۱) همهٔ اعداد طبیعی مانند k را مشخص کنید که به ازای آن‌ها گروهی متناهی مانند G موجود باشد که دقیقاً ۲۰۱۱ عضو از مرتبه k داشته باشد. (توجه کنید که برای هر چنین kای ارائهٔ گروهی متناهی که دقیقاً ۲۰۱۱ عضو از مرتبهٔ k داشته باشد لازم است.)

پاسخ:

راه‌حل اول. ابتدا توجه کنید که در هر گروه، مرتبه یک عضو مانند x با مرتبه x^{-1} برابر است. پس اگر $O(x) = k$، آنگاه $O(x^{-1}) = k$؛ یعنی، یا اعضای با مرتبه k به‌صورت جفت ظاهر می‌شوند (که امکان ندارد چون دقیقاً ۲۰۱۱ عضو با این خاصیت وجود ندارد) و یا این‌که برای یکی از این xها داریم $x = x^{-1}$. پس $O(x) = 2$ یعنی، مرتبه x و در نتیجه k فقط می‌تواند ۲ باشد.

از طرف دیگر D_{2011} گروهی متناهی است که دقیقاً ۲۰۱۱ عضو مرتبهٔ ۲ دارد.

راه‌حل دوم. از آن‌جا که هر گروه دوری و k عضوی دارای $\phi(k)$ مولد است که این $\phi(k)$ مولد دارای مرتبهٔ k هستند، به راحتی نتیجه می‌شود که تعداد اعضای از مرتبهٔ k مضربی از $\phi(k)$ است یعنی، $\phi(k)|2011$. اما $\phi(k)$ همواره زوج است، مگر این‌که $k = 2$ و مانند حل بالا، D_{2011} گروهی با خواص خواسته شده است.

۲) فرض کنیم X یک فضای متریک همبند و فشرده و $p \in X$ یک نقطهٔ برشی آن باشد؛ یعنی، مجموعه‌های ناتهی U و V موجود باشند که $X \setminus \{p\} = U \cup V$ و $\overline{U} \cap V = U \cap \overline{V} = \phi$. ثابت کنید $U \cup \{p\}$ همبند و فشرده است.

پاسخ:

ابتدا نشان می‌دهیم $U \cup \{p\}$ بسته است. فرض کنیم $x \in \overline{U \cup \{p\}}$. بنابراین دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ در $U \cup \{p\}$ موجود است که $x_n \to x$. اگر برای بی‌نهایت n داشته باشیم $x_n = p$ آنگاه $x_n \to p$ و لذا $x = p$. همچنین اگر از جایی به بعد $x_n \neq p$ آنگاه x_nها نهایتاً در U هستند ولذا $x \in \overline{U}$. در نتیجه $x \notin V$ و لذا $x \in U \cup \{p\}$.
حال تابع $f : X \to U \cup \{p\}$ را به صورت

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in U \cup \{p\} \\ p & x \in V \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. ادعا می‌کنیم این تابع پیوسته است. فرض کنیم y_n دنباله‌ای همگرا به y در X باشد. اگر برای بی‌نهایت n داشته باشیم $y_n \in V$ آنگاه $y \in \overline{V}$ و لذا از جایی به بعد داریم $y_n \in V \cup \{p\}$. بنابراین از جایی به بعد $f(y_n) = p$ و لذا $f(y_n) \to p$. اما $f(y) = p$ زیرا $y \in V \cup \{p\}$.
اما اگر از جایی به بعد $y_n \notin V$ آنگاه از جایی به بعد $y_n \in U \cup \{p\}$ و چون f روی $U \cup \{p\}$ همانی است پس $f(y_n) \to f(y)$.
اکنون چون f پیوسته و X همبند و فشرده است پس $U \cup \{p\} = f(X)$ نیز چنین است.

۳) حلقه‌های R و S مفروض هستند که R میدان است و $R[x] \cong S[x]$. ثابت کنید $R \cong S$.

پاسخ:

چون R میدان است پس $R[x]$ یک دامنهٔ ایدال‌های اصلی (P.I.D) است. پس $S[x]$ هم P.I.D است و در نتیجه S میدان است [توجه کنیم که در حالت جابه‌جایی و یکدار داریم: T میدان است اگر و تنها اگر $T[x]$ دامنهٔ ایدال‌های اصلی باشد.]

حال اگر $\phi : R[x] \to S[x]$ یکریختی، باشد با توجه به این‌که عناصر معکوس‌پذیر تحت یکریختی حفظ می‌شوند و با توجه به این‌که عناصر معکوس‌پذیر $R[x]$ و $S[x]$ چندجمله‌ای ثابت هستند (چون R و S میدان هستند)، نتیجه می‌شود که تابع $\phi|_R : R \to S$ یکریختی بین R و S است.

۴) وجوه یک ۱۳۹۰ وجهی همگی مثلث هستند. دو وجه این چندوجهی را همسایه گوییم اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. نشان دهید برای هر رنگ‌آمیزی وجه‌ها با سه رنگ همیشه دو وجه وجود دارند که همرنگ و دارای یک وجه همسایهٔ مشترک هستند.

