سؤالات نوبت اول سی و یکمین مسابقات ریاضی دانشجویی کشور

جلسه اول ۸۶/۲/۲۰   **مدت امتحان : ۴ ساعت**

---

۱) تمام نقاط محیط دایره‌ای را به طور دلخواه با دو رنگ، رنگ‌آمیزی می‌کنیم. آیا لزوماً با هر رنگ‌آمیزی، مثلثی با رئوس همرنگ محاط در دایره وجود دارد که

الف) متساوی الاضلاع باشد؟

ب) قائم‌الزاویه باشد؟

ج) متساوی الساقین باشد؟

۲) جمع مینکوفسکی دو مجموعهٔ $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$A + B = \{a + b \in \mathbb{R}^d \mid a \in A,\ b \in B\}$$

ثابت کنید اگر A کران دار و B بسته باشد، آنگاه

$$(A + B)' = (A' + B) \cup (A + B')$$

که منظور از A'، مجموعه نقاط حدی A است.

۳) فرض کنید گروهی مانند G وجود دارد که دقیقاً دارای n زیرگروه با اندیس ۲ باشد (n عددی طبیعی است). ثابت کنید گروهی آبلی و متناهی هم وجود دارد که دقیقاً دارای n زیرگروه با اندیس ۲ است.

۴) آیا می‌توان دو تاس ناسالم را چنان انتخاب کرد که احتمال پیشامد مجموع j در پرتاب همزمان آنها برای هر j، $2 \leq j \leq 12$، عددی در بازهٔ $\left(\frac{2}{33}, \frac{4}{33}\right)$ باشد؟

۵) نشان دهید $\mathbb{R}^2$ زیرمجموعه‌ای چگال دارد که هیچ سه نقطه‌اش هم‌خط نیستند.

۶) فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ و معکوس‌پذیر با درایه‌های حقیقی باشد. ثابت کنید:

$$\det(A) = \frac{1}{n!}\begin{vmatrix} \mathrm{tr}(A) & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \mathrm{tr}(A^2) & \mathrm{tr}(A) & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathrm{tr}(A^3) & \mathrm{tr}(A^2) & \mathrm{tr}(A) & 3 & & \vdots \\ \vdots & & & & & n-1 \\ \mathrm{tr}(A^n) & \mathrm{tr}(A^{n-1}) & \mathrm{tr}(A^{n-2}) & \cdots & \cdots & \mathrm{tr}(A) \end{vmatrix}$$

(منظور از $tr(B)$ مجموع درایه‌های واقع بر روی قطر اصلی ماتریس B است).