بسم الله الرحمن الرحیم

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

ISSN 1022-6443

سال ۱۹، شمارهٔ ۱، بهار ۱۳۷۹
شمارهٔ پیاپی: ۲۴

صاحب‌امتیاز: انجمن ریاضی ایران
مدیر مسؤول: محمدمهدی ابراهیمی
سردبیر: محمد اردشیر
ویراستار ارشد: حسین معصومی همدانی
مدیر اجرایی: سعید سیدآقا بنی‌هاشمی

ویراستار: رویا درودی
حروفچینی: TEX-پارسی ـ دفتر انجمن ریاضی ایران
همکار این شماره: فریده صمدیان

نشانی:
تهران ــ صندوق پستی ۴۱۸ـ۱۳۱۴۵
iranmath@ims.ir
http://www.ims.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی نشریهٔ علمی‌ـترویجیِ انجمن ریاضی ایران است که به چاپ و انتشارِ مطالبی می‌پردازد که هم جنبه‌های عام و فلسفیِ ریاضیات را ترویج دهند و هم بازگوکنندهٔ فرهنگ و روندِ ریاضیاتِ حاکم بر جامعهٔ ریاضی باشند. فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی از مقالات در زمینه‌های ریاضیات محض، ریاضیات کاربردی، علومِ کامپیوتر، فیزیک نظری، وکاربردهای ریاضیات در علومِ دیگر که در چارچوب زیر نوشته شده باشند استقبال می‌کند:

- ارائهٔ موضوعیْ فعال و مطرح در ریاضیات در قالبی که علاقه‌مندان به زمینه‌های پژوهشی را برای پیگیریِ موضوعِ مورد بحث آماده سازد؛
- ترجمهٔ مقاله‌هایی از نوع یاد شده در بالا یا ترجمهٔ مقالاتِ کلاسیکِ ریاضی (ترجمهٔ آزاد پذیرفته نمی‌شود)؛
- ارائهٔ موضوعاتِ آموزشی حاوی نکات و قضایا و برهانهایی ساده‌تر از آنچه در متونِ کلاسیک موجود است.

علاقه‌مندان می‌توانند سه نسخه از مقالهٔ خود را با شرایطِ زیر به نشانی دفتر مجله ارسال دارند:

- متن مقاله روی یک طرف کاغذ، یک خط در میان، و با حاشیهٔ کافیْ تایپ شده یا ترجیحاً، در دیسکتِ کامپیوتری تحت ادیتورِ «TEX-پارسی» یا «فارسی‌تک» باشد.
- فرستادنِ اصلِ مقالهٔ ترجمه شده—با ذکر نشانیِ کاملِ آن—لازم است.
- اصطلاحاتِ ریاضیِ به‌کاررفته باید بر طبقِ واژه‌نامهٔ ریاضی و آمارِ انجمن ریاضی ایران باشد و اگر لغتی در این واژه‌نامه نیست، معادلِ انگلیسیِ آن داده شود. در صورتی که مؤلف یا مترجم معتقد است اصطلاحِ خاصی از واژه‌نامه مناسب نیست باید ترجیح دادنِ اصطلاحِ پیشنهادیِ خود را توجیه کند.

هیأت تحریریه در رد، قبول، حک، و اصلاحِ مقالاتْ آزاد است و ملزم به ارایه دلایل توجیهی نیست.

- مقالات ارسالی به فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی نباید برای بررسی و چاپ به مجلات دیگر ارسال شده باشد.

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

سال ۱۹، شمارهٔ ۱، بهار ۱۳۷۹
(تاریخ انتشار: تابستان ۱۳۸۰)
شمارهٔ پیاپی: ۲۴

فهرست مطالب

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی هر سال در دو شماره (بهار و پاییز) منتشر و به اعضای حقیقی، حقوقی و مشترکین انجمن ریاضیِ ایران ارسال می‌شود.

علاقه‌مندان به عضویت حقیقی و دانشگاه‌ها، مؤسسات و کتابخانه‌ها که تمایل به عضویت حقوقی یا اشتراک سالانه دارند می‌توانند با دبیرخانهٔ انجمن ریاضی ایران تماس حاصل نمایند.

شماره‌های قبلی این مجله با هماهنگی دبیرخانه قابل فروش می‌باشند.

روی جلد:
سرگئی نوویکُف

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شمارهٔ ۲۴(بهار ۱۳۷۹)، صص. ۱ تا ۱۰

نگاهی نو به قضیهٔ پِرون-فروبینیوس

حیدر رجوی

امروز از ماتریس‌هایی صحبت خواهیم کرد که درایه‌هایشان اعداد نامنفی هستند و آنها را ماتریس‌های نامنفی خواهیم نامید. اگر تمام درایه‌های ماتریسی مثبت باشند آن ماتریس رامثبت می‌نامیم. این ماتریس‌ها مخصوصاً در نظریهٔ احتمال و پروسه‌های مارکف و جز آنها، کاربردهای فراوان دارند. ماتریس‌های تصادفی[۱] که زیرمجموعه‌ای از ماتریس‌های نامنفی را تشکیل می‌دهند آنهایی هستند که مجموعِ درایه‌های هر سطر در آنها مساوی یک است: اگر متغیری n وضع مختلف برایش ممکن باشد و احتمال گذَرش از وضعِ i به وضعِ j عدد p_{ij} باشد، ماتریس $n \times n$ با درایه‌های p_{ij} تصادفی است؛ یعنی برای هر i، $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$. بدیهی‌ترین ویژگی طیفِ هر ماتریس تصادفی آن است که همواره عدد ۱ را شامل است—در حقیقت تساویِ

$$\begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

هم مقدار ویژهٔ ۱ را نشان می‌دهد و هم بردار ویژهٔ مربوط به آن را. با اندکی کارِ بیشتر می‌توان ثابت کرد که قدرمطلقِ هیچ عضوی از طیف این ماتریس از یک بیشتر نیست. ولی این تنها بخشی از اطلاعاتی است که می‌توان در حالت کلّی از قضیهٔ کلاسیک پرون-فروبینیوس—که موضوع اصلی صحبت امروز است—به‌دست آورد.

بد نیست در ساده‌ترین حالت ممکن برای n، یعنی $n = 2$، مثالی عددی بزنیم:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

1) stochastic

همان‌طور که گفتیم ۱ در طیف A است و با توجه به اینکه اثرِ A مساوی با $\frac{۱}{۲} + \frac{۲}{۳} = \frac{۵}{۶}$ است عضو دیگر طیف را در این حالت به‌دست می‌آوریم $\alpha = \frac{۵}{۶} - ۱ = \frac{-۱}{۶}$. اکنون به توان‌های A یعنی A^kها نگاه می‌کنیم که همه مثل خود A تصادفی می‌باشند و درایهٔ $(A^k)_{ij}$ به تعبیری که در بالا به آن اشاره شد احتمال گذرِ متغیر را از وضع i به وضع j بعد از k تغییرِ وضع به‌دست می‌دهد. اگر بخواهیم ببینیم که این متغیرْ «عاقبت» به وضع متعالی می‌رسد یا نه، باید به حدِ A^k وقتی k به سمت بی‌نهایت میل می‌کند نگاه کنیم. با مقداری محاسبه—که اینجا نمی‌خواهیم انجام دهیم—می‌شود دید که

$$\lim_{k\to\infty} \begin{pmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \frac{۲}{۳} & \frac{۳}{۵} \\ \frac{۲}{۵} & \frac{۳}{۵} \end{pmatrix}$$

و حد، ماتریسی خودتوان است یعنی در تساوی $E = E^۲$ صدق می‌کند. آیا این حد همواره وجود دارد؟ پاسخ کامل به این سؤال و نظایر آن در قضیهٔ پرون-فروبینیوس نهفته است.

برای بیان صورت قضیه نیاز به یک تعریف داریم: ماتریس A را تجزیه‌پذیر خوانیم اگر یک ماتریس جایگشتیِ P وجود داشته باشد که $P^{-۱}AP$ به صورت بلوکیِ

$$\begin{pmatrix} X & Z \\ ۰ & Y \end{pmatrix}$$

باشد (به عبارت دیگر: اگر بتوان ماتریس را تنها با عوض کردن ترتیبِ بردارهای پایه به این صورتِ تازه درآورد). واضح است که ماتریس‌های مثبت تجزیه‌پذیر نیستند. اما عکس این گفته درست نیست؛ مثلاً ماتریس‌های جایگشتی دوری مانندِ

$$\begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

تجزیه‌ناپذیرند. هر ماتریس جایگشتیِ غیردوری تجزیه‌پذیر است. با استقراء ریاضی واضح است که اگر ماتریسی تجزیه‌پذیر باشد آن را می‌توان به شکل بلوکیِ زیر درآورد

$$\begin{bmatrix} X_۱ & * & * & * \\ ۰ & X_۲ & * & * \\ ۰ & ۰ & \ddots & * \\ ۰ & ۰ & ۰ & X_m \end{bmatrix}$$

که در آن بلوک‌های واقع در قطر تجزیه‌ناپذیرند و البته ممکن است بُعدهای مختلف و از جمله بعدِ یک داشته باشند. اگر تمام X_iها ۱×۱ باشند گوییم ماتریس دادهشدهٔ A کاملاً تجزیه‌پذیر است (به عبارت دیگر می‌توان ماتریس جایگشتی P را چنان پیدا کرد که $P^{-۱}AP$ مثلثی باشد).

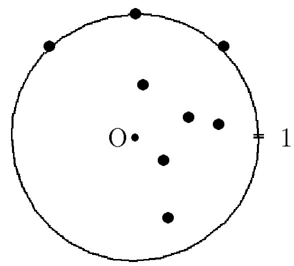
اگر طیف ماتریس T را مطابق معمول با $\sigma(T)$ نشان دهیم، توجه کنید که طیف ماتریس بلوکیِ بالا عبارت است از $\sigma(X_1) \cup \cdots \cup \sigma(X_m)$. در نتیجه بیشتر اطلاعاتی که دربارهٔ طیف یک ماتریسِ کلّی می‌خواهیم، از اطلاعاتِ مربوط به طیفِ ماتریس‌های تجزیه‌ناپذیر به‌دست می‌آیند. این مقدمه‌چینی برای قضیهٔ پرون‌ـفروبینیوس به درازا کشید، ولی به چند یادآوری هم نیاز داریم: شعاع طیفیِ ماتریس T با علامتِ $\rho(T)$ مشخص خواهد شد؛ یعنی

$$\rho(T) = \{|z| : z \in \sigma(T)\}$$

و مقصود از طیف جانبی‌ِ T مجموعهٔ آن اعضای طیف T است که بر روی دایرهٔ به مرکز مبدأ و شعاعِ $\rho(T)$ واقع شده‌اند:

$$\sigma_l(T) = \{z \in \sigma(T) : |z| = \rho(T)\}.$$

مثلاً طیف یک ماتریس کلّی که شعاع طیفی آن ۱ است ممکن است به صورت زیر باشد:



در این شکل طیف جانبی سه عضو دارد (که هرکدام—به عنوان جواب معادلهٔ مشخصهٔ ماتریس—ممکن است درجهٔ تکرارِ بیش از یک داشته باشند).

قضیهٔ پرون‌ـفروبینوس دربارهٔ ماتریس‌های نامنفی و تجزیه‌ناپذیر می‌باشد و چندین حکم دارد که همه مهم‌اند و بسیار جالبِ توجه، بخصوص که دربارهٔ ماتریس‌های دلخواه چنین حکم‌های کلّی به هیچ روی صادق نیستند.

- *شعاع طیفی A به طیف متعلق است.* (این خودش اطلاع جالبی می‌باشد؛ اما بقیه دارد:) *بردار ویژهٔ مربوط به این مقدارِ ویژهٔ A مثبت است و اگر آن را بردار یکه بگیریم، منحصر به فرد است (یعنی بردار یکهٔ ستونیِ X که همهٔ مؤلفه‌هایش مثبت می‌باشند وجود دارد که $AX = \rho(A)X$).* (در مثالِ ماتریس‌های تصادفیْ $\rho(A) = 1$، و X برداری است مثبت که تمام مؤلفه‌هایش مساوی‌اند: اگر فاصله‌ها را اقلیدسی بگیریم همگی $\frac{1}{\sqrt{n}}$ هستند.)

- *یک عدد صحیح r وجود دارد که بعد از یک جایگشتِ بردارهای پایه، A به صورت بلوکیِ دوریِ زیر در می‌آید که در آن همهٔ A_iها غیرصفرند (و نامنفی):*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & A_r \\ A_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & A_{r-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

- *r مساوی یک است اگر و تنها اگر توانی از A مثبت باشد.*

(مثال: ماتریس‌های جایگشتیِ دوری تجزیه‌ناپذیرند ولی هیچ توانی از آنها مثبت نیست. از طرف دیگر ماتریسِ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

توانِ دوم‌اش مثبت است.)

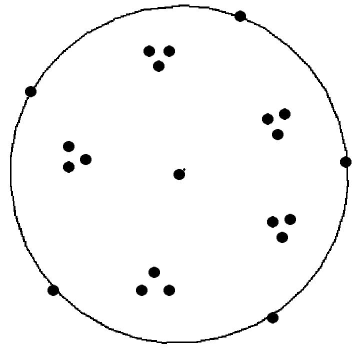
- *طیف جانبی A از رؤوسِ چندضلعی rوجهی بر روی دایرهٔ به شعاع $\rho = \rho(A)$ تشکیل شده است: $\sigma_l(A) = \{\rho e^{\frac{2\pi ik}{r}} : k = 1, \ldots, r\}$. به‌علاوه همهٔ این مقدارهای ویژه ریشه‌های سادهٔ معادلهٔ مشخصهٔ A می‌باشند.*

(مثال کوچک: ماتریس جایگشتی دوری $n \times n$ طیف‌اش فقط جانبی است و عبارت است از رووُس nضلعی منتظم روی دایرهٔ یکه. معادلهٔ مشخصه در این حالت $X^n - 1 = 0$ است و r مساویِ n.)

و بالاخره تقارنی زیبا در تمام طیف:

- *طیف A تحتِ دوران به اندازهٔ $\frac{2\pi}{r}$ حول مبدأ پایا است* ـــ در شکلِ بعدی r مساویِ S است.

این قضیه، چون هم مورد توجه ریاضی‌دانان محض بوده است و هم مورد توجه ریاضی‌دانان کاربردی، چندین اثبات مختلف دارد (علاوه بر اثبات‌های پرون و فروبینیوس). مثلاً اثبات‌هایی وجود دارند بر مبنای نظریهٔ گراف‌ها، بر مبنای نظریهٔ بازی‌ها، و همچنین بر مبنای قضیهٔ براؤر در وجود نقاطِ ثابت. هیچ کدام از اثبات‌ها کوتاه نیستند و ما در صددِ آن نیستیم که قضیه را در این نشست ثابت کنیم و تنها به تعمیمی نو از آن خواهیم پرداخت. اما قبل از آن بگذارید از روی آن جواب سؤالی را که در بالا راجع به حد توان‌های A مطرح شد بدهیم.



ماتریس تجزیه‌ناپذیر و نامنفی A را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $\rho(A) = ۱$. (توجه کنید که اگر $\rho(A)$ بیشتر از یک باشد حد وجود ندارد و اگر کمتر از یک باشد حد صفر است و غیرجالب.) ادعا این است که با همان عدد صحیحِ r که در صورت قضیهٔ بالا ذکر شده،

$$\lim_{m\to\infty} A^{rm} = E$$

که در آن E خودتوان است و دارای رتبهٔ r. در صورتی حدِ $\lim_{m\to\infty} A^m$ وجود خواهد داشت که $r = ۱$. برای اثباتِ این مدعا توجه کنید که A متشابه است با ماتریسی به شکلِ

$$A_۱ = \begin{pmatrix} D & ۰ \\ ۰ & B \end{pmatrix}$$

که در آن $D = \mathrm{diag}(۱, \alpha, \alpha^۲, \dots, \alpha^{r-۱})$، $\alpha = e^{\frac{۲\pi i}{r}}$، و $\rho(B) < ۱$. البته $A_۱$ نامنفی نیست. علتِ آنکه D قطری است، آن است که مطابق قضیه، همهٔ این مقادیر ویژه ریشه‌های سادهٔ معادلهٔ مشخصه هستند؛ برای یافتن $A_۱$ هم از قضیه اولیهٔ جبر خطی استفاده کرده‌ایم. اکنون چون $D^r = I$،

$$A_۱^r = \begin{pmatrix} I & ۰ \\ ۰ & B^r \end{pmatrix}$$

و چون $\rho(B) < ۱$، توان‌های آن به سمت صفر میل می‌کنند (چون شعاع طیفیِ A مساوی است با $(\lim_{k\to\infty}(A^k))^{\frac{۱}{k}}$). در نتیجه

$$\lim_{m\to\infty} A_۱^{rm} = \begin{pmatrix} I & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} = E_۱$$

و $E_۱^۲ = E_۱$. یادمان هست که $A = SA_۱S^{-۱}$؛ پس

$$\lim_{m\to\infty} A^{rm} = S(\lim_{m\to\infty} A_۱^{rm})S^{-۱} = SE_۱S^{-۱}$$

و معلوم می‌شود که $E = SE_1S^{-1}$ ماتریسِ خودتوانِ مطلوب است. پس مثلاً اگر از یک ماتریسِ تصادفی A که توانی از آن مثبت است شروع کنیم همواره حد مورد نظر که وضع متعادل دستگاه را به دست می‌دهد وجود دارد.

اغلبِ حکم‌های قضیهٔ پرون-فروبینیوس را می‌توان به نیم‌گروه‌های ماتریس‌های نامنفی تعمیم داد. این تعمیم، خود قضیهٔ کلاسیک را هم به‌اصطلاح «در پرسپکتیو می‌گذارد» و اجزاء طبیعی اثبات را از هم جدا می‌کند و نقش آنها را آشکارتر می‌سازد.

مقصود از یک نیم‌گروه از ماتریس‌ها مجموعه‌ای از آنها است که تحت ضرب بسته باشد. مثلاً به‌آسانی می‌توان دید که مجموعهٔ ماتریس‌های تصادفیْ نیم‌گروه تشکیل می‌دهند. نخست توجه کنید که طبیعی‌تر است به خود قضیهٔ کلاسیک هم به صورت نیم‌گروهِ پدیدآمده از یک ماتریسِ نامنفیِ A نگاه کنیم—در حقیقت بهتر است نیم‌گروه بزرگ‌تری را که عبارت باشد از بستارِ $\{cA^m : c \in \mathbb{R}^+, m \in \mathbb{N}\}$ در نظر بگیریم، چرا که ماتریسِ خودتوان مطلوب ما که نقش اساسی و طبیعی در مطالعهٔ A دارد حدی از توان‌های $\frac{1}{\rho(A)}A$ است و در این نیم‌گروه بزرگ قرار دارد. توجه کنید که این نیم‌گروه جابه‌جایی است. به‌عنوان تمرینی ساده می‌توان ثابت کرد که ماتریس خودتوان E در این نیم‌گروه منحصر به فرد است.

تعریف. نیم‌گروه $\mathcal{S}$ از ماتریس‌های $n \times n$ را تجزیه‌پذیر خوانیم اگر بتوان بعد از یک جایگشتِ بردارهای یکه، همهٔ اعضای آن را به‌طور هم‌زمان به صورتِ

$$\begin{pmatrix} X & Z \\ 0 & Y \end{pmatrix}$$

در آورد.

واضح است که $\mathcal{S}$ تجزیه‌پذیر است اگر و تنها اگر $\overline{\mathbb{R}^+\mathcal{S}}$ تجزیه‌پذیر باشد؛ پس برای بقیهٔ این بحث فرض می‌کنیم:

$\mathcal{S} = \overline{\mathbb{R}^+\mathcal{S}}$ و $\mathcal{S}$ نیمگروهی تجزیه‌ناپذیر از ماتریسهای نامنفی است.

فهرستِ زیر شرط‌های مختلفی را نشان می‌دهد که ضعیف‌تر و ضعیف‌تر می‌شوند و اولینِ آنها همان شرطِ قضیهٔ کلاسیک است.

۱. $\mathcal{S}$ از یک ماتریس پدید آمده است.

۲. $\mathcal{S}$ جابه‌جایی است.

۳. $\mathcal{S}$ نرمال است (یعنی برای هر عضو A از $\mathcal{S}$، $A\mathcal{S} = \mathcal{S}A$).

۴. عضو خودتوان کمینه در $\mathcal{S}$ منحصر به فرد است. (عضو خودتوانِ کمینه یعنی عضوی مثل $E = E^2$ که دارای کمترین رتبهٔ غیرصفر در $\mathcal{S}$ باشد.)

شرط را ضعیف‌تر از این هم می‌توان کرد ولی بگذارید قضیه را برای (۴) ذکر کنیم.

قضیه. *فرض کنیم $\mathcal{S}$ دارای عضو خودتوانِ کمینهٔ منحصر به فرد باشد. در این صورت*

- *بردار مثبت یکهٔ منحصر به فرد X وجود دارد که تمام اعضای $S \in \mathcal{S}$ در تساویِ*

$$SX = \rho(S)X$$

صدق می‌کنند. (توجه کنید که شعاع طیفی هر عضوِ $\mathcal{S}$ متعلق است به طیف جانبی آن عضو.)

- *یک عدد صحیح r وجود دارد که بعد از یک جایگشتِ بردارهای پایه، همهٔ $\mathcal{S}$ به‌طور هم‌زمان به صورت بلوکیِ $r \times r$ درمی‌آید با خاصیت زیر:*
  در هر عضوی هر ستونِ بلوکی فقط یک بلوکِ غیرصفر دارد و همین طور هر سطر بلوکی.
  (مثلاً اگر r سه باشد عضوهای مختلف ممکن است به این شکل دربیایند:

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 \\ 0 & A_3 & 0 \end{pmatrix} \text{ و } \begin{pmatrix} 0 & B_1 & 0 \\ B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{pmatrix}$$

و جز آنها. توجه کنید یک عضوِ تنها ممکن است تجزیه‌پذیر باشد؛ تمامِ نیم‌گروه است که همزمان تجزیه‌پذیر نیست.)

- *r رتبهٔ ماتریسِ خودتوانِ کمینهٔ منحصر به فردِ $\mathcal{S}$ است. این عدد مساوی یک است اگر و تنها اگر $\mathcal{S}$ عضو مثبت داشته باشد.*

- *هر عضو $\mathcal{S}$ دست‌کم r مقدار ویژهٔ جانبی دارد.*

- *هر عضوی از $\mathcal{S}$ که بلوک‌هایش شکل دوری دارد طیف‌اش تحتِ دوران به اندازهٔ $\frac{2\pi}{r}$ حول مبدأ پایا است.*

همان طور که گفته شد اثبات را نمی‌شود کوتاه کرد ولی می‌خواهم چند کلمه راجع به نکات اساسیِ اثبات بگویم.