پاسخ:

به روشنی دیده می‌شود که نادرست بودن حکم به معنی وجود یک رنگ‌آمیزی خواهد بود که در آن سه وجه همسایهٔ هر وجه دقیقاً به سه رنگ مختلف رنگ شده‌اند. اکنون یکی از رنگ‌ها مثلاً رنگ آبی را در نظر می‌گیریم و وجه‌های آبی را می‌شماریم. هر کدام از ۱۳۹۰ وجه دقیقاً یک وجه همسایه به رنگ آبی خواهد داشت و از طرفی هر وجه آبی دقیقاً سه بار به عنوان همسایهٔ آبی یک وجه شمرده می‌شود. بنابراین ۱۳۹۰|۳ که این متناقض است.

۵) فضای $C(X)$ متشکل از تمام توابع حقیقی مقدار، پیوسته و کران‌دار بر فضای متریک (X,d) را همراه با متر

$$\rho(f,g) = \sup\{|f(x)-g(x)| : x \in X\}$$

در نظر می‌گیریم. ثابت کنید اگر $(C(X),\rho)$ زیرمجموعه‌ای چگال و شمارا داشته باشد آن‌گاه (X,d) نیز زیرمجموعه‌ای چگال و شمارا دارد.

پاسخ:

فرض کنید $D = \{f_۱, f_۲, \ldots\}$ در $C(X)$ چگال باشد. قرار دهید

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid f_n(x) > \frac{۱}{۲} \text{ به ازای } x \in X \text{ ی}\}$$

B تهی نیست زیرا اگر $g : X \to \mathbb{R}$ تابع ثابت یک باشد باید n ی داشته باشیم که $\rho(f_n, g) < \frac{۱}{۲}$ و برای چنین n ی به ازای هر $x \in X$ داریم $f_n(x) > \frac{۱}{۲}$.

به ازای هر $n \in B$، طبق تعریف B، نقطه‌ای مثل $x_n \in X$ وجود دارد که $f_n(x_n) > \frac{۱}{۲}$. قرار دهید $Y = \{x_n | n \in B\}$. ثابت می‌کنیم Y در X چگال است. اگر چنین نباشد وجود دارد $x^* \in X \setminus \overline{Y}$. تابع $f : X \to \mathbb{R}$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$f(x) = \min(۱, \frac{d(x,\overline{Y})}{d(x^*,\overline{Y})}).$$

به‌راحتی می‌توان ثابت کرد که f پیوسته و کران‌دار است. به‌علاوه $f(x^*) = ۱$ و برای هر $x \in Y$، داریم $f(x) = ۰$.

اکنون نشان می‌دهیم که برای هر $f_n \in D$، $\rho(f, f_n) \geq \frac{۱}{۲}$. اگر $n \in B$ آن‌گاه $f_n(x_n) > \frac{۱}{۲}$ و $f(x_n) = ۰$ پس $\rho(f, f_n) > \frac{۱}{۲}$. اگر $n \notin B$ آن‌گاه برای هر $x \in X$، به‌ویژه x^*، داریم $f_n(x) \leq \frac{۱}{۲}$. پس با توجه به این‌که $f(x^*) = ۱$، نتیجه می‌شود که $\rho(f, f_n) \geq \frac{۱}{۲}$. پس $f \notin \overline{D}$ و این با چگال بودن D در تناقض است.

٦) فرض کنید $x_1, x_2, \ldots$ دنباله‌ای از اعداد متمایز در بازهٔ $[0, 1]$ باشد. برای هر عدد طبیعی n، با حذف مجموعهٔ نقاط $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ از این بازه، n زیربازه به دست می آید. اگر M_n را برابر با طول بزرگ‌ترین این زیربازه‌ها بگیریم، نشان دهید $\limsup\limits_{n\to\infty} nM_n \geq \frac{1}{\ln 2}$.

پاسخ:

کافی است نشان دهیم برای هر c که $c > \limsup nM_n$، داریم $c \geq \frac{1}{\ln 2}$. چنین c ای در نظر بگیرید. بنابراین برای n های به اندازهٔ کافی بزرگ خواهیم داشت $M_n < \dfrac{c}{n}$. فرض کنید $u_1 \leq \ldots \leq u_n$ برابر با طول قطعات ایجاد شده با حذف $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ از بازهٔ $[0, 1]$، به ترتیب از کوچک به بزرگ باشد.

توجه کنید که برای $k = 0, 1, \ldots, (n-1)$، نقاط $x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k-1}$ در حداکثر k تا از زیربازه‌های به طول $u_1, \ldots, u_n$ قرار خواهد گرفت و بنابراین با اضافه شدن آنها، از بین $k+1$ بازه به طول $u_{n-k}, \ldots, u_n$ حداقل یکی بی‌تغییر می‌ماند. بنابراین داریم $M_{n+k} \geq u_{n-k}$. با جمع این نامساوی‌ها داریم:

$$\begin{aligned} 1 = u_n + u_{n-1} + \cdots + u_1 \quad &\leq M_n + M_{n+1} + \cdots + M_{2n+1} \\ &< \tfrac{c}{n} + \tfrac{c}{n+1} + \cdots + \tfrac{c}{2n-1} \end{aligned}$$

اما $\ln 2 = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{2n-1}\right)$ بنابراین $c \geq \frac{1}{\ln 2}$

تبصره: کران $\dfrac{1}{\ln 2}$ بهترین کران ممکن است. یعنی می‌توان دنباله $a_1, a_2, a_3, \ldots$ را به گونه‌ای یافت که برای آن $\limsup nM_n = \frac{1}{\ln 2}$.