۷) فرض کنید $k > 1$ عددی حقیقی باشد. دنبالهٔ $\{a_n\}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{ka_n}{k^{n+1} - 1}, \quad n \geq 0.$$

قرار می‌دهیم $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$. (سری مذکور همواره همگرا است و تابع f در تمام $\mathbb{R}$ پیوسته است. نیازی به اثبات این مطالب نیست.)

الف) ثابت کنید برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم $f(kx) - f(x) = kxf(x)$.

ب) تمام ریشه‌های f را بیابید.

پاسخ:

الف)

$$\begin{aligned} f(kx) - f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (kx)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (k^n - 1) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} k a_{n-1} x^n \\ &= kx \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= kxf(x) \end{aligned}$$

که تساوی سوم رابطه بازگشتی برای a_n است و این مطلب که $k^0 - 1 = 0$.

ب) با توجه به قسمت (الف)

$$f(kx) = f(x)(1 + kx) \qquad (*)$$

اگر قرار دهیم $x = -\frac{1}{k}$ عبارت داخل پرانتز در سمت راست تساوی برابر صفر خواهد بود و در نتیجه $f(-1) = f(x \times -\frac{1}{k}) = 0$. به وضوح تساوی $(*)$ نتیجه می‌دهد اگر x ریشه تابع باشد، kx نیز هست و در نتیجه $-k^n$ برای nهای مختلف ریشهٔ f هستند.

ادعا می‌کنیم f ریشهٔ دیگری ندارد. اگر x ریشه‌ای به جز ریشه‌های ذکر شده باشد، $\frac{x_1}{k^n}$ برای هر n طبیعی نیز ریشه است. زیرا عبارت داخل پرانتز در سمت راست معادله هیچ وقت صفر نمی‌شود و در نتیجه هر عددی که ریشه f باشد، $\frac{1}{k}$ آن نیز ریشه f است. اما چون $k > 1$، $\frac{x_1}{k^n}$ وقتی n به بینهایت میل کند به صفر میل می‌کند و از پیوستگی f، باید $f(0) = 0$. اما $f(0) = a_0 = 1 \neq 0$. پس f ریشه‌ای به جز موارد ذکر شده ندارد.

۸) همهٔ ماتریس‌های ۲×۲ با درایه‌های حقیقی مانند A را مشخص کنید به طوری که $\det(A) = ۱$ و $A^{۲} = I$.

پاسخ:

راه حل اول :

با توجه به اینکه $A^{۲} = I$، چند جمله‌ای مینیمال A، $X^{۲} - ۱$ را عاد می‌کند. بنابراین چند جمله‌ای مینیمال A بطور کامل روی $\mathbb{R}$ تجزیه می‌شود و ریشه تکراری ندارد بنابراین A قطری پذیر است. یعنی ماتریس وارون پذیر P روی $\mathbb{R}$ وجود دارد به طوری که

$$PAP^{-۱} = \begin{bmatrix} \alpha & ۰ \\ ۰ & \beta \end{bmatrix}$$

که $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

از شرط $A^{۲} = I$ نتیجه می‌شود $\alpha, \beta \in \{۱, -۱\}$ و از شرط $\det A = ۱$ نتیجه می‌شود α, β یا هر دو برابر با ۱ هستند یا هردو برابر با -۱. بنابراین ماتریس A دو انتخاب دارد: $A = I$ یا $A = -I$.

راه حل دوم :

فرض کنیم $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. از آنجا که در چندجمله‌ای مشخصه خود صدق می‌کند داریم

$$A^{۲} - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I = ۰.$$

یعنی $\mathrm{tr}(A)A = (۱ + \det(A))I$ و پس از جایگذاری به دست می‌آید:

$$(a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ + ad - bc & ۰ \\ ۰ & ۱ + ad - bc \end{pmatrix} \qquad (*)$$

در نتیجه $a^{۲} + bc = ۱ = d^{۲} + bc$ پس $a = \pm d$. اما حالت $a = -d$ ممکن نیست. چرا که به همراه $\det(A) = ۱$ نتیجه می‌دهد $a^{۲} + bc = -۱$ که با $a^{۲} + bc = ۱$ تناقض دارد. پس $a = d$ و دوباره از رابطه $(*)$ نتیجه می‌شود $۲ad = ۱ + ad - bc$ یعنی $ad + bc = ۱$ و با توجه به رابطه $ad - bc = \det(A) = ۱$ نتیجه می‌گیریم $ad = ۱$. از طرف دیگر $(*)$ نتیجه می‌دهد $bd = dc = ۰$ که با ضرب طرفین در a بدست می‌آید $b = c = ۰$ پس $A = \begin{pmatrix} a & ۰ \\ ۰ & a \end{pmatrix}$ و چون $A^{۲} = I$ پس $a^{۲} = ۱$ یعنی $a = \pm ۱$. پس برای A فقط دو انتخاب وجود دارد؛ یکی $A = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$ و دیگری $A = \begin{pmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}$.