۱. نخست باید تحقیق کرد که عضوِ خودتوانِ کمینهٔ E در $\mathcal{S}$ به مرکز $\mathcal{S}$ متعلق است، یعنی برای تمام اعضای S از $\mathcal{S}$، $SE = ES$، و بعد با استفاده از تجزیه‌ناپذیریِ $\mathcal{S}$ این عضوِ خودتوان را به صورت بلوکیِ زیر درآورد:

$$E = \begin{bmatrix} E_1 & & & 0 \\ & E_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & E_r \end{bmatrix}$$

که در آن E_1 و E_2 و ... و E_r همه خودتوان و مثبت و از رتبهٔ یک هستند.

۲. با استفاده ازکمینه بودنِ E ثابت می‌شود که اگر صفر را از نیم‌گروهِ

$$\mathcal{S} = E\mathcal{S}E$$

به‌در کنیم این نیم‌گروه به گروه تبدیل می‌شود. در حقیقت اگر اعضای $\mathcal{S}_\circ - \{\circ\}$ را به بُردِ E (که تحتِ همهٔ $\mathcal{S}_\circ$ زیرفضایی ناوردا است) تحدید کنیم، این گروه را می‌شود با ماتریس‌های نامنفیِ $r \times r$ نمایش داد.

۳. به‌آسانی می‌شود ثابت کرد که اگر یک مجموعهٔ $\mathcal{G}$ از ماتریس‌های وارون‌پذیرِ نامنفیْ گروه تشکیل دهد، هر عضوی از آن در هر ستون و هر سطرش درست یک درایهٔ غیرصفر دارد: از وارون‌پذیری نتیجه می‌شود که هر سطر و هر ستون اقلاً یک درایهٔ مثبت دارد؛ فرض‌کنیم سطری از عضو A، مثلاً سطر اولِ آن، دو درایهٔ مثبتِ $(A)_{1i}$ و $(A)_{1j}$ دارد. در این صورت این درایه‌های عضوِ وارونِ A همگی صفر خواهند بود: $(A^{-1})_{ik}$ و$(A^{-1})_{jk}$، که $k \geq 2$ (به درایه‌های غیرقطریِ AA^{-1} نگاه کنید). از اینجا نتیجه می‌شود که سطرهای i و j در A^{-1} تنها درایه‌های اول‌شان غیرصفرند—به‌عبارت دیگر A^{-1} وارون‌پذیر نیست. این تناقض مدعا را ثابت می‌کند.

۴. به‌عنوان تمرینی جالب می‌توان دید که اگر $\mathcal{G}$ در پاراگراف بالا تجزیه‌ناپذیر و فشرده باشد در حقیقت بعد از یک تشابه هم‌زمان یک زیرگروه جایگشتی است. به عبارت دیگر یک ماتریس قطری Tی وارون‌پذیر نامنفی وجود دارد که $T^{-1}\mathcal{G}T$ زیرگروه ماتریس‌های جایگشتی می‌باشد. چون تمام ماتریس‌های جایگشتیِ $r \times r$ بردار e را که درایه‌هایش همه $\frac{1}{\sqrt{r}}$ می‌باشند ثابت نگه می‌دارند نتیجه می‌شود که تمام اعضای $\mathcal{G}$ بردار $X = Te$ را ثابت نگه می‌دارند.

۵. باید اثبات کرد که S در $\mathcal{S}$ هر چه باشد $\rho(S) = \rho(ESE)$.

۶. بالاخره برمی‌گردیم به پاراگراف (۲)ی بالا و $\mathcal{S}_\circ - \{\circ\}$ را با تقسیمِ هر عضو به شعاعِ طیفی‌اش فشرده می‌کنیم و تحدید گروه حاصل به بردِ E را گروه $\mathcal{G}$ می‌نامیم. اکنون با استفاده از پاراگرافِ (۴) می‌بینیم که $EX = X$، و S هر عضوِ $\mathcal{S}$ که باشد،

$$SX = SEX = SE^{2}X = ESEX = \rho(ESE)X = \rho(S)X$$

و اثباتِ آنکه X منحصربه فرد است آسان است.

۷. یکی دیگر از مطالب نسبتاً ساده‌ای که در اثبات قضیهٔ بالا به‌کار می‌رود آن است که هر نیم‌گروهِ ماتریس‌های نامنفیِ پوچ‌توانْ تجزیه‌پذیر است و در حقیقت کاملاً تجزیه‌پذیر می‌باشد. برای اثبات آن اول تحقیق می‌کنیم که تمام درایه‌های قطریِ هر عضوِ این نیم‌گروه صفر است و بعد ترتیب جدیدی برای اعداد صحیح مثبت تعریف می‌کنیم:

> $i \prec j$ اگر و تنها اگر نیم‌گروهْ اعضایی مانند A_1 و A_2 و ... و A_m داشته باشد و اعداد صحیح مثبتی مانند k_1 و k_2 و ... و k_{m-1} وجود داشته باشند که درایه‌ها در رابطهٔ زیر

صدق کنند:

$$(A_1)_{i,k_1}(A_2)_{k_1,k_2},\cdots(A_m)_{k_{m-1},j} > 0.$$

ادعا آن است که اگر $j \prec i$، نمی‌توان داشت $i \prec j$: وگرنه اعضایی مانند B_1 و B_2 و ...
و اعداد صحیح مثبت l_1 و l_2 و ... وجود خواهند داشت که در رابطهٔ زیر صدق کنند:

$$(B_1)_{j,l_1}(B_2)_{l_1,l_2},\cdots(B_p)_{l_{p-1},i} > 0$$

و از پهلوی هم نهادن دو رابطهٔ بالا معلوم خواهد شد که عضوِ

$$A_1A_2\cdots A_mB_1B_2\cdots B_p$$

در نیم‌گروهْ درایهٔ (i,j)ی غیر صفر دارد. این تناقض ادعا را ثابت می‌کند. اکنون می‌توان به‌آسانی نتیجه گرفت که اگر بردارهای پایه را به ترتیبِ جدید بچینیم درایه‌های زیرِ قطر در هر عضوی صفرند.

بیشتر از این دربارهٔ اثبات صحبت نمی‌کنیم. قضیهٔ بالا را می‌توان تعمیم داد به اپراتورهای فشرده روی فضاهای با بعد نامتناهی. تمام این تعمیم به‌جز آنچه که در پاراگراف (۷) بالا گفتیم قبلاً ممکن بود؛ تعمیمِ کاملِ (۷) به فضاهای باناخ تنها بعد از قضیهٔ توروسکی که در سال ۱۹۹۹ ثابت شد امکان پذیرفت.

در بارهٔ فضاهای بابعد نامتناهی به بحث مختصری در یکی از حالات خاص اکتفا می‌کنیم. فضای معمولی لبگِ $\mathcal{X} = L^p[0,1]$ را که در آن $1 \leq p < \infty$، درنظر می‌گیریم. بنا به تعریف، اپراتورهای نامنفیِ $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ آنهایی هستند که تابع‌های نامنفی را به تابع‌های نامنفی می‌برند. (مقصود از تابع نامنفیِ f در $\mathcal{X}$ تابعی است که تقریباً در همه جا نامنفی باشد.) اگر Y یک زیرمجموعهٔ بورلِ $[0,1]$ بوده $Z = [0,1] - Y$، به‌طور طبیعی نتیجه می‌شود $L_p[0,1] = L_p(Y) \bigoplus L^p(Z)$، و هر اپراتور روی $\mathcal{X}$ را می‌توان نسبت به این تجزیهٔ فضا به صورت ماتریسِ

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

نوشت. نیم‌گروه $\mathcal{S}$ از اپراتورهای نامنفی راتجزیه‌پذیر نامیم اگر زیرفضایی از نوع $L^p(Y)$ تحت همهٔ اعضای $\mathcal{S}$ ناوردا باشد—یعنی ماتریس‌های «بلوکی»ی $\mathcal{S}$ به‌طور هم‌زمان به صورت (2×2)ی بالا، که در آن $C = 0$، باشند.

اکنون می‌توانید حدس بزنید که تعمیم قضیهٔ بالا برای نیم‌گروه $\mathcal{S}$ از اپراتورهای فشردهٔ نامنفی چه صورتی پیدا می‌کند. مثلاً در حکم اول، بردار یکهٔ X تابعی است مثبت (یعنی تقریباً برای همهٔ $t \in [0,1]$، $X(t) > 0$) که برای هر $S \in \mathcal{S}$،

$$SX = \rho(S)X$$

و X منحصر به فرد است (یعنی هر X_1 دیگری در این رابطه صدق کند تقریباً همه‌جا مساوی X می‌باشد). در حکم دوم، به جای جایگشتْ از وجودِ r زیرمجموعهٔ بورِل Y_1 و ... و Y_r با اندازه‌های مثبت و مجزا از همدیگر سخن می‌گوییم که در رابطهٔ

$$[0, 1] = Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots \cup Y_r$$

صدق کنند. حکم سوم به‌طور «مجانبی» درست است و حکم‌های بعد بدون تغییر.

قضیهٔ زیبای کلاسیک نخست در سال ۱۹۰۷ به وسیلهٔ پرون برای ماتریس‌های مثبت و سپس در سال ۱۹۱۲ توسط فروبینیوس برای ماتریس‌های نامنفی ثابت شده است. اثبات‌های استاندهٔ این قضیهٔ زیبا را در بسیاری از کتاب‌ها، مثلاً در [۳] و [۵] می‌توان دید. برای اثباتی مبتنی بر نظریهٔ گراف‌ها به [۲] و برای اثبات دیگری بر اساس نظریهٔ بازی‌ها به [۱] می‌توان مراجعه کرد. برای اثباتِ کامل قضیه‌ای که در این گفتارِ توصیفی آمده و تعمیم‌های گوناگون آن به مأخذ جدید [۴] می‌توان نگاه کرد.

مراجع

[1] R.B. Bapat and T.E.S. Raghavan, *Nonnegative Matrices and Applications,* EMA 64, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

[2] A. Berman and R.J. Plemmons, *Nonnegative Matrices in Mathematical Sciences,* Academic Press, New York, 1979.

[3] H. Minc, *Nonnegative Matrices,* John Wiley & Sons, New York, 1988.

[4] H. Radjavi and P. Rosenthal, *Simultaneous Triangularization,* Universitext, Springer, New York, 2000.

[5] H. H. Schaefer, *Banach Lattices and Positive Operators,* Springer, New York, 1974.

حیدر رجوی

Heydar Radjavi, Department of Mathematics, University of New Hampshire, Durham, NH 03824, USA

پست الکترونیک: radjavi@mathstat.dal.ca

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شمارهٔ ۲۴(بهار ۱۳۷۹)، صص. ۱۱ تا ۲۰

تعمیمهای تعویض‌ناپذیرِ ریاضیات*

ب.اِ. جانسن

۱. مقدمه

در بیان ریاضی نظریهٔ کوانتم، کمّیت‌هایی مانند a_i و b_i معرفی می‌شوند که در رابطهٔ $a_ib_i - b_ia_i = hI$ صدق می‌کنند. در اینجا h ثابت پلانک است و برای پدیده‌های بزرگ‌مقیاس، بسیار کوچک می‌باشد. اگر به جای آن صفر بگذاریم دستگاه تعویض‌پذیر شده معادلاتِ نظریهٔ کوانتم به معادلات فیزیک کلاسیک تبدیل می‌شوند. کمّیت‌های a_i و b_i عملگرهایی روی فضای هیلبرت هستند (هرچند که در واقع این عملگرها کراندار نیستند) و فون نویمان را به مطالعهٔ جبرهای تعویض‌ناپذیر عملگرها رهنمون شدند. در طی ۵۰ سالِ گذشته نظریه‌ای غنی گسترش یافته است. هنگامی که جنبه‌های مختلف این نظریه به حالت تعویض‌پذیر محدود شوند، بر حسب مورد، به توپولوژی، نظریهٔ اندازه، دستگاه‌های دینامیکی، نظریهٔ مجموعه‌ها، و احتمالاً بسیاری چیزهای دیگر تبدیل می‌شوند. از این رو جبرهای عملگرها تعمیم‌هایی تعویض‌ناپذیر از همهٔ این شاخه‌های ریاضیات فراهم می‌کنند. تأثیر حالت تعویض‌پذیر، به‌ویژه در کارهای اولیهٔ هر حوزه‌ای، بارز بوده است، ولی پدیده‌هایی وجود دارند که دارای هیچ مشابه تعویض‌پذیری نیستند.

هر C^*ـجبر عبارت است از جبری از نگاشت‌های خطی کراندار، یعنی پیوسته، که تحت نُرمِ عملگر که در آن سوپریموم روی همهٔ ξهای متعلق به H با شرط $\|\xi\| = 1$ گرفته شده است، و همچنین تحت برگشتِ $a \mapsto a^*$ که با $\langle a^*\xi, n\rangle = \langle \xi, an\rangle$، $(\xi, n \in H)$، تعریف می‌شود، بسته باشد. اگر H با بعد متناهی باشد آنگاه، با انتخاب یک پایهٔ متعامد یکه، عملگرهای روی H با ماتریس‌ها متناظر می‌شوند،

*) B.E. Johnson, "Non-commutative generalizations of mathematics," *Bull. London Math. Soc.*, **14** (1982), 465-417.

این مقاله متنِ خطابهٔ رئیس انجمن ریاضی لندن است که در سال ۱۹۸۲ میلادی در پایان دورهٔ دوسالهٔ ریاست او بر انجمن خطاب به مجمع عمومی انجمن ایراد شده است.

و برگشت صرفاً عبارت خواهد بود از گرفتنِ ترانهادهٔ مزدوج. در این حالت اگر $\mathfrak{A}$ یک C^*ـجبر روی H باشد، با گرفتن یک پایهٔ مناسب، $\mathfrak{A}$ اساساً مجموع مستقیمی از تعدادی متناهی از جبرهای ماتریسی خواهد بود. هرچند که عملگرِ نرمْ تابعِ خوش‌تعریفی از اعضای ماتریسی است ولی کار کردن با این رابطهٔ تابعی پیچیده است.

مفهوم C^*ـجبر را به‌طور مجرد نیز می‌توان تعریف کرد. هر C^*ـجبر عبارت است از یک جبر باناخ دارای یک برگشتِ مزدوجِ خطیِ $a \mapsto a^*$ که به ازای هر $a \in \mathfrak{A}$ در شرطِ $\|a^*a\| = \|a\|^2$ صدق می‌کند. قضیهٔ مشهور گلفاند‌ـنیمارک [۴، قضیهٔ ۲.۶.۱] می‌گوید که چنین جبری به طور طولپا با جبری از عملگرهای روی یک فضای هیلبرتِ H *ـیکریخت است. (H به هیچ وجهی یکتا نیست.) مقدماتی‌ترین مثال‌های C^*ـجبرها عبارت‌اند از $\mathcal{L}(H)$، جبر همهٔ عملگرهای کراندار روی H؛ $\mathscr{LC}(H)$، جبر عملگرهای فشرده روی H، یعنی آنهایی که می‌توانند در نُرم به‌وسیلهٔ عملگرهای با رتبهٔ متناهی تقریب زده شوند، و $C(X)$، که هم‌اکنون آن را توصیف می‌کنیم. اگر یک فضای فشردهٔ هاسدورف X را در نظر بگیریم، می‌توانیم جبر $C(X)$ شامل همهٔ توابع پیوستهٔ $X \to \mathbb{C}$ را که در آن ضرب به طور نقطه‌ای تعریف می‌شود، تشکیل دهیم. با اختیار نرم سوپریمومی و تعریفِ $f^*(x) = (f(x))^-$ (برای $x \in X$ و $f \in C(X)$) این یک C^*ـجبر تعویض‌پذیر خواهد بود. نمایش این جبر به عنوان جبری از عملگرها روی یک فضای هیلبرت آسان است‌ــکافی است اندازهٔ مثبت دلخواهی مانند μ را روی X اختیار کنید، که به ازای آن هر مجموعهٔ بازِ ناتهی دارای اندازهٔ مثبت باشد و $C(X)$ روی $L^2(\mu)$ با ضرب نقطه‌ای عمل کند. قضیهٔ گلفاند‌ـنیمارکِ دیگری [۴، قضیهٔ ۱.۴.۱] می‌گوید که این تناظر در جهت عکس نیز برقرار است، یعنی هر C^*ـجبرِ یکدار به ازای Xمناسبی، با $C(x)$ به‌طور طولپا *ـیکریخت است. این بار یکتایی نیز برقرار است، یعنی X در حد همسانریختی یکتا است. بنابراین C یک تابعگون از ردهٔ فضاهای هاسدورفِ فشرده با نگاشتهای پیوسته به روی ردهٔ C^*ـجبرهای تعویض‌پذیرِ یکدار با *ـهمریختی‌های جبری است.

۲. تعمیم‌های تعویض‌ناپذیرِ توپولوژی جبری

از آخرین جملهٔ بخش قبل نتیجه می‌شود که اصولاً هر گزاره‌ای دربارهٔ فضاهای هاسدورفِ فشرده دارای یک بیانِ جبریِ هم‌ارز بر حسب C^*ـجبرهای تعویض‌پذیر است؛ مثلاً، همبندیِ X با اینکه $C(X)$ هیچ خودتوانِ غیر بدیهی‌ای نداشته باشد هم‌ارز است. توسیع چنین گزاره‌هایی به C^*ـجبرهای تعویض‌ناپذیرْ توسیع‌های مورد نظر ما را فراهم می‌کند. البته همهٔ گزاره‌ها را نمی‌توان به این روش تعمیم داد و این تعمیم‌ها یکتا نیستند.

گروه‌های مانستگی چِخ $H^0(X, \mathbb{Z})$ و $H^1(X, \mathbb{Z})$ به آسانی توسیع می‌یابند. اگر X یک فضای هاسدورفِ فشرده باشد، $H^0(X, \mathbb{Z})$ صرفاً عبارت است از گروه جمعیِ توابع پیوستهٔ $X \to \mathbb{Z}$. این را می‌توان به عنوان گروه آبلی تولیدشده به‌وسیلهٔ اعضای e_Y، که Yها زیرمجموعه‌هایی باز بسته از X هستند، با درنظرگرفتن رابطهٔ $e_Y + e_z = e_{Y \cup Z}$، هرگاه که $Y \cap Z = \emptyset$، بیان کرد. به زبانِ $C(X)$ نیز همان

تعریف را، با جایگزینی مجموعه‌های Y و Z با خودتوان‌های $P,Q\in C(X)$ و جایگزینی $Y\cap Z=\emptyset$ با $PQ=\circ$، داریم. هرچند که اکنون تعریف به صورتی است که می‌تواند به همهٔ C^*ـجبرها گسترش یابد ولی این گسترشِ چندان مفیدی نیست. اگر $\mathfrak{A}$ را C^*ـجبری با عضو یکهٔ ۱ بگیریم آنگاه $u\in\mathfrak{A}$ یکانی است اگر $u^*u=1=uu^*$؛ یعنی اگر $\mathfrak{A}$ به عنوان عملگرهای روی H عمل کند آنگاه u یک طولپاییِ وارون‌پذیر روی H است. عضوهای یکانی $\mathfrak{A}$ تحت ضرب تشکیل یک گروه می‌دهند. دو تصویر p و q در $\mathfrak{A}$، یعنی اعضایی مانند $p,q\in\mathfrak{A}$ که $p^*=p=p^2$ و $q^*=q=q^2$، به طور یکانی هم‌ارز هستند اگر یک عضو یکانی u وجود داشته باشد که $q=u^*pu$. این رابطه‌ای هم‌ارزی است؛ مولدهای e_P از $H^\circ(\mathfrak{A})$ به‌وسیلهٔ رده‌های هم‌ارزیِ P اندیس‌گذاری شده‌اند و از رابطهٔ $e_p+e_Q=e_R$ پیروی می‌کنند هرگاه $p\in P$ و $q\in Q$ وجود داشته باشند که $pq=\circ$ و $p+q\in R$. هنگامی که $\mathfrak{A}$ تعویض‌پذیر باشد رده‌های هم‌ارزیْ مجموعه‌هایی تک‌عضوی هستند و تعریف اولیه به‌دست می‌آید. اگر $\mathfrak{A}$ C^*ـجبری بدون عضوِ یکه باشد می‌توانیم با الحاق یک عضو یکه C^*ـجبرِ $\mathfrak{A}\oplus\mathbb{C}1$ را بسازیم—در این صورت هم‌ارزیِ یکانیِ تصویرها در $\mathfrak{A}$ با استفاده از اعضای یکانی $\mathfrak{A}\oplus\mathbb{C}1$ تعریف می‌شود. به عنوان توضیح، هرگاه $\mathfrak{A}=\mathscr{LC}(H)$ (که H دارای بعد نامتناهی است) دو تصویر هم‌ارز هستند اگر و تنها اگر دارای بعد یکسان باشند و اگر e_n مولد متناظر با تصویرهای nبعدی باشد آنگاه $e_m+e_n=e_{m+n}$ که در نتیجه $H^\circ(\mathfrak{A})=\mathbb{Z}$. این رابطهٔ بین H° و نظریهٔ بعد شایع است ولی همه جا برقرار نیست—مثلاً $H^\circ(\mathcal{L}(H))=\circ$. تعریف H^1 حتی از این هم آسان‌تر است. اگر X فضایی فشرده و هاسدورف باشد، $H^1(X,\mathbb{Z})$ گروهِ رده‌های هم‌ارزیِ هوموتوپیِ توابع پیوستهٔ $X\to\{z: z\in\mathbb{C}, |z|=1\}$ (تحت عمل ضربِ نقطه‌ایِ نماینده‌ها) است. چنین توابعی گروه یکانی $\mathscr{U}(\mathfrak{A})$ مربوط به $\mathfrak{A}=C(X)$ را تشکیل می‌دهند. این گروه همبند موضعی است (اگر $\|u-v\|<2$، $\|I-u^*v\|<2$ پس بنا بر نظریهٔ طیفی $a=-i\log u^*v$ موجود است و $e^{ia}=u^*v$ بنابراین $\{ue^{ita}: \circ\le t\le 1\}$مسیری از u به v است)، بنابراین $\mathscr{U}_\circ(\mathfrak{A})$، مؤلفهٔ همبند $\mathfrak{A}(\mathfrak{A})$ در توپولوژی نرم، باز و بسته است و رده‌های هم‌ارزیِ هوموتوپیْ هم‌رده‌های $\mathscr{U}_\circ(\mathfrak{A})$هستند. از این رو با تعریفِ $H^1(\mathfrak{A})=\mathscr{U}(\mathfrak{A})/\mathscr{U}_\circ(\mathfrak{A})$ به دست می‌آوریم $H^1(C(X))=H^1(X,\mathbb{Z})$ و توسیع مورد نظر به جبرهای تعویض‌ناپذیر فوراً حاصل می‌شود. در مورد جبرهای بدون یکه قرار می‌دهیم $H^1(\mathfrak{A})=H^1(\mathfrak{A}\oplus\mathbb{C}1)$.

