پاسخ سؤالات سی و سومین مسابقه‌ی ریاضی دانشجویی کشور

جلسه‌ی دوم ۸۸/۲/۱۷

---

۷) نقاط $A_1, \ldots, A_n$ در فضای سه بعدی $\mathbb{R}^3$، و درون گوی واحد قرار دارند و G مرکز ثقل این نقاط است. نشان دهید $1 \leq i \leq n$ وجود دارد به‌طوری‌که فاصله‌ی A_i تا G کم‌تر از یک باشد.

پاسخ اول:

روش هندسی: فرض کنید این طور نباشد، بنابراین همهٔ A_i ها خارج گوی به شعاع ۱ و به مرکز G واقع‌اند. پس اگر صفحه‌ای که از فصل مشترک این گوی و گوی واحد می‌گذرد را با π نشان دهیم A_iها هم در سمتی از π که G قرار ندارد، واقع‌اند ولی در این صورت G که مرکز ثقل آنها است نمی‌تواند در طرف دیگر π باشد.

روش جبری: به راحتی می‌توان دید که تابع $f(x) = \sum_{i=1}^{n} |X - A_i|^2$ مینیمم خود را در مرکز ثقل نقاط $A_1, \ldots, A_n$ اتخاذ می‌کند زیرا در نقطهٔ مینیمم داریم

$$\begin{aligned} O = \nabla f(x) &= 2 \sum_{i=1}^{n} (X - A_i) \\ &\Rightarrow X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} A_i = G \end{aligned}$$

اما چون A_iها درون گوی واحد هستند پس $f(O) < n$ پس $f(G) < n$ پس i ای وجود دارد که $|G - A_i|^2 \leq 1$

پاسخ سؤالات سی و سومین مسابقه‌ی ریاضی دانشجویی کشور

جلسه‌ی دوم ۸۸/۲/۱۷

---

۸) فرض کنید $f:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته و نامنفی باشد که $\iint_{\mathbb{R}^۲} f(x,y)dxdy=۱$. ثابت کنید گوی بسته‌ای مانند D با کم‌ترین شعاع ممکن وجود دارد که $\iint_D f(x,y)dxdy=\frac{۱}{۲}$.
(اگر نشان دهید بین همه‌ی گوی‌های به مرکز مبدأ، گویی با کم‌ترین شعاع ممکن وجود دارد که انتگرال f روی آن $\frac{۱}{۲}$ باشد، ۵۰٪ نمره را می‌گیرید.)

پاسخ:

تابع $F:\mathbb{R}^۲\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم.

$$F(x,r)=\iint_{D_r(x)} f$$

که $D_r(x)$ دیسک به مرکز x و به شعاع r است. واضح است که $F(x,۰)=۰$ و $F(x,\infty)=۱$. پس برای هر x ، $R_x>۰$ ای وجود دارد که $F(x,R)>\frac{۱}{۲}$. مؤلفه‌ی دوم تابع را موقتاً به بازه $[۰,R_x]$ محدود می‌کنیم. f پیوسته است پس روی $D_{R_x}(x)$ کران‌دار است؛ $M>۰$ای وجود دارد که اگر $|x|\le R_x$ آن‌گاه $f(x)\le M_x$. برای $۰\le r<r'\le R_x$

$$۰\le F(۰,r')-F(۰,r)=\iint_{D_r(۰)\setminus D_r(۰)} f\le M_x\pi(r'^۲-r^۲)\le ۲R_xM_x\pi(r'-r).$$

پس برای هر x ثابت، $F(x,r)$ برحسب r پیوسته است و با توجه به این که $F(x,۰)=۰<\frac{۱}{۲}<F(x,R_x)$، طبق قضیه‌ی مقدار میانی $r_x>۰$ وجود دارد که $F(x,r_x)=\frac{۱}{۲}$. لذا دست‌کم یک دیسک وجود دارد که انتگرال f روی آن برابر $\frac{۱}{۲}$ است. اکنون همه‌ی چنین دیسک‌هایی با شعاع کم‌تر یا مساوی $r_۰$ را در نظر بگیرید.

اگر تعداد دیسک‌های مورد بحث متناهی باشد که مسأله کوچک‌ترین دیسک بدیهی است. در غیر این صورت ممکن نیست که سه تا از این دیسک‌ها دو به دو از هم جدا باشند زیرا انتگرال f روی اجتماع این سه دیسک $\frac{۳}{۲}$ خواهد شد. اگر همه‌ی این دیسک‌ها $D_{r_۰}(۰)$ را قطع کنند که همه زیرمجموعه‌ی $D_{۳r_۰}(۰)$ هستند. اگر یکی از این دیسک‌ها$D_{r_۰}(۰)$ را قطع نکند هر دیسک دیگری باید دست کم یکی از این دو دیسک را قطع کند. پس در هر صورت $R^*>۰$ای وجود دارد که همه‌ی این دیسک‌ها زیرمجموعه‌ی $D_{R_*}(۰)$ هستند.

