آزمون نوبت اول
چهل و یکمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور
جلسه اول ۹۶/۶/۱۴

انجمن ریاضی ایران

۱) فرض کنید x و y دو عضو از حلقه R باشند به طوری که $x^2 = y^2 = 0$. ثابت کنید اگر $x+y$ یک عنصر خودتوان از R باشد آنگاه $x+y=0$.

پاسخ:

طبق فرض $x+y = (x+y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2 = xy + yx$. در نتیجه $xy = x(x+y) = x(xy+yx) = xyx$.
پس $xy = xyx = xyxx = 0$. مشابهاً $yx = 0$. بنابراین $x+y = xy + ux = 0$

برای مشاهده صورت سوالات و راه حل‌ها می‌توانید به کانال تلگرام مسابقات به آدرس @IMCUS **نیز مراجعه کنید.**

۲) تابع دو بار مشتق پذیر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را محدب گوییم اگر برای هر $x\in\mathbb{R}$ ، $f''(x)\geq 0$. گزارهٔ زیر را **اثبات یا رد** کنید:

اگر f دو بار مشتق پذیر و محدب باشد آنگاه $f\circ f$ نیز محدب است.

پاسخ: گزاره را رد می‌کنیم.
قرار دهید $f(x)=x^2-1$. در این صورت برای هر x داریم $f''(x)=2\geq 0$ همچنین $f\circ f(x)=x^4-2x^2$ که نتیجه می‌دهد $(f\circ f)''(0)=-4$ پس گزاره غلط است.

۳) فرض کنید G یک گروه باشد که دقیقاً ۱۳۹۶ عنصر از آن در مرکز G قرار ندارند. ثابت کنید G یک گروه متناهی ۱۴۰۰ عضوی است. یک مثال از چنین گروهی ارائه دهید.

پاسخ: توجه کنید که $۱۳۹۶ = ۴ \times ۳۴۹$ و ۳۴۹ یک عدد اول است. چون $G - Z(G)$ اجتماعی از همدسته‌های $Z(G)$ است پس $|Z(G)| \leq |G - Z(G)|$ که نشان می‌دهد $Z(G)$ و در نتیجه G متناهی است. حال از آنجا که $|Z(G)|$ مقسوم‌علیهی از $|G|$ است و $|G - Z(G)| = |G| - |Z(G)|$ نتیجه می‌گیریم که $|Z(G)| \mid |G - Z(G)| = ۱۳۹۶ = ۴ \times ۳۴۹$.
حال حالت‌های زیر ممکن است اتفاق بیفتد:

(a) $|Z(G)| = ۱$ و $|G| = ۱۳۹۷$ در این صورت $|G/Z(G)| = ۱۳۹۷ = ۱۱ \times ۱۲۷$. چون $۱۱ \nmid ۱۲۷ - ۱$ پس $G/Z(G)$ دوری و در نتیجه G آبلی است که تناقض است.

(b) $|Z(G)| = ۲$ و $|G| = ۱۳۹۸$ در این صورت $|G/Z(G)| = ۶۹۹ = ۳ \times ۲۳۳$. چون $۳ \nmid ۲۳۳ - ۱$ پس $G/Z(G)$ دوری و در نتیجه G آبلی است که تناقض است.

(c) $|Z(G)| = ۴$ و $|G| = ۱۴۰۰$. گروه $\mathbb{Z}_۴ \times D_{۳۵۰}$ مثالی از چنین گروهی است.

(d) $|Z(G)| = ۳۴۹$ و $|G| = ۵ \times ۳۴۹$ در این صورت $|G/Z(G)| = ۵$. پس $G/Z(G)$ دوری و در نتیجه G آبلی است که تناقض است.

(e) $|Z(G)| = ۲ \times ۳۴۹$ و $|G| = ۶ \times ۳۴۹$. در این صورت $|G/Z(G)| = ۳$. پس $G/Z(G)$ دوری و در نتیجه G آبلی است که تناقض است .

(f) $|Z(G)| = ۴ \times ۳۴۹$ و $|G| = ۸ \times ۳۴۹$. در این صورت $|G/Z(G)| = ۲$. پس $G/Z(G)$ دوری و در نتیجه G آبلی است که تناقض است.

برای مشاهده صورت سوالات و راه حل‌ها می‌توانید به کانال تلگرام مسابقات به آدرس @IMCUS نیز مراجعه کنید.

۴) فرض کنید f یک چندجمله‌ای غیرثابت با ضرایب حقیقی باشد. ثابت کنید حداکثر یک عدد حقیقی r وجود دارد به طوری که تمام ریشه‌های چندجمله‌ای $f(x)-r$ حقیقی باشند و تکرر بیشتر از یک داشته باشند.

پاسخ: فرض کنید $f(x)$ از درجه‌ی n باشد. همچنین فرض کنید برای اعداد متمایز r_1 و r_2 تمام ریشه‌های دو چندجمله‌ای $f(x)-r_1$ و $f(x)-r_2$ حقیقی و با تکرری بیش از یک باشند. با تجریه‌ی این دو چندجمله‌ای به عوامل مجزا می‌توانیم بنویسیم،

$$f(x)-r_1=a(x-x_1)^{d_1}\dots(x-x_k)^{d_k} \quad , \quad f(x)-r_2=a(x-x'_1)^{d'_1}\dots(x-x'_{k'})^{d'_{k'}}.$$

با توجه به اینکه $r_1\neq r_2$ این دو چندجمله‌ای ریشه‌ی مشترکی ندارند. همچنین چون توان‌ها حداقل ۲ هستند لذا داریم $k,k'\leq \frac{n}{2}$. از طرف دیگر داریم،

$$(x-x_1)^{d_1-1}\dots(x-x_k)^{d_k-1}\mid (f(x)-r_1)'=f'(x) \quad , \quad (x-x'_1)^{d'_1-1}\dots(x-x'_{k'})^{d'_{k'}-1}\mid (f(x)-r_2)'=f'(x).$$

دو چندجمله‌ای سمت چپ روابط قبل از درجه‌های $n-k$ و $n-k'$ هستند همچنین این دو چندجمله‌ای عامل مشترکی ندارند. در نتیجه $f'(x)$ بر حاصلضرب این دو چندجمله‌ای نیز بخش‌پذیر است ولی درجه‌ی چندجمله‌ای حاصلضرب برابر با $2n-(k+k')$ است که حداقل مقدار n دارد و با اینکه $f'(x)$ از درجه‌ی $n-1$ است در تناقض است.

