آزمون نوبت اول

چهل و یکمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

جلسه اول ۹۶/۶/۱۴

---

۱. فرض کنید x و y دو عضو از حلقه R باشند به طوری که $x^۲ = y^۲ = ۰$. ثابت کنید اگر $x+y$ یک عنصر خودتوان از R باشد آنگاه $x+y=۰$.

۲. تابع دو بار مشتق پذیر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را محدب گوییم اگر برای هر $x\in\mathbb{R}$ ، $f''(x)\geq ۰$. گزارهٔ زیر را **اثبات یا رد** کنید:

اگر f دو بار مشتق پذیر و محدب باشد آنگاه $f\circ f$ نیز محدب است.

۳. فرض کنید G یک گروه باشد که دقیقاً ۱۳۹۶ عنصر از آن در مرکز G قرار ندارند. ثابت کنید G یک گروه متناهی ۱۴۰۰ عضوی است. یک مثال از چنین گروهی ارائه دهید.

۴. فرض کنید f یک چندجمله‌ای غیرثابت با ضرایب حقیقی باشد. ثابت کنید حداکثر یک عدد حقیقی r وجود دارد به طوری که تمام ریشه‌های چندجمله‌ای $f(x)-r$ حقیقی باشند و تکرر بیشتر از یک داشته باشند.

۵. ثابت کنید برای هر تابع صعودی $\varphi:(۰,\infty)\to(۰,\infty)$ ، تابع تحلیلی $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ وجود دارد که برای هر $x>۰$، $f(x)\geq\varphi(x)$.

۶. فرض کنید $P(x,y)=\sum_{i,j=۰}^{n}a_{i,j}x^iy^j$ یک چندجمله‌ای دو متغیره با ضرایب حقیقی باشد و $A\subseteq\mathbb{R}^۲$ به طوری که $|A|>(n+۱)^۲$. همچنین فرض کنید برای هر دو نقطهٔ متمایز $(x_۱,y_۱)$ و $(x_۲,y_۲)$ در A داریم $P(x_۱-x_۲,y_۱-y_۲)=۰$. نشان دهید $P(۰,۰)=۰$.