فرض کنید برای $|x|\le R^*$ ، $f(x)\le M^*$. نشان می‌دهیم F روی مجموعه‌ی فشرده‌ی

$$A=[۰,r_۰]\times\{x\in\mathbb{R}^۲\,|\,|x|\le R^*\}$$

پیوسته است. اگر $|x|,|y| \leq \mathbb{R}^*$ و $0 \leq r, s \leq r_0$.

$$|F(x,r) - F(y,s)| \leq \iint_{D_r(x)\Delta D_s(y)} f \leq M^*(D_r(x)\Delta D_s(y)$$

واضح است که وقتی $x \to y$ و $r \to s$، مساحت $D_r(x)\Delta D_s(y)$ به صفر میل می‌کند و در نتیجه $F(y,s)$ هم به $F(x,r)$ میل می‌کند. لذا F پیوسته است.

تعریف می‌کنیم

$$K = \{r \in [0, r_0] | \exists x; (x,r) \in A, F(x,r) = \frac{1}{2}\}.$$

این مجموعه فشرده و شامل r_0 است زیرا $F(0,r_0) = \frac{1}{2}$. پس کوچک‌ترین عضو دارد و اگر $r^* = \min K$ آن‌گاه x^*ای وجود دارد که $F(x^*,r^*) = \frac{1}{2}$ و در نتیجه $D = D_{r^*}(x^*)$ همان است که می‌خواستیم.

---

۹) ثابت کنید اگر F یک میدان باشد، هر عضو $M_2(F)$ را می‌توان به صورت مجموع چهار ماتریس وارون‌پذیر نوشت. ($M_2(F)$ مجموعه‌ی تمام ماتریس‌های 2×2 روی F است.)

پاسخ:

$$\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ d & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

واضح است که ماتریس‌های نوشته شده در سمت راست رابطه بالا همگی معکوس‌پذیر هستند.

یادداشت: کافی است که F حلقه‌ای یکدار باشد.

---

۱۰) قرار است صد دانشجو در سالنی که صد صندلی دارد، امتحان دهند. هر دانشجو دارای یک شماره‌ی صندلی است. اولین دانشجویی که وارد سالن می‌شود شماره‌ی صندلی خود را گم کرده است و بنابراین یک صندلی را به تصادف انتخاب کرده و روی آن می‌نشیند. بقیه‌ی دانشجویان شماره‌ی صندلی خود را به همراه دارند و هر کدام که وارد سالن می‌شوند اگر صندلی‌اش خالی باشد روی آن می‌نشیند و اگر اشغال شده باشد، از صندلی‌های خالی یکی را به تصادف انتخاب کرده و روی آن می‌نشیند. احتمال این که دو دانشجویی که آخر از همه وارد سالن می‌شوند روی صندلی خود بنشینند چقدر است؟

پاسخ:

ثابت می‌کنیم برای حالت n دانشجو که $n \geq ۳$ این احتمال برابر $\frac{۱}{۳}$ است. فرض کنید p_n احتمال مربوطه باشد. به راحتی دیده می‌شود که $p_۳ = \frac{۱}{۳}$. برای حالت n دانشجو فرض کنید نفر اول جای صندلی نفر kام بنشیند $۲ \leq k \leq n-۲$. احتمال این کار $\frac{۱}{n}$ است. حال نفرات دوم تا $(k-۱)$ام در جای خود می‌نشینند و نفر kام یک صندلی از بین $n-k+۱$ صندلی خالی به تصادف انتخاب می‌کند. بنابراین برای $۲ \leq k \leq n-۲$ با شرط این که نفر اول جای نفر kام بنشیند احتمال این که دو نفر آخر سر جای خود بنشینند برابر است با p_{n-k}. برای $k=۱$ این احتمال ۱ است و برای $k = n-۱, n$ این احتمال صفر است پس:

$$P_n = \frac{۱}{n} \times ۱ + \frac{۱}{n}p_{n-۱} + \frac{۱}{n}p_{n-۲} + \ldots + \frac{۱}{n}p_۳ + \frac{۱}{n} \times ۰ + \frac{۱}{n} \times ۰$$
$$p_n = \frac{۱}{n}(۱ + p_{n-۱} + \ldots + p_۳)$$

حال با استقرای قوی روی n با توجه به این که $P_۳ = \frac{۱}{۳}$ ثابت می‌کنیم $P_n = \frac{۱}{۳}$. یعنی با فرض $p_۳ = p_۴ = \ldots = p_{n-۱} = \frac{۱}{۳}$ داریم

$$p_n = \frac{۱}{n}(۱ + \frac{n-۳}{۳}) = \frac{۱}{۳}.$$

پاسخ سؤالات سی و سومین مسابقه‌ی ریاضی دانشجویی کشور

جلسه‌ی دوم ۸۸/۲/۱۷

---

۱۱) فرض کنید (X,d) یک فضای متریک و A زیرمجموعه‌ای کران‌دار از آن باشد. برای $a \in A$ خروج از مرکز a به صورت $ecc(a) = \sup\{d(a,b) : b \in A\}$ تعریف می‌شود. هم‌چنین قطر A و شعاع A را به ترتیب به صورت

$$diam(A) = \sup\{ecc(a) : a \in A\}, \;\; rad(A) = \inf\{ecc(a) : a \in A\}$$

تعریف می کنیم. فضای متریک X را مرکزی می‌نامیم هرگاه برای هر زیرمجموعه‌ی کران‌دار از آن مانند A داشته باشیم $diam(A) = rad(A)$. فرض کنید X یک فضای متریک مرکزی باشد.