برای مشاهده صورت سوالات و راه حل‌ها می‌توانید به کانال تلگرام مسابقات به آدرس @IMCUS نیز مراجعه کنید.

۵) ثابت کنید برای هر تابع صعودی $\varphi : (\circ, \infty) \to (\circ, \infty)$ ، تابع تحلیلی $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ وجود دارد که برای هر $x > \circ$، $f(x) \geq \varphi(x)$.

پاسخ: برای $n \geq ۲$، اعداد طبیعی k_n را طوری انتخاب می‌کنیم که $k_n \geq n$ و

$$(\frac{n}{n-۱})^{k_n} > \phi(n+۱)$$

اکنون قرار می‌دهیم

$$f(z) = \phi(۲) + \sum_{n=۲}^{\infty} (\frac{z}{n-۱})^{k_n}$$

چون $k_n \geq n$ پس شعاع همگرایی این سری ∞ است و در نتیجه f تابعی تحلیلی است.

حال توجه کنید که برای $x \leq ۲$، داریم $f(x) > \phi(۲) \geq \phi(x)$ و برای $x > ۲$ اگر قرار دهیم $[x] = n_\circ$، آنگاه

$$f(x) \geq (\frac{n_\circ}{n_\circ - ۱})^{k_{n_\circ}} > \phi(n_\circ + ۱) \geq \phi(x)$$

۶) فرض کنید $P(x,y)=\sum_{i,j=0}^{n} a_{i,j}x^iy^j$ یک چندجمله‌ای دو متغیره با ضرایب حقیقی باشد و $A\subseteq \mathbb{R}^2$ به طوری که $|A|>(n+1)^2$. همچنین فرض کنید برای هر دو نقطهٔ متمایز (x_1,y_1) و (x_2,y_2) در A داریم $P(x_1-x_2,y_1-y_2)=0$. نشان دهید $P(0,0)=0$.

پاسخ: فرض کنید $P(0,0)\neq 0$. قرار می‌دهیم $p=(x_1,y_1)$ و $q=(x_2,y_2)$. آنگاه داریم،

$$\begin{aligned} P(x_1-x_2,y_1-y_2) &= \sum_{i,j=0}^{n} a_{i,j}(x_1-x_2)^i(y_1-y_2)^j \\ &= \sum_{i,j=0}^{n} a_{i,j}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}x_1^k(-x_2)^{i-k}\sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}y_1^l(-y_2)^{j-l} \\ &= \sum_{k,l=0}^{n} x_1^ky_1^l\sum_{i=k}^{n}\sum_{j=l}^{n}a_{i,j}\binom{i}{k}\binom{j}{l}(-x_2)^{i-k}(-y_2)^{j-l}. \end{aligned}$$

عبارت قبل را می‌توان ضرب داخلی دو بردار در فضای $\mathbb{R}^{(n+1)^2}$ در نظر گرفت که یکی تابعی تنها از نقطه‌ی $p=(x_1,y_1)$ و دیگری تابعی تنها از نقطه‌ی $q=(x_2,y_2)$ است. کافیست بردار $u(p)\in\mathbb{R}^{(n+1)^2}$ را با درایه‌های $u_{k,l}(p)=x_1^ky_1^l$ و بردار $v(q)\in\mathbb{R}^{(n+1)^2}$ را با درایه‌های

$$v_{k,l}(q)=\sum_{i=k}^{n}\sum_{j=l}^{n}a_{i,j}\binom{i}{k}\binom{j}{l}(-x_2)^{i-k}(-y_2)^{j-l}$$

در نظر بگیریم (با یک ترتیب دلخواه ولی یکسان برای هر دوی u و v، درایه‌ی k,lام را به یکی از مکان‌های $1,2,\ldots,(n+1)^2$ نسبت دهید.) به سادگی می‌توان دید که $P(x_1-x_2,y_1-y_2)=\langle u(p),v(q)\rangle$.

حال با توجه به فرض سوال نتیجه می‌شود که برای هر دو نقطه‌ی متمایز p و q در A دو بردار $u(p)$ و $v(q)$ بر یکدیگر عمودند. به کمک این مطلب می‌توان نتیجه گرفت که بردارهای $\{u(p):p\in A\}$ از یکدیگر مستقل خطی می‌شوند. زیرا اگر $\sum_{p\in A}c_pu(p)=0$ آنگاه برای هر $p\in A$ با ضرب داخلی بردار $v(p)$ در طرفین و با توجه به ناصفر بودن

$$P(0,0)=\langle u(p),v(p)\rangle$$

نتیجه می‌شود که c_p صفر است. بنابراین با توجه به بعد فضای $\mathbb{R}^{(n+1)^2}$ نتیجه می‌شود که $|A|\leq(n+1)^2$ که با فرض در تناقض است و حکم اثبات می‌شود.

برای مشاهده صورت سوالات و راه حل‌ها می‌توانید به کانال تلگرام مسابقات به آدرس @IMCUS نیز مراجعه کنید.