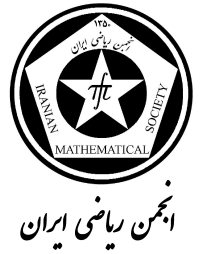




آزمون نوبت اول
چهل و یکمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور
جلسه اول ۹۶/۶/۱۴



(۱) فرض کنید x و y دو عضو از حلقه R باشند به طوری که $x^2 = y^2 = 0$. ثابت کنید اگر $x + y$ یک عنصر خودتوان از R باشد آنگاه $x + y = 0$.

پاسخ:

طبق فرض $xy = x(x + y) = x(xy + yx) = xyx$ در نتیجه $x + y = (x + y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2 = xy + yx$
پس $xy = xyx = xyx = xyx = 0$. مشابهاً $yx = 0$. بنابراین $x + y = xy + yx = 0$.

برای مشاهده صورت سوالات و راه حل ها می توانید به کانال تلگرام مسابقات به آدرس @IMCUS نیز مراجعه کنید.



آزمون نوبت اول
چهل و یکمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور
جلسه اول ۹۶/۶/۱۴



۲) تابع دو بار مشتق پذیر $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را محدب گوئیم اگر برای هر $x \in \mathbb{R}$ ، $f''(x) \geq 0$. گزاره زیر را اثبات یا رد کنید:

اگر f دو بار مشتق پذیر و محدب باشد آنگاه $f \circ f$ نیز محدب است.

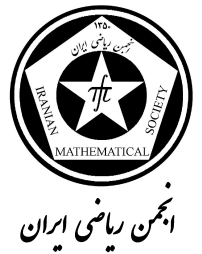
پاسخ: گزاره را رد می‌کنیم.

قرار دهید $f(x) = x^2 - 1$. در این صورت برای هر x داریم $f''(x) = 2 \geq 0$ همچنین $f \circ f(x) = x^4 - 2x^2$ که نتیجه می‌دهد $(f \circ f)''(0) = -4$ پس گزاره غلط است.

برای مشاهده صورت سوالات و راه حل‌ها می‌توانید به کانال تلگرام مسابقات به آدرس @IMCUS نیز مراجعه کنید.



آزمون نوبت اول
چهل و یکمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور
جلسه اول ۹۶/۶/۱۴



۳) فرض کنید G یک گروه باشد که دقیقاً ۱۳۹۶ عنصر از آن در مرکز G قرار ندارند. ثابت کنید G یک گروه متناهی ۱۴۰۰ عضوی است. یک مثال از چنین گروهی ارائه دهید.

پاسخ: توجه کنید که $۱۳۹۶ = ۴ \times ۳۴۹$ و ۳۴۹ یک عدد اول است. چون $G - Z(G)$ اجتماعی از همدسته‌های $Z(G)$ است پس $|Z(G)| \leq |G - Z(G)|$ که نشان می‌دهد $Z(G)$ و در نتیجه G متناهی است. حال از آنجا که $|Z(G)|$ مقسوم‌علیهی از $|G|$ است و $|G - Z(G)| = |G| - |Z(G)|$ نتیجه می‌گیریم که $|G - Z(G)| = ۱۳۹۶ = ۴ \times ۳۴۹$.
حال حالت‌های زیر ممکن است اتفاق بیفتد:

(a) $|Z(G)| = ۱$ و $|G| = ۱۳۹۷$ در این صورت $|G/Z(G)| = ۱۳۹۷ = ۱۱ \times ۱۲۷$. چون $۱۱ \nmid ۱۲۷ - ۱$ پس $G/Z(G)$ دوری و در نتیجه G آبلی است که تناقض است.

(b) $|Z(G)| = ۲$ و $|G| = ۱۳۹۸$ در این صورت $|G/Z(G)| = ۶۹۹ = ۳ \times ۲۳۳$. چون $۳ \nmid ۲۳۳ - ۱$ پس $G/Z(G)$ دوری و در نتیجه G آبلی است که تناقض است.

(c) $|Z(G)| = ۴$ و $|G| = ۱۴۰۰$. گروه $\mathbb{Z}_4 \times D_{35}$ مثالی از چنین گروهی است.

