



۱. تعداد ۴۱ عدد طبیعی را روی یک دایره قرار داده‌ایم با این خاصیت که از هر دو عدد کنار هم یکی بر دیگری بخش پذیر است. نشان دهید دو عدد وجود دارند که کنار هم نیستند ولی همچنان یکی بر دیگری بخش پذیر است.
۲. X یک فضای متریک فشرده و $\{x_1, \dots, x_n\}$ زیرمجموعه‌ای متناهی از X است. تعریف می‌کنیم

$$A = \{a > 0 : \bigcup_{i=1}^n B_a(x_i) = X\}.$$

ثابت کنید A مجموعه‌ای باز است. ($B_a(x)$ گوی باز به مرکز x و شعاع a است.)

۳. فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی روی میدان F باشد. اگر S یک زیرمجموعه ناتهی از تبدیلات خطی روی V باشد که نسبت به عمل ترکیب توابع بسته است، نشان دهید تبدیل خطی T در S هست که $\text{Im } T \oplus \ker T = V$.
۴. مکعبی با اضلاع به طول یک را در نظر بگیرید و فرض کنید γ خمی پیوسته و بسته است که روی وجوه مکعب قرار دارد و با همهٔ وجه‌ها در تماس است. (اگر خم با یک ضلع یا رأس از یک وجه مکعب برخورد کند نیز می‌گوییم با آن وجه در تماس است). کمترین مقدار ممکن برای طول این خم را به دست آورید.

۵. برای هر دنبالهٔ n_1, n_2, \dots از اعداد مثبت، دنبالهٔ $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$x_k = 2 + \frac{n_1}{2 + \frac{n_2}{\dots + \frac{n_k}{k}}}$$

حد دنبالهٔ x_k را در صورت وجود با $[n_1, n_2, \dots]$ نشان می‌دهیم.

S را مجموعهٔ همهٔ x هایی می‌گیریم که به ازای یک دنبالهٔ $\{n_i \in \{5, 20\}\}$ داشته باشیم $x = [n_1, n_2, \dots]$.

الف) $\min(S)$ و $\max(S)$ را بیابید.

ب) ثابت کنید اگر به ازای هر $i \in \{5, 20\}$ ، $n_i \in \{5, 20\}$ آنگاه دنبالهٔ $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ دارای حد است.

ج) ثابت کنید $S = [\min(S), \max(S)]$.

۶. فرض کنید R یک حلقه یک‌دگر و $f(x)$ یک چند جمله‌ای ناصفر با ضرایب در R باشد. اگر M یک عضو ماکسیمال (نسبت

به رابطهٔ شمول) در مجموعهٔ $\{J \trianglelefteq R[x] : f \notin J\}$ باشد. ثابت کنید:

$$\forall I \trianglelefteq R, M \neq I[x]$$