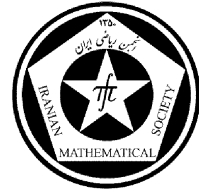




آزمون نوبت اول
سی و ششمین مسابقه
ریاضی دانشجویی کشور
جلسه اول ۹۱/۲/۲۶
مدت امتحان: ۳/۵ ساعت



دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

انجمن ریاضی ایران

- (۱) همه ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌های حقیقی مانند A را مشخص کنید که در شرط زیر صدق کنند:
اگر v بردار ستونی دلخواه باشد که تمام درایه‌های آن ناصفر است، آنگاه همه درایه‌های Av نیز ناصفر باشد.
- (۲) فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی باشد که به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ یک مجموعه باز U شامل x وجود داشته باشد که
تحدید f به U یک چندجمله‌ای است. ثابت کنید f یک چندجمله‌ای است.
- (۳) آهن فروشی تیر آهن‌های به طول 10 متر دارد. برای سه عدد حقیقی $0 < x_1, x_2, x_3 \leq 10$ می‌خواهیم با
برش این تیر آهن‌ها ۳ قطعه آهن به طول‌های x_1, x_2, x_3 و x_3 تهیه کنیم. توجه کنید جوش دادن قطعه‌های
تیر آهن امکان‌پذیر نیست. فرض کنید $f(x_1, x_2, x_3)$ حداقل تعداد تیر آهن‌های مورد نیاز باشد. مجموعه
نقاط ناپیوستگی تابع f را مشخص کنید.
- (۴) فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی و یک‌دار باشد. ثابت کنید برای هر $x \in R$ حداکثر یک عضو خودتوان $e \in R$
وجود دارد که $e + x$ معکوس‌پذیر و ex پوچ‌توان باشد.
- (۵) می‌دانیم $\mathbb{R}(x)$ (میدان توابع گویا با ضرایب حقیقی) با رابطه زیر به یک میدان مرتب تبدیل می‌شود: فرض
کنیم $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \dots + a_0}{b_m x^m + \dots + b_0}$ ، در این صورت تعریف می‌کنیم $\frac{P}{Q} < 0$ اگر و تنها اگر $\frac{a_n}{b_m} < 0$. می‌گوییم
دنباله $\{f_n\}$ به f همگرا است اگر برای هر $g \in \mathbb{R}(x)$ که $g < 0$ ، وجود داشته باشد $N > 0$ که اگر $n > N$
آنگاه $g < (f_n - f) < -g$. هم‌چنین می‌گوییم دنباله $\{f_n\}$ کوشی است اگر برای هر $g \in \mathbb{R}(x)$ که $g < 0$
وجود داشته باشد $N > 0$ که اگر $n, m > N$ آنگاه $-g < (f_n - f_m) < g$.
- الف. دنباله‌ای با جملات متمایز مثال بزنید که $<$ همگرا باشد.
ب. نشان دهید دنباله‌ای وجود دارد که $<$ کوشی است ولی $<$ همگرا نیست.
- (۶) P متوازی‌السطوحی است که مختصات همه رأس‌های آن صحیح است؛ فرض کنید A, B, C, D به ترتیب
تعداد نقاط با مختصات صحیح اکیداً داخل P ، روی وجوه ولی نه روی اضلاع P ، روی اضلاع ولی نه روی
رأس‌های P و روی رأس‌های P باشند. نشان دهید

$$P \text{ حجم} = A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{4}C + \frac{1}{8}D.$$

موفق باشید.