می‌توانستیم $H^1(\mathfrak{A})$ را به‌جای اعضای یکانی بر حسب اعضای وارون‌پذیر تعریف کنیم، زیرا اگر a وارون‌پذیر باشد، آنگاه $a=su$، که در آن u یکانی، و s یک عضو وارون‌پذیر مثبت است که در نتیجه $\{s^tu: \circ\le t\le 1\}$ مسیری از u به a است. گروه‌های $H^1(\mathcal{L}(H))$ و $H^1(\mathcal{LC}(H))$ بدیهی هستند. امّا اگر جبر خارج قسمتی $\mathcal{Q}=\mathcal{L}(H)/\mathcal{LC}(H)$ (موسوم به جبر کالکین، که نامگذاری آن به افتخار ج.و. کالکین[1] است که اولین بار C^*ـجبر بودنِ آن را نشان داد) را تشکیل دهیم آنگاه عضوی مانند a' از $\mathcal{Q}$ وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر پیش‌نگاره‌ای مانند a در $\mathcal{L}(H)$ داشته باشد که برای آن $b\in\mathcal{L}(H)$ موجود باشد به‌طوری که فشرده$+I=ab$، یعنی a یک عملگر فردهلم باشد. عملگرهای

1) J.W. Calkin

a^*a و aa^* عملگرهای مثبت خودالحاقی هستند که اعضای وارون‌پذیر در $\mathcal{Q}$ را می‌دهند و بنابراین دارای فضاهای پوچ با بعد متناهی N و N^* هستند. اندیس a برابر است با $\dim N - \dim N^*$. اگر a را با پیش‌نگارهٔ دیگری از همان عضوِ جبر کالکین جایگزین کنیم آنگاه $\dim N^* - \dim N$ شاید تغییر کند ولی اندیس تغییر نمی‌کند. نگاشت اندیس، یک یکریختیِ $H^1(2) \to \mathbb{Z}$ را پدید می‌آورد.

هر چند H^0 و H^1 تعمیم‌های تعویض‌ناپذیر مناسبی را از گروه‌های چخ فراهم می‌کنند، کارکردن با آنها مشکل است زیرا H^n (برای $n \geq 2$) تعریف نشده است، پس دنبالهٔ دقیق طویلی از مانستگی وجود ندارد. بنابراین روش مرسومِ ساختنِ مانستگیِ یک جبر از ایده‌آل‌ها و جبرهای خارج قسمتیِ آن در دسترس نیست. Kـنظریه بر این مشکل فائق می‌آید. اگر H و K فضاهای هیلبرت باشند، در این صورت $H \otimes K$، فضای هیلبرتِ حاصل از حاصل‌ضربِ تانسوری، را می‌توان تعریف کرد؛ اگر به ازای اندازه‌های μ و νای $H = L^2(\mu)$ و $K = L^2(\nu)$، آنگاه $H \otimes K$ برابر است با $L^2(\mu \times \nu)$ ، و اگر $\xi \in H$ و $\eta \in K$، آنگاه $\xi \otimes \eta$ عبارت است از تابعِ $\xi(s)\eta(t)$. اگر $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ را به‌ترتیب C^*ـجبرهایی فرض کنیم که روی H و K عمل می‌کنند آنگاه حاصل‌ضرب تانسوری C^*ـتقلیل یافتهٔ $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ عبارت است از C^*ـجبری روی $H \otimes K$ که به وسیلهٔ عملگرهای$(a \in \mathfrak{A}, b \in B, \xi \in H, \eta \in K)$ $\xi \otimes \eta \longmapsto a\xi \otimes b\eta$ تولید می‌شود. اگر $\mathfrak{B}$ جبر ماتریس‌های مختلطِ $n \times n$ باشد در این صورت $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ جبر ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌های متعلق به $\mathfrak{A}$ است. حاصل‌ضرب تانسوریِ $\mathfrak{A} \otimes \mathcal{LC}(H)$ عبارت است از بَستارِ مجموعهٔ ماتریس‌های نامتناهی با درایه‌های متعلق به $\mathfrak{A}$، که فقط تعدادی متناهی از این درایه‌ها غیرصفر باشند. اکنون تعریف‌های زیر را می‌آوریم

$$K_0(\mathfrak{A}) = H^0(\mathfrak{A} \otimes \mathcal{LC}(H))$$

$$K_1(\mathfrak{A}) = H^1(\mathfrak{A} \otimes \mathcal{LC}(H)).$$

در مورد یک جبر $\mathfrak{A}$ مانند $\mathscr{LC}(H)$ با این خاصیت که $\mathfrak{A} \otimes \mathscr{LC}(H) = \mathfrak{A}$، یعنی یک جبر پایدار، هیچ چیز تازه‌ای وجود ندارد و Kـنظریه تنها ناورداهای پایدار را ارائه می‌کند به طوری که اگر $\mathfrak{A} \otimes \mathscr{LC}(H) \approx \mathfrak{B} \otimes \mathscr{LC}(H)$ آنگاه $\mathfrak{A}$ و$\mathfrak{B}$ دارای Kـنظریهٔ یکسان هستند. هنگامی که $\mathfrak{A} = C(X)$، گروه‌های Kی توپولوژی جبری را به‌دست می‌آوریم، بنابراین با توسیعی از مفاهیم رایج سر و کار داریم.

H^0 و بنابراین K_0 آبلی است. K_1 آبلی است هرچند که لازم نیست H^1 آبلی باشد. اگر J ایده‌آلِ *ـبسته‌ای در $\mathfrak{A}$ باشد، دنبالهٔ دقیق متناوب زیر را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{array}{ccc} K_0(J) \longrightarrow & K_0(\mathfrak{A}) \to & K_0(\mathfrak{A}/J) \\ \uparrow & & \downarrow \\ K_1(\mathfrak{A}/J) \leftarrow & K_1(\mathfrak{A}) \leftarrow & K_1(J) \end{array}$$

ممکن است پرسیده شود اهمیت این ساختارها در چیست. همانند توپولوژیِ جبری، این گروه‌ها را می‌توان برای فرق گذاشتن بین جبرهای نایکریخت به کار برد. این واقعیت که، در حالت‌های مقدماتی، H° و H^{1} با بُعد و اندیس یکی می‌شوند مایهٔ امیدواری است. در[۵] جبرهای AF مورد بحث قرار گرفته‌اند. هر جبر AF عبارت است از یک C^*ـحدِ مستقیم از C^*ـجبرهای با بعد متناهی. چنین جبرهایی بر حسب «گروه‌های بُعد»شان رده‌بندی شده بودند که بعداً معلوم شد برابر با $K_{\circ}(\mathfrak{A})$ با یک ساختار ترتیبی‌اند. برای چنین جبرهایی K_1 برابر با ۰ است. کاربردهایی نیز درمورد جبرهای با ضرب متقاطع[1] وجود داشته است. اگر C^*ـجبر $\mathfrak{A}$، وگروه G متشکل از خودریختی‌های $\mathfrak{A}$ داده شده باشد، یک C^*ـجبر $\mathfrak{B}$ شامل $\mathfrak{A}$ و گروهی از اعضای یکانی u_g، که $g \in G$، وجود دارد با این خاصیت که $u_g a u_g^* = ga$، $(a \in \mathfrak{A})$، به طوری که $\mathfrak{B}$ عبارت است از C^*ـجبر تولیدشده به‌وسیلهٔ $\mathfrak{A}$ و u_gها. پیمسنر و ویکولسکو [۹] روشی برای محاسبهٔ Kـنظریهٔ چنین جبرهایی ساخته‌اند و از آن برای حل مسائلی که قبل از معرفی Kـنظریه در C^*ـجبرها مطرح شده بود استفاده کرده‌اند.

۳. دستگاه‌های دینامیکی تعویض‌ناپذیر

شیء اصلی مورد مطالعه در دینامیکِ توپولوژیکی، یک فضای توپولوژیکی X می‌باشد، که معمولاً فشرده یا فشردهٔ موضعی است، همراه با یک گروهِ یک‌پارامتری $\{\alpha_t : t \in \mathbb{R}\}$ از همسانریختی‌ها. فرض می‌شود که $\alpha_s\alpha_t = \alpha_{s+t}$، $\alpha_{\circ}=$همانی و $(t,x) \mapsto \alpha_t(x)$ از $\mathbb{R} \times X$ به X پیوسته است. با توجه به هم‌ارزیِ رسته‌های فضاهای هاسدورفِ فشرده و C^*ـجبرهای تعویض‌پذیر، این تعریف را می‌توان بر حسب گروه‌های یک‌پارامتریِ *خودریختی‌های C^*ـجبرهای تعویض‌پذیر بیان کرد و بلافاصله به دستگاه‌های تعویض‌ناپذیر گسترش می‌یابد. از این رو یک دستگاه C^* دینامیکیْ تشکیل شده است از یک C^*ـجبر $\mathfrak{A}$ و یک گروه یک‌پارامتری $\{\alpha_t : t \in \mathbb{R}\}$ از *یکریختی‌های طولپای $\mathfrak{A}$ که پیوسته است، به این مفهوم که اگر $t_n \to t$ در $\mathbb{R}$ ، آنگاه به ازای هر $a \in \mathfrak{A}$، $\alpha_{tn}(a) \to \alpha_t(a)$.

ریشهٔ این مفهوم را می‌توان در مبادی نظریهٔ کوانتمی جبر عملگرها ردیابی کرد. یک دستگاه فیزیکی همراه با زمان تغییر می‌کند و یک خانوادهٔ یک‌پارامتری $\tilde{\alpha}_t$ از جایگشت‌های حالت‌های ممکن یا وضعیت‌های دستگاه وجود دارد؛ $\tilde{\alpha}_t(S)$ حالت دستگاه در زمان t است به شرط اینکه در زمان $t = \circ$ در حالت S بوده باشد. اگر C^*ـجبرِ $\mathfrak{A}$ این دستگاه را توصیف کند، در این صورت $\tilde{\alpha}_t$ به‌وسیلهٔ گروهی از خودریختی‌های $\mathfrak{A}$ منعکس خواهد شد. اخیراً در نظریهٔ تومیتاـ تاکه‌ساکیِ جبرهای فون نویمان [۱۳]، گروه‌های خودریختیِ مدولی اهمیتی محوری یافته‌اند.

هر گروه خودریختیِ یک‌پارامتریْ دارای یک آنالیز طیفی است [۱]. اگر کار را با α_tها آغاز کنیم، $\mathfrak{A}$

1) crossed product

روی جبر گروهی $L^1(\mathbb{R})$ با ضرب پیچشیِ

$$(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t-s)ds$$

با تعریفِ

$$fa = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\alpha_t(a)dt \qquad (f \in L^1(\mathbb{R}), a \in \mathfrak{A})$$

به یک مدول تبدیل می‌شود. این تنها عبارت است از خطی‌سازیِ عملِ $\mathbb{R}$ روی $\mathfrak{A}$ که به وسیلهٔ α_t داده شده است. تبدیل‌های فوریهٔ اعضای $L^1(\mathbb{R})$ یک جبرِ $A(\mathbb{R})$ متشکل از توابع پیوسته روی $\mathbb{R}$ را می‌سازند، به طوری که ضرب پیچشی روی $L^1(\mathbb{R})$ با ضرب نقطه‌ای روی $A(\mathbb{R})$ متناظر می‌شود. از این گذشته $A(\mathbb{R})$ منظم است، یعنی اگر $K \subseteq \mathbb{R}$ فشرده و $F \subseteq \mathbb{R}$ بسته باشد و $K \cap F = \emptyset$، آنگاه یک $\phi \in A(\mathbb{R})$ وجود دارد که روی K، $\phi = 1$، و روی F، $\phi = 0$. این باعث می‌شود که بتوانیم با هر $a \in \mathfrak{A}$، مجموعهٔ محمل بسته‌ای را متناظر سازیم به‌عنوان کوچک‌ترین مجموعهٔ بستهٔ F با این خاصیت که اگر $\phi \in A(\mathbb{R})$ محملی جدا از F داشته باشد آنگاه $\phi a = 0$. به عبارت معادل، محملِ a مجموعهٔ صفرهای مشترکِ اعضای ایده‌آلِ $\{\phi : \phi \in A(\mathbb{R}), \phi a = 0\}$ در $A(\mathbb{R})$ است. برای هر مجموعهٔ بستهٔ $F \subseteq \mathbb{R}$، زیرفضای طیفیِ $\mathfrak{A}_f$ عبارت است از مجموعهٔ اعضایی از $\mathfrak{A}$ که محمل‌شان در F است و این آنالیز طیفی α را ایجاد می‌کند. داریم $\mathfrak{A}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{A}$ و $\mathfrak{A}_{\emptyset} = \{0\}$ و حداقل هنگامی که K و L بسته با مرزهای جدا هستند، $\mathfrak{A}_{K \cup L} = \mathfrak{A}_K + \mathfrak{A}_L$. تا اینجا از خاصیت خودریختی α استفاده‌ای نشده است. این نتیجه می‌دهد که $\mathfrak{A}_K \mathfrak{A}_L \subseteq \mathfrak{A}_{K+L}$ و $\mathfrak{A}_K^* = \mathfrak{A}_{-K}$.

اکنون اگر به شباهت‌های دینامیک توپولوژیکیِ تعویض‌پذیر بازگردیم، زیرمجموعه‌های بستهٔ F از X، با ایده‌آل‌های $\{f : f \in C(X)$ و $F(x) = 0$ ، $x \in F$ برای هر$\}$، و زیرمجموعه‌های ناوردا تحت عمل گروه با ایده‌آل‌های ناوردا متناظر می‌شوند. از این رو مجموعه‌های مینیمال با ایده‌آل‌های αـناوردای ماکسیمال متناظر می‌شوند. عمل‌های تقریباً دوره‌ای با گروه‌های $\{\alpha_t : t \in \mathbb{R}\}$ای متناظرند که در توپولوژی قوی—یعنی توپولوژیِ حاصل‌ضربیِ فضای $\mathfrak{A}^{\mathfrak{A}}$ متشکل از همهٔ توابع از $\mathfrak{A}$ به توی $\mathfrak{A}$—کلاً کراندار باشند. در این حالت بَستارِ $\{\alpha_t : t \in \mathbb{R}\}$، که آن را G می‌نامیم، یک گروه فشرده از خودریختی‌ها، و در حقیقت یک گروهِ سیم‌لوله‌ای می‌باشد، و ما می‌توانیم آنالیز طیفی فوق را در حالتی تکرار کنیم که $L^1(G)$ جانشین $L^1(\mathbb{R})$ شده باشد و $A(\hat{G})$ جانشینِ $A(\mathbb{R})$، که در اینجا $\hat{G}$ زیرگروهی از $\mathbb{R}$ با توپولوژیِ گسسته است؛ در نتیجه تجزیهٔ طیفی به‌وسیلهٔ زیرفضاهای $\mathfrak{A}_F$، که F تک‌عضوی باشد، ارائه می‌شود—توجه کنید که $\mathfrak{A}_{\{\gamma\}}$ مجموعهٔ اعضایی مانند a از $\mathfrak{A}$ است که $(t \in \mathbb{R})$ $\alpha_t(a) = e^{i\gamma t}a$. چنین وضعیت‌هایی و وضعیت‌های شامل گروه‌های فشردهٔ غیرآبلی به‌طور گسترده‌ای به‌وسیلهٔ اِوانز و زونت [۶] بررسی شده‌اند.

تاکنون چیزی دربارهٔ کاربردهای نظریهٔ استاندارد گروه‌های یک‌پارامتری نگفته‌ام (به عنوان مثال [۲] را

ملاحظه کنید). هستهٔ مرکزیِ این نظریه رابطهٔ بین چنین گروهی با مولد بی‌نهایت‌کوچکِ آن، یعنی عملگرِ

$$Da = \frac{۱}{i}\lim_{t\to ۰}\frac{۱}{t}(\alpha_t(a) - a)$$

است. معمولاً این عملگر روی تمام $\mathfrak{A}$ تعریف نمی‌شود، معهذا می‌توان این گروه را با محاسبهٔ $\exp itD = \alpha_t$ به طریقی به دست آورد ــ گروه و مولدِ بینهایت‌کوچک اساساً راه‌های معادلی برای بیانِ یک پدیده هستند هرچند که همواره به آسانی نمی‌توان دید که چه وقت عملگرِ مفروضْ یک مولد است. هنگامی که $\mathfrak{A}$ را به عنوان یک $A(\mathbb{R})$ــمدول در نظر بگیریم، D فقط عبارت است از ضرب در تابعِ $\phi(y) = y$، و هنگامی که به فضاهای $\mathfrak{A}_k$، با Kی فشرده، محدود شده باشد عملگری کراندار و همه‌جا تعریف‌شده است. خاصیت خودریختی α به صورت مشتق بودنِ D خود را آشکار می‌سازد، یعنی حوزهٔ تعریف آن یک زیرجبرِ (نابستهٔ) $\mathfrak{A}_۰$ از $\mathfrak{A}$ است و

$$D(ab) = aD(b) + D(a)b \qquad (a, b \in \mathfrak{A}_۰).$$

چنین مشتق‌هایی به طورگسترده‌ای به‌وسیلهٔ ساکایی و دیگران [۱۰] مطالعه شده‌اند. درحالت تعویض‌پذیر، هنگامی که Xیک خمینه باشد، D را می‌توان به عنوان میدان بردارهای مماس روی X تصورکرد و رسیدن از D به $\{\alpha_t : t \in \mathbb{R}\}$ با انتگرال‌گیری از دستگاه میسر می‌شود.

۴. تعمیم‌های دیگر

با دنبال کردن نظرات بخش قبلی، قضیه‌های ارگودیکِ تعویض‌ناپذیری بوسیلهٔ لَنس [۸] ثابت شده است. قسمتِ مهمی از نظریهٔ انتگرال‌گیریِ تعویض‌ناپذیر وجود دارد که با فون نویمان و شاتن [۱۱] آغاز شده است؛ این دو مشابه‌های تعویض‌ناپذیرِ فضاهای l_p را تعریف کردند. این فضاها عبارت‌اند از فضاهای C_p، ($۱ \le p < \infty$)، از عملگرهای فشردهٔ T، با این خاصیت که توان pامِ مقادیر ویژهٔ $|T| = (T^*T)^{\frac{۱}{۲}}$، با رعایت مرتبهٔ تکرار، مجموع‌پذیر باشند. $C_۲$ یک فضای هیلبرت و در حقیقت فضای عملگرهای هیلبرت‌ـ‌اشمیت است. مشابه‌های تعویض‌ناپذیر فضاهای L^p مشکل‌ترند زیرا L^∞ با جبری از عملگرهای کراندار متناظر است، و چون $L^p \not\subseteq L^\infty$، عملگرهای متعلق به L^p کراندار نیستند. امّا دیکسمیر و سگال [۳] و [۱۲] نشان داده‌اند که برای هر جبر فون نویمان $\mathfrak{A}$، یک اثر مثبت t می‌تواند نقش اندازه را به عهده داشته باشد. هر جبر فون نویمان، C^*ـ‌جبری است که روی یک فضای هیلبرت H عمل می‌کند، و در توپولوژی ضعیف‌ترِ حاصل از نشاندنِ $\mathscr{L}(H)$ در فضای حاصل‌ضربیِ $\mathbb{C}^{H\times H}$، که $T \in \mathscr{L}(H)$ را با عضوِ $\langle T\xi, n\rangle \mapsto (\xi, n)$ متناظر می‌سازد، بسته است. هر اثر مثبتْ تابعکی خطی مانند t است با این خاصیت که به ازای هر $a, b \in \mathfrak{A}$، $t(a^*a) \ge ۰$ و $t(ab) = t(ba)$. در این صورت $\| a \|_p = [t(a^*a)^{\frac{p}{۲}}]^{\frac{۱}{p}}$ نرمی روی $\mathfrak{A}$ تعریف می‌کند که فضاهای مورد نظر را به صورتِ کامل‌سازی‌هایی ارائه خواهد کرد. اخیراً هاگروپ [۷] با استفاده از وزن‌های روی جبرهای فون نویمان نظریهٔ عمیق‌تری را پدید آورده است.

سرانجام، به شیوه‌ای بسیار فرضیه‌بافانه، این را مطرح می‌کنم که ممکن است تعمیم‌های تعویض‌ناپذیری از آنالیز مختلط وجود داشته باشد.

اگر $\mathbb{T} = \{z : z \in \mathbb{C}, |z| \leq ۱\}$[۱] با اندازهٔ یک‌بعدیِ لُبگ، آنگاه $L^\infty(\mathbb{T})$ به‌وسیلهٔ ضربْ روی $L^۲(\mathbb{T})$ عمل می‌کند. با گرفتن سری‌های فوریه، $L^۲(\mathbb{Z})$ با $l^۲(\mathbb{Z})$ یکریخت می‌شود و اعضای $L^\infty(\mathbb{T})$ به‌وسیلهٔ ماتریس‌های

$$\begin{pmatrix} . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & a_۰ & a_۱ & a_۲ & . & . \\ . & . & a_{-۱} & a_۰ & a_۱ & . & . \\ . & . & a_{-۲} & a_{-۱} & a_۰ & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

که در آن a_iها ضرایب فوریهٔ اعضای $L_\infty(\mathbb{T})$ هستند داده می‌شوند. فضای $L^۲(\mathbb{T})$ شامل فضای هاردیِ $H^۲$ است که از همهٔ اعضایی تشکیل شده است که ضرایب فوریهٔ منفیِ آنها صفر است و بنابراین دارای توسیع تحلیلیِ $\sum a_i z^i$ به تمامیِ قرصِ واحد هستند. توابعی در L^∞ که با ضربْ $H^۲$ را به توی $H^۲$ می‌برند زیرفضای H^∞ را تشکیل می‌دهند، که در عین حال با شرطِ $a_n = ۰$ برای $n < ۰$ مشخص می‌شوند. (در واقع $\mathbb{T}$ به‌وسیلهٔ ضرب روی خودش عمل می‌کند و H^∞ فقط زیرفضای طیفیِ $L^\infty(\mathbb{T})_{[۰,\infty]}$ تحت این عمل است). از این رو H^∞ از عملگرهایی تشکیل شده است که ماتریس فوق برای آنها مثلثی است. فضای تعویض‌ناپذیرِ H^∞ از همهٔ عملگرهایی روی $L^۲(\mathbb{T})$ تشکیل خواهد شد که $H^۲(\mathbb{T})$ را به توی خودش می‌نگارند، یعنی عملگرهایی که، به صورت ماتریسی، با عملگرهای مثلثی متناظر هستند.

مراجع

[1] W. Arveson, "On groups of automorphisms of operator algebras", *J. Funct. Anal.*, **3** (1974). 217-243.

[2] E.B. Davies, *One Parameter Semigroups,* Academic Press, London, 1980.

