۱) گروه G و تابع $f : G \to G$ مفروض هستند به طوری که برای هر $x, y \in G$ داریم $f(xf(y)) = f(x)y$. ثابت کنید f یک خودریختی (همریختی یک به یک و پوشا) است.

پاسخ:

با قراردادن $x = y = e$ در فرض مسأله به دست می‌آوریم $f(e) = f(f(e))$ بنابراین

$$f(f(e)) = f(f(f(e)))$$

در نتیجه $$f(e) = f(f(f(e))) = f(ef(f(e))) = f(e)f(e)$$
پس $f(e) = e$. حال با قرار دادن $x = e$ در فرض مسأله رابطه‌ی $f(f(y)) = y$ به دست می‌آید که خود بیانگر دوسویی بودن f است. به علاوه برای هر $x, y \in G$ داریم:

$$f(xy) = f(xf(f(y))) = f(x)f(y)$$

پس f همریختی است.

۲) فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد که در آن هر زیرمجموعه‌ی چگال باز است. ثابت کنید مجموعه‌ی نقاط تنها در X چگال است.

پاسخ:

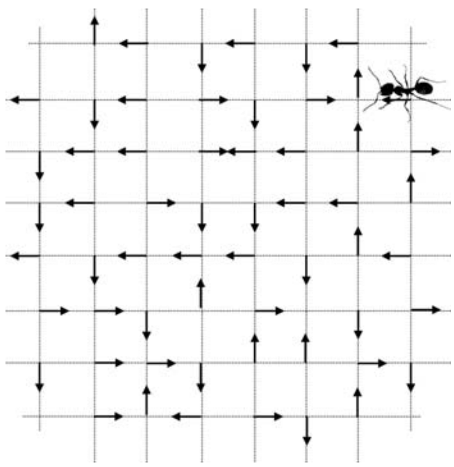
فرض کنید S مجموعه‌ی نقاط تنهای X باشد. اگر S در X چگال نباشد، وجود دارد $a \in X$ و یک همسایگی از آن مثل B که $B \cap S = \phi$. دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ چنان انتخاب کنید که اولاً همه‌ی اعضای آن در B باشد، ثانیاً همه‌ی نقاط آن مخالف a باشند و ثالثاً $x_n \to a$. با توجه به این که a نقطه‌ی تنها نیست این کار ممکن است.

ادعا می‌کنیم $A = X\backslash\{x_k|k \in \mathbb{N}\}$ یک زیرمجموعه‌ی چگال X است. کافی است نشان دهیم برای هر $k \in \mathbb{N}$، x_k یک نقطه‌ی حدی A است.

$x_n \notin S$، پس می‌توان با دنباله‌ای از نقاط X مثل $\{y_n\}$ به x_k میل کرد. با توجه به این که $x_n \to a$ و $a \neq x_k$، می‌توان دنباله‌ی $\{y_n\}$ را طوری انتخاب کرد که نقاطش غیر از نقاط دنباله‌ی $\{x_n\}$ باشد. در نتیجه دنباله‌ی $\{y_n\}$ کاملاً در A است و لذا $x_k \in \bar{A}$.

پس ثابت کردیم که A چگال است و لذا طبق فرض مسأله A باز است. این تناقض است زیرا A^c مجموعه‌ی نقاط دنباله‌ی $\{x_n\}$ است که حد آن، یعنی a، در A^c نیست و در نتیجه A^c بسته نیست. این تناقض با باز بودن A است.

۳) به هر کدام از نقاط شبکه‌ی اعداد با مختصات صحیح در صفحه، یکی از پیکان‌های $\rightarrow$، $\uparrow$، $\leftarrow$ و $\downarrow$ نسبت داده شده است. مورچه‌ای در نقطه‌ی دلخواهی از این شبکه قرار دارد و لانه‌اش در نقطه‌ی دیگری از شبکه است. در هر مرحله مورچه در جهت پیکان مربوط به نقطه‌ای که در آن قرار گرفته، به نقطه‌ی مجاور حرکت می‌کند و سپس پیکان نقطه‌ای که ترک کرده، 90° در جهت ساعت‌گرد تغییر می‌کند. نشان دهید اگر مورچه هرگز به لانه‌اش نرسد فاصله‌اش تا لانه به بی‌نهایت میل می‌کند.



