دانشگاه سمنان

پاسخ آزمون نوبت اول
سی و هفتمین مسابقهٔ
ریاضی دانشجویی کشور
جلسهٔ اول ۹۲/۲/۲۴

انجمن ریاضی ایران

---

۱) فرض کنید متریک d روی $\mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف شده باشد.

$$d(x,y)=\begin{cases} 0 & x=y \\ \max\{|x|,|y|\} & x\neq y \end{cases}$$

ثابت کنید $\mathbb{Q}$ در $(\mathbb{R}\,,d)$ بسته است و باز نیست. (نیازی به اثبات متریک بودن d نیست.)

پاسخ:

برای هر $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ قرار دهید $\varepsilon=\frac{|x|}{2}$. در این صورت

$$B_\varepsilon(x)=\{y\in\mathbb{R}:d(x,y)<\frac{|x|}{2}\}=\{x\}.$$

و برای هر $\varepsilon>0$

$$B_\varepsilon(0)=\{y\in\mathbb{R}:d(y,0)<\varepsilon\}=(-\varepsilon,\varepsilon).$$

چون $0\notin\mathbb{Q}^c$ پس $\mathbb{Q}^c=\bigcup\limits_{x\in\mathbb{Q}^c}\{x\}$ باز است یعنی $\mathbb{Q}$ بسته است.
از طرفی چون $0\in\mathbb{Q}$ ولی برای هر $\varepsilon>0$ داریم $(-\varepsilon,\varepsilon)\nsubseteq\mathbb{Q}$. پس $\mathbb{Q}$ باز نیست.

۲) فرض کنید G یک گروه متناهی از مرتبهٔ فرد باشد. ثابت کنید عددی طبیعی چون k وجود دارد که به ازای هر $x \in G$، $x^{۲^k} = x$.

پاسخ:

چون $|G| = n$ پس برای هر $x \in G$،

$$x^n = e \qquad (*)$$

از طرفی بنا به قضیهٔ اویلر اگر a و n دو عدد طبیعی باشند که $(a,n) = ۱$ آنگاه $a^{\varphi(n)} \overset{n}{\equiv} ۱$ که در آن φ تابع اویلر است. حال چون n فرد است لذا $(۲,n) = ۱$ پس بنا به قضیهٔ اویلر $۲^{\varphi(n)} \overset{n}{\equiv} ۱$ و لذا $n | ۲^{\varphi(n)} - ۱$ پس بنا به $(*)$، برای هر $x \in G$ داریم $x^{۲^{\varphi(n)} - ۱} = e$ و لذا برای هر x ، $x^{۲^{\varphi(n)}} = x$.

۳) معادلهٔ $x^2 - kxy + y^2 + x = 0$ را در مجموعهٔ اعداد طبیعی در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید این معادله برای $k = 3$ دارای جواب است.

ب) ثابت کنید این معادله برای تعداد نامتناهی عدد طبیعی و فرد k دارای جواب نیست.

پاسخ:

الف ـ برای $k = 3$ به راحتی دیده می‌شود که $x = y = 1$ جواب معادله است.

ب ـ قرار می‌دهیم (x,y) ب.م.م $=d$. پس اعداد m و n طبیعی وجود دارد که $(m,n) = 1$ ب.م.م و $y = nd$ و $x = md$.

با قرار دادن در معادله به دست می‌آوریم

$$m^2d^2 - kmnd^2 + n^2d^2 + md = 0$$

که ایجاب می‌کند $d|m$ یعنی عدد طبیعی a وجود دارد که $m = ad$.

بنابراین

$$a^2d^4 - kand^3 + n^2d^2 + ad^2 = 0$$

پس از حذف d^2 از این معادله نتیجه می‌گیریم که $a|n^2$.

اما $(m,n) = 1$ ب.م.م و همچنین $a|m$ که ایجاب می‌کند $a = 1$.

اکنون معادله به صورت زیر در می‌آید.

$$d^2 - knd + n^2 + 1 = 0$$

برای این که معادلهٔ اخیر دارای جواب‌های طبیعی باشد باید

$$\Delta = k^2n^2 - 4(n^2 + 1)$$

مربع کاملی مانند t^2 باشد یعنی

$$(k^2 - 4)n^2 = t^2 + 4$$

حال اگر k عدد فردی باشد که بر ۳ بخش‌پذیر نیست خواهیم داشت

$$(k^2 - 4)n^2 \equiv 0 \pmod 3$$

اما $t^2 + 4 \equiv 0 \pmod 3$ امکان ندارد، زیرا

$$t^2 + 4 \equiv t^2 + 1 \equiv 1 \text{ یا } 2 \pmod 3$$

بنابراین برای تمام kهای فردی که بر ۳ بخش‌پذیر نیست معادله جواب‌های طبیعی ندارد.

۴) فرض کنید R یک حلقه جابجایی و متناهی باشد به طوری که هر عضو R را بتوان به صورت حاصلضرب دو عضو از R نوشت. ثابت کنید حلقهٔ R یکدار است.

پاسخ:

فرض می‌کنیم $a \in R$ و a را به صورت ضرب دو عضو می‌نویسیم سپس هر یک از آن دو عضو را هم به صورت ضرب دو عضو دیگر R نوشته و این فرآیند را ادامه می‌دهیم. بنابراین عضو a را می‌توان به صورت حاصلضرب ۲ عضو، سپس حاصلضرب ۴ عضو، حاصلضرب ۸ عضو و الی آخر نوشت. از آنجا که R متناهی است، عضوی چون $y \in R$ و اعداد طبیعی $n_1 < n_2 < n_3 \cdots$ موجودند به طوری که

$$a = y^{n_1} b_1, \quad a = y^{n_2} b_2, \quad a = y^{n_3} b_3, \dots$$

از طرفی چون مجموعهٔ $\{y^i | i > 1\} \subseteq R$ متناهی است پس $i < j$ موجود است که $y^i = y^j$. حال $m > i$ را چنان می‌گیریم که $a = y^m b$. دراین صورت

$$a = y^m b = y^i y^{m-i} b = y^j y^{m-i} b = y^{j-i} y^m b = y^{j-i} a$$

یعنی برای هر $a \in R$ عضو t_a موجود است به طوری که $a = t_a a$. حال توجه داریم که برای عناصر دلخواه a_1 و a_2 با قرار دادن $t = t_{a_1} + t_{a_2} - t_{a_1} t_{a_2}$ داریم $t a_1 = a_1$ و $t a_2 = a_2$. حال چون R متناهی است با ادامهٔ همین روند عضو $t \in R$ پیدا می‌شود که به ازای هر $a \in R$، $ta = a$.

۵) فرض کنید (X,d) یک فضای متریک فشرده، همبند و ناتهی باشد. ثابت کنید عددی مانند β موجود است که برای هر $n \geq ۱$ و هر $z_۱, \ldots, z_n \in X$ معادلهٔ $\frac{۱}{n}(d(x,z_۱) + \cdots + d(x,z_n)) = \beta$ در X جواب دارد.

پاسخ:

مجموعهٔ $A = \{(z_۱, z_۲, \ldots, z_n) | \quad z_۱, z_۲, \ldots, z_n \in X, \quad n \geq ۱\}$ را درنظر بگیرید. برای هر $F = (z_۱, \ldots, z_n) \in A$ تابع $\varphi_F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطه‌ی $\varphi_F(x) = \dfrac{۱}{n}(d(x,z_۱) + \ldots + d(x,z_n))$ تعریف می‌کنیم. چون φ_F پیوسته است پس برد آن یک بازهٔ بسته، کراندار و ناتهی مانند $[a_F, b_F]$ است.

ثابت می‌کنیم $\bigcap\limits_{F\in A} [a_F, b_F] \neq \phi$. در این صورت برای هر $\beta \in \bigcap\limits_{F\in A} [a_F, b_F]$ حکم برقرار است.