الف. فرض کنید $r > ۰$ و $x \in X$. نشان دهید مجموعه‌ی $C_r(x) = \{y \in X \mid d(x,y) = r\}$ باز است.

ب. فرض کنید X بیش از یک عضو داشته باشد. ثابت کنید X ناهمبند است.

پاسخ:

لم. در یک فضای متریک مرکزی هر مثلث متساوی‌الساقین است و ساق ضلع بزرگ‌تر است.
اثبات لم. فرض کنید $a,b,c \in X$ مجموعه‌ی $A = \{a,b,c\}$ را در نظر بگیرید. داریم $diam(A) = rad(A)$. می‌توانیم فرض کنیم $diam(A) = d(a,b)$. به خروج مرکز A در نقطه c توجه کنید: $ecc(c) = max\{d(c,a), d(c,b)\}$. با توجه به تعریف شعاع $ecc(c) \geq rad(A)$ و در نتیجه $max\{d(c,a), d(c,b)\} \geq d(a,b)$. به‌علاوه می‌دانیم که $d(a,b)$ بزرگ‌ترین فاصله در A است پس یکی از $d(c,a)$ و $d(c,b)$ با $d(a,b)$ برابر است و دیگری کوچک‌تر یا مساوی $d(a,b)$ است. لم اثبات شد.

اثبات الف. فرض کنید $y \in C_r(x)$. پس $d(x,y) = r$. باید نشان دهیم که y نقطه‌ی درونی $C_r(x)$ است. $N_r(y)$، یعنی گوی باز به شعاع r و به مرکز y، را در نظر بگیرد. نشان می‌دهیم $N_r(y) \subseteq C_r(x)$. فرض کنید $z \in N_r(y)$. پس $d(z,y) < r$. با توجه به سه نقطه‌ی x، y و z و این که $d(z,y) < d(x,y)$ و با استفاده از لم داریم $d(x,z) = r$ و این یعنی این که $z \in C_r(x)$. پس باز بودن $C_r(x)$ ثابت شد.

اثبات ب. فرض کنید a و b دو عضو متمایز X باشند. r را عددی مثبت و کم‌تر از $\frac{۱}{۲}d(a,b)$ بگیرید. در این صورت $N_r(a) \cup C_r(a)$ شامل a است و b عضو آن نیست. به‌علاوه به دلیل لم باز است و به وضوح بسته نیز هست. سپس X ناهم‌بند است.

---

۱۲) گروه G مفروض است به طوری که G' آبلی است و هر زیرگروه آبلی و نرمال G متناهی است. ثابت کنید G متناهی است.

پاسخ:

می دانیم که $G' \trianglelefteq G$ و از آنجائی که G' آبلی است پس $|G'| < \infty$. حال ایده حل مسأله این است که بین زیرگروه‌های نرمال و آبلی و شامل G' که البته G' یکی از آنها است یک عنصر ماکسیمال پیدا کنیم با استفاده از متناهی بودن این زیر گروه مسأله را حل کنیم. برای این کار تعریف می‌کنیم:

$$X = \{H < G \mid G' \subseteq H \text{ آبلی و نرمال است و } H\}$$

داریم $G' \in X$ پس $X \neq \phi$. حال با استفاده از لم زرن نشان می‌دهیم X دارای عنصری ماکسیمال است. فرض کنید $\{H_\alpha\}_{\alpha \in I}$ زنجیری در X باشد که رابطه ترتیب در نظر گرفته شده همان رابطه‌ی شمول است. به راحتی می‌توان دید $\cup_{\alpha \in I} H_\alpha$ نیز آبلی و نرمال است. پس X دارای عنصری ماکسیمال مثل H است. H نرمال و آبلی است پس طبق فرض مسأله متناهی می‌باشد. حال مرکزساز H یعنی $C(H)$ را در نظر می‌گیریم. چون Hآبلی است $H \subseteq C(H)$. نشان می‌دهیم $H = C(H)$: اگر $g \in C(H) \backslash H$ آنگاه به‌راحتی می‌توان نشان داد $< g, H >$ یک زیرگروه نرمال و آبلی G است که اکیداً شامل H می‌باشد اما این با ماکسیمال بودن H تناقض دارد.

پس $H = C(H)$. حال طبق قضیه‌ای $\frac{N(H)}{C(H)}$ با زیرگروهی از $Aut(H)$ یکریخت است که $N(H)$ نرمال ساز H در G است. چون $N(H) = G$ و $C(H) = H$ پس $\frac{G}{H}$ با زیرگروهی از $\mathrm{Aut}(G)$ یکریخت است. چون H متناهی است، $\mathrm{Aut(H)}$ هم متناهی است، در نتیجه $\frac{G}{H}$ هم متناهی است که متناهی بودن G را نتیجه می‌دهد.