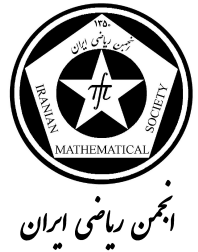




آزمون نوبت اول
چهل و یکمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور
جلسه اول ۹۶/۶/۱۴



۱. فرض کنید x و y دو عضو از حلقه R باشند به طوری که $x^2 = y^2 = 0$. ثابت کنید اگر $x + y$ یک عنصر خودتوان از R باشد آنگاه $x + y = 0$.
۲. تابع دو بار مشتق پذیر $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را محدب گوییم اگر برای هر $x \in \mathbb{R}$ ، $f''(x) \geq 0$. گزاره زیر را اثبات یا رد کنید:
اگر f دو بار مشتق پذیر و محدب باشد آنگاه $f \circ f$ نیز محدب است.
۳. فرض کنید G یک گروه باشد که دقیقاً ۱۳۹۶ عنصر از آن در مرکز G قرار ندارند. ثابت کنید G یک گروه متناهی ۱۴۰۰ عضوی است. یک مثال از چنین گروهی ارائه دهید.
۴. فرض کنید f یک چندجمله‌ای غیرثابت با ضرایب حقیقی باشد. ثابت کنید حداکثر یک عدد حقیقی r وجود دارد به طوری که تمام ریشه‌های چندجمله‌ای $f(x) - r$ حقیقی باشند و تکرر بیشتر از یک داشته باشند.
۵. ثابت کنید برای هر تابع صعودی $\varphi: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ، تابع تحلیلی $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ وجود دارد که برای هر $x > 0$ ،
$$f(x) \geq \varphi(x)$$
۶. فرض کنید $P(x, y) = \sum_{i,j=0}^n a_{i,j} x^i y^j$ یک چندجمله‌ای دو متغیره با ضرایب حقیقی باشد و $A \subseteq \mathbb{R}^2$ به طوری که $|A| > (n+1)^2$. همچنین فرض کنید برای هر دو نقطه متمایز (x_1, y_1) و (x_2, y_2) در A داریم $P(x_1 - x_2, y_1 - y_2) = 0$. نشان دهید $P(0, 0) = 0$.