ادعا می‌کنیم برای هر $F = (z_۱, \ldots, z_n) \in A$ و $G = (y_۱, \ldots, y_m) \in A$ داریم $a_F \leq b_G$. چون

$$a_F \leq \frac{۱}{n}(d(y_\ell, z_۱) + \ldots + d(y_\ell, z_n)), \quad (۱ \leq \ell \leq m)$$

$$b_F \leq \frac{۱}{m}(d(z_k, y_۱) + \ldots + d(z_k, y_m)), \quad (۱ \leq k \leq n)$$

کافی است برای یک $۱ \leq k \leq n$ و یک $۱ \leq \ell \leq m$ داشته باشیم

$$\frac{۱}{m}(d(z_k, y_۱) + \ldots + d(z_k, y_m)) \geq \frac{۱}{n}(d(y_\ell, z_۱) + \ldots + d(y_\ell, z_n)).$$

در غیر این صورت برای هر $۱ \leq k \leq n$ و هر $۱ \leq \ell \leq m$ باید داشته باشیم

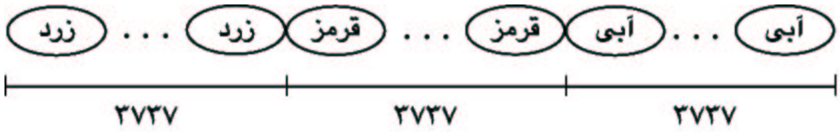
$$\frac{۱}{m}(d(z_k, y_۱) + \ldots + d(z_k, y_m)) < \frac{۱}{n}(d(y_\ell, z_۱) + \ldots + d(y_\ell, z_n)).$$

پس

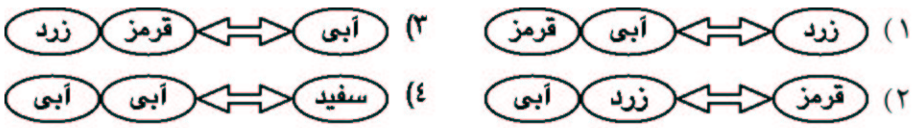
$$\sum_{k=۱}^{n} \sum_{\ell=۱}^{m} d(y_\ell, z_k) > \sum_{\ell=۱}^{m} \sum_{k=۱}^{n} d(z_k, y_\ell)$$

که تناقض است (چون متریک متقارن است و در نتیجه طرفین رابطه بالا باید برابر باشند).

٦) در یک بازی با مهره‌های سفید، قرمز، آبی و زرد، ۳۷۳۷ مهره قرمز، ۳۷۳۷ مهره آبی و ۳۷۳۷ مهره زرد به صورت زیر روی یک سطر چیده شده‌اند.



در هر حرکت می‌توان دو مهرهٔ سفید در محل‌های دلخواه بین مهره‌ها اضافه یا کم کرد. سایر حرکات بازی به صورت زیر است.



مثلاً حرکت اول یعنی اگر اولین مهرهٔ سمت راست یک مهرهٔ قرمز، یک مهرهٔ آبی باشد، با حذف این دو مهره می‌توان مهره‌ای زرد جایگزین کرد یا برعکس، یعنی به جای یک مهرهٔ زرد، دو مهره در کنار هم قرار داد که سمت راستی آبی و سمت چپی قرمز باشد. آیا از آرایش اولیه می‌توان به حالتی رسید که هیچ مهره‌ای باقی نماند؟

پاسخ:

فرض کنید $Q_۸$ گروه کواترنیون‌های ۸ عضوی باشد. اگر به جای هر مهرهٔ قرمز i، آبی j، زرد k و سفید -۱ گذاشت به راحتی می‌توان دید آرایش اولیه نظیر حالت

$$k^{۳۷۳۷}\quad j^{۳۷۳۷}\quad i^{۳۷۳۷} = kji = i^{۲} = -۱$$

است و حالتی که هیچ مهره‌ای نباشد نظیر ۱ است. هم‌چنین طبق قواعد بازی حاصلضرب اولیه در $Q_۸$ بعد از انجام هر حرکت ثابت می‌ماند زیرا

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j, \quad j^{۲} = -۱$$

و در نتیجه نمی‌توان به حالت هیچ مهره رسید.