[3] J. Dixmier, "Formes linéaires sur un anneau d'opéteurs," *Bull. Soc. Math. France*, **81** (1953), 9-39.

۱) به نظر می‌رسد «که $|z| = ۱$» درست باشد ــ مترجم.

[4] J. Dixmier, *Les C^*-algèbres et leurs représentation*, Gauthier-Villars, Paris, 1964.

[5] G. Elliot, "On the classification of inductive limits of sequences of semi-simple finite dimensional algebras", *J. Algebra*, **38** (1976), 29-44.

[6] D.E. Evans and T. Sund,"Spectral subspaces for compact actions", *Rep. Math. Phys.*, to appear.

[7] U. Haagerup, "L_p-spaces associated with an arbitrary von Neumann algebra", *Algèbres d'opérateurs et leurs applications en phisique mathématique*. Colloques. Internat. CNRS, 274, CNRS, Paris, 1979.

[8] E. C. Lance, "Ergodic theorems for convex sets and operator algebras", *Invent. Math.*, **37** (1976), 201-214.

[9] M. Pimsner and D. Voiculescu, "K-groups of reduced crossed products by free groups", to appear.

[10] in S. Sakai, "Recent developments in the theory of unbounded derivations C^*-algebras", *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Helsinki,* 1978, 709-714.

[11] R. Schatten and J. von Neumann. "The cross-space of linear transformations. III" *Ann. of Math.*, **49** (1948), 557-582.

[12] I.E. Segal, "A non-commutative extension of abstract integration", *Ann. of Math.*, **57** (1953), 401-453.

[13] M. Takesaki. *Tomita's Theory of Modular Hilbert Algebras and its Applications.* Lecture Notes in Mathematics **128**, Springer-Verlage, Berlin, 1970.

[14] J.L. Taylor "Banach algebras and topology", *Algebras in Analisis,* Academic Press, London, 1975.

School of Mathematics, The University, Newcastle-upon-Tyne NE1 7RU, U.K.

مترجم: محمدعلی پور عبداله‌نژاد،
دانشگاه فردوسی مشهد، گروه ریاضی
مشهد- صندوق پستی ۹۱۷۷۵ـ۱۱۵۹
پست الکترونیک: pourabd@math.um.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شمارهٔ ۲۴ (بهار ۱۳۷۹)، صص. ۲۱ تا ۲۷

در مورد گروه‌هایی که با زیرگروهی محض از خود یکریخت‌اند*

فلت، لی، لوتسر، ستنفرد

مقدمه. چه وقتی یک گروه با زیرگروهی محض از خود یکریخت است؟ به‌وضوح هیچ گروه متناهی نمی‌تواند چنین خاصیتی داشته باشد، اما گروه‌های $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}$، یا $\mathbb{C}$، یعنی گروه‌های جمعیِ آشنای اعداد صحیح، گویا، حقیقی، یا مختلط چطور؟ $\mathbb{R}^n$، گروه جمعیِ فضای برداریِ nبُعدی، چطور؟ گروه‌های ضربی اعداد ناصفرِ گویا، حقیقی، یا مختلط چطور؟ گروه ضربی $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = ۱\}$ از اعداد مختلط با قدرمطلقِ یک چطور؟ گروه نامتناهی محبوب‌تان که شما در اولین درس جبر جدید دانشگاهی آموخته‌اید چطور؟

این سؤالاتِ به‌طور ساده بیان‌شده حالات بسیار خاصی از یک مسألهٔ مهم در نظریهٔ گروه‌ها هستند (یعنی این که آیا دو گروه یکریخت هستند یا نه) و می‌توانند مبنای بحث کلاسی در یک درس جبر جدیدِ مقدماتی بلافاصله بعد از معرفی مفاهیم گروه، زیرگروه، و یکریختی باشند. به‌علاوه، چنین سؤالاتی را می‌توان دوباره بعد از آن که ساختارهای جبری جدید (مثل گروه‌های حاصل‌ضرب و گروه‌های خارج‌قسمت) معرفی شدند مطرح کرد، و این مسائلْ مشابه‌هایی در ساختارهای جبریِ آشنای دیگر (حلقه‌ها، میدان‌ها) دارند که اغلب در دروس جبر جدید دورهٔ کارشناسی ریاضی یافته می‌شوند. به‌علاوه، سؤالِ زیرگروهِ

*) Shaun Fallat, Chi-Kwong Li, David Lutzer, and David Stanford, "On groups that are isomorphic to a proper subgroup", *Mathematics Magazine*, vol. **72**, no. 5 (December 1999), 388-391.

یکریخت روشی ارزشمند برای وادار کردنِ دانشجویان به تفکر دربارهٔ گروه‌های آشنای $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}$، و $\mathbb{C}$ در سیاقی غیربدیهی فراهم می‌آورد. سرانجام، این سؤال را می‌توان به عنوان مبنایی برای پروژه‌های بازِ دانشجویی در یک چنین درسی قرار داد.

کتاب‌های درسیْ روش‌های استانداردی برای نشان دادنِ اینکه دو گروه یکسان نیستند می‌پرورانند. شاید یکی دُوری باشد و دیگری نباشد. شاید گروه‌ها دارای عددِ اصلیِ متفاوتی باشند. شاید دو گروه تعداد متفاوتی عضوِ از یک مرتبهٔ k داشته باشند. از طرف دیگر، برای دانشجویانِ یک درس مقدماتی، نشان دادن یکریخت بودنِ دو گروه معمولاً به معنی ساختن یک یکریختیِ خاص است. در نتیجه، بسیاری از مثال‌های گروه‌های یکریخت که در درس‌های مقدماتی ارائه می‌شوند آشکارا یکریخت‌اند.

هدفِ این یادداشت روشن ساختن این مطلب است که چطور سؤال زیرگروه محض در بالا را می‌توان در یک درس مقدماتی به‌کار برد، و نیز نشان دادن این مطلب است که چگونه ایده‌هایی از جبر خطی را می‌توان در یک درس جبر جدیدِ مقدماتی برای نشان دادنِ گروه‌هایی که به‌نحوی غیرآشکار یکریخت‌اند به‌کار برد. ما به سؤالات مطرح‌شده در پاراگرافِ اولِ این مقاله پاسخ خواهیم داد و پروژه‌های بیشتری را که می‌توانند مورد علاقهٔ دانشجویان باشند پیشنهاد خواهیم کرد. نه ادعای تازگیِ نتایج زیر را داریم و نه ادعا می‌کنیم که کلّی‌ترین احکام یا بهترین اثبات ممکن از این نتایج را ارائه می‌دهیم. (یک مرجع کلاسیکِ زیبا برای مطالب مربوط مرجعِ [۲] است.)

برخی مثال‌های ساده. به‌وضوح، اگر گروه G با زیرگروه محضی از خود یکریخت باشند آنگاه $|G|$، عدد اصلیِ G، باید نامتناهی باشد. با این حال، نامتناهی بودن کافی نیست، زیرا مثال‌های ساده‌ای نشان می‌دهند که برخی گروه‌های نامتناهی با زیرگروه محضی از خود یکریخت هستند و برخی دیگر نه.

مثال ۱. گروه جمعی $\mathbb{Z}$ از تمامی اعداد صحیح با زیرگروه اعداد صحیحِ زوج تحت یکریختیِ $f(x) = ۲ * x$ یکریخت است.

مثال ۲. گروه جمعی $\mathbb{Q}$ از تمامی اعداد گویا با هیچ زیرگروه محض از خود یکریخت نیست زیرا هر همریختیِ $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ به شکلِ $f(x) = f(۱) * x$ است، و بنابراین هر یکریختی از $\mathbb{Q}$ به‌توی $\mathbb{Q}$ عملاً یک یکریختی به روی $\mathbb{Q}$ است.

سؤال ۱. در مورد گروه جمع مستقیم $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$ چه می‌توان گفت؟ آیا این گروه با زیرگروهی محض از خود یکریخت است؟ $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}$ چطور؟ (پاسخ‌ها به‌ترتیب «نه» و «بلی» است.)

سؤال ۲. در مورد گروه خارج‌قسمت $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ چه می‌توان گفت؟ این گروه با زیرگروهی محض از خود یکریخت نیست، زیرا اگر g یک یکریختی از $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ به توی خودش باشد و اگر

$$A(k) = \{x \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} : \text{دارای مرتبهٔ } k \text{ است } x\},$$

آنگاه $g[A(k)] \subseteq A(k)$. اما در آن صورت $A(k)$ متناهی و g یک به یک می‌شود، و $g[A(k)] = A(k)$. چون $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \bigcup\{A(k) : k \geq ۱\}$، g باید پوشا باشد.

اینک نشان می‌دهیم که برخی گروه‌های ضربیِ آشنا مثال‌های متفاوت زیادی از گروه‌هایی که با زیرگروهی محض از خود یکریخت هستند فراهم می‌آورند. گروه‌های ضربی $\mathbb{Q}^+$، $\mathbb{Q}^*$، $\mathbb{R}^+$ و $\mathbb{R}^*$ (به ترتیب متشکل از تمامی اعداد گویای مثبت، گویای ناصفر، حقیقیِ مثبت، و حقیقیِ ناصفر) را درنظر می‌گیریم.

گزارهٔ ۱. گروه‌های ضربیِ $\mathbb{Q}^+$، $\mathbb{Q}^*$، $\mathbb{R}^+$ و $\mathbb{R}^*$ با زیرگروه‌های محضی از خود یکریخت هستند.

اثبات. $f : \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}^*$ را با ضابطهٔ $f(x) = x^۳$ تعریف کنید. این تابع f یک یکریختی از $\mathbb{Q}^*$ به روی زیرگروهی محض از خودش است، و هرگاه آن را به $\mathbb{Q}^+$ تحدید کنیم، f یک یکریختی از $\mathbb{Q}^+$ به روی زیرگروهی محض از خود را فراهم می‌آورد. سپس، تابع $g(x) = e^x$ یک یکریختی از گروه جمعیِ $\mathbb{R}$ به روی گروه ضربی $\mathbb{R}^+$ است. از این رو، بنا بر قضیهٔ ۱ (که در زیر می‌آید)، $\mathbb{R}^+$ یکریخت با زیرگروهی محض از خود خواهد بود. چون گروه ضربی $\mathbb{R}^*$ جمع مستقیم داخلیِ $\mathbb{R}^+$ و گروه دوعضویِ $T_۰ = \{-۱, ۱\}$ با ضربِ معمولیِ آن است، ملاحظه می‌کنیم که $\mathbb{R}^*$ با زیرگروهی محض از خود یکریخت است. (تمرین ۱ در زیر را نیز ملاحظه کنید.)

طبیعی است از خود بپرسیم که آیا گروه‌های گزارهٔ ۱ واقعاً متفاوت‌اند یا نه. متفاوت‌اند. استدلال‌هایی در مورد عدد اصلی نشان می‌دهد که گروه‌های گویا و حقیقی در گزارهٔ ۱ متمایزند. برای وجهِ تمایز قائل شدن بین $\mathbb{Q}^+$ و $\mathbb{Q}^*$، می‌پرسیم که معادلهٔ $x^۲ = ۱$ در هر یک از این گروه‌ها چه تعداد جواب دارد. همین سؤال تمایز بین $\mathbb{R}^+$ و $\mathbb{R}^*$ را نشان می‌دهد. این مطلب را با گزارهٔ ۴ در زیر مقایسه کنید.

مثال‌های پیچیده‌تر و $\mathbb{Q}$ـخطی بودن. گروه‌های معینی قادر به داشتن ساختاری بیش از صرفِ ساختار گروهی هستند. برای مثال، گروه‌های جمعیِ $\mathbb{R}$، $\mathbb{C}$، و $\mathbb{R}^n$ فضاهای برداری روی میدان $\mathbb{Q}$ نیز هستند، و به سادگی ملاحظه می‌شود که همریختی‌های گروهیِ این گروه‌ها، نگاشت‌های $\mathbb{Q}$ـخطی هستند. این مطالب به دانشجویان اجازه می‌دهد که برخی از ایده‌هایی را که در اولین درس جبر خطیِ خود با آنها مواجه شده‌اند—یعنی مفاهیم مجموعه‌های مولد، پایه‌ها و بُعد— به کار برند. البته، این دانشجو حال باید با فضاهای برداری که دارای بعد نامتناهی روی $\mathbb{Q}$ هستند سر و کار داشته باشد، و باید بین فضاهای با بعد متناهی، شمارا، و ناشمارا وجه تمایزی قائل شود. این پیچیدگیِ مضاف به دانشجویان اجازه می‌دهد که اثبات‌های متناهیْ‌بعدی‌ای را که در جبر خطی با آنها مواجه شده‌اند، مرور کنند تا ملاحظه کنند که آیا نظریهٔ اصلی در این فضاهای کلّی‌تر هم کار می‌کند یا نه. با تقلید از اثبات‌های با بعد متناهی و استفاده از این مطلب که مجموعهٔ مولدِ $\mathbb{Q}$ـخطیِ هر مجموعهٔ نامتناهیِ S دارای عدد اصلیِ $|S| = |S| * |\mathbb{Q}|$ است، دانشجویان قوی قادر به اثبات حکم زیر هستند:

گزارهٔ ۲. دو فضای برداری V و W روی میدان $\mathbb{Q}$ به طور $\mathbb{Q}$ـخطی یکریخت‌اند اگر و تنها اگر V و W دارای پایه‌هایی روی $\mathbb{Q}$ با عدد اصلی یکسانی باشند.

نتیجهٔ دومی وجود دارد که برای بهره‌برداری کردن از ساختار $\mathbb{Q}$ـخطیِ گروه‌های معینی مفید است، اما

این چیزی است که به‌ندرت در کتاب‌های درسیِ مقدماتی به آن اشاره شده است، شاید بدین دلیل که این مطلب به چیزی بستگی دارد که هالموس آن را «شگردِ ترامتناهی» نامیده است [۱، ص. ۱۳].

گزارهٔ ۳. هر مجموعهٔ مستقل خطی در هر فضای برداریِ V مشمول در پایه‌ای برای V است. به‌ویژه، پایه‌ای مانند B برای $\mathbb{Q}$ـفضای برداریِ $\mathbb{R}$ وجود دارد که $۱ \in B$.

دانشجویان دورهٔ کارشناسی هیچ مشکلی در فهم حکم گزارهٔ ۳ ندارند. تجربهٔ ما نشان می‌دهد که اکثر آنها مایل به قبول این حکم بدون پافشاری بر اثباتی از آن هستند. برای بقیهٔ دانشجویان، گزارهٔ ۳ می‌تواند مبنایی برای یک پروژهٔ مطالعهٔ خارجی در مورد لم تسورن باشد. دانشجویانی که می‌دانند $\mathbb{Q}$ شمارا است در حالی‌که $\mathbb{R}$ ناشمارا است قادر به اثبات این مطلب خواهند بود که پایهٔ B برای $\mathbb{R}$ روی $\mathbb{Q}$ نامتناهی است—واقعیتی که در زیر به آن نیاز داریم. با کاربرد گزاره‌های ۲ و ۳، می‌توان ثابت کرد:

قضیهٔ ۱. گروه جمعی $\mathbb{R}$ با زیرگروهی محض از خود یکریخت است. اثبات. با به‌کاربردن گزارهٔ ۳ پایهٔ دلخواهی مانند B را برای $\mathbb{R}$ روی $\mathbb{Q}$ انتخاب کنید. آنگاه B نامتناهی است. $b(۱)$، $b(۲)$، ... در B را انتخاب کنید و $s : B \to B$ را با ضابطهٔ $s(b(n)) = b(n + ۱)$ و $s(b) = b$ اگر $b \in B - \{b(n) : n \geq ۱\}$ تعریف کنید. آنگاه S را روی $\mathbb{R}$ به صورت $\mathbb{Q}$ـخطی توسیع دهید. یکریختیِ $\mathbb{Q}$ـفضای برداریِ حاصل یکریختیِ گروهیِ مورد نیاز از $\mathbb{R}$ به روی یک زیرگروه محض از خودش است.

دانشجویان ممکن است ترغیب شوند که گمان کنند که از گروه‌های آشنای دیگری نظیرِ $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{C}$ می‌توان مثال‌های دیگری از گروه‌هایی به‌دست آورد که با زیرگروه‌های محضی یکریخت باشند. چنین مثال‌هایی وجود دارند، اما آنها مثال‌های جدیدی نیستند زیرا گزارهٔ ۲ به نتیجهٔ زیر منجر می‌شود:

گزارهٔ ۴. هر یک از گروه‌های جمعی $\mathbb{R}^n$، $\mathbb{C}^n$،

$$\mathbb{R}[X] = \{p(X) : \text{است } \mathbb{R} \text{ یک چند جمله‌ای ناصفر با ضرایب در } p\}$$

و

$$\mathbb{C}[X] = \{p(X) : \text{است } \mathbb{C} \text{ یک چند جمله‌ای با ضرایبِ در } p\}$$

با گروه جمعی $\mathbb{R}$ یکریخت است.

اثبات. با شروع با یک پایهٔ B برای $\mathbb{R}$ روی $\mathbb{Q}$، می‌توان نشان داد که هر یک از این گروه‌ها یک $\mathbb{Q}$ـفضای برداری با پایه‌ای با عددِ اصلیِ $|B|$ است. اکنون با به کار بردنِ گزارهٔ ۲ نتیجه بگیرید که گروه‌های فهرست شده در این گزاره به طور $\mathbb{Q}$ـخطی یکریخت‌اند، و لذا به صورتِ گروهی یکریخت‌اند.

یک گروهِ کمی کمتر آشنا اما خیلی مهم گروه ضربیِ $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = ۱\}$ است، که در آن $|z|$ قدرمطلق معمولی عدد مختلط z را نشان می‌دهد. خیلی زود نیاز خواهیم داشت بدانیم تابع $h(x) = e^{۲\pi i x}$ یک یکریختی از $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ به روی T القاء می‌کند.

$\mathbb{C}^*$، گروه ضربی تمام اعداد مختلط ناصفر، را در نظر بگیرید. این گروه با هیچ یک از گروه‌های منظور شده در بالا (یعنی گروه‌های ضربیِ $\mathbb{Q}^+$، $\mathbb{Q}^*$،$\mathbb{R}^+$ ، $\mathbb{R}^*$، و گروه‌های جمعیِ فهرست شده در گزارهٔ ۴) یکریخت نیست، زیرا این گروه دارای ۲ عضو از مرتبهٔ ۳ است (یعنی جواب‌های غیربدیهی معادلهٔ $x^۳ = ۱$) در حالی که هیچ یک از گروه‌های دیگر این ویژگی را ندارند. آیا C^* با زیرگروهی محض از خود یکریخت است؟ پاسخ «بلی» است. مقدماتی‌ترین اثباتی که می‌شناسیم ابتدا ابزارهای جبر خطیِ بخش قبل را به کار می‌برد، و سپس کاربردی دقیق از قضایای یکریختی برای گروه‌ها را به کار می‌بندد. در این حالت، می‌توان مثالی ملموس از یک زیرگروه محض از $\mathbb{C}^*$ را که با $\mathbb{C}^*$ یکریخت است ارائه داد، و نتیجهٔ آن از یک لحاظ غیرشهودی است.

قضیهٔ ۲. گروه‌های ضربی C^* و T یکریخت‌اند.

اثبات. با استفاده از گزارهٔ ۳، پایه‌ای مانند B برای $\mathbb{R}$ به عنوان یک $\mathbb{Q}$ـفضای برداری انتخاب کنید که $۱ \in B$. چون B نامتناهی است، می‌توانیم بنویسیم $B = B_۱ \cup B_۲$ که در آن $B_۱ \cap B_۲ = \emptyset$، $|B| = |B_۱|$ و $۱ \in B_۱$. به ازای هر $b \in B$ فرض کنید Q_b $\mathbb{Q}$ـفضای برداریِ $\{q * b : q \in \mathbb{Q}\}$ باشد. در این صورت گزارهٔ ۲ یک یکریختیِ f از $\mathbb{Q}$ـفضای برداریِ $\mathbb{R}$ به روی

$$\oplus\{Q_b : b \in B_۱\}) \oplus (\oplus\{Q_B : b \in B_۲\})$$

به دست می‌دهد که عددِ $۱ \in \mathbb{R}$ را به بردارِ $۱ \in Q_۱ \subset R_۱$ می‌فرستد که در آن $R_i = \oplus\{\mathbb{Q}_b : b \in B_i\}$. بنا بر گزارهٔ ۲، هر R_i به طور $\mathbb{Q}$ـخطی با $\mathbb{R}$ یکریخت است.

حال در مورد $\mathbb{Q}$ـفضاهای برداری بالا به عنوان گروه‌های جمعی فکر کنید. در این صورت f یک یکریختیِ گروهی از $\mathbb{R}$ به روی $R_۱ \oplus R_۲$ است، و $(R_۲, +)$ تحت تابع نمایی با $(\mathbb{R}^+, *)$ به طور گروهی یکریخت است. با نوشتنِ $Z_۱ = f[\mathbb{Z}]$ و نوشتنِ $\cong$ برای نشان دادن یکریختیِ گروهی، نتیجه می‌شود که

$$\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} \cong \frac{R_۱}{Z_۱ \oplus R_۲} \cong (T, *) \oplus (\mathbb{R}^+, *).$$

اما نمایش قطبیِ معمولِ اعداد مختلط ناصفر یک یکریختیِ گروهی بین $T \oplus (\mathbb{R}^+, *)$ و $\mathbb{C}^*$ برقرار می‌کند. لذا همان‌طور که ادعا کردیم، $T \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong T \oplus \mathbb{R}^+ \cong \mathbb{C}^*$.

تمرینات بیشتری برای دانشجویان دورهٔ کارشناسی. ایده‌های بیان‌شده در این مقاله می‌توانند مبنایی برای پروژه‌های تحقیقاتی در یک درس جبر جدید مقدماتی باشند. در این بخش، چند مثال از سؤال‌هایی که مربی در مراحل مختلف درس ممکن است با آنها مواجه شود ارائه می‌دهیم.

تمرین ۱. جمع‌های مستقیم و زیرگروه‌های محض. فرض کنید G و H دو گروه باشند، که یکی از آنها با زیرگروهی محض از خودش یکریخت باشد. آنگاه $G \oplus H$ نیز چنین است. عکس آن چطور؟ اگر $G \oplus H$ با زیرگروهی محض از خودش یکریخت باشد، آیا باید همین مطلب در موردِ یکی از دو گروهِ

G و H درست باشد؟

تمرین ۲. کدام گروه‌ها فضای $\mathbb{Q}$ـخطی هستند؟ ایدهٔ اصلی در مقالهٔ ما آن است که بسیاری از گروه‌های آشنا در واقع فضاهای $\mathbb{Q}$ـخطی هستند. تمامی گروه‌های آبلی را که فضای برداریِ $\mathbb{Q}$ـخطی هستند مشخص کنید.

