انجمن ریاضی ایران

سـؤالات نـوبت اول
سـی و پنـجمین مسـابقهٔ
ریاضی دانشـجویی کشور
جلسه‌اول ۹۰/۲/۱۴
مدت امتحان : ۴ ساعت

دانشگاه شهید بهشتی

---

۱) همهٔ اعداد طبیعی مانند k را مشخص کنید که به ازای آن‌ها گروهی متناهی مانند G موجود باشد که دقیقاً ۲۰۱۱ عضو از مرتبه k داشته باشد. (توجه کنید که برای هر چنین kای ارائهٔ گروهی متناهی که دقیقاً ۲۰۱۱ عضو از مرتبهٔ k داشته باشد لازم است.)

۲) فرض کنیم X یک فضای متریک همبند و فشرده و $p \in X$ یک نقطهٔ برشی آن باشد؛ یعنی، مجموعه‌های ناتهی U و V موجود باشند که $X \setminus \{p\} = U \cup V$ و $\overline{U} \cap V = U \cap \overline{V} = \phi$. ثابت کنید $U \cup \{p\}$ همبند و فشرده است.

۳) حلقه‌های R و S مفروض هستند که R میدان است و $R[x] \cong S[x]$. ثابت کنید $R \cong S$.

۴) وجوه یک ۱۳۹۰ وجهی همگی مثلث هستند. دو وجه این چندوجهی را همسایه گوییم اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. نشان دهید برای هر رنگ‌آمیزی وجه‌ها با سه رنگ همیشه دو وجه وجود دارند که همرنگ و دارای یک وجه همسایهٔ مشترک هستند.

۵) فضای $C(X)$ متشکل از تمام توابع حقیقی مقدار، پیوسته و کران‌دار بر فضای متریک (X,d) را همراه با متر

$$\rho(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}$$

در نظر می‌گیریم. ثابت کنید اگر $(C(X),\rho)$ زیرمجموعه‌ای چگال و شمارا داشته باشد آن‌گاه (X,d) نیز زیرمجموعه‌ای چگال و شمارا دارد.

۶) فرض کنید $x_۱, x_۲, \ldots$ دنباله‌ای از اعداد متمایز در بازهٔ $[۰, ۱]$ باشد. برای هر عدد طبیعی n، با حذف مجموعهٔ نقاط $\{x_۱, \ldots, x_{n-۱}\}$ از این بازه، n زیربازه به دست می‌آید. اگر M_n را برابر با طول بزرگ‌ترین این زیربازه‌ها بگیریم، نشان دهید $\limsup\limits_{n\to\infty} nM_n \geq \frac{۱}{\ln ۲}$.

موفق باشید.