پاسخ:

فرض کنید فاصله‌ی مورچه تا لانه به بی‌نهایت میل نکند. این بدان معنی است که مجموعه‌ی کران‌دار A از شبکه وجود دارد که مورچه نامتناهی مرتبه به آن باز می‌گردد. تعداد نقاط A متناهی است، بنابراین نقطه‌ای مثل a وجود دارد که مورچه بی‌نهایت بار از آن گذر می‌کند. چون جهت پیکان خارج شده از a در هر بار گذر 90° در جهت ساعتگرد تغییر می‌کند بنابراین مورچه از همه‌ی نقاط مجاور a نیز بی‌نهایت بار گذر می‌کند و با تکرار این استدلال مورچه از تمام نقاط شبکه بی‌نهایت مرتبه گذر می‌کند پس به لانه‌اش هم می‌رسد!

۴) فرض کنید n عددی طبیعی باشد. ثابت کنید زیرمجموعه‌ی ناشمارایی از $\mathbb{R}^n$ وجود دارد که هر n عضو متمایز آن مستقل خطی است. ($\mathbb{R}^n$ را به عنوان فضای برداری روی $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید.)

پاسخ:

(راه‌حل اول): قرار دهید $A_0 = \{(1, x, \ldots, x^{n-1}) | x \in \mathbb{R}\}$ در این صورت A_0 جواب مسأله است. برای این منظور کافی است توجه کنیم که اگر $V_1 = (1, x_1, \ldots, x_1^{n-1})$، $V_2 = (1, x_2, \ldots, x_2^{n-1})$، $V_n = (1, x_n, \ldots, x_n^{n-1})$، n عضو متمایز A_0 باشند آنگاه این n عضو مستقل خطی هستند چرا که ماتریسی که سطرهای آن به ترتیب V_1، V_2، ...، V_n است دارای دترمینان $\Pi_{j<i}(x_i - x_j)$ می‌باشد که عددی غیر صفر است بنابراین سطرهای این ماتریس مستقل خطی هستند.

(راه‌حل دوم): قرار دهیم $X = \{A |$ مستقل خطی است A عضوی n و هر زیرمجموعه‌ی $A \subseteq \mathbb{R}^n\}$ در این صورت X غیرتهی است و در شرایط لم زرن صدق می‌کند. A_0 را عضو ماکسیمالی از X می‌گیریم. ادعا می‌کنیم A_0 ناشمارا است که در این صورت A_0 جواب مسأله است.

در غیر این صورت فرض کنید A_0 شمارش‌پذیر باشد. اگر $v \notin A_0$ آنگاه چون $A_0 \subsetneqq A_0 \cup \{v\}$، v ترکیبی خطی از $n-1$ عضو A_0 است.

بنابراین هر بردار در $\mathbb{R}^n$ ترکیب خطی $n-1$ عضو A_0 است و چون تعداد زیرمجموعه‌های $n-1$ عضوی A_0 هم شمارش‌پذیر است پس $\mathbb{R}^n$ برابر با اجتماع تعدادی شمارا ابرصفحه است که ممکن نیست[توجه کنید که صفحه اجتماع تعدادی شمارا خط نیست. هم‌چنین فضا اجتماع تعدادی شمارا صفحه نیست و ...]

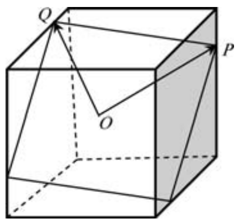
۵) فرض کنید $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ دارای این خاصیت باشد که تصویر هر زیرمجموعه‌ی همبند $\mathbb{R}^2$ تحت f همبند و تصویر هر زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی $\mathbb{R}^2$ تحت f فشرده باشد. ثابت کنید f پیوسته است.