تمرین ۳. شمارش مورفیسم‌ها. چه تعداد همریختیِ گروهی از گروه جمعیِ $\mathbb{Q}$ به خودش موجود است؟ همین‌طور از گروه جمعی $\mathbb{R}$ به خودش؟ یا از گروه‌های ضربی ملاحظه‌شده در بخش ۳ به خودشان؟ در هر حالت چه تعداد یکریختیِ گروهی وجود دارد؟

تمرین ۴. میدان‌ها و زیرمیدان‌ها. کدام میدان‌ها با زیرمیدانی محض از خودشان یکریخت هستند؟ می‌توان نشان داد که میدان‌های معمولِ $\mathbb{Q}$ یا $\mathbb{R}$ با زیرمیدان‌های محضی از خودشان یکریخت نیستند، اما میدان‌هایی وجود دارد که بین $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ قرار می‌گیرند و با زیرمیدان‌هایی محض از خودشان یکریخت‌اند. یک رویکردْ اثباتِ این مطلب است که تابع همانی تنها یکریختیِ هر یک از $\mathbb{Q}$ یا $\mathbb{R}$ به خودش است. نیز می‌توان نشان داد که میدان معمولِ $\mathbb{C}$ از اعداد مختلط با زیرمیدانی محض از خودش یکریخت است. به‌علاوه، برخلاف این وضعیت برای $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$، خودریختی‌های میدانیِ زیادی برای $\mathbb{C}$ وجود دارند. برای بحثی زیبا به [۳] مراجعه کنید.

تمرین ۵. گروه‌های خارج‌قسمت. چه وقت گروه G با یک گروه خارج‌قسمت غیربدیهی از خود یکریخت است؟ (منظور از یک «گروه خارج‌قسمت غیربدیهی از G» آن است که G/H گروه خارج‌قسمتی باشد که در آن $|H| > ۱$.)

مراجع

[1] P. Halmos, *Finite Dimensional Vector Spaces*, D. Van Nostrand, New York, NY, 1958.

[ترجمهٔ فارسی: پال هالموس، فضاهای برداری متناهی-بعد، ترجمهٔ کریم صدیقی، انتشارات دانشگاه شیراز، ۱۳۷۱.]

[2] I. Kaplansky, *Infinite Abelian Groups*, University of Michigan Press, Ann Arbor, MI, 1954.

[3] P. Yale, "Automorphisms of the complex numbers", *Mathematics Magazine,* 39 (1966), 135-141.

College of William and Mary, Williamsburg, VA 23187-8793, U.S.A

مترجم: کریم احمدی دلیر،

دانشگاه آزاد تبریز، گروه ریاضی

پست الکترونیک: karim_ahmadi@ourtabriz.com

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شمارهٔ ۲٤(بهار ۱۳۷۹)، صص. ۲۹ تا ٤۸

نقش مدل‌های انتگرال‌پذیر در توسعهٔ ریاضیات *

سرگئی نوویکُف

نویسندهٔ این مقاله، به خاطر پیشرفت‌های مهمی که در توپولوژی پدید آورد برندهٔ مدال فیلدز[1] ۱۹۷۰ گردید. مشهورترین این نتایج، اثباتی است برای ناوردایی توپولوژیک رده‌های پونتریاگینِ خمینه‌های دیفرانسیل‌پذیر. آثار نوویکُف مطالعهٔ همانستگی و مانسته‌جاییِ[2] فضاهای توم[3] را نیز در بر می‌گیرد.

چکیده

تاریخ ریاضیات و فیزیک نظری نشان می‌دهد که فکرهای آغازگر بهترین روش‌های ریاضیْ، در فرآیند حل مدل‌های انتگرال‌پذیر کشف شده‌اند. خصوصاً اکتشافات ریاضی بیست سال اخیر را که دستاوردی جانبی از دستگاه‌های انتگرال‌پذیر مشهور مربوط به سولیتون‌ها[4] و نظریه‌های کوانتومی‌اند[5] مورد بحث قرار خواهیم داد.

*) Sergei Novikov, "Rôle of integrable models in the development of mathematics," *Symposium on the Current State and Prospects of Mathematics,* Barcelona, June 1991.

1) Fields 2) homotopy 3) Thom 4) solitons 5) quantum theories

آغاز کار در مقامِ توپولوژی‌دان

پیش از بحث در بارهٔ برخی مدل‌های فیزیکِ ریاضی و تشریح نقش آنها در توسعهٔ ریاضیات جدید، مایل‌ام چند کلمه‌ای راجع به تجربهٔ شخصی خود به عنوان یک ریاضی‌دان بیان کنم. اجازه دهید به بازسازی زندگی حرفه‌ای خود بپردازم، ولی نه از لحظه‌ای که مدال فیلدز به من اعطا شد، بلکه از سال‌ها پیش از آن آغاز کنم.

من زندگانی ریاضی خود را با کار در توپولوژی جبری آغاز کردم و به مدت بیش از ۱۰ سال در این زمینه ادامه دادم؛ در واقع هنوز هم پیش از هر چیز خود را یک توپولوژی‌دانِ جبری می‌دانم. هنگامی‌که در اواسط دههٔ ۱۹۵۰ کار ریاضی را آغاز کردم، روسیه کشور بسیار تاریکی در پشت پردهٔ آهنین بود. با وجود این، مکتب ریاضی بسیار بزرگ و قدرتمندی داشتیم که سردمدار آن در این زمان آندری کولموگورُف[1] در مسکو بود. به گمان من او پس از پوانکاره[2]، هیلبرت[3] و هرمان وایل[4]، بزرگترین ریاضی‌دان بود. تعداد زیادی از مشهورترین ریاضیدانانْ، شاگردان سابق او بودند، نظیر گلفاند[5]، آرنولد[6] و بسیاری دیگر (البته نه من).

در مکتب ریاضی مسکو، بر سر آنکه چه چیزی مهم و چه چیزی کم‌اهمیت بود، توافق وجود داشت. زمینه‌های «مهم» این علم عبارت بودند از نظریهٔ مجموعه‌ها، منطق، آنالیز تابعی، و معادلات دیفرانسیلِ جزئی (البته نه به مفهوم روش‌های حل مدل‌ها، بلکه به مفهومِ اثبات قضایای دقیق و تأسیس مبانی). در ریاضیات روسیِ آن زمان، مانند ریاضیات فرانسوی، هدف عمده آن بود که یک نوع اصل موضوعی‌سازی بنا شود و ریاضی‌دانان طراز اول این هدف را دنبال می‌کردند. در این زمان توپولوژی در روسیه وجود نداشت؛ تنها اندکی از باقی‌مانده‌های مکتب علمی پونتریاگین بر جای مانده بود.

در اواخر سال ۱۹۵۶ من دانشجوی مقطع دوم کارشناسی بودم و باید زمینه‌ای را، دست‌کم برای مدتی، انتخاب می‌کردم تا آنکه اجازه داشته باشم در سمینارها شرکت کنم. یک آگهی از طرف دانشکدهٔ ریاضیات و مکانیک دانشگاه مسکو نظرم را جلب کرد. این آگهی را پوستنیکُف[7]، بولتیانسکی[8]، و آلبرت شوارتس[9] امضاء کرده بودند. (امضاءکنندهٔ اخیر دانشجوی مقطع تکمیلی بود که البته به عنوان یک «ریاضی‌دان جوان» تلقی نمی‌شد، زیرا در آن زمان افراد ۲۵ ساله را «جوان» نمی‌شمردند.) در آگهی نوشته شده بود که در مقابل مهملاتِ توپولوژی مجموعهٔ نقاط، دانش بسیار جدید و مبارزطلبی به نام توپولوژی جبری نوین به وجود آمده است (شاید ترجمه‌ام از متنِ آگهی خیلی دقیق نباشد). این افراد، خصوصاً آلبرت شوارتس به خاطر متن آگهی توبیخ شدند (پوستنیکُف و بولتیانسکی استاد بودند و لذا زندگی بر آنان ساده‌تر گذشت).

---

1) Andrei Kolmogorov 2) Poincaré 3) Hilbert 4) Hermann Weyl 5) Gelʹfand
6) Arnol'd 7) Postnikov 8) Boltyanskiĭ 9) Albert Shvarts

حتی آلکساندرِف[1]، توپولوژی‌دان معروف، که به سختی شاخهٔ علمی‌ای را پیگیری کرده بود که در آن زمان سی ساله بود، از این آگهی سخت برآشفت. بنابراین شوارتس دیگر جایی برای ادامهٔ کار در دانشگاه مسکو نداشت و باید آنجا را ترک می‌کرد. از این رو او مطالعه روی عملگرهای فردهولم را آغاز کرد؛ بعدها، او به فیزیک کوانتمی روی آورد و با همکاری پولیاکُف[2] در اکتشاف اینستانتون[3]ها شرکت کرد. او نخستین فردی بود که ده سال پیش نظریهٔ میدان کوانتمی توپولوژیکِ غیربدیهی را کشف کرد. می‌توان گفت که او به یک معنا در علوم همان راه من را در پیش گرفت، اما او در آن زمان فعال‌تر از من بود.

برخی از دوستانم، مانند آرنولد و سینایی[4]، که از شرکت‌کنندگان سمینار کولموگورُف بودند و آنوسُف[5] که یکی از شرکت‌کنندگان سمینار پونتریاگین راجع به نظریهٔ کنترل بود، از من سؤال کردند که چرا به‌جای بررسی و تحقیق در علوم مهمی نظیر احتمالات و معادلات با مشتقات جزئی، تلاش می‌کنم چنان دانش عجیب و غریب و «کاملاً بی‌فایده»ای را فرا بگیرم؟ بنابراین توپولوژی به کلّی از حیطهٔ توجه جامعهٔ ما در روسیه خارج بود. پوستنیکف به من گفت که آیندهٔ روشنی برای توپولوژی نیست، ولی شاید بتوانم چیزی در همانستگیِ جبری بیابم. فقط شوارتس با شور و هیجان به توپولوژی توجه داشت، اما او هم دیری نپایید که پس از رساله‌اش مسکو را ترک گفت.

نخستین مقاله‌ام را در ۲۱ سالگی منتشر کردم. البته در آن دوره «جوان» نبودم، زیرا افرادی مانند آرنولد در ۱۸ یا ۱۹ سالگی نخستین مقاله خود را نوشته بودند و این کاملاً طبیعی بود. من از یک خانوادهٔ ریاضی‌دان هستم و مادرم مرتب شکایت می‌کرد که «همه مقاله علمی منتشر کردند جز پسر من». من نخست در نظریه مانسته‌جایی کار کردم. پوستنیکف و دینکین[6] یک دسته از مقالات مشهور را خیلی خوب ترجمه کرده بودند که عمدتاً به وسیلهٔ ریاضی‌دانان فرانسوی نوشته شده بود، از قبیل سِر[7]، کارتان[8]، توم و غیرهم. اینها را در سمینار یاد گرفتیم. من تحت تأثیر مقالات عالیِ شخص پیشتازِ نظریهٔ مانسته‌جایی در آن زمان، ، یعنی فرانک آدامز[9] (که اخیراً وفات یافت) قرار گرفتم، او با حل مسائل مشهور و به عنوان یک دانشمند فوق‌العاده درخشان کارش را شروع کرد.

این دوره بسیار جالب بود. مثلاً جبرهای هوپف[10]، که امروز در زمینهٔ گروههای کوانتمی مبحثی مشهور است، در آن دوره کشف شد، مدت کوتاهی پس از آنکه کارِ هوپف توسط آرمان بورل[11] به شکل اصل موضوعی در آمد. نخستین اشخاصی که راجع به جبرهای هوپف مقاله نوشتند، آدامز و میلنر[12] بودند؛ پیش از آنان، جبرهای هوپف منحصر می‌شد به حلقه‌های همانستگیِ Hـفضاها و گروههای لی. نخستین مقالات من به کاربرد جبرهای هوپف در محاسبهٔ گروههای مانسته‌جاییِ کره‌ها و مجتمع‌های توم

---

1) Alexandrov 2) Polyakov 3) instatons 4) Sinaĭ 5) Anosov 6) Dyn'kin
7) Serre 8) Cartan 9) Fronk Adams 10) Hopf 11) Armand Borel 12) Milnor

اختصاص داشت که در نظریهٔ کوبوردیسم[1] حائز اهمیت است. پس از این دوره، به نظریهٔ خمینه‌های دیفرانسیل‌پذیر پرداختم، البته تغییر رشته‌ام تحت تأثیر افراد متعددی بود که بازدید از روسیه را در این دوره آغاز کردند. جان میلنر و استیو سمِیل[2] کمک کردند که نخستین گام‌ها را در توپولوژی دیفرانسیل برداریم. دستگاه‌های دینامیکی نیز در ارتباط با توپولوژی و جبرهای از نوع جدید در پی میلنر و سمیل آغاز شد. وقتی خاطرات‌ام را بنویسم مطالبی راجع به همهٔ اینها خواهم نوشت زیرا در مقالات و کتاب‌های تاریخیِ بسیاری بی‌دقتی‌هایی در این زمینه یافته‌ام. مثلاً تأثیر و نفوذ سمیل در پایداریِ ساختاری که مبحث اساسی و مهمی در نظریهٔ دستگاه‌های دینامیکی است، در روسیه آغاز شد. این واقعیتِ مهم در مکتوبات تاریخیِ موجود غایب است، ولی من یکی از گواهان مستقیم این ماجرا بودم.

آنوسف و من، همراه با آرنولد، سینایی، شافارِویچ[3] و مانین[4] گروهی سازمان دادیم که هرکدام از دیگری مطالبی در مورد شاخه‌های مختلف ریاضیات می‌آموخت. بعدها گروهِ گلفاند هم به ما پیوست. اشخاصی از رشتهٔ معادلات دیفرانسیل پس از آنکه در اوایل دههٔ ۱۹۶۰ شاخص عملگرها به‌وسیلهٔ والتر[5] کشف شد، با ما جهت همکاری متقابل تماس گرفتند. والتر شخص عجیبی از روسیهٔ سفید بود که در این زمان در مسکو ظاهر شد. این کار پیش از مقالهٔ عطیه‌ـ سینگر[6] انجام شد؛ در واقع عطیه و سینگر مقالهٔ خود را پس از آن که گلفاند به تبلیغ در مورد نتایج والتر پرداخت نوشتند.

توجه به توپولوژی به عنوان مبحثی جدی، کم‌وبیش پس از ۱۹۶۱ آغاز شد. عمده‌ترین پرسشی که می‌خواستم به آن جواب دهم این بود که «ما به چه منظوری کار می‌کنیم؟». همان‌گونه که گفتم ارتباطاتِ خوبی داشتم. با دوستانی مانند آرنولد و آنوسف مشورت کردم، و نتیجهٔ بحث ما این شد که در رابطه با مسائل دستگاه‌های دینامیکی که قبلاً توسط سمیل شروع شده بود، من با برگ‌بندی[7]ها درگیر شدم. دوستان دیگری از مکتب گلفاند مرا در ارتباط با مسائل مربوط به شاخص کمک کردند و به من معادلاتِ با مشتقات جزئی یاد دادند، من هم به آنان توپولوژی یاد دادم و مطالبی هم در زمینهٔ معادلات با مشتقات جزئی نوشتم. کسانی که در هندسهٔ جبری کار می‌کردند هم بسیار سودمند بودند؛ آنان در مفاهیم جبری خاصی در توپولوژی به من کمک کردند. با این احوال، خیلی زود دریافتم که هر قدر هم که در ریاضیات پیش روم، توانایی آن را ندارم که به سؤال اصلی خود جواب دهم و این سؤالْ هدف اصلیِ کارهایی بود که انجام می‌دادیم. من متوجه شدم که نظریهٔ معادلات با مشتقات جزئی همان‌قدر مجرد است که توپولوژی، و احتمالات از آن هم مجردتر است (البته من هیچ‌گاه در احتمالات کار نکردم ولی دوستم سینایی این مطلب را برایم شرح داد؛ او خود را از این رشته به دستگاه‌های دینامیکی منتقل کرد). دستگاه‌های دینامیکی زمینه‌ای بسیار زیباتر و جدیدتر بود؛ با وجود این، دستگاه‌های دینامیکی هم در دنیای واقعی نقش ایفا نکرد، زیرا هیچ کس اطلاع کافی از آن نداشت و در آن دوره برای کسانی که دست‌اندرکار علوم طبیعی بودند کار

1) Cobordism 2) Steve Smale 3) Shafarevich 4) Manin 5) Walter 6) Atiyah-Singer
7) foliation

کردن در دستگاه‌های دینامیکی بسیار مشکل بود.

شکاف بین ریاضیات و فیزیک

آرنولد در سمینار خود مکانیک تحلیلی و مقدمات هیدرودینامیک را به من آموخت (البته در قالب مکانیکِ کلاسیک و نه مکانیک کوانتومی). باید دانست که در اواسط دههٔ ۱۹۲۰، بعد از خلقِ مکانیکِ کوانتومی، شکافی بسیار بزرگ بین ریاضیات و فیزیک در روسیه وجود داشت (که البته منحصر به روسیه نبود). بهترین ریاضی‌دانانِ عصرِ کولموگورف، به جز استثناهای بسیار اندکی، هیچ‌گاه حتی زبان ریاضیِ فیزیکِ نظری را نیز نمی‌دانستند. ساختن زبان جدید فیزیکِ نظری کم و بیش در ۱۹۲۵ شروع شد. به عقیدهٔ فیزیک‌دانانِ آن دوره، مهم‌ترین مطلب در اختلاف بین ریاضیات و فیزیک، نسبیت نبود بلکه ظهور نظریهٔ کوانتم بود (نقش نظریهٔ نسبیت بعدها معلوم شد). احتمالاً در مسکو گلفاند تنها کسی بود که فیزیک جدید را یاد گرفت. گاهی فیزیک‌دانان در سمینار گلفاند شرکت می‌کردند، اما در اواخر دههٔ ۱۹۵۰ گلفاند کار خود را کاملاً متوقف کرد و فیزیک‌دانان به مدت بالغ بر بیست سال از این سمینار بریدند.

داستان‌های کودکانهٔ زیادی سراغ دارم که ریاضی‌دانان در موردِ فیزیک‌دانان و فیزیک‌دانان در موردِ ریاضی‌دانان نقل می‌کنند که معمولاً ناشی از کمبود اطلاعات است. در طول سی سالِ اخیر مرتب از این قضیه‌ها شنیده‌ام، حتی از ریاضی‌دانان بزرگ و یا از بهترین فیزیک‌دانان. آخرین باری که از این نوع قصه‌ها شنیدم دیروز بود: رنه توم، یکی از بزرگترین معلمانِ من، در سخنرانی خود راجع به ضعفِ «نظریهٔ لانداو[1] در مورد توربولانس» سخن گفت و گفته شد که این نکته را آرنولد به او گفته است (آرنولد نیز دوست من است و با او روابط خانوادگی زیادی دارم). این طبق معمول ناشی از فقدانِ اطلاعات بود؛ نباید زیاد نگرانِ اتفاق افتادنِ این چیزها بود. ماجرا از این قرارست که لانداو هیچ‌گاه نظریه‌ای در موردِ توربولانس نداشته است. از ۱۹۴۰ لااقل به مدت ۲۰ سال لانداو به هیدرودینامیک علاقه‌مند بوده است و آغاز این کار مقالات مشهور او در ابررسانایی است. به مدت بیست وپنج سال او تنها کسی بود که ادعا می‌کرد توربولانس، صرفاً یک پدیدهٔ دینامیک است که خود نتیجه‌ای است در برخی دینامیک‌های سرتاسری. او گفته است که فکر احمقانه‌ای است که گمان رود ناویرـستوکس غیرقطعی است. اگر یک شارشِ توربولانت را در طول زمان به شکل موضعی نگاه کنیم، بی‌درنگ ملاحظه خواهیم کرد که کاملاً خوش‌تعریف است. بنابراین، معقول نیست که آن را «پدیده‌ای غیرقطعی» بخوانیم. به موجب فکری که لانداو ارائه کرد، آن را باید نتیجه‌ای از یک پدیدهٔ سرتاسری به عنوان دستگاهی دینامیکی دانست. نکتهٔ عمیق در افکار لانداو آن است که در جامعهٔ فیزیک‌دانان هیچ چیز در بارهٔ این مثال‌های پیچیدهٔ دستگاه‌های دینامیکی شناخته شده نبود (و حتی در ریاضیات محض هم اینها نسبتاً دیر آشکار شدند). او اظهار کرد که شاید اینها یک چنبرهٔ بینهایت‌بعدی نشانده‌شده در یک فضای تابعی باشند. این دیدگاه را ریاضی‌دانان پذیرفته‌اند هرچند بخش مهمی از ایدئولوژی لانداو بر اثر فقدان اطلاعات مورد غفلت قرار گرفته است. این شاید منشأ آن

1) Landau

داستان باشد. (باید اضافه کنم که انتقاد از ریاضی‌دانانِ بد اصلاً مورد علاقهٔ من نیست. انتقاد فقط زمانی جالب است که مخاطب آن اهل علمِ خوبی باشد خوشحال خواهم شد اگر متقابلاً انتقامی از این دست در کار باشد.)

آرنولد که به معنایی معلم من در مسائل مربوط به مکانیک است، از اوایل دههٔ ۶۰ به سمینار من آمد، زمانی که من ۲۳ ساله بودم (هنوز یاد دارم که او یکی از سه نفری بود که به سخنرانی‌های من گوش می‌دادند). فکر تراگردی و وضعیتِ نوعیْ او را شگفت زده کرد. در ۱۹۶۱ حتی برای افرادی که در نظریهٔ توابع متغیر حقیقی شهرت داشتند، تراگرد بودن فکر کاملاً نوی بود. پس آرنولد هم مطالبی را از من یاد گرفت در حالی که من مکانیک را از او یاد گرفته بودم.

او به من گفت که کولموگورف به او پیشنهاد کرده‌است که نتیجه‌ای را بهبود بخشد، و این نتیجه همان است که امروز قضیهٔ کولموگورف‌ـآرنولدـموزِر[1] خوانده می‌شود. کولموگورف فکرهای اصلی را یافت و از آرنولد دعوت کرد که آنها را ادامه دهد و اثبات دقیقی برایشان بیان کند. همچنین کولموگورف از او خواست که مکانیک یاد بگیرد. چنین بود که آرنولد به مطالعهٔ چندین کتاب پرداخت که با کتاب آپل[2] و چند کتاب روسی تألیفِ افرادی در زمینهٔ مکانیک کلاسیک شروع کرد. با وجود این همان‌گونه که خود آرنولد گفت او نتوانست بفهمد که واقعاً مکانیک چیست. پس از آن کتاب لانداو و لیفشیتز[3] را یافت (در آن زمان این کتاب بین ریاضی‌دانان شهرت نداشت). او به من گفت پس از مطالعهٔ کتاب نهایتاً فهمید مکانیک چیست و هم‌چنین دریافت که این کتاب چقدر بد نوشته شده است. خود آرنولد کتابی عالی برای درک مکانیک کلاسیک نوشت. باید منصفانه اقرارکنم که من این کتاب را دوست ندارم زیرا ایدئولوژی مکانیک را به کلّی از نو ساخت. کتاب لانداو و مکتب او دقیقاً نقطهٔ آغازی برای بسط یک رشتهٔ بزرگ علمی بود. این کتاب مشتمل بر نقاط آغازی عدیده‌ای بود که راه ترقیات آینده را هموار می‌ساخت. در بازسازی آرنولد، طبیعتاً جایگاه ریاضی بهتر است. در واقع این کتاب بسیار خوبی در زمینهٔ ریاضیات محض است اما جای زمینه‌های تحقیقاتی آینده در آن خالی است. کسانی که کتاب آرنولد را بخوانند به یک نقطهٔ پایان می‌رسند.

