۱) فرض کنید X یک مجموعه‌ی n عضوی بوده و $P(X)$ مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های X باشد. تعداد توابع $f: P(X) \to \{0, 1\}$ را تعیین کنید که $f(\emptyset) = 0$ و برای هر $A, B \in P(X)$،

$$f(A) + f(B) = f(A \cup B) + f(A \cap B)$$

پاسخ:

فرض کنیم f چنین تابعی باشد. اگر برای هر $x \in X$ ، $f(\{x\}) = 0$ ، آنگاه برای هر $A \in P(X)$ خواهیم داشت $f(A) = 0$. زیرا در غیر اینصورت فرض کنید A مجموعه‌ای با کمترین تعداد عضو ممکن باشد که $f(A) \neq 0$ و $y \in A$. داریم

$$f(A - \{y\}) + f(\{y\}) = f(A)$$

و در نتیجه $f(A - \{y\}) = 1$ که با انتخاب A در تناقض است.
بنابراین در این حالت f تابع ثابت صفر است.
اکنون فرض کنیم برای یک $a \in X$ داشته باشیم $f(\{a\}) = 1$. اگر $b \in X$ و $b \neq a$ آنگاه

$$1 \geq f(\{a, b\}) = f(\{a\}) + f(\{b\}) = 1 + f(\{b\})$$

پس $f(\{b\}) = 0$.
اکنون ادعا می‌کنیم که تابع f بصورت زیر است.

$$f(A) = \begin{cases} 1 & a \in A \\ 0 & a \notin A \end{cases}$$

اگر $a \in A$ آنگاه

$$f(A) = f(A - \{a\}) + f(\{a\}) \geq 1$$

پس $f(A) = 1$.
اگر $a \notin A$ آنگاه

$$1 \geq f(A \cup \{a\}) = f(A) + f(\{a\}) = f(A) + 1$$

پس $f(A) = 0$. با عضوگیری می‌توان به سادگی مشاهده کرد که تابع f با ضابطهٔ فوق در شرط مسأله صدق می‌کند. پس علاوه بر تابع ثابت صفر، برای هر $a \in X$ یک تابع اینچنینی وجود دارد. یعنی تعداد $n + 1$ تابع با این خاصیت موجود است.

۲) فرض کنید f روی گوی بازی به مرکز a تحلیلی باشد و γ یک خم ساده بسته در این گوی باشد که از a نمی‌گذرد. نشان دهید تابعی تحلیلی مانند g روی این گوی وجود دارد که برای هر عدد طبیعی n

$$\int_\gamma \frac{g(z)}{(z-a)^n}dz = \int_\gamma \frac{\sqrt{n}f(z)}{(z-a)^n}dz$$

پاسخ:

فرض کنید $B_r(a)$ گوی مورد نظر باشد. اگر نقطه‌ی a خارج از خم γ باشد، هر تابع تحلیلی g پاسخ مسأله است زیرا هر دو طرف معادله برابر صفر است.

اگر نقطه‌ی a درون خم γ باشد، با توجه به فرمول انتگرالی کشی و بسط تیلور تابع f داریم

$$f(z) = \sum_{x=۰}^{+\infty} a_n(z-a)^n \ , \ \forall z \in B_r(a)$$

و

$$a_n = \frac{۱}{۲\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+۱}} \ , \ n = ۰, ۱, ۲, \dots$$

کافیست قرار دهیم $g(z) = \sum_{n=۰}^{+\infty} a_n\sqrt{n+۱}(z-a)^n$، چون $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\sqrt{n+۱}} = ۱$ پس شعاع همگرایی این سری نیز حداقل برابر r است. یعنی g روی گوی $B_r(a)$ تحلیلی است و برای هر n

$$\int_\gamma \frac{g(z)}{(z-a)^n}dz = ۲\pi i \ a_{n-۱}\sqrt{n} = \int_\gamma \frac{\sqrt{n}f(z)}{(z-a)^n}dz$$

۳) فرض کنید R حلقه‌ای یکدار و $\mathbb{C}$ حلقه‌ی اعداد مختلط باشد. فرض کنید $f,g : R \to \mathbb{C}$ دو همریختی حلقه‌ای باشند به طوری که به ازای هر $r \in R$، $|f(r)| = |g(r)|$. ثابت کنید $f = g$ یا $f = \overline{g}$.
(تابع T از حلقه A به حلقه B همریختی نامیده می‌شود اگر برای هر $x, y \in A$، $T(x+y) = T(x) + T(y)$ و $T(xy) = T(x)T(y)$.)

