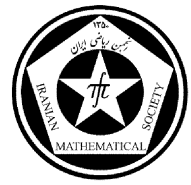




سوالات نوبت اول
سی و چهارمین مسابقه
ریاضی دانشجویی کشور
جلسه اول ۸۹/۲/۱
مدت امتحان : ۴ ساعت

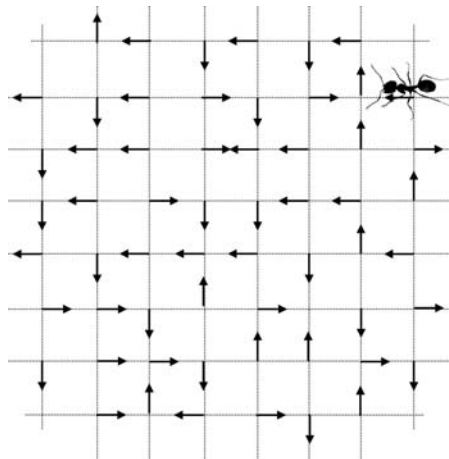


انجمن ریاضی ایران

(۱) گروه G و تابع $f : G \rightarrow G$ مفروض هستند به طوری که برای هر $x, y \in G$ داریم $f(xf(y)) = f(x)y$. ثابت کنید f یک خودریختی (همریختی یک به یک و پوشا) است.

(۲) فرض کنید (X, d) یک فضای متریک باشد که در آن هر زیرمجموعه‌ی چگال باز است. ثابت کنید مجموعه‌ی نقاط تنها در X چگال است.

(۳) به هر کدام از نقاط شبکه‌ی اعداد با مختصات صحیح در صفحه، یکی از پیکان‌های $\rightarrow, \uparrow, \leftarrow$ و \downarrow نسبت داده شده است. مورچه‌ای در نقطه‌ی دلخواهی از این شبکه قرار دارد و لانه‌اش در نقطه‌ی دیگری از شبکه است. در هر مرحله مورچه در جهت پیکان مربوط به نقطه‌ای که در آن قرار گرفته، به نقطه‌ی مجاور حرکت می‌کند و سپس پیکان نقطه‌ای که ترک کرده، 90° در جهت ساعت‌گرد تغییر می‌کند. نشان دهید اگر مورچه هرگز به لانه‌اش نرسد فاصله‌اش تا لانه به بی‌نهایت میل می‌کند.



(۴) فرض کنید n عددی طبیعی باشد. ثابت کنید زیرمجموعه‌ی ناشمارایی از \mathbb{R}^n وجود دارد که هر n عضو متمایز آن مستقل خطی است. (\mathbb{R}^n را به عنوان فضای برداری روی \mathbb{R} در نظر بگیرید.)

(۵) فرض کنید $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ دارای این خاصیت باشد که تصویر هر زیرمجموعه‌ی همبند \mathbb{R}^2 تحت f همبند و تصویر هر زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی \mathbb{R}^2 تحت f فشرده باشد. ثابت کنید f پیوسته است.

(۶) نشان دهید مساحت بزرگ‌ترین مربعی که می‌توان در مکعب واحد قرار داد برابر $\frac{9}{8}$ است.