یادگیری فیزیک

نظر دوستم مانین راجع به این کتاب‌ها مانند نظر من است. مستقلاً هردوی ما در یک زمان تصمیم گرفتیم فیزیک کوانتمی یاد بگیریم (برادرم همواره به من می‌گفت که ریاضی‌دانان باید همه چیز را در بارهٔ فیزیک بدانند). من نخست سعی کردم نظریهٔ میدان‌های کوانتمی را به شیوه‌ای که معمولِ ریاضی‌دانان است یاد بگیرم، اما متوجه شدم که این کار کاملاً غیرممکن است. حتی می‌توان گفت که این کار ابلهانه است. بر عکس، سبک سخنرانی‌های آینشتاین[4] یا بهترین سخنرانی‌های لانداو را دوست دارم. من فهمیدم که طبیعی بودن پایهٔ علوم است، به همان صورت که قبلاً از خواندن کتاب‌های توپولوژی دریافته بودم. توپولوژی‌دان‌های

1) Moser 2) Appell 3) Lifshits 4) Einstein

آن دوره، از قبیل ژان‌پیر سر، رنه توم و جان میلنر گاهی برخی تعاریف را از سخنرانی خود حذف می‌کردند و فقط می‌گفتند «این تعریف طبیعی است». من متوجه این سبکِ «طبیعی بودن» نزد بهترین فیزیک‌دانان نیز شده بودم؛ در سخنرانی‌های آینشتاین و در بهترین کتاب‌های لانداو (باید دانست که همهٔ کتاب‌های لانداو به یک اندازه خوب نیستند، اما مجموعهٔ این کتاب‌ها روی هم بسیار ارزنده است. دانشجویان ما که خواهان کار در فیزیکِ نظری هستند باید همهٔ آنها را در ۲۲ سالگی بشناسند. این مجموعه نقطهٔ آغاز مشترکِ همهٔ آنان است).

با مانین چند پارادوکس و مبحث مبهم در نظریهٔ کوانتم را که در موردشان نظر مشترکی داشتیم به بحث گذاشتیم. به یاد دارم که مانین به من می‌گفت که هر ریاضی‌دان باید نکات مبهم را بیابد، اما اشتباه خواهد بود که در این مرحله متوقف شود و فقط به انتقاد از آنها بپردازد. بسیاری از ریاضیدانان، از آن جمله شاگردان‌ام، مشکلات مهمی در یادگیری فیزیکِ نظری دارند. آنان می‌خواهند آن را مانند ریاضی یاد بگیرند: اگر به مطلبی برسند که نمی‌فهمند، می‌ایستند. باید قاطعانه بگویم که فیزیک‌دانان هم چیزهای غیرقابل درکِ زیادی می‌یابند، اما خواننده باید به مطالعه ادامه دهد و فقط زمانی در بارهٔ این مسائل فکر کند که تمرین‌هایی را انجام داده و به مرحله‌ای از پیشرفت رسیده باشد.

اجرای برنامهٔ هیلبرت و تألیف فیزیک نظری به شیوهٔ اصل‌موضوعی کار بسیار مشکلی است. هیلبرت پس از کشف نسبیتِ عام آینشتاین کار مهمی انجام داد. او تشخیص داد که معادلهٔ آینشتاین همان معادلهٔ اویلرـ لاگرانژ برای بعضی تابعک‌ها است. از این رو، هیلبرت اعلام کرد که اصول موضوعِ هر نظریهٔ بنیادیِ فیزیک در موردِ معادلهٔ آینشتاین باید از یک اصل لاگرانژی شروع کند. برنامهٔ هیلبرت برای خود هیلبرت مفید واقع شد زیرا او آن را به همین شکل به‌کار برد. از تجارب برخی از دوستانم که فیزیک‌دانانِ ریاضیِ فوق‌العاده خوبی هستند و با کار در جهت برنامهٔ هیلبرت سعی کردند فیزیک را کاملاً دقیق کنند، شخصاً خوشم نمی‌آید. باید بگویم که آن را اصولاً غیرممکن می‌دانم. می‌توان راجع به یک موقعیت فیزیکی قضیهٔ خوبی اینجا یا قضیهٔ خوبی آنجا ثابت کرد. اما فکر می‌کنم ریچارد فاینمن[1] کاملاً حق دارد ادعا کند که دقت بخشیدن به فیزیک به شکل سرتاسری ممکن نیست (شاید گاه‌گاهی به‌طور موضعی ممکن باشد). رشد فیزیک سریع‌تر از شارِ قضایایی است که سعی در اصل‌موضوعی کردنِ فیزیک دارند. درصد مطالبی که قابل بیان دقیق هستند به صفر میل می‌کند؛ تعداد قضایای خوب در حال افزایش است اما نسبت آن به سرعت کاهش می‌یابد.

من حداقل پنج سال از ۱۹۶۵ تا ۱۹۷۰ از عمر خود را صرف یاد گرفتن فیزیک کردم. گاهی نیمی از وقت مفید کاری‌ام صرف آن می‌شد که مانند یک دانشجو فیزیک را یاد بگیرم، که این کار را با مطالعهٔ نخستین کتاب‌های لانداو، لیفشیتز، آینشتاین و دیگران انجام می‌دادم. در ۱۹۷۰ خواستم با فیزیک‌دانان و افرادِ مکتبِ لانداو ملاقات کنم (آنان در انستیتوی تازه‌تأسیس لانداو، که در ۱۹۶۵ تأسیس شد، کار می‌کردند). شایعات فزاینده‌ای بین فیزیک‌دانان و حتی بین مهندسان بود دال بر آنکه مبحثِ بسیار جالبی در حال توسعه است، و این مبحث توپولوژی جبری بود. البته از دید آنان مباحث دستگاه‌های دینامیکی

1) Richard Feynman

نیز جزء «توپولوژی» به حساب می‌آمدم. آیساک کولتنیکف[1]، رئیس انستیتوی استکلُف[2]، به من اطلاع داد که افراد انستیتوی لانداو مسائل جالبی در نسبیت عام دارند. آنان به یک توپولوژی‌دان نیاز داشتند و لذا من به آنان پیوستم. ما کار مشترک را در ۱۹۷۰ شروع کردیم. در آن زمان، من نسبیت عام را می‌شناختم زیرا قبلاً آن را به‌عنوان بخشی از هندسهٔ دیفرانسیل آموخته بودم. (البته باید گفت نسبیت را از کتاب‌های ریاضی نیاموخته بودم زیرا بهترین کتاب‌های راجع به نسبیتِ عام کتاب‌های ریاضی نیستند. حتی اگر خواسته باشیم بفهمیم بهترین بخش ریاضیِ موجود در کتاب‌های مورد بحث چیست، بهتر است کتاب‌هایی را که فیزیک‌دانان نوشته‌اند بخوانیم. سخنرانی‌های آینشتاین برای شروع مناسب‌اند. هم‌چنین کتاب‌های لانداوـ لیفشیتز، میسنر[3] و تورنه[4] فوق‌العاده خوب‌اند.)

آثارِ من در زمینهٔ فیزیک

نخستین مقاله‌ای که توانستم بنویسم مقالهٔ مشترکی با همکارم بوگویاولنسکی بود. در آن زمان او دانشجوی من بود. ما در زمینهٔ نسبیت عام با هم کار کردیم و اطلاعات خودمان را از دستگاه‌های دینامیکی به‌کار گرفتیم. آشنایی من با افرادی که در دستگاه‌های دینامیکی کار می‌کردند و از ده سال قبل شروع شده بود، در این زمان مفید واقع شد.

در این موقعیت روی نظریهٔ مدل‌های کیهان‌شناختیِ همگن کار کردم و به بررسی جواب‌های همگنِ معادلهٔ آینشتاین پرداختم که، خصوصاً نزدیک تکینگی‌های کیهانی، به دستگاه‌های دینامیکی پیچیده‌ای منجر می‌شود. در این زمینه گنجینه‌ای وجود دارد که حتی از نقطه‌نظر نظریهٔ دستگاه‌های دینامیکی نیز فوق‌العاده است. مسأله کاملاً قابل درک و ملموس است؛ فکرهای مربوط به ژنریک بودن را دیگر نمی‌توان به‌کار برد.

فیزیک‌دانان معمولاً این انتقاد را به مقالات برجسته‌ای از قبیلِ مقالات روئل[5] و تاکِنس[6] وارد می‌کنند. البته خیلی خوب است که مثال‌های جالبی از دستگاه‌های دینامیکی پیچیده ارائه شود. (پیش از روئل و تاکنس، نتایجی ارائه شده بود که آغازگر آنها نتایج مارستن مورس[7] در دههٔ ۱۹۳۰ بود. سمیل و افرادی از گروه ما نظیر آنوسُف، آرنولد و سینایی نیز مثال‌های جالبِ زیادی از این نوع یافته بودند.) اما وقتی سر و کار با معادلات ناویرـاستوکسِ واقعی باشد، یا معادلات آینشتاین واقعاً مطرح شود، مسأله این خواهد بود: «آیا این موقعیت تحقق‌پذیر است یا خیر؟» در اینجا باید قاطعانه بگویم که تا زمان حاضر در هیدرودینامیک هیچ‌گاه تحقق نیافته است. حتی متخصصانِ برجستهٔ نظریهٔ ارگودیک نظیر سینایی هم به مدت ده سال نتوانستند درک کنند دستگاه‌های هامیلتونی از این دستــ مانند معادلات آینشتاین برای مدل‌های کیهان‌شناختی

1) Isaac Koletnikov 2) Steklov 3) Misner 4) Thorne 5) Ruelle 6) Takens
7) Marston Morse

همگن ــ چگونه به ویژگی‌های ارگودیک نابدیهی، یعنی به جاذب‌های عجیبِ نابدیهی منجر می‌شود. تا آنجا که من می‌دانم، فقط یک مثال از چنین جاذب‌های عجیب موجود است که می‌تواند به طور تحلیلی بررسی شود. همهٔ کشفیات ملموس مربوط به جاذب‌ها فقط با کامپیوتر انجام شد. در واقع ریاضی‌دانان اینجا نقش دوم را بازی می‌کنند زیرا کار ریاضی فقط زمانی شروع می‌شود که روی کامپیوتر شکلی کاملاً روشن به‌دست آمده باشد.

فضای فاز در دستگاه دینامیکیِ مربوط به توصیف نسبیت عام از هندسهٔ بسیار جالبی برخوردار است. در واقع، افرادی از مکتب لانداو پیش از ما چنین نظام‌های غیرعادی را کشف کرده بودند، اما هیچ کس حتی از جامعهٔ فیزیک نظری نیز حرف آنها را باور نکرده بود. (توجه کنید که اینجا صحبت از ریاضیات نیست؛ کارهای نام‌برده کلاً در جامعهٔ فیزیک‌دانان صورت گرفته بود.)

بوگویاولنسکی و خودِ من برخی فنونِ دستگاه‌های دینامیک را توسعه دادیم. به عنوان حالت خاصی از تکنیک خود، ما توانستیم بی‌نظمی عجیب این نظام‌ها را با جاذب‌های عجیب مقایسه کنیم. به دلیلِ این هندسهٔ بسیار عجیب، آنها را از حیث تحلیلی ــ و نه عددی ــ محاسبه کردیم. اما جاذبهای ژنریک وجود نداشت. در دستگاه‌های ملموس، ایدئولوژیِ ژنریک کارگر نیست به دلیل آن که در دستگاه‌های اساسی همواره نوعی تقارنِ پنهان وجود دارد.

در کارها نهایت دقت را رعایت می‌کردیم. منظورم این نیست که هر قضیهٔ مربوط به توصیفِ جاذب‌ها را بادقت اثبات می‌کردیم. منظورم بیشتر این است که بیشتر این است که استخوانبندی مورد بحثِ ما به گونه‌ای ساخته می‌شد که در برخی نقاط، مقادیر ویژهٔ لیاپانُف[1] صفر بود. ما به این معنی بادقت کار کردیم که در فرایند حل این مدل‌ها، محاسبات ما عاری از اشتباهاتِ حسابی بود.

در این اثنا شاگرد سابق‌ام بوگویاولنسکی از رسالهٔ دوم خود دفاع کرد تا استادِ تمام شود. موضوع رساله ادامهٔ روش‌های فوق در موردِ دستگاه‌های دینامیک بود (بعدها او کتابی به زبان انگلیسی راجع به روش‌های کیفی در دینامیک گازها و نسبیت عام منتشر کرد). فیزیک‌دان مشهور، زلدوویچ[2] مقالات بوگویاولنسکی را ارزیابی کرد. او اظهار کرد نه‌تنها در نسبیت عام بلکه در دینامیک گازها نیز نتایج جالبی به‌دست آمده‌اند. پس از اتمام سخنرانی اصلی، زلدوویچ به‌طور غیر رسمی در این مورد با من صحبت کرد و اظهار کرد که چقدر از این روش خوشش آمده و چقدر کار با این روش پیچیده است. باید به شما بگویم که در آن زمان حتی نظریهٔ مقدماتیِ دوبعدیِ پوانکاره در بررسی کیفی، نزد جامعهٔ فیزیک نظریه‌ای مشکل و سطح بالا به حساب می‌آمد. فقط خواص و برجستگان می‌توانستند آن را به‌کار برند. علوم غیرخطی نزد برجستگانِ فیزیک نظری از سطح پایینی برخوردار بود.

1) Lyapunov 2) Zel'dovich

پیشرفت‌های جدید در توپولوژی

در انستیتوی لانداو، کار من شامل دو بخش بود. بخشی از آن اساساً به توپولوژی اختصاص داشت (به عنوان توپولوژی‌دان استخدام شده بودم و پول می‌گرفتم و افراد انستیتو دقیقاً در موردِ «ریاضیاتِ جدید» با من مشورت می‌کردند). مقدار زیادی توپولوژی در این زمان ظاهر شد که از جمله مربوط به اینستانتون‌ها می‌شد. به یاد دارم دوستم پولیاکُف[1] که شش سال جوان‌تر از من است، به دیدار من آمد و در منزل از من سؤال کرد «که چیزی در بارهٔ رده‌های مشخصه شنیده‌اید؟» به او جواب دادم که این مفهوم یکی از مفاهیم پیش پا افتادهٔ هندسهٔ دیفرانسیل است. پس از آنکه فرمول مقدماتی آن را در بعدِ دو ارائه کردم (و البته از زبان تانسورها بهره گرفتم زیرا در آن زمان نمی‌توانستم فرم‌های دیفرانسیل را به‌کار گیرم) او با تعجب گفت «کوادراتیک است!» روز بعد او به من گفت متوجه شده است که معادلهٔ مشهور خود-دوگانی به چه چیز تبدیل می‌شود. از آنجا که رده‌های مشخصه کوادراتیک بودند، امکان درآمیختن آن با تابعکِ یانگ-میلز به این شکل به وجود آمده بود.

من به عنوان مشاور با افراد دیگری تبادل نظر می‌کردم، و این منجر شد به اینکه در اوائل دههٔ ۱۹۷۰، به کشف مهمی راجع به نقش مانسته‌جایی در بلورهای مایع و در انواع غیرعادی ابررساناها دست یافتیم. پنجاه سال پیش از آن، در آزمایش‌های مبحث نور، ملاحظات جالبی ارائه شده بود، از قبیل تکینگی‌ها در بلورهای مایع مثل کُلِستِرین (شما می‌توانید این ماده را از داروخانه بخرید و تا ۱۵۰- درجه آن را سرد کنید تا فازهایی با تکینگی را در آن مشاهده کنید). هیچ کس پیش از ۱۹۷۰ نتوانسته بود دریابد که این پدیده را می‌توان با نظریهٔ مقدماتیِ مانسته‌جایی توضیح داد. دو گروه حوالی سال ۱۹۷۴ در این زمینه کار می‌کردند: یکی از دو گروه در فرانسه بود، دیگری در انستیتوی لانداو بود.

تا از ۱۹۸۰ نتوانسته بودم چنان کشف مهمی در توپولوژی انجام دهم که برای خودم جالب باشد. پیش از این تاریخ توپولوژی چنان کار می‌کرد که گویی پیشاپیش بنا شده است. عصر جدید زمانی آغاز شد که توپولوژی توانست کشفیات فیزیک‌دانان را در داخل خودِ توپولوژی به‌کار گیرد. در طول دههٔ ۱۹۷۰ غوغای عظیمی بین فیزیک‌دانان راجع به توپولوژی وجود داشت؛ همچنین بود بین فیزیک‌دانان کاربردی که در فیزیک دمای پایین یا در بلورهای مایع و یا شاخه‌های وابسته کار می‌کردند. فیزیک‌دانان عموماً معتقد بودند که مهم‌ترین مطلب جدیدی که در طول ده سال گذشته فیزیک از ریاضی گرفته است همان توپولوژی است. (به عنوان مثال، این حکم را می‌توان در یک مقالهٔ اوایل ۱۹۸۰ از آندرسن[2]، فیزیک‌دان مشهورِ زمینهٔ ابررساناها و برندهٔ جایزهٔ نوبل خواند.) در واقع مطالب جدیدی هم در سال‌های ۸۰ آشکار شد که ذیلاً به شرح آنها می‌پردازم.

چنین شد که در دههٔ گذشته تولید آثار جدیدی را در توپولوژی آغاز کردم. در این دوره اطلاعات و دانش‌ام از توپولوژی را به فیزیک‌دانان فروختم، همان‌گونه که در نخستین سالهای اقامت‌ام دستگاه‌های دینامیکی را فروخته بودم. در واقع دستگاه‌های دینامیکی بیش از بقیهٔ راه‌ها، راه من در حل مدل‌ها است.

1) Polyakov 2) Anderson

جهت جدیدی که در کارم پیش آمد با کشف نظریهٔ سولیتون‌ها آغاز شد که در اواخر دههٔ ۱۹۶۰ انجام شده بود. این کشف، یافتهٔ فوق‌العاده جالبی بود که از جمله به نظریهٔ جدیدِ دستگاه‌های انتگرال‌پذیر، نظریهٔ همدیس میدان‌ها، و (با تأخیر) نظریهٔ گروههای کوانتمی منجر شد.

مدل‌های انتگرال‌پذیر در مکانیک و ریاضیات کلاسیک

همهٔ ما نقش مسألهٔ مشهور دو جسم را، که به وسیلهٔ نیوتن حل شد، در بسط روش‌های ریاضی در فیزیک می‌شناسیم. در یک دورهٔ طولانی پس از آن، رسم بر آن شد که جواب تحلیلی دقیقِ برخی معادلاتِ دیفرانسیل را به عنوان ابزار اصلی فیزیکِ ریاضی به‌کار برند. سعی می‌شد که مسأله را اگر مشکل بود (یا خیلی مشکل می‌نمود) نخست به شکل ساده‌تر درآورند سپس جواب دقیق آن را بیابند.

در فرایند جست‌وجوی «حالت‌های انتگرال‌پذیر» مخصوص برای مسائل مشهور از قبیل مسألهٔ حرکتِ قله، کارهای بسیاری انجام شد. از همین رو، همهٔ روش‌های ریاضی مانند سری‌های توانی و مثلثاتی، تبدیلاتِ فوریه‌ـلاپلاس و سایر تبدیلات انتگرالی، آنالیز مختلط و برخی ادلهٔ مبتنی بر تقارن، در طول قرن نوزدهم کشف شدند و گسترش یافتند. این روش‌ها گاهی به نتایج منفی جالبی ختم می‌شدند، یعنی به اثبات‌هایی برای آنکه نشان دهند که برخی مدل‌ها علی‌الاصول حل پذیر نیستند.

در قرن نوزده حالت‌های انتگرال‌پذیر عجیبی هم کشف شد که هیچ گونه تقارن آشکاری نداشت: انتگرال‌پذیریِ ژئودزیک‌ها روی بیضی‌گون‌های دو بُعدی واقع در فضای سه بُعدی (ژاکوبی)، حرکت قله با پارامترهای مخصوص در حالت گرانش ثابت (کووالِوسکایا[1])، و چندتای دیگر. رویه‌های ریمانی و تابع‌های θی گونهٔ ۲ نقش پیشتازی را در انتگرال‌پذیری آنها بر عهده داشتند. چه نوع تقارنِ پنهانی می‌توان در پشت این پرده یافت؟ این موضوع تا کشف سولیتون‌ها کاملاً روشن نشد.

علاوه بر اینها، درک جدیدی از تقارن جبریِ پنهانی در مسألهٔ دو جسم را، که بر پایهٔ بردارِ لاپلاس‌ـرونگه‌ـنتس[2] برای انتگرال‌ها استوار است، باید نام ببریم. گروه «پنهانی» که به وسیلهٔ آن پدید می‌آید، در سطوح انرژی در فضای فاز عمل می‌کند؛ این گروه در مورد سطوحِ با انرژی منفیِ متناظر با مدارهای بیضوی بسته، یکریخت با $SO(۴)$، و در مورد سطوحِ با انرژی مثبت متناظر با مدارهای هذلولوی نافشرده، یکریخت با $SO(۳, ۱)$ است.

نیروهای متقارن کروی در حالت ژنریک منجر به وجود مدارهای نامتناوب در یک همسایگی به دلخواه کوچک برای هر مدار متناوب در فضای فاز می شوند (برای ذره‌های سه‌بعدیْ فضای فازْ شش‌بعدی است). مسألهٔ دو جسمِ کپلر استثنائی است: برای هر انرژی منفی همهٔ مدارها بسته‌اند. یکی از نتایجِ آن این است که هر اغتشاشِ متقارن کروی کوچک برای نیروهای گرانش منجر به تغییر مکان مشهورِ پری‌هلیوم می‌شود. این تغییر مکان در آزمون‌های نجومی برای مکانیک سماوی و نسبیت عامْ نهایت اهمیت را دارد. گروه

1) Kovalevskaya 2) Laplace-Runge-Lentz

$SO(3)$ برای تناوب مدارها کفایت نمی‌کند! اینجا تقارن پنهانیِ بسیار بزرگی مورد نیاز است.

همین تقارنِ بنیادی در هنگام کاربرد مکانیک کوانتمی در ساختار اتم که در سال‌های ۱۹۲۰ به وسیلهٔ پائولی[1] کشف شد، نقش اساسی ایفا می‌کند. در بارهٔ این نقش بعداً بحث می‌کنیم.