۹) فرض کنید تابع پیوستهٔ $f:\mathbb{R}^{۲}\to\mathbb{R}$ از پایین کراندار باشد و برای هر $x,y\in\mathbb{R}^{۲}$ و هر $۰\leq\lambda\leq ۱$ داشته باشیم

$$f(\lambda x+(۱-\lambda)y)\leq\lambda f(x)+(۱-\lambda)f(y)-\lambda(۱-\lambda)||x-y||^{۲}.$$

ثابت کنید f مینیمم خود را در یک و فقط یک نقطه می‌گیرد.

پاسخ:

چون f از پایین کراندار است پس $\alpha=\inf_{x\in\mathbb{R}^{۲}}f(x)$ یک عدد حقیقی است. دنبالهٔ $\{x_n\}\subseteq\mathbb{R}^{۲}$ موجود است که $\lim_{n\to+\infty}f(x_n)=\alpha$.

برای هر $n,m\geq ۱$ قرار دهید $x=x_n,\quad y=x_m,\quad \lambda=\frac{۱}{۲}$.

$$\alpha\leq f(\frac{x_n+x_m}{۲})\leq\frac{۱}{۲}f(x_n)+\frac{۱}{۲}f(x_m)-\frac{۱}{۴}\|x_n-x_m\|^{۲}$$

پس $\|x_n-x_m\|^{۲}\leq\frac{۱}{۲}(f(x_n)-\alpha)+\frac{۱}{۲}(f(x_m)-\alpha)$ و با میل دادن m و n به سمت $+\infty$ نتیجه می‌شود دنبالهٔ $\{x_n\}$ کشی است. چون $\mathbb{R}^{۲}$ کامل است پس $x\in\mathbb{R}^{۲}$ موجود است که $\lim_{n\to+\infty}x_n=x$. ولی f پیوسته است (هر تابع محدب روی $\mathbb{R}^{۲}$ پیوسته است). پس

$$\alpha=\lim_{n\to+\infty}f(x_n)=f(x)$$

یعنی f مینیمم خود را در x می‌گیرد.

حال اگر f در x' نیز مینیمم خود را اتخاذ کند آنگاه

$$\alpha\leq f(\frac{x+x'}{۲})\leq\frac{۱}{۲}f(x)+\frac{۱}{۲}f(x')-\frac{۱}{۴}\|x-x'\|^{۲}=\alpha-\frac{۱}{۴}\|x-x'\|^{۲}$$

پس $\frac{۱}{۴}\|x-x'\|^{۲}\leq ۰$ یعنی $x=x'$.

دانشگاه سمنان

پاسخ آزمون نـــوبت دوم
ســی و هفتمین مســـابقهٔ
ریاضی دانشـــجویی کشور
جلسهٔ دوم ۹۲/۲/۲۵

انجمن ریاضی ایران

۱۰) فرض کنید زیرمجموعهٔ باز U از $\mathbb{C}$ شامل قرص $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq ۱\}$ باشد. ثابت کنید اگر $f : U \to \mathbb{C}$ تابعی تحلیلی باشد و برای هر $x \in [-۱, ۱]$ داشته باشیم $|f(x)| \leq ۱$ آنگاه

$$\left| \int_{۰}^{۲\pi} f(e^{it})\overline{f(e^{-it})}dt \right| \geq ۴.$$

پاسخ:

چون f تحلیلی است پس تابع $\overline{f(\bar{z})}$ نیز تحلیلی است.

باتغییرمتغیر $z = e^{it}$ داریم $ie^{it}dt = dz$ پس $dt = \frac{dz}{iz}$. بنابراین اگر γ دایره واحد به مرکز مبدا باشد بنا به فرمول انتگرال کشی داریم

$$\int_{۰}^{۲\pi} f(e^{it})\overline{f(e^{-it})}dt = \int_{\gamma} \frac{f(z)\overline{f(\overline{z})}}{iz}dz = \frac{۲\pi i}{i} f(۰)\overline{f(۰)} = ۲\pi|f(۰)|^{۲} \geq ۲\pi \geq ۴$$

۱۱) فرض کنید X یک مجموعهٔ متناهی n عضوی و S خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد به طوری که برای هر A و B در S داریم $A \cup B \in S$. همچنین فرض کنید برای هر دو عضو متمایز X، عضوی از S وجود دارد که شامل دقیقاً یکی از آن‌ها است. ثابت کنید

$$\sum_{A \in S} |A| \geq \frac{n(n-1)}{2}.$$

پاسخ:

ابتدا گزارهٔ زیر را اثبات می‌کنیم.
اگر $y \subseteq X$ و $|Y| \geq 2$، آنگاه عضوی از S وجود دارد که شامل تمام اعضای Y به جز دقیقاً یکی از آنها است.
اثبات. به استقراء روی $|Y|$ انجام می‌شود. برای $|Y| = 2$ با توجه به خاصیت S نتیجه روشن است.برای $|Y| > 2$، عضوی از Y مانند y_1 را در نظر می‌گیریم. بنا بر فرض استقراء، عضوی مانند A از S وجود دارد که شامل تمام اعضای $Y - \{y_1\}$ به جز عضوی مانند y_2 است. اگر $y_1 \in A$ باشد همان عضو مطلوب S است. اگر $y_1 \notin A$، عضوی از S مانند B وجود دارد که شامل دقیقاً یکی از y_1 یا y_2 می‌باشد. اکنون عضو $A \cup B$ از S شامل تمام اعضای Y به جز دقیقاً یکی از y_1 یا y_2 خواهد بود.
حال اگر گزارهٔ فوق را برای $X = A_0$ به کار ببریم، عضوی از S مانند A_1 وجود دارد که شامل دقیقاً یکی از اعضای X نیست که نام آن را x_1 می‌گذاریم. برای $i < n-1$، فرض کنید $A_1, \ldots, A_i$ و $x_1, \ldots, x_i$ چنان انتخاب شده باشد که A_i شامل تمام اعضای A_{i-1} به جز x_i باشد. حال A_{i+1} را طوری از S انتخاب می‌کنیم که شامل تمام اعضای A_i به جز یکی از آنها باشد که نام آن را x_{i+1} می‌گذاریم. اعضای $A_1, \ldots, A_{n-1}$ که به این صورت انتخاب می‌شوند، متمایزند زیرا برای $1 < i < n$ داریم $x_i \notin A_i$ اما $x_i \in \cap_{j<i} A_j$. همچنین $|A_i| \geq n-i$ بنابراین داریم

$$\sum_{A \in S} |A| \geq |A_1| + \cdots + |A_{n-1}| \geq n-1+\cdots+2+1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

۱۲) فرض کنید G یک گروه غیرآبلی متناهی باشد. نشان دهید اعضای $g, h, a \in G$ وجود دارند به طوری که $g \neq h$ ، $h = aga^{-1}$ و $gh = hg$.

پاسخ:

فرض کنید گروه G مثال نقضی برای حکم با کمترین تعداد عضو باشد. نتیجه می‌شود همهٔ زیرگروه‌های ماکسیمال G آبلی هستند. نشان می‌دهیم هر زیرگروه ماکسیمال M از G غیر نرمال است؛ در واقع اگر M نرمال باشد، با درنظر گرفتن عضو $a \in G\backslash M$ نتیجه می‌شود $G = \langle M, a\rangle$ یعنی گروه تولید شده به‌وسیلهٔ a و M برابر با G می‌شود. حال عضو $g \in M$ را در نظر می‌گیریم. با توجه به این که فرض کرده‌ایم M نرمال است، نتیجه می‌شود $aga^{-1} \in M$ اگر $aga^{-1} \neq g$ با قرار دادن با قرار دادن $h := aga^{-1}$ نتیجه می‌شود عناصر با خواص ذکر شده وجود دارند که متناقض با فرض خلف است. اگر برای هر $g \in M$، $aga^{-1} = g$ در این صورت $G = \langle M, a\rangle$ آبلی می‌شود که متناقض با فرض است. پس هر زیرگروه ماکسیمال از G غیر نرمال است.

نشان می‌دهیم $Z = Z(G)$ (مرکز G) زیرمجموعهٔ هر زیرگروه ماکسیمال M از G است در غیر این صورت خواهیم داشت $ZM = G$ و G آبلی می‌شود که متناقض با فرض است. از اینجا نتیجه می‌شود برای هر دو زیرگروه ماکسیمال متمایز M و M' از G داریم $M \cap M' = Z$؛ در واقع هر عضو $M \cap M'$ با توجه به آبلی بودن M و M' با همهٔ عناصر M و M' جابجا می‌شود، بنابراین با هر عضو $G = \langle M, M'\rangle$ جابجا می‌شود پس در مرکز G قرار دارد.

حال گروه $H = G/Z$ را در نظر می‌گیریم. دقت کنید که H گروه از مرتبهٔ اول نیست پس دارای زیرگروه ماکسیمال غیربدیهی است. با توجه به مطالب بالا اشتراک هر دو زیرگروه ماکسیمال متمایز H بدیهی است. فرض کنید $N_1, \ldots, N_s$ همهٔ زیرگروه‌های ماکسیمال و نامزدوج از H باشند و قرار می‌دهیم

$$h = |H|, \quad h_i = |N_i|, \quad i = 1, \ldots, s$$

تعداد زیرگروه‌های ماکسیمال از H که با N_i مزدوج هستند برابر با h/h_i است و تعداد اعضای غیرهمانی در هر زیرگروه مزدوج با N_i برابر با $h_i - 1$ است. بنابر این با شمارش اعضای H به صورت اجتماع زیرگروه‌های ماکسیمال به رابطهٔ

$$h = 1 + \sum_{i=1}^{s} h(h_i - 1)/h_i \qquad (*)$$

می‌رسیم. ادعا می‌کنیم $s = 1$. در واقع اگر $s \geq 2$ رابطه $(*)$ به تناقض زیر منجر می‌شود

$$h \geq 1 + h\left(\frac{h_1 - 1}{h_1} + \frac{h_2 - 1}{h_2}\right) \geq 1 + h$$

بنابراین $s = 1$، پس

$$h = 1 + h(h_1 - 1)/h_1$$

که نتیجه می‌دهد $h = h_1$ که تناقض است.