پاسخ: فرض می‌کنیم $f \neq g$. اگر $f = ۰$ آنگاه به ازای هر $r \in R$ داریم $|g(r)| = |f(r)| = ۰$ و لذا $g = ۰$ که تناقض است چون $f \neq g$. پس $f \neq ۰$ و به طریق مشابه $g \neq ۰$. ادعا می‌کنیم

$$f(۱) = g(۱) = ۱$$

زیرا

$$f(۱) = f(۱ \times ۱) = f(۱)^۲ \Rightarrow f(۱)(۱ - f(۱)) = ۰ \Rightarrow f(۱) = ۰ \text{ یا } f(۱) = ۱$$

اگر $f(۱) = ۰$ آنگاه $f(r) = ۰$ به ازای هر $r \in R$ و لذا $f = ۰$ که تناقض است. پس $f(۱) = g(۱) = ۱$.
حال به ازای هر $r \in R$ داریم

$$\begin{cases} |f(r)| = |g(r)| \\ |f(r+۱)| = |g(r+۱)| \end{cases} \Rightarrow |f(r) + ۱| = |g(r) + ۱|$$
$$\Rightarrow |f(r) + ۱|^۲ - |f(r)|^۲ = |g(r) + ۱|^۲ - |g(r)|^۲$$
$$\Rightarrow ۲\ Re(f(r)) = ۲ Re(g(r))$$

در نتیجه به ازای هر $r \in R$، $Re(f(r)) = Re(g(r))$.
با توجه به اینکه $|f(r)| = |g(r)|$ نتیجه می‌گیریم که به ازای هر $r \in R$، $f(r) = g(r)$ یا $f(r) = \overline{g(r)}$.
حال اگر قرار دهیم

$$A = \{r \in R \mid f(r) = g(r)\}$$
$$B = \{r \in R \mid f(r) = \overline{g(r)}\}$$

آنگاه A, B (به وضوح) زیرگروه‌های $(R, +)$ بوده و $R = A \cup B$ و لذا $A = R$ یا $B = R$. اگر $A = R$ آنگاه $f = g$ که تناقض است پس $B = R$ و لذا $f = \overline{g}$.

۴) فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد. تابع پیوسته‌ی $f : X \to \mathbb{R}$ را «خوب» گوییم هرگاه برای هر تابع پیوسته‌ی $g : X \to \mathbb{R}$ مجموعه‌ی $\{x \in X : f(x)g(x) = ۱\}$ فشرده باشد. نشان دهید مجموع دو تابع خوب، خوب است.

پاسخ: فرض کنید $f_۱$ و $f_۲$ دو تابع خوب و g یک تابع پیوسته باشد. چون

$$\{x \in X : (f_۱(x) + f_۲(x))g(x) = ۰\} \subseteq \{x \in X : f_۱(x)g(x) \geq \frac{۱}{۲}\} \cup \{x \in X : f_۲(x)g(x) \geq \frac{۱}{۲}\}$$

و مجموعه‌ی سمت چپ یک مجموعه‌ی بسته است، کافی است ثابت کنیم برای هر تابع خوب f مجموعه‌ی $\{x \in X : f(x)g(x) \geq \frac{۱}{۲}\}$ فشرده است.

فرض کنید

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{۱}{t} & t \geq \frac{۱}{۲} \\ ۲ & t < \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

در اینصورت $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ پیوسته است و $\varphi(t)t = ۱$ اگر و تنها اگر $\frac{۱}{۲} \leq t$. اکنون

$$\{x \in X : f(x)g(x) \geq \frac{۱}{۲}\} = \{x \in X : \varphi(f(x)g(x))g(x)f(x) = ۱\}$$

چون $\varphi(fg)g$ پیوسته و f خوب است پس این مجموعه فشرده است.

اکنون اثبات کامل است.

۵) فرض کنید $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد به طوری که

$$\int_0^\pi f(x)\sin x dx=\int_0^\pi f(x)\cos x dx=0$$

ثابت کنید f دارای حداقل دو ریشه در $[0,\pi]$ است.