مدل‌های انتگرال‌پذیر در مکانیک کوانتمی و مکانیک آماری (۶۵ـ۱۹۲۵)

مدل‌های انتگرال‌پذیرِ مکانیک کلاسیک را تقریباً همه فراموش کردند جز عده‌ای معدود که متخصصِ رشته‌های باریکی از این مسائلِ کاملاً کلاسیک بودند. عصر جدیدی برای روش‌های کیفی با پوانکاره آغاز شد. اما شاخه‌های بسیار مهمی از فیزیک جدید نظیر نسبیت خاص و نسبیت عام و مکانیک کوانتمی، در ربع اول قرن بیستم کشف شدند. برخی از مسائل اولیهٔ معادلات آینشتاین و شرودینگر[2] نیز صریحاً با روش کلاسیک حل شدند.

در مورد دو ذره با بارهای متقابل، نیروی الکتریکیِ غیرنسبیتی از حیث ریاضی با نیروی گرانش اختلافی ندارد. جواب دقیقِ این مسألهٔ «دو جسم» برای این کوانتم غیرنسبیتی، همان نوع تقارن پنهانی را حفظ می‌کند که در مکانیک کلاسیک؛ یک بردار لاپلاس‌ـدونگه‌ـلنتسِ کوانتش‌شده وجود دارد که با هامیلتونیَن (عملگر انرژی) تعویض‌پذیر است و جبرلیِ گروهِ $SO(B,1)$ را در مورد انرژی مثبت و جبر لی گروه $SO(4)$ را در مورد انرژی منفی تولید می‌کند. در نتیجه، طیف این دستگاهِ کوانتمی (طیف بالمر[3]) تباهیده‌تر آن است که گروهِ تقارنِ کروی (گروهِ $SO(3)$) ایجاب می‌کند. حالت‌های پایدارِ موضعی‌شده انرژی منفی دارند و می‌توان آنها را به مثابهٔ مدارهای متناوبِ کوانتش‌شدهٔ مسألهٔ کلاسیکِ نوع کپلر برای نیروهای الکتریکی در نظر گرفت. با توجه به قاعدهٔ مشهورِ پائولی (که می‌گوید از میان همهٔ حالت‌های ممکن که پایهٔ متعامد می‌تواند فراهم کند دو الکترون نمی‌توانند هر دو یک حالت را به خود بگیرند)، این طیف ما را به آنجا می‌کشاند که تقریباً رده‌بندی مندلیف عناصر را تشریح کنیم.

توجه شود که تقارن پنهانی از این نوع یک ویژگی استثنائی برای نیروهای از نوع r^{-2} (و همچنین نیروهای خطی) هستند، اما همین موارد استثنائی به عنوان نخستین تقریب‌های قابل توجه در اساسی‌ترین مسائلِ نظریه‌های کلاسیک و کوانتمی ظاهر می‌شوند. در جامعهٔ فیزیک‌دانان نظری عقیده‌ای مشترکاً رایج است دال بر اینکه: اساسی‌ترین قواعدِ ریاضیِ فیزیک را می‌توان (دست کم با نخستین تقریب‌های قابل قبول) با اشیائی شرح داد که تقارن‌های پنهانی عظیمی را شامل می‌شوند.

دسته‌بندی مسائل ملموسی که فیزیک‌دانان در فرایند توسعهٔ نظریه‌های کوانتیک بین سال‌های ۱۹۲۵ تا ۱۹۶۵ حل کرده‌اند، کار بسیار مشکلی است. می‌خواهیم به نتایج معروف بِته[4] و اونزاگر[5] در ارتباط با حل مدل‌های یک‌بعدیِ کوانتمیِ چندذره‌ای و مدل‌های مکانیک آماری اشاره کنیم. روش مشهورِ بته[6]

1) Pauli 2) Schrödinger 3) Balmer 4) Bethe 5) Onsager 6) *Bethe Ansatz*

برای ساختنِ توابع ویژه کشف شد و مدلِ دوبعدیِ ایزینگ[1] حل شد. امّا نفوذ و تأثیر این اکتشافات بر روش‌های ریاضیِ فیزیک تا مدت‌ها بعد کاملاً شناخته نشد، یعنی تا زمانی که نظریهٔ سولیتون‌ها در فرایند کوانتش روش‌های آن ابداع شد.

نظریهٔ سولیتون‌ها

در اوایل دههٔ شصت، افرادی که در نظریهٔ پلاسما کار می‌کردند ملاحظه کردند که معادلهٔ کورتوخ‌ـدِوریس[2] (KdV) به عنوان نخستین تقریب جهانیِ انتشارِ موج در بسیاری از محیط‌های غیرخطی ظاهر می‌شود و به این ترتیب ماهیّت غیرخطی را با ویژگیِ پخش‌شدن در هم آمیختند (به شرط آنکه چسبندگی نادیده گرفته شود). پیش از آن تاریخ، سال‌ها بود که KdV را به‌عنوان یک دستگاهِ بسیار خاصِ امواج در آبِ کم‌عمق می‌شناختند. بررسیِ معادلهٔ KdV در سال‌های شصت آغاز شد و مهم‌ترین اکتشافات در مقاله‌های کروسکال‌ـزابوسکی[3] (۱۹۶۵)، گاردنر[4]ـگرین[5] ـکروسکال ـمیورا[6] (۱۹۶۷)، لَکس[7] (۱۹۶۸) ظاهر شد. این دستگاهِ شدیداً پرمایه، به یک معنی با فرایندی جدید و بسیار عجیب (تبدیلِ پراکندگی وارون[8]) کاملاً انتگرال‌پذیر است.

در این مورد دقیق‌تر صحبت کنیم. دستگاه KdV به یک شکلِ

$$u_t = ۶uu_x - u_{xxx}$$

است. ساده‌ترین جواب‌های آن که از قرن نوزده شناخته شده‌اند، سولیتون‌های

$$u(x-vt) = -\frac{۳a}{\mathrm{ch}^۲(۳a)^{\frac{۱}{۲}}(x+۱۲at)}$$

وامواج نویدالِ[9]

$$u(x-vt) = ۲p(x-vt) + \text{ثابت}$$

هستند. در این میان، سولیتونْ موضعی‌شده و موجِ نویدال نسبت به x متناوب است. در این عبارت، $\mathscr{P}$ همان تابع بیضویِ متناوب دوگانهٔ وایرشتراس است که تباهیدهٔ آن دقیقاً سولیتون است.

اکنون عملگر شتورم‌ـلیوویل[10] و عملگر مرتبهٔ سومِ

$$L = -\delta_x^۲ + u(x,t), \quad A = -۳\delta_x^۳ + ۴u\delta_x + ۲u_x$$

1) Ising 2) Korteweg-de Vries 3) Kruskal-Zabusky 4) Gardner 5) Green 6) Miura 7) Lax 8) inverse scattering transfrom 9) knoidal 10) Sturm-Liouville

را در نظر بگیریم. جابه‌جاگر آن این است:

$$[L, A] = ۶uu_x - u_{xxx} = Q_۱$$

یعنی ضرب در تابع $Q_۱$. معنی این گفته آن است که معادلهٔ لَکسِ

$$\frac{\delta L}{\delta K} = [L, A]$$

از حیث صوری هم‌ارز است با معادلهٔ غیرخطی KdV.

تبدیل پراکندگیِ وارون

فرایند مشهورِ GGKM را می‌توان بی‌درنگ از معادلهٔ لَکس نتیجه گرفت. فرض کنید همهٔ توابعِ $u(x,t)$ وقتی $x \to \pm\infty$ سریعاً صعودی باشند. جواب‌های ویژهٔ معادلهٔ خطی شتورم‌ـلیویل با مجانب‌های نهاییِ زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{gathered} L\psi = \lambda\psi, \quad L\varphi = \lambda\psi, \quad h^۲ = \lambda \\ \psi_\pm \to e^{\pm ikx}, \quad x \to -\infty \\ \varphi_\pm \to e^{\pm ikx}, \quad x \to +\infty. \end{gathered}$$

یک تبدیل تک‌مدولی از پایهٔ ψ به φ به شکل زیر وجود دارد:

$$\begin{gathered} \varphi_+ = a\psi_+ + b\psi_- \\ \varphi_- = \bar{b}\psi_+ + \bar{a}\psi_- \\ |a^۲| - |b|^۲ = ۱ \\ . \end{gathered}$$

مؤلفه‌های $a(k)$ و $b(k)$چیزهایی را تعیین می‌کنند که به داده‌های پراکندگی برای عملگرِ شرودینگرِ L با پتانسیلِ موضعی‌شده معروف‌اند. به کمک تبدیل پراکندگیِ وارون می‌توان از روی تابعِ $[a(k), b(k)]$ پتانسیل مورد بحث را با ویژگی‌های تحلیلی مناسب و تعدادی متناهی «دادهٔ گسسته» بازسازی کرد، مطلبی که مدت‌ها پیش یعنی از دههٔ ۱۹۵۰ شناخته شده بود.

قضیهٔ GGKM چنین می‌گوید:

الف) $\frac{da(k)}{dt} = ۰$ و $\frac{db(k)}{dt} = (ik)^۳ b(k)$.

ب) مقادیر ویژهٔ گسسته، انتگرال‌های حرکت هستند.

ج) می‌توان چگالی‌های موضعی برای انتگرال‌های حرکت برای KdV را به روش زیر ساخت. جواب صوری معادلهٔ ریکاتی[1] را در نظر بگیریم:

$$\chi_x + \chi^2 = u - \lambda, \quad \chi = k + \sum_{n \geq 1} \frac{P_n(u, u_x, \dots)}{(2k)^n}.$$

در این صورت انتگرال‌های

$$I_m = \int P_{2m+3} dx$$

کمیّت‌های پایستارِ موضعی برای KdV هستند.

د) جواب‌های دقیق (سولیتونِ چندگانه[2]) از روی‌پتانسیل‌های بدون انعکاسِ $b(h) \equiv 0$ به‌دست می‌آیند.

سلسله مراتبِ KdV. ویژگی‌های هامیلتونی. تعمیم

بینهایت عملگرِ

$$A_0 = \partial_x, \quad A_1 = A, \quad \dots, \quad A_n = \partial_x^{2n+1} + \dots, \quad \dots$$

وجود دارند به قسمی که جابه‌جاگرِ $[L, A_n]$ به شکل ضرب در یک چندجمله‌ایِ خاصِ

$$Q_n(u, u_x, u_{xx}, \dots, u_{2n+1})$$

است. منظور از سلسله‌مراتبِ KdV مجموعهٔ دستگاه‌های غیرخطیِ

$$\frac{\partial u}{\partial t_n} = Q_n$$

است که هم‌ارزند با مجموعهٔ معادلات از نوع لکس:

$$\frac{\partial L}{\partial t_n} = [L, A_n].$$

همهٔ این شارش‌ها با یکدیگر تعویض‌پذیرند؛ می‌توان جواب مشترکی به شکلِ

$$u(x, t_1, t_2, t_3, \dots), \quad t_0 = x$$

یافت. بررسی مفصلِ چندجمله‌ای‌های Q_n را گاردنر[3] در اواخر دههٔ شصت انجام داد. از جمله معلوم شد که این چندجمله‌ای‌ها به شکل زیر (شکل گاردنر) هستند:

$$Q_n = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\delta I_{n+1}}{\delta u(x)}\right)$$

1) Riccati 2) multisoliton 3) Gardner

$$I_{-1} = \int u dx, \quad I_0 = \int u^2 dx, \quad I_1 = \int (\frac{u_x^2}{2} + u^3) dx + \cdots$$

همانگونه که گاردنر، زاخارف[1] و فادیف[2] در ۱۹۷۱ ملاحظه کردند، اینْ شکلِ معادلهٔ هامیلتونیِ متناظر با کروشهٔ GZF ـپواسونِ

$$\{u(x), u(y)\} = \delta'(x-y)$$

و متناظر با هامیلتونیِ

$$H_n = I_{n+1}$$

است. تبدیلِ پراکندگیِ وارون را می‌توان به صورتِ یک تابعک مشابه با تبدیلِ $u(x)$ به متغیرهای عمل‌ـزاویه که در مکانیک تحلیلی مرسوم است بررسی کرد، که تبدیل اخیر در کوانتشِ نیمه‌کلاسیک (توسط زاخارف و فادیف) مفید واقع شد.

برنامهٔ کوانتش بعد از ۱۹۷۵ به‌وسیلهٔ فادیف، تاختادژیان[3]، سکلیانین[4] و دیگران شروع شد. گروه‌های گوناگونی از ۱۹۷۱ دستگاه‌های غیرخطی جالبی را کشف کردند که با معادلهٔ لکس و تبدیل پراکندگی وارون انتگرال‌پذیرند. دستگاه‌های مشهوری که قبلاً شناخته شده بودند، با این روش حل شدند (مانند شرودینگر غیرخطی، سینوس‌ـگوردون، دستگاه ولترای گسسته و KdVی گسسته، شبکهٔ تودا[5] و بسیاری دیگر، شامل برخی دستگاه‌های دوبعدی مخصوص، که بعداً معلوم شد که این دستگاه‌ها خیلی مهم هستند).

از ۱۹۷۶ به بعد، گروه‌های گوناگونی ویژگی‌های جالب دیگری یافتند و تعمیم‌هایی از فرمالیسم هامیلتونی برای نظریهٔ KdV را بررسی کردند. کروشه‌های پواسون جدیدی کشف شد که تقارن‌های جبریِ پنهانِ عظیمی را دارا بودند؛ مثلاً کروشهٔ دوم لنارت‌ـماگری[6] برای KdV، و کروشه‌های گلفاند‌ـدیکی[7] برای تعمیم‌هایی از سلسله‌مراتبِ KdV ناظر به عملگرهای اسکالر مرتبهٔ بالاتر.

1) Zakharov 2) Faddeev 3) Takhtadzhyan 4) Sklyanin 5) Toda 6) Lenart-Magri
7) Dikiĭ 8) Dubrovin 9) Mateev 10) Mckeen 11) Van Moerbeke 12) Krichever

مسائل متناوب و شبه‌متناوب. رویه‌های ریمان و توابعِ θ

رهیافت مناسبی برای حل مسألهٔ متناوب برای KdV را نگارنده در ۱۹۷۴ به‌دست آورد. پس از آن حل کامل توسط نویکُف و دوبرووین[۸] (۱۹۷۴)، لکس (۱۹۷۵)، ایتس ماتیف[۹] (۱۹۷۵)، مک‌کین[۱۰] و وان موربکه[۱۱] (۱۹۷۶) و سرانجام به وسیلهٔ کریچِور[۱۲] (۱۹۷۶) برای دستگاه‌های (۱ + ۲) از نوعKP (کادومتسف‌ـپت‌ویاشویلی[۱]) ارائه شد. مبنای این رهیافت، ردهٔ KdVـناوردای عملگرهای شرودینگرِ «متناهیْ‌رخنه» با پتانسیل‌های متناوب و شبه‌متناوبی است که طیف‌شان روی خطِ $\mathbb{R}$ فقط تعدادی متناهی رخنه دارد. این پتانسیل‌ها در معادلهٔ پایداریِ KdV و در معادلاتِ KdVی بالاترِ

$$\left[L, \sum_{j=0}^{N} c_j A_j\right] = 0,$$

که N تعداد رخنه‌های متناهی است، صدق می‌کنند.

این دستگاه یک دستگاه هامیلتونیِ متناهیْ‌بعدِ کاملاً انتگرال‌پذیر است. جواب آن به شکل صریح بر حسب توابع θی رویه‌های ریمان که گونهٔ آنها N است، به شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$u(x,t) = \text{ثابت} - 2\partial_x^2 \log\theta(Ux + Vy + U_0)$$

که U و V بردارهایی N بعدی‌اند.

پتانسیل‌های متناهی‌رخنه، خانواده‌ای چگال در فضای توابع پیوستهٔ متناوب تشکیل می‌دهند (مارچنکوـاوستروفسکی[۲]، ۱۹۷۷) و حتی در فضای توابع شبه‌متناوب نیز چگال‌اند. در مورد پتانسیل متناوبِ $u(x+T) = u(x)$ عملگر شرودینگر L با عملگر انتقالِ $\hat{T} : x \mapsto x + T$ جابه‌جا می‌شود. بنابراین، یک تابع ویژهٔ مشترک برای عملگرهای L و $\hat{T}$ وجود دارد (که در فیزیکِ حالت جامد شناخته‌شده است):

$$L\Psi = \lambda\Psi$$
$$\hat{T}\Psi = e^{ipT}\Psi.$$

در اینجا $p = p(\lambda)$ تابعی است چندمقداری از λو طیف مورد نظر دقیقاً مجموعهٔ λهایی است که $p(\lambda) \in \mathbb{R}$.

دقیقاً دو تابع ویژهٔ بلوک $\Psi_\pm$ برای هر مقدار مختلطِ λ (جز برای تعدادی شمارا از نقاط انشعاب) وجود دارد. تابع Ψ تابعی است ناقص‌ریخت روی یک رویهٔ ریمانی اَبَربیضوی Γ (پوششی دوگانه از صفحهٔ λ) که به طور ژنریک گونه‌اش بی‌نهایت است. در مورد پتانسیل حقیقیِ $u(x)$ روی خط $\mathbb{R}$ نقاط انشعاب حقیقی هستند: این نقاط دقیقاً منطبق‌اند بر نقاط انتهایی طیف. این خم طیفی‌ی Γ است.

1) Kadomtsev-Petviashvili 2) Marchenko-Ostrovskiĭ

جواب غیرتکینِ حقیقیِ ژنریک برای معادلهٔ تعویض‌پذیریِ

$$\left[L, \sum_{j=0}^{N} c_j A_j\right] = 0$$

شبه‌متناوب است (شامل یک خانوادهٔ چگال از جواب‌های متناوب با دوره‌های تناوبِ متفاوت است). همهٔ آنها دارای خم طیفیِ مشترک Γ از گونهٔ N هستند و بر عکس. پتانسیل $u(x)$ و تابع ویژهٔ Ψ را می‌توان بر حسب تابع θی متناظر با رویهٔ Γ بیان کرد. در دههٔ ۱۹۲۰، مطالعات جبریِ صوریِ جالبی در موردِ عملگرهای دیفرانسیل معمولی تعویض‌پذیر صورت گرفت (بورکنال[1] و شوندی[2]): بر پایهٔ رابطه‌ای چندجمله‌ای بین L و A، که برای هر زوج تعویض‌پذیر یافتند، رویه‌ای ریمانی بدون ارتباطی صوری بین تناوب و رویهٔ موردِ بحثِ ما کشف کردند. قضیه‌ای هست که می‌گوید برای عملگرهایی که مرتبهٔ آنها نسبت به هم اول باشند و ضرایب‌شان متناوب باشد، این دو رویه در واقع بر هم منطبق‌اند. در حالت‌های پیچیده‌تر ممکن است چنین نباشد.

اکنون می‌توان شرح داد که ظاهرشدن رویه‌های ریمان در نظریهٔ دستگاه‌های انتگرال‌پذیرِ متناهی‌بعد بر مبنای کدام فکرِ مقدماتی است. بسیار مفید است ارتباطی بین نمایش اصلی لکس برای دستگاه‌های نوع KdV و شرط سازگاریِ دو دستگاه خطیِ 2×2 با ضرایب وابسته به λ (یعنی با معادلهٔ انحنای صفر) برقرار کنیم:

الف) معادلهٔ لکس (۱۹۶۸)

$$\frac{\partial L}{\partial t} = [L, A].$$

ب) معادلهٔ انحنای صفر (۱۹۷۴، برای سلسله مراتبِ KdV و سینوس‌ـگوردون)

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \Lambda(\lambda)\Psi$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = Q(\lambda)\Psi$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t} = [\Lambda, Q].$$

در مورد KdVی معمولی داریم

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ u - \lambda & 0 \end{bmatrix}$$

1) Burchnall 2) Chaundy

$$\Lambda_1 = \Lambda = \begin{pmatrix} -u_x & 2u + 4\lambda \\ -4\lambda^2 + 2\lambda u - u_{xx} + 2u^2 & u_x \end{pmatrix}.$$

در مورد KdVی بالاتر باز هم همین Qرا داریم؛ ماتریس‌های متناظرِ آن، یعنی Λ_nها چند جمله‌ای‌هایی از λ هستند. در مورد معادلهٔ پایداری ($\partial_t = 0$)، نمایش «نوع لکس» را برای دستگاه متناهی‌ْبعدِ

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x} = [Q, \Lambda]$$

داریم.

اینجا است که رویهٔ Γ ظاهر می‌شود. در مورد KdVی معمولیِ پایدار، گونهٔ این رویه یک است و تابع بیضویِ وایرشتراس ظاهر می‌شود:

$$\det(\Lambda - uI) = P(\lambda, u) = 0.$$

تابع $\psi(x, P)$ روی رویهٔ Γ یک تابع ناقص‌ریخت است. ضرایبِ آن انتگرال‌های دستگاه هستند (و به x بستگی ندارند).

در مورد KdV و KdVی بالاتر، همهٔ ماتریس‌های Λ_n دارای اثر صفرند و رویه‌های ریمانیِ مربوط ابر بیضوی‌اند:

$$\mu^2 = R_{2n+1}(\lambda),$$

که n گونهٔ Γ است.

تابع ψ از روی «داده‌های جبری-هندسی» با صراحت به دست آمد: رویهٔ ریمانِ Γ و قطب‌های Ψ (Ψ دقیقاً n قطب دارد که پس از نرمال‌سازیِ مناسبی مستقل از xاند). این رهیافت در مورد همهٔ دستگاه‌های انتگرال‌پذیرِ نابدیهیِ شناخته‌شده کارگر است. همان‌طور که اکنون می‌دانیم، این مکانیسم برای دستگاه‌های کلاسیکی نیز که در بالا اشاره کردیم (از قبیل ژاکوبی-کلبش[1] کوالوسکایا، ...) معتبر است. اکتشاف مهمی را کریچور در ۱۹۷۶ انجام داد؛ او این رهیافت را بهبود بخشید و به $(2 + 1)$-دستگاه‌های نظیر KP تعمیم داد. همهٔ رویه‌های ریمانی در نظریهٔ مربوط به KP ظاهر می‌شوند. ویژگی اخیر در مورد کاربرد این فکرها در مسائل گوناگون اهمیت فراوانی دارد (از قبیل مسائل نوع شاتکی[2] در نظریهٔ توابع θ، که مشابهِ پایه‌های فوریه-لوران روی رویه‌های ریمانی است و در نظریهٔ ریسمان مفید واقع می‌شوند، فرمالیسمِ توابع τ، و غیره). ساختارهای تابعی کلاسیک، پس از نظریهٔ متناوب سولیتون‌ها، قویاً تعمیم داده شدند.

