر (اصلی) به جز درایه (i, i) که ۰ است. آنگاه $E_1 A = A$ ولی $A E_1$ ماتریسی است که ستون اول آن صفر است پس می توان فرض کرد ستون اول A نیز صفر است. حال $E_2 A = A$ ولی $A E_2$ ماتریسی است که ستون دوم آن نیز صفر است. با ادامه این روش A به ماتریسی تبدیل می شود که همه ستون های آن صفر است پس $f(A) = 0$.

راه حل دوم:

برای قسمت اول می توان از تابع شبه اثر $f(A) = \text{tr}(A^k)$ استفاده کرد: از آنجایی که

$$\begin{aligned} f(AB) &= \text{tr}((AB)^k) = \text{tr}(B(AB)^{k-1}A) \\ &= \text{tr}((BA)^k) = f(BA) \end{aligned}$$

این تابع شبه اثر است. پس اگر $f(A) = 0$ برای هر شبه اثر آنگاه نتیجه می شود که برای هر k ، $\text{tr}(A^k) = 0$ یعنی برای هر k ، $\sum_i \lambda_i^k = 0$ و به سادگی می توان نتیجه گرفت برای هر i ، $\lambda_i = 0$ و این معادل پوچ توانی A است.