پاسخ:

فرض کنید f در نقطه‌ای مثل $x^* \in \mathbb{R}^2$ پیوسته نباشد. در این صورت $\varepsilon > 0$ و دنباله‌ای مثل $\{x_n\}$ وجود دارد که $x_n \to x^*$ و $\varepsilon \leq |f(x_n) - f(x^*)|$. برای هر $n \geq 1$ پاره خطی که دو سر آن x_n و x^* است را در نظر بگیرید. این پاره‌خط یک مجموعه‌ی همبند است و لذا تصویر آن تحت f که شامل دو نقطه‌ی $f(x_n)$ و $f(x^*)$ است نیز همبند است. توجه کنید که $\varepsilon \leq |f(x_n) - f(x^*)|$ پس y_n ای روی پاره‌خط مذکور وجود دارد که $|f(y_n) - f(x^*)| = \frac{k}{k+1}\varepsilon$.

اکنون به وضوح دنباله‌ی $\{y_k\}$ به x^* میل می‌کند پس مجموعه‌ی $\{x^*\} \cup \{y_k | k \in \mathbb{N}\}$ فشرده است و لذا تصویر آن هم باید فشرده باشد. این ممکن نیست زیرا $|f(x^*) - f(y_k)| \to \varepsilon$ و $\{y_k\}$ زیردنباله‌ای هم‌گرا دارد که نمی‌تواند به هیچ کدام از نقاط $f(x^*)$ و $f(y_k)$ میل کند پس $f(\{x^*\} \cup \{y_k | k \in \mathbb{N}\})$ بسته نیست و لذا فشرده نیست.

۶) نشان دهید مساحت بزرگ‌ترین مربعی که می‌توان در مکعب واحد قرار داد برابر $\frac{9}{8}$ است.



پاسخ:

یک روش برای قراردادن مربعی به مساحت $\frac{9}{8}$ درون مکعب در شکل نشان داده شده است که رؤوس مربع اضلاع مکعب را به نسبت ۱ : ۳ تقسیم می‌کنند.

پیش از ادامه برای سادگی در برخی محاسبات با یک تغییر مقیاس مکعب را به شکل $[-1,1]^3$ و با طول ضلع ۲ فرض می‌کنیم. اکنون مسأله را در چند گام حل می‌کنیم: **گام اول.**

ادعا می‌کنیم که می‌توان مرکز مربع ماکسیمال را منطبق بر مرکز مکعب و برابر با O ، مبدأ مختصات گرفت زیرا اگر مربع را با S و بردار متصل کننده مرکز مربع به O را با $\vec{l}$ نشان دهیم. به دلیل تقارن مکعب $-S$ نیز درون مکعب قرار می‌گیرد ولی $-S = S + 2\vec{l}$. یعنی S و $S + 2\vec{l}$ درون مکعب واقع شده‌اند پس $S + 2\vec{l}$ نیز درون مکعب است که مربعی با ویژگی مطلوب ماست.

گام دوم.

P, Q را برابر با دو رأس مجاور از مربع مورد نظر بگیرید. از شرایط مسأله روشن است که P, Q دو نقطه از مکعب $[-1,1]^3$ هستند که $|\vec{P}| = |\vec{Q}|$ و $\vec{P} \perp \vec{Q}$ و بالعکس اگر Q, P این ویژگی‌ها را داشته باشند $P, Q, -P, -Q$ رؤوس مربعی درون مکعب را تشکیل می‌دهند. پس هدف یافتن چنین P, Q ای است که $|\vec{P}|$ ماکزیمم شود. اگر مختصات P و Q را به ترتیب (x, y, z) و (u, v, w) بنامیم شرایط فوق عبارت‌اند از:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = u^2 + v^2 + w^2 \\ xu + yv + zw = 0 \\ x, y, z, u, v, w \in [-1, 1] \end{cases} \qquad (*)$$

و هدف ماکزیمم کردن $A = x^2 + y^2 + z^2 = u^2 + v^2 + w^2$ برای همه‌ی جواب های $(*)$ است. ادعا می‌کنیم این ماکسیمم برابر با $\frac{9}{4}$ است که به عنوان مثال به ازای مقادیر $(x, y, z, u, v, w) = (1, 1, \frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}, 1)$ اتخاذ می‌شود.

