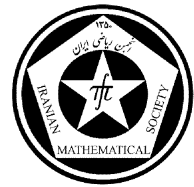




پاسخ سؤالات نوبت دوم  
سی و چهارمین مسابقه  
ریاضی دانشجویی کشور  
جلسه دوم ۸۹/۲/۲



انجمن ریاضی ایران

(۷) فرض کنید تعدادی سنگ ریزه را به  $n$  قسمت با وزنهای  $w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_n$  تقسیم کرده باشیم. بار دیگر همان سنگ ریزه‌ها را به  $n$  قسمت با وزنهای  $v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq v_n$  تقسیم می‌کنیم. نشان دهید برای هر  $1 \leq k \leq n$  داریم

$$w_1 + w_2 + \dots + w_k \leq v_1 + v_2 + \dots + v_k.$$

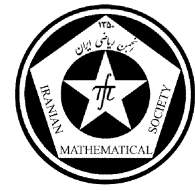
پاسخ:

می‌دانیم  $w_1 + w_2 + \dots + w_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n = A$ . دو حالت را در نظر می‌گیریم

- ۱)  $w_k \leq v_k \Rightarrow w_1 + w_2 + \dots + w_k \leq kw_k \leq kv_k \leq v_1 + v_2 + \dots + v_k$
- ۲)  $w_k > v_k \Rightarrow w_1 + w_2 + \dots + w_k = A - (w_{k+1} + \dots + w_n) \leq A - (n - k)w_k$   
 $\leq A - (n - k)v_k \leq A - (v_{k+1} + \dots + v_n) = v_1 + v_2 + \dots + v_k$



پاسخ سؤالات نوبت اول  
سی و چهارمین مسابقه  
ریاضی دانشجویی کشور  
جلسه اول ۸۹/۲/۱

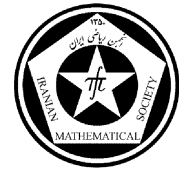


انجمن ریاضی ایران

۸) همهی اعداد حقیقی مانند  $c$  را بیابید که برای آنها تابع  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  موجود باشد که برای هر  $x \in \mathbb{R}$  داشته باشیم

$$f''(x) > f'(x) + c, \quad f'(x) > f(x) + c.$$

پاسخ:



(۹) گروه  $G$  مفروض است به طوری که در  $G$  همواره از  $ab \neq ba$  نتیجه می شود  $a^2 = b^2$ .

الف) ثابت کنید هر زیرگروه  $H$  نرمال است.

ب) مثالی از یک گروه غیر آبدلی  $G$  بیاورید که شرط بالا را داشته باشد.

پاسخ:

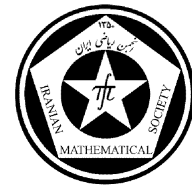
فرض کنید  $H$  زیرگروهی از  $G$  بوده،  $h \in H$  و  $g$  عضو دلخواهی در  $G$  باشد. اگر  $ghg^{-1} = h$  پس  $ghg^{-1} \in H$ . در غیر این صورت  $ghg^{-1} \neq h$  یعنی  $g$  و  $h$  جابجا نمی شوند پس  $g^2 = h^2$  هم چنین  $h$  و  $g^{-1}$  هم جابجا نمی شوند پس  $g^{-2} = h^2$  پس  $g^{-2} = g^2$  و در نتیجه  $g^4 = e$ .

به طور مشابه چون  $g$  و  $h$  جابجا نمی شوند،  $g$  و  $g^{-1}h$  هم جابجا نمی شوند و در نتیجه  $e = ghg^{-1}h$  داریم  $g^4 = e$  و استفاده از رابطه  $g^2 = (g^{-1}h)^2 = g^{-1}hg^{-1}h$  پس  $ghg^{-1} = h^{-1} \in H$  بنابراین  $H$  نرمال است.

هم چنین گروه چهارگان های همیلتونی  $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$  مثالی غیر آبدلی از گروهی است که در شرط های مسأله صدق می کند.



