دانشگاه سمنان

آزمــون نــوبت دوم

ســی و هفتمین مســـابقهٔ

ریاضی دانشـــجویی کشور

جلسهٔ دوم ۹۲/۲/۲۵

مدت امتحان: ۴ ساعت

انجمن ریاضی ایران

---

۱) فرض کنید $k > 1$ عددی حقیقی باشد. دنبالهٔ $\{a_n\}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{ka_n}{k^{n+1} - 1}, \quad n \geq 0$$

قرار می‌دهیم $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$. (سری تعریف کنندهٔ f همگرا است و تابع f در تمام $\mathbb{R}$ پیوسته است. نیازی به اثبات این مطالب نیست).

الف) ثابت کنید برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم $f(kx) - f(x) = kxf(x)$.

ب) تمام ریشه‌های f را بیابید.

۲) همهٔ ماتریس‌های 2×2 با درایه‌های حقیقی مانند A را مشخص کنید به طوری که $\det(A) = 1$ و $A^2 = I$.

۳) فرض کنید تابع پیوسته $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ از پایین کراندار باشد و برای هر $x, y \in \mathbb{R}^2$ و هر $0 \leq \lambda \leq 1$ داشته باشیم

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - \lambda(1 - \lambda)||x - y||^2$$

ثابت کنید f مینیمم خود را در یک و فقط یک نقطه می‌گیرد.

۴) فرض کنید مجموعهٔ باز $U \subset \mathbb{C}$ شامل قرص $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ باشد. ثابت کنید اگر $f : U \to \mathbb{C}$ تابعی تحلیلی باشد و برای هر $x \in [-1, 1]$ داشته باشیم $|f(x)| \geq 1$ آنگاه

$$\left| \int_0^{2\pi} f(e^{it})\overline{f(e^{-it})} \right| \geq 4$$

۵) فرض کنید X یک مجموعهٔ متناهی n عضوی باشد و S خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد به‌طوری‌که برای هر A و B در S داریم $A \cup B \in S$. هم‌چنین فرض کنید برای هر دو عضو متمایز X، عضوی از S وجود دارد که شامل دقیقاً یکی از آن‌ها است. ثابت کنید

$$\sum_{A \in S} |A| \geq \frac{n(n-1)}{2}.$$

۶) فرض کنید G یک گروه غیرآبلی متناهی باشد. نشان دهید اعضای $g, h, a \in G$ وجود دارند به طوری که $g \neq h$، $h = aga^{-1}$ و $gh = hg$.

موفق باشید.