گام سوم: نشان می‌دهیم که برای مربع ماکسیمال با شرایط دو گام قبلی، یکی از P یا Q روی ضلع مکعب و دیگری بر وجه مکعب واقع است: ابتدا فرض کنید هیچ کدام از P و Q بر ضلعی از مکعب قرار نداشته باشند در این صورت ابتدا با دوران کوچکی حول $\vec{Q}$، P را به داخل مکعب و سپس با دوران کوچکی حول $\vec{P}$، Q را به داخل مکعب منتقل می‌کنیم. اکنون می‌توان هر دوی $\vec{P}$ و $\vec{Q}$ را همزمان بزرگ‌تر کرد طوری که هم‌چنان داخل مکعب باقی بمانند و این با ماکسیمال بودن مربع در تناقض است. اکنون فرض کنید P بر روی ضلع مکعب باشد. اگر Q بر وجهی از مکعب نباشد یعنی اکیداً داخل مکعب است و می‌توان در صفحه گذرنده از $\vec{P}$ و ضلعی که P بر آن واقع است با دوران کوچکی P را به داخل مکعب منتقل کرد طوری که Q هم‌چنان درون مکعب بماند و مجدداً با بزرگ کردن همزمان P و Q به تناقض می‌رسیم.

نتیجه‌ی این است که می‌توان با در نظر گرفتن $-P$ به جای P و یا $-Q$ به جای Q در صورت لزوم، در $(*)$ فرض کرد $x = y = ۱$ و نیز یکی از u، v، w نیز برابر با یک هستند.

این دو حالت را در گام بعد بررسی می‌کنیم.

گام چهارم:

حالت اول: $x = y = w = ۱$

$$\begin{cases} ۱ + ۱ + z^۲ = u^۲ + v^۲ + ۱ (= A) \\ u + v + z = ۰ \end{cases}$$

معادله‌ی دوم $\Rightarrow z^۲ = (u+v)^۲ \Rightarrow ۲ + ۲uv = ۱ \Rightarrow uv = \frac{-۱}{۲}$

معادله‌ی اول $\Rightarrow |u|, |v| \geq \frac{۱}{۲} \quad , \quad A = |u|^۲ + ۱ + \frac{۱}{۴|u|^۲}$

که بیشترین مقدار خود را برای $\frac{۱}{۲} \leq |u|^۲ \leq ۱$ در $|u| = \frac{۱}{۲}$ می‌گیرد که $\frac{۹}{۴}$ است.

حالت دوم: $x = y = v = ۱$ (حالت $x = y = u = ۱$ مشابه است).

$$\begin{cases} ۱ + ۱ + z^۲ = ۱ + u^۲ + w^۲ (= A) \\ u + ۱ + zw = ۰ \end{cases}$$

معادله‌ی دوم $\Rightarrow |zw| = |u + ۱| \Rightarrow z^۲ \geq (zw)^۲ \geq (u+۱)^۲$

معادله‌ی اول $\Rightarrow ۱ + u^۲ + w^۲ \geq ۲ + (۱ + u)^۲ \Rightarrow w^۲ \geq ۲(۱ + u)$

$$|w|^۲ \geq ۲|۱ + u| = ۲|zw| \Rightarrow |z| \leq \frac{|w|}{۲} \leq \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow A \leq ۲ + \frac{۱}{۴} = \frac{۹}{۴}.$$