1) Clebsch 2) Schottky

خاتمه

پس از این بحث مفصل، اکنون به ارائهٔ چند شاخهٔ ریاضیات و فیزیک نظری می‌پردازیم که در مدل‌های سولیتونِ انتگرال‌پذیر دخیل بوده‌اند. ارتباط‌های جدید مهمی بین این شاخه‌ها کشف شده است.

۱ـ موج‌های غیرخطی در محیط‌های پیوسته (مشتمل بر پلاسما و اپتیک غیرخطی).

۲ـ نظریهٔ کوانتم، نظریهٔ پراکندگی و بلورهای متناوب.

۳ـ دینامیک هامیلتونی.

۴ـ هندسهٔ جبریِ رویه‌های ریمان و واریته‌های آبلی (توابعِ θ).

کوانتشِ روش‌های سولیتون به کشف تبدیل کوانتمی وارون منجر شد که آغازگران آن فادیف، سکلیانین، تاختادژیان، زامولودچیکف[1]، بلاوین[2] و دیگران بودند. موضوع جدیدی که آن را معادلهٔ یانگـ باکستر[3] می‌نامند، نقش پیشرو را به عهده داشت. بعدها (سکلیانین، درینفلد[4]، جیمبو[5]) جبرهای هوپف ظاهر شد که با موضوعِ خاصِ Rـماتریسِ جهانیِ یانگـباکستر به گروه‌های کوانتم کشیده شده که امروز طرفداران فراوان دارد.

توجه شود که بنا بر معادلهٔ خودـدوگانِ یانگـمیلز (پولیاکُف و دیگران)، نظریهٔ اینستانتون با کاربردهای جالب‌اش در توپولوژی چهاربعدی ظاهر شد (دونالدسن[6] و افراد دیگری از مکتب عطیه). نظریهٔ معادلات یانگـباکستر به چندجمله‌ای‌های جونز در نظریهٔ گره‌ها کشیده شد. نظریهٔ میدان‌های ۲بعدیِ همدیس نیز دستهٔ قابل ملاحظه‌ای از مدل‌های انتگرال‌پذیر را برای ما فراهم کرد که آنها نیز موضوع جبری جدیدِ بسیار زیبایی هستند. آنها ارتباط تنگاتنگی با نظریهٔ سولیتون و گروه‌های کوانتم دارند.

به عنوان جمع‌بندی، می‌توانم تز زیر را مطرح کنم: بخش عمده‌ای از مهم‌ترین اکتشافات ریاضی و روش‌های ریاضیِ فیزیک، در فرایند توسعهٔ نظریهٔ مدل‌های انتگرال‌پذیر صورت گرفته است.

اصل مقاله بر مبنای نوشتهٔ مؤلف و نوار ویدئویی سخنرانی، توسط رگینا مارتینز (Regina Martinez) تهیه شد.

مترجم: ارسلان شادمان

دانشگاه تهران، دانشکدهٔ علوم، گروه ریاضی و علوم کامپیوتر

صندوق پستی ۱۴۱۵۵٫۶۴۵۵

پست الکترونیک: chademan@khayam.ut.ac.ir

---

1) Zamolodchikov 2) Belavin 3) Yang-Baxter 4) Drinfeĺd 5) Jimbo 6) Donaldson

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شمارهٔ ۲۴(بهار ۱۳۷۹)، صص. ۴۹ تا ۵۶

معرفی و نقد کتاب

با ذرّه تا بی‌نهایتِ مهر اثر مجید میرزاوزیری

محمد صال‌مصلحیان

توصیف کتاب

آقای دکتر مجید میرزاوزیری کتابِ با ذره تا بی‌نهایت مهر را در زمستان ۱۳۷۸ با همکاری انتشارات پارس سینا و با صحافی و طرحِ جلد مناسب و با هزینهٔ شخصی منتشر نموده است. وی در این کتاب ۳۲۰صفحه‌ای سعی کرده است در قالب یک داستان و با نگاه به حوادث واقعیِ زندگیِ خود و به بهانهٔ سال جهانی ریاضیات، به عمومی کردن ریاضیات و تقلیل ترسِ حاکم بر اذهانِ عامهٔ مردم بپردازد، بعضی از مفاهیم ریاضی را به زبان ساده و به کمک مثال‌های ملموس و با استفاده از مضامین ادبی آموزش دهد و نیز نشان دهد که ریاضی‌خوانان می‌توانند اهل عشق و شعر یا به اصطلاح رمانتیک باشند. سبک داستان در سطح خود ابتکاری است، و از جهاتی یادآور کتاب‌های سرژ لانگ مانند [۴] و یا [۵] است.

داستان دارای طرح مشخصی است و دارای سه شخصیت اصلی است. اولی آقای ریاضیدان دکاد دابگا_فگابا است و شخصیت دوم همسر دانشجوی او خانم بادا ایبکایی و نفر سوم دوست عاشق‌پیشه‌اش آقای دبافک دهددبفب است که از ریاضیات بدش می‌آید ولی در پایانِ سفر مجذوب آن می‌شود: «ذرّه‌ای بودم که به بی‌نهایتِ مهر رسیدم» (ص. ۳۰۳). ایشان قصد سفر به کشور ریاضیات با ایالات گوناگون‌اش را (که هر یک نمایش شاخه‌ای از ریاضیات بر اساس طبقه‌بندیِ AMS-1991 است) دارند. ایشان به سفارتخانهٔ ریاضیات مراجعه کرده پس از اخذ ویزا سفر خود را شروع می‌کنند. سفری که در آن نویسنده بسیاری از مضامین ریاضی را با حوصله به نمایش می‌گذارد.

اولین ایالت تاریخ است. در این بخش اساساً به داستان کشف اصم بودنِ $\sqrt{۲}$ توسط هیپاسوس پرداخته شده است (صفحه‌های ۴۵ و ۴۶ را ملاحظه کنید).

دومین ایالتی که از آن بازدید شده است، منطق است. این فصل به بحثِ ساختارهای اصل‌موضوعی و نقش منطق در آن و نیز طرح منطق‌های چندارزشی و فازی پرداخته است:

> . . . خیلی‌ها سعی کرده‌اند ماشینی بسازند که قضیه اثبات کند. در حقیقت درکشور ریاضیات چنین ماشینی را باید یک دستگاه ضرب سکه به شمار آورد. ولی متأسفانه این کار امکان‌پذیر نیست. تورینگ خیلی سعی داشت که چنین کاری را انجام دهد. البته او در صدد ساخت یک ماشین واقعی نبود، بلکه به دنبال یافتن یک تئوری برای ساخت چنین دستگاه ذهنی و تصوری بود.
>
> ـ همه چیز ریاضیات زیباست. برای درستی اثبات هست، برای عدم درستی اثبات هست، برای وجود یک گزاره غیرقابل اثبات، اثبات هست. و همهٔ اینها به کمک منطق اثبات می‌شود.
>
> گدل گفت: اما کسانی که بیرون ریاضیات هستند این زیبایی را درک نمی‌کنند و مباحث ما در نظر آنها خسته‌کننده جلوه می‌کند. (ص. ۸۶)

ایالت سوم نظریهٔ مجموعه‌ها است که در واقع دائرةالمعارفی است از مفاهیم کلاسیک در نظریهٔ مجموعه‌ها:

> ـ بینندگان عزیز از ایالت منطق برای شما گزارش می‌کنم. تظاهرات جوانان که از چند روز قبل به منظور حمایت از خوشترتیبی صورت گرفته بود امروز به اوج خود رسید. این عده که با شعارهای «انتخاب، انتخاب، اثبات باید گردد»، «زنده باد خوشترتیبی» و «درود بر لم زُرن» سعی در بیان عقاید خود داشتند با حمله به چند زنجیر از بالا کراندار خشونت خود را به معرض دید مردم گذاشتند. در پی این ماجرا که به متلاشی شدن سه زنجیر از بالا کراندار انجامید، دو عنصر بیشین به شدت مجروح شدند. جراحات ناشی از حادثه تا حدی بود که پلیس مجبور شد آنها را به بیمارستان انتقال دهد. بیمارستان وضعیت این دو مجروح را وخیم اعلام کرد. منتظر خبرهای بعدی ما باشید (ص. ۱۳۹)

مؤلف در ایالت چهارم، شهرفرنگی از عبارات و مسائل کلاسیکِ ترکیباتی مانند فاکتوریل، گراف، مسألهٔ چهاررنگ، مثلث خیام و قضیهٔ دوجمله‌ای را ارائه کرده است:

> ـ وقتی حاصلضرب اعداد مثلاً از ۱ تا ۱۰ را می‌خواهیم بنویسیم، آن را با $۱۰!$ نمایش می‌دهیم و می‌خوانیم ده فاکتوریل.
>
> ـ چرا علامت تعجب؟
>
> ـ چون عدد واقعاً بزرگی می‌شود.
>
> دهدفد گفت: فاکتوریل مثل یک سد عمل می‌کند. دبافک پرسید یعنی چه؟
>
> ـ یعنی علامت "!" مثل یک سد جلوی عدد ده است. وقتی سد را برداریم اعداد به پایین می‌ریزند. مثلاً $۱۰! = ۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵ \times ۶ \times ۷ \times ۸ \times ۹ \times ۱۰$. اما سد را هر جا که خواستیم می‌توانیم قرار

دهیم. مثلاً $!۷ \times ۸ \times ۹ \times ۱۰ = !۱۰$ و یا $!۸ \times ۹ \times ۱۰ = !۱۰$.
ـ جالب است. (ص. ۱۵۶)

نظریهٔ اعداد ایالتی با چشم‌اندازهای خیره‌کننده است. قضیهٔ ویلسون، دستگاه هیلبرت، اعداد اولِ مرسن، قضیهٔ اعداد اول و قضیهٔ اویلر در آن می‌درخشند:

. . . هیلبرت نام یک ریاضیدان بوده است. ایشان مجموعه‌ای را در نظر گرفتند که به دستگاه هیلبرت معروف است. این مجموعه، مجموعهٔ اعدادی است که در تقسیم بر ۴ دارای باقیماندهٔ ۱ هستند، یعنی مجموعهٔ

$$\{۱, ۵, ۹, ۱۳, ۱۷, ۲۱, ۲۵, ۲۹, \ldots\}.$$

حاصلضرب هر دو عضو از این مجموعه باز هم عضوی از این مجموعه است. می‌توانیم مفهوم عدد اول را در این مجموعه نیز تعریف کنیم، یعنی اینکه یک عدد بزرگتر از ۱ را در این مجموعه اول می‌نامیم اگر در این مجموعه فقط بر خودش و ۱ قابل قسمت باشد. مثلاً ۵ اول است. مثلاً ۹ اول است . . .
دبافک گفت: ۹ اول نیست. چون بر ۳ قابل قسمت است.
ـ اما ۳ در این مجموعه نیست. پس ۹ در این مجموعه فقط بر خودش و ۱ قابل قسمت است. پس ۹ اول است. (ص. ۲۲۱)

در ایالتِ گروه، جایگشت‌ها و گروه دوری به تفصیل و با مثال‌های جالب و نسبتاً دقیق توضیح داده شده است. سه فصل بعدی به توابع خاص، دنباله‌ها و هندسه مربوط است.

کتاب با فهرست موضوعیِ شاخه‌های ریاضیات و فهرست شخصیت‌های داستان ختم گردیده است.

بسیاری از مطالب مقدماتی به صورت سنجیده و با شیوهٔ بدیع ارائه شده است، مانند بحث در وجودِ مجموعهٔ تهی (صص. ۹۷-۹۶)، تعریف توابعِ یک به یک و پوشا به کمک نبرد خیابانی (صص. ۱۲۰ و ۱۲۱)، یافتن ضرایب بسط دوجمله‌ای (صص. ۱۶۶-۱۶۵)، معرفی همنهشتی با یاری آدمهای هفت‌انگشتی (صص. ۲۱۰-۲۰۵)، تعریف جایگشت‌ها به کمک ناظم‌هایی که با دمیدن مداوم در سوت خود دانش‌آموزان را در صف‌شان جابه‌جا می‌کنند (صص. ۲۷۰-۲۶۵)، و حتی توصیفِ سادهٔ هندسه‌های نااقلیدسی (صص. ۳۱۲ تا ۳۱۶).

مؤلف به طرح سؤالات فلسفی نیز پرداخته است:

. . . اگر ریاضیدانانِ خاصی ریاضیات را به گونه‌ای که امروز هست به وجود نمی‌آوردند—و یا کشف نمی‌کردند—آیا باز هم ریاضیات درست به شکل امروزی بود؟ به عبارت دیگر آیا این امکان وجود داشت که افراد دیگری این مهم را به انجام برسانند؟ ریاضیات را ریاضیدانان به وجود آورده‌اند و یا ریاضیدانان صرفاً سرزمینی از پیش ساخته شده را کشف کرده‌اند؟ این سؤالی است که بطور کلی در مورد تاریخ وجود دارد. و اصولاً در حالت کلی‌تر می‌توان این سؤال را مطرح کرد که ما مجبور به انجام زندگی از پیش تعیین شده هستیم یا اختیار داریم که خود، مسیر زندگی خود را تعیین کنیم؟ (صص. ۳۹-۳۸)

همچنین در لابلای داستان موشکافی‌های بسیار نموده است:

. . . می‌گویند مردم بر دو دسته‌اند، یک دسته آنهایی که اعتقاد دارند که مردم دو دسته‌اند و دسته دیگر آنهایی هستند که اعتقاد ندارند! (ص. ۷۰)

مؤلف گاه، مثلاً در معرفی مجموعهٔ تهی و خواص آن (صص. ۹۸-۹۷) به شیوهٔ سقراطی به تقلید از استادانِ قدیم پیروِ کلاسیسم می‌شود و آن هنگام که کلمات قصارِ دکاد را در عرصهٔ عشق بیان می‌کند یک رمانتیسیستِ تمام‌عیار می‌گردد. زمانی با ذکر جزئیات عادی و مصائب زندگی خود یک رئالیست به نظر می‌آید.

. . . در بعضی ازکشورها به خاطر کمبود شغل و معضلات اقتصادی، مردم به تحصیل در دانشگاه‌ها می‌پردازند و وقتی تحصیل از روی علاقه نباشد، نتیجهٔ خوبی به همراه ندارد. در بعضی کشورها هم مردم به خاطر مدرک‌گرایی به تحصیل می‌پردازند که این یکی هم اصلاً از روی علاقه نیست. (ص. ۴۳)

و گاه با انتخاب اشعار خاصی از حافظ پیرو سمبولیسم می‌شود و بالاخره با سرودن شعری و ابرازِ گوشه‌هایی از دلتنگی‌های خود سوررئالیست می‌نماید:

دکاد گفت: من دلم می‌گیرد
وقتی از کوچهٔ احساسِ دلم،
کودکی می‌گذرد.
دوست دارم بروم،
نرم پشت سر او.
بعد از گوشهٔ چشمش آرام،
قطرهٔ عاطفه را بردارم.
ولی افسوس که او می‌گذرد،
و نمی‌داند من،
در پی یافتن یک لبخند،
تا چه حد گریانم. (صص. ۲۵۲-۲۵۱)

و همه اینها به ارضای سلیقه‌های ادبی گوناگون خوانندگان کمک می‌کند و بر زیبایی اثر می‌افزاید.

نقد کتاب

نویسنده هیچ تصور روشنی از ویژگی‌های اندامی و شخصیتیِ افراد داستان ارائه نداده است و معلوم نیست که اینها انسان‌اند یا مریخی! نام شخصیت‌های اصلی نیز گنگ است و به سختی در ذهن خواننده جای

می‌گیرد (این را مقایسه کنید مثلاً با توصیف حاجی ابوتراب در صفحه ۲۶ از کتاب حاجی آقا اثر صادق هدایت [۶].

جزئیات محل حوادث نامشخص است و روشن نیست جریان داستان در آسمان اتفاق می‌افتد یا در زمین. زمان داستان گسسته است و حوادث پراکنده و سریع می‌گذرند. در واقع آن انسجامی که در زندگی یک انسان وجود دارد، دیده نمی‌شود. کلّ داستان به مثابهٔ یک خواب است (این را مقایسه کنید مثلاً با توصیف اسب مجروح در صفحه‌های ۴۵ و ۴۶ از کتاب خیمه‌شب‌بازی اثر صادق چوبک [۱]).

در مواردی اطالهٔ کلام صورت گرفته است به طوری که گاه گفت‌وگوهای ملال‌آورِ غیرادیبانه و غیرریاضی در کتاب مشاهده می‌شود:

ـ سلام مامان. چطور هستید؟
ـ خوبیم. شما چطورید؟ خوش می‌گذره؟
ـ جای شما خالی.
ـ خیلی دلم برایتان تنگ شده است.
ـ ما هم همینطور. اینجا منظره زیبایی دارد. آدم هوس می‌کند شعر بگوید.
ـ اگر شعر گفتی برایم بفرست. به دبافک هم بگو اگر شعر جدیدی گفت یک نسخه از آن را برایم بفرستد. من شعرهای او را جمع می‌کنم.
ـ حتماً. به ادا و پدر سلام برسانید. شاید به اِدا هم زنگ زدم.
بادا هم گوشی را گرفت و احوالپرسی کرد. پس از آن شماره منزل بادا را گرفتند.
ـ سلام مامان.
ـ ... (صص. ۵۷-۵۶)

به نظر می‌رسد که می‌توان چنین بخشهای غیرضروری را حذف کرد. همچنین بعضی از بخش‌های ریاضی را برای بخشیدن انسجامِ بیشتر به کتاب می‌توان حذف کرد، مثلاً تمام فصل «ترتیب» قابل حذف است.

ملاک انتخاب ۱۰ شاخهٔ ریاضی از حدود ۶۰ شاخه چه بوده است؟ از طرفی دیگر در فصل تاریخ، به تاریخ ریاضیات بسیارکم توجه شده است و محتوای فصل با عنوان آن هماهنگی ندارد.

داستان به طور معقول شروع شده و با ظرافت ادامه یافته است. دقت و عمق و نیز سادگی و رسایی در لابه‌لای داستان به چشم می‌خورد. با این حال داستان با عجله ختم می‌شود. توابع خاص، دنباله‌ها و سری‌ها، مفاهیم توپولوژیک، انتگرال ریمان و هندسه‌های نااقلیدسی در سه فصل آخر به گونه‌ای ناهمگون با فصول قبل و همچون یک متن درسیِ کلاسیک ارائه شده‌اند:

اگر A زیر مجموعه‌ای از فضای متری (X,d) باشد، نقطه x را یک نقطه چسبیدگی برای A نامیم هرگاه هر همسایگی x مانند $N_r(x)$ با A اشتراک داشته باشد. مجموعهٔ نقاط چسبیدگی A را با $\bar{A}$ نمایش می‌دهیم. مجموعه A را بسته می‌نامیم هرگاه $A=\bar{A}$. (ص. ۲۹۴)

به زعم نقاد تعدیل و تکمیل این سه فصل به قوام اثر کمک می‌بخشد.

کتاب هم حاوی مطالب نغز و عمیق مانند فشرده‌سازیِ یک‌نقطه‌ایِ $\mathbb{R}$ (ص. ۲۹۸) یا قضیهٔ ناتمامیّت گودل (ص. ۸۵) است و هم حاوی مطالب سطحی یا کم‌مایه مانند معرفی مجموعهٔ اعداد صحیح (ص. ۱۰۰) یا قضیهٔ دمورگن (ص. ۱۲۵). در واقع قصد مؤلف این بوده است که کتابی بنویسد که همه، از دانش‌آموزِ دورهٔ راهنمایی تا دانشجوی دانشگاه و حتی عوام، از آن بهره گیرند. اما سؤال این است که چه مقدار نیازها، آمال، انتظارات، سطح فکری، قدرت استدلال، احساسات، تجارب، آگاهی‌ها، و اطلاعات ریاضیِ یک دانش‌آموز راهنمایی با دانشجوی دانشگاه مشترک است تا بتوان یک متن ادبی‌ـریاضیِ مشترک برای هر دو ارائه داد؟ در جایی می‌خوانیم «اگر $A=\{۱,۲\}$ و $B=\{۲,۳\}$ آنگاه $A\cup B=\{۱,۲,۳\}$» (ص. ۱۰۸)، و در جای دیگر می‌خوانیم «متر نوعی ساختار آنالیزی به مجموعهٔ X می‌بخشد» (ص. ۳۰۸).

به هر حال چون مخاطب کتاب نامعین بوده است، مفاهیم ریاضی زیادی، سطحی یا عمیق، از زیرمجموعه بودن تا همانریختیِ فضاهای توپولوژیک و از فاکتوریل تا تابع زتای ریمال در داستان گنجانده شده است. شاید بهتر بود، مانند کتاب دنیای سوفی [۳]، متن اصلی برای یک قشر عام فراهم می‌شد و متون تخصصیِ ریاضی با حروفی متفاوت با متن اصلی ارائه می‌گردید، تا استفاده از کتاب بهینه گردد.

پیشنهاد می‌شود قبل از چاپِ بعدیِ کتاب یک ویرایش ادبی با تکیه بر شیوه‌های جدید نگارش صورت گیرد، فهرست واژگان ریاضیِ کتاب و شمارهٔ صفحه‌هایی که در آنجا ظاهر شده‌اند تهیه و در انتهای کتاب افزوده شود، و نیز در انتهای هر فصل برای علاقه‌مندان به مطالعهٔ بیشتر منابعی با تکیه بر کتاب‌های درسی فراهم گردد.

چند ایراد جزئی نیز قابل طرح است.

۱. مفهوم تابع به صورت پیچیده‌ای عرضه شده است؛ به خصوص ارتباط y با $f(x)$ روشن نیست:

> ... دکاد برای ما دعوتنامه نوشت. آقای π روی دعوتنامه مهر x زدند و آن را به دست مأمور f که مسئول رساندن نامه به قسمت امور سری بود دادند. مأمور f حکم یک تابع را داشت که دعوتنامه x ما را به صورت $f(x)$ به قسمت امور سری می‌برد تا تبدیل به خانم y شود که پاسخ مثبت تقاضای ویزا را برای ما آوردند. (ص. ۱۱۸)

۲. با استناد به فصل اول کتاب سرگذشت آنالیز ریاضی [۲] باید متذکر شد اثباتی که فیثاغورسیان برای اصم بودن $\sqrt{۲}$ ارائه دادند، یک اثبات هندسی مبتنی بر مفهوم بی‌نهایت‌کوچک‌ها بود، نه شیوهٔ استانداردِ کتاب‌های درسی که در صفحات ۴۶ و ۴۷ کتاب مورد نقد ارائه گردیده است.

۳. در صفحات ۲۷۴ تا ۲۷۷ و در داستان تئاتر برای معرفی گروهِ دوری می‌خوانیم:

> ـ در ابتدای نمایشنامه g به روی صحنه آمد و گفت قصد دارد برای مقابله با پلیدی‌ها یارانی جمع کند تا بتوانند به مردم مظلوم کمک کنند