پاسخ:

چون تابع $\sin x$ بر فاصلهٔ $(0,\pi)$ مثبت است و $\int_0^\pi f(x)\sin x dx=0$، لازم می‌آید که f ریشه ای مانند x_0 در این فاصله داشته باشد.

اکنون داریم

$$\int_0^\pi f(x)\sin(x-x_0)dx=\int_0^\pi f(x)(\sin x\cos x_0-\cos x\sin x_0)dx=0$$

و در نتیجه $\int_0^{x_0} f(x)(\sin(x-x_0)+\int_{x_0}^\pi f(x)\sin(x-x_0)=\int_0^\pi f(x)\sin(x-x_0)dx=0$

حال اگر x_0 تنها ریشه‌ی f در فاصله‌ی $[0,\pi]$ باشد

الف) اگر f در قبل و بعد از x_0 همواره مثبت باشد پس $\int_0^\pi f(x)\sin x dx>0$؛

ب) اگر f در قبل و بعد از x_0 همواره منفی باشد پس $\int_0^\pi f(x)\sin x dx<0$؛

ج) اگر f قبل از x_0 منفی و بعد از x_0 مثبت باشد آنگاه $\int_0^\pi f(x)\sin(x-x_0)xd>0$ و $\int_0^{x_0} f(x)\sin(x-x_0)>0$ پس $\int_0^\pi f(x)\sin x dx>0$؛

د) اگر f قبل از x_0 مثبت و بعد از x_0 منفی باشد، مشابه حالت قبل $\int_0^\pi f(x)\sin xd<0$؛

که هیچ‌کدام امکان پذیر نیست.

٦) مجموعه‌ی $\mathbb{C}^n$ را به عنوان یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$ در نظر بگیرید. بیشترین بعد یک زیرفضای $\mathbb{C}^n$ را بیابید که زیر مجموعه‌ی $A = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : z_1^2 + \cdots + z_n^2 = 0\}$ باشد.

پاسخ: ادعا می‌کنیم که جواب $[\frac{n}{2}]$ است. هنگامی که $n = 2m$ زوج باشد، زیر فضای

$$V = \{(w_1, w_1 i, \ldots, w_m, w_m i) : w_i \in \mathbb{C}\}$$

و هنگامی که $n = 2m + 1$ زیر فضای

$$V\{(w_1, w_1 i, \ldots, w_m, w_m i, 0) : w_i \in \mathbb{C}\}$$

زیرفضایی از بعد $[\frac{n}{2}]$ دارای خاصیت مطلوب هستند.

برای تکمیل اثبات کافیست ثابت کنیم که هیچ زیر فضای W از $\mathbb{C}^n$ از بعد بزرگتراز $\frac{n}{2}$ مشمول در مجموعهٔ $\{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : z_1^2 + \cdots + z_n^2 = 0\}$ نیست. فرض کنید W چنین زیرفضایی باشد. بنابراین برای هر $u \in W$ داریم $u \cdot u = 0$. (در اینجا برای دو بردار $u = (a_1, \ldots, a_n)$ و $v = (b_1, \ldots, b_n)$، $u \cdot v = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$.)

ادعا می‌کنیم برای هر $u, v \in W$ داریم $u \cdot v = 0$. این مطلب از رابطه $0 = (u+v)\cdot(u+v) = u\cdot u + v\cdot v + 2u\cdot v$ نتیجه می‌شود. قرار می‌دهیم $W' = \{u \in \mathbb{C}^n : u \cdot w = 0 \forall w \in W\}$. بنابراین $W \subseteq W'$. همچنین داریم $\dim W + \dim W' = n$ (کافیست پایه $w_1, \ldots, w_m$ از W درنظر گرفته شود، در اینصورت

$$W' = \{u = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : u \cdot w_1 = 0, \ldots, u \cdot w_m = 0\}$$

بنابراین یک دستگاه خطی m معادله و n مجهول بدست می‌آید و با بکار بردن قضیه رتبه بدست می‌آید $\dim W' = n - m$).

اما چون $W \subseteq W'$ بدست می‌آید

$$n = \dim W + \dim W' \geq 2 \dim W$$

پس $\dim W \leq \frac{n}{2}$.