پاسخ سؤالات نوبت اول  
سی و چهارمین مسابقه  
ریاضی دانشجویی کشور  
جلسه اول ۸۹/۲/۱

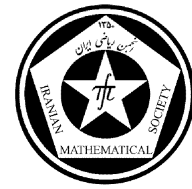


انجمن ریاضی ایران

۱۰) فرض کنید  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  تابعی تحلیلی باشد به گونه‌ای که بر زیرمجموعه‌ای نامتناهی از  $[0, 1]$  مقادیر آن حقیقی است. ثابت کنید برای هر  $x \in \mathbb{R}$ ،  $f(x) \in \mathbb{R}$ .

پاسخ:

(راه حل اول):



(۱۱) تابع  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  را یک ابر چندجمله‌ای می‌نامیم اگر دنباله‌ی  $P_1(x), P_2(x), \dots$  از چندجمله‌ای‌های با ضرایب صحیح وجود داشته باشد که به ازای هر عدد صحیح مانند  $x$  فقط تعدادی متناهی از  $P_i(x)$ ها ناصفر باشند و  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$ .

الف) اگر  $P_n(x) = x(x^2 - 1)(x^2 - 4) \dots (x^2 - n^2)$ ، نشان دهید  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$  یک ابر چندجمله‌ای است ولی هیچ چندجمله‌ای مانند  $Q(x)$  وجود ندارد که برای هر  $x \in \mathbb{Z}$ ،  $f(x) = Q(x)$ .  
ب) ثابت کنید یک ابر چندجمله‌ای ناصفر حداکثر تعداد متناهی ریشه در اعداد صحیح دارد.

پاسخ:

الف) چون هر  $m$  ریشه‌ی همه  $P_n(x)$ ها برای  $n \geq |m|$  می‌باشد پس  $P_n(x)$ ها شرط مسأله را دارا هستند. حال با برهان خلف فرض کنید یک چندجمله‌ای درجه  $k$  مثل  $Q(x)$  وجود داشته باشد به طوری که  $\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x) = Q(x)$ .

فرض کنید  $n_0$  چنان باشد که  $k - 2 < \deg P_n = 2n_0 + 1 \leq k$  بنابراین

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} P_n(x) = Q(x) - \sum_{n=1}^{n_0} P_n(x).$$

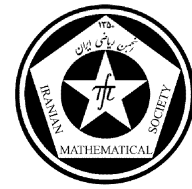
حال سمت راست تساوی یک چندجمله‌ای از درجه‌ی حداکثر  $k$  است که حداکثر  $k$  ریشه دارد ولی سمت چپ بیش از  $k$  ریشه دارد زیرا اعداد  $1, 2, \dots, k$  ریشه‌های سمت چپ تساوی هستند.

ب) فرض کنید اعداد صحیح  $a_1, a_2, a_3, \dots$  ریشه‌های ابر چندجمله‌ای  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$  باشند. برای هر عدد صحیح  $a$ ،  $P_n(a)$ ها از جایی به بعد صفر هستند. بنابراین برای هر دو عدد صحیح  $a$  و  $b$  عددی مانند  $N$  وجود دارد که برای  $n > N$ ،  $P_n(a) = P_n(b) = 0$ . بنابراین چندجمله‌ای  $P(x)$  وجود دارد به طوری که  $P(a) = f(a)$  و  $P(b) = f(b)$ .

بنابراین  $b - a \mid f(b) - f(a)$ . حال اگر برای  $b \in \mathbb{Z}$ ،  $f(b) \neq 0$  چون  $f(a_j) = 0$  آنگاه برای هر  $j$ ،  $b - a_j \mid f(b)$  پس  $f(b)$  بر بی‌نهایت عدد بخش پذیر است که این تناقض است.



پاسخ سؤالات نوبت اول  
سی و چهارمین مسابقه  
ریاضی دانشجویی کشور  
جلسه اول ۸۹/۲/۱



انجمن ریاضی ایران

- ۱۲) الف) فرض کنید  $R$  حلقه‌ای جابجایی، یک‌دار و منتهای باشد که بیش از  $\frac{2}{3}$  اعضای آن خودتوان هستند. ثابت کنید همه‌ی عناصر  $R$  خودتوان هستند.
- ب) ثابت کنید برای هر  $k$ ، حلقه‌ای منتهای با بیش از  $k$  عضو وجود دارد که دقیقاً  $\frac{2}{3}$  اعضای آن خودتوان هستند.

پاسخ:

