انجمن ریاضی ایران

آزمون نـــوبت دوم

ســـی و نهمین مســـابقهٔ

ریاضی دانشـــجویی کشور

جلسهٔ دوم ۹۴/۲/۲۳

دانشگاه یزد

---

**۷)** نشان دهید یک فضای متریک موجود است که دارای نقطهٔ حدی است و هر گوی باز آن بسته است.

**۸)** فرض کنید $F$ یک میدان باشد و قرار دهید

$$R=\{a_0+a_2x^2+\cdots+a_nx^n \mid n\in\mathbb{N}, n\geq 2, a_i\in F\}$$

به وضوح $R$ با جمع و ضرب معمولی چندجمله‌ای‌ها یک حلقه‌ی یکدار و جابجائی است. نشان دهید $R$ یک حوزه ایده‌آل اصلی (PID) نمی‌باشد.

**۹)** ثابت کنید اعداد طبیعی بزرگ‌تر از یک را می‌توانیم در یک دنباله چنان قرار دهیم که هر عدد دقیقاً یک بار ظاهر شود و هیچ دو جملهٔ متوالی نسبت به هم اول نباشند.

**۱۰)** فرض کنید $p$ یک عدد اول فرد و $G$ یک گروه از مرتبه $4p$ باشد. به علاوه فرض کنید $G$ دارای یک زیرگروه غیردوری از مرتبه ۴ باشد. نشان دهید $G$ دارای حداقل $2p-2$ عضو از مرتبه بزرگ‌تر از ۲ است.

**۱۱)** فرض کنید $\{U_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با مقادیر صحیح باشند. قرار دهید $f(n)=n+U_n$ و $A=\{n\in\mathbb{Z}; f(n)=0\}$. نشان دهید $\mathbb{E}[|A|]=1$.

**۱۲)** فرض کنید $(X,d)$ یک فضای متریک فشرده باشد به طوری که به ازای هر زیرمجموعه‌ی $A\subseteq X$ که بیش از یک نقطه دارد و اشتراکی از گوی‌های بسته است، $a\in A$ و $r>0$ وجود دارد که $r$ از قطر $A$ کمتر است و $A\subseteq D_r(a)$. ثابت کنید هر ایزومتری $f:X\to X$ یک نقطه ثابت دارد. ($D_r(a)=\{x\in X; d(x,a)\leq r\}$).

موفق باشید.