(d) $|Z(G)| = ۳۴۹$ و $|G| = ۵ \times ۳۴۹$ در این صورت $|G/Z(G)| = ۵$. پس $G/Z(G)$ دوری و در نتیجه G آبلی است که تناقض است.

(e) $|Z(G)| = ۲ \times ۳۴۹$ و $|G| = ۶ \times ۳۴۹$. در این صورت $|G/Z(G)| = ۳$. پس $G/Z(G)$ دوری و در نتیجه G آبلی است که تناقض است.

(f) $|Z(G)| = ۴ \times ۳۴۹$ و $|G| = ۸ \times ۳۴۹$. در این صورت $|G/Z(G)| = ۲$. پس $G/Z(G)$ دوری و در نتیجه G آبلی است که تناقض است.

برای مشاهده صورت سوالات و راه حل‌ها می‌توانید به کانال تلگرام مسابقات به آدرس @IMCUS نیز مراجعه کنید.



۴) فرض کنید f یک چندجمله‌ای غیرثابت با ضرایب حقیقی باشد. ثابت کنید حداکثر یک عدد حقیقی r وجود دارد به طوری که تمام ریشه‌های چندجمله‌ای $f(x) - r$ حقیقی باشند و تکرر بیشتر از یک داشته باشند.

پاسخ: فرض کنید $f(x)$ از درجه‌ی n باشد. همچنین فرض کنید برای اعداد متمایز r_1 و r_2 تمام ریشه‌های دو چندجمله‌ای $f(x) - r_1$ و $f(x) - r_2$ حقیقی و با تکرری بیش از یک باشند. با تجزیه‌ی این دو چندجمله‌ای به عوامل مجزا می‌توانیم بنویسیم،

$$f(x) - r_1 = a(x - x_1)^{d_1} \dots (x - x_k)^{d_k} \quad , \quad f(x) - r_2 = a(x - x'_1)^{d'_1} \dots (x - x'_{k'})^{d'_{k'}}.$$

با توجه به اینکه $r_1 \neq r_2$ این دو چندجمله‌ای ریشه‌ی مشترکی ندارند. همچنین چون توان‌ها حداقل ۲ هستند لذا داریم $k, k' \leq \frac{n}{2}$ از طرف دیگر داریم،

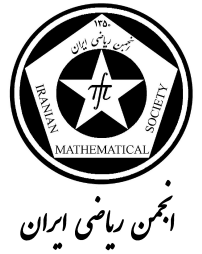
$$(x - x_1)^{d_1-1} \dots (x - x_k)^{d_k-1} \mid (f(x) - r_1)' = f'(x) \quad , \quad (x - x'_1)^{d'_1-1} \dots (x - x'_{k'})^{d'_{k'}-1} \mid (f(x) - r_2)' = f'(x).$$

دو چندجمله‌ای سمت چپ روابط قبل از درجه‌های $n - k$ و $n - k'$ هستند همچنین این دو چندجمله‌ای عامل مشترکی ندارند. در نتیجه $f'(x)$ بر حاصلضرب این دو چندجمله‌ای نیز بخش‌پذیر است ولی درجه‌ی چندجمله‌ای حاصلضرب برابر با $2n - (k + k')$ است که حداقل مقدار n دارد و با اینکه $f'(x)$ از درجه‌ی $n - 1$ است در تناقض است.

برای مشاهده صورت سوالات و راه حل‌ها می‌توانید به کانال تلگرام مسابقات به آدرس @IMCUS نیز مراجعه کنید.



آزمون نوبت اول
چهل و یکمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور
جلسه اول ۹۶/۶/۱۴



۵) ثابت کنید برای هر تابع صعودی $(\circ, \infty) \rightarrow (\circ, \infty)$ ، φ ، تابع تحلیلی $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ وجود دارد که برای هر $x > \circ$ ،
 $f(x) \geq \varphi(x)$.

پاسخ: برای $n \geq 2$ اعداد طبیعی k_n را طوری انتخاب می‌کنیم که $k_n \geq n$ و

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^{k_n} > \phi(n+1)$$

اکنون قرار می‌دهیم

$$f(z) = \phi(2) + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{z}{n-1}\right)^{k_n}$$

چون $k_n \geq n$ پس شعاع همگرایی این سری ∞ است و در نتیجه f تابعی تحلیلی است.

حال توجه کنید که برای $x \leq 2$ ، داریم $f(x) > \phi(2) \geq \phi(x)$ و برای $x > 2$ اگر قرار دهیم $n_0 = [x]$ ، آنگاه

$$f(x) \geq \left(\frac{n_0}{n_0-1}\right)^{k_{n_0}} > \phi(n_0+1) \geq \phi(x)$$

برای مشاهده صورت سوالات و راه حل‌ها می‌توانید به کانال تلگرام مسابقات به آدرس @IMCUS نیز مراجعه کنید.

۶) فرض کنید $P(x, y) = \sum_{i,j=0}^n a_{i,j} x^i y^j$ یک چندجمله‌ای دو متغیره با ضرایب حقیقی باشد و $A \subseteq \mathbb{R}^2$ به طوری که $|A| > (n+1)^2$. همچنین فرض کنید برای هر دو نقطه متمایز (x_1, y_1) و (x_2, y_2) در A داریم $P(x_1 - x_2, y_1 - y_2) = 0$. نشان دهید $P(0, 0) = 0$.

پاسخ: فرض کنید $P(0, 0) \neq 0$. قرار می‌دهیم $p = (x_1, y_1)$ و $q = (x_2, y_2)$. آنگاه داریم،

$$\begin{aligned} P(x_1 - x_2, y_1 - y_2) &= \sum_{i,j=0}^n a_{i,j} (x_1 - x_2)^i (y_1 - y_2)^j \\ &= \sum_{i,j=0}^n a_{i,j} \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} x_1^k (-x_2)^{i-k} \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} y_1^l (-y_2)^{j-l} \\ &= \sum_{k,l=0}^n x_1^k y_1^l \sum_{i=k}^n \sum_{j=l}^n a_{i,j} \binom{i}{k} \binom{j}{l} (-x_2)^{i-k} (-y_2)^{j-l}. \end{aligned}$$

عبارت قبل را می‌توان ضرب داخلی دو بردار در فضای $\mathbb{R}^{(n+1)^2}$ در نظر گرفت که یکی تابعی تنها از نقطه‌ی $p = (x_1, y_1)$ و دیگری تابعی تنها از نقطه‌ی $q = (x_2, y_2)$ است. کفایت بردار $u(p) \in \mathbb{R}^{(n+1)^2}$ را با درایه‌های $u_{k,l}(p) = x_1^k y_1^l$ و بردار $v(q) \in \mathbb{R}^{(n+1)^2}$ را با درایه‌های

$$v_{k,l}(q) = \sum_{i=k}^n \sum_{j=l}^n a_{i,j} \binom{i}{k} \binom{j}{l} (-x_2)^{i-k} (-y_2)^{j-l}$$

در نظر بگیریم (با یک ترتیب دلخواه ولی یکسان برای هر دوی u و v ، درایه‌ی k, l ام را به یکی از مکان‌های $1, 2, \dots, (n+1)^2$ نسبت دهید). به سادگی می‌توان دید که $P(x_1 - x_2, y_1 - y_2) = \langle u(p), v(q) \rangle$.

حال با توجه به فرض سوال نتیجه می‌شود که برای هر دو نقطه‌ی متمایز p و q در A دو بردار $u(p)$ و $v(q)$ بر یکدیگر عمودند. به کمک این مطلب می‌توان نتیجه گرفت که بردارهای $\{u(p) : p \in A\}$ از یکدیگر مستقل خطی می‌شوند. زیرا اگر $\sum_{p \in A} c_p u(p) = 0$ آنگاه برای هر $p \in A$ با ضرب داخلی بردار $v(p)$ در طرفین و با توجه به ناصفر بودن

$$P(0, 0) = \langle u(p), v(p) \rangle$$

نتیجه می‌شود که c_p صفر است. بنابراین با توجه به بعد فضای $\mathbb{R}^{(n+1)^2}$ نتیجه می‌شود که $|A| \leq (n+1)^2$ که با فرض در تناقض است و حکم اثبات می‌شود.