

۱. آیا تابعی مانند  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  وجود دارد به طوری که تصویر هر زیر مجموعه نامتناهی  $\mathbb{N}$  تحت  $f$  برابر با کل  $\mathbb{N}$  شود؟

۲. ثابت کنید فضای متریک  $(X, d)$  همبند است اگر و تنها اگر برای هر دو زیر مجموعه ناتهی  $A, B \subset X$  یک  $x \in X$  موجود باشد به طوری که داشته باشیم  $d(x, A) = d(x, B)$ .

۳. فرض کنید  $R$  یک حلقه یکدار و  $I$  یک ایده‌آل راست ماکسیمال در  $R$  باشد. نشان دهید  $I$  یک ایده‌آل دو طرفه است یا  $I^2 = I$ .

۴. فرض کنید تابع  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  دارای مشتق دوم پیوسته باشد و  $f(0) = f(1)$ . ثابت کنید

$$3f'(1)^2 \leq \int_0^1 f''(x)^2 dx.$$

۵. فرض کنید  $n$  عددی طبیعی و  $t$  عددی مثبت باشد. قرار می‌دهیم

$$A = \{(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{Z}^n : u_1, \dots, u_n \geq 0, \sum_{j=1}^n \frac{u_j}{j} \leq t\}.$$

نشان دهید  $|A| > t^n$ .  $|A|$  تعداد اعضای  $A$  را نشان می‌دهد.

۶. گروه  $G$  را مناسب گوییم هرگاه برای هر دو عنصر هم‌مرتبه  $a, b$  در آن،  $\sigma \in \text{Aut}(G)$  موجود باشد به طوری که  $\sigma(a) = b$ . فرض کنید  $G$  یک گروه مناسب از مرتبه  $p^k$  ( $p$  یک عدد اول) و  $N$  زیرگروه نرمالی از  $G$  باشد به طوری که برای هر  $\alpha \in \text{Aut}(G)$  داشته باشیم  $\alpha(N) \subseteq N$ . ثابت کنید  $G/N$  نیز یک گروه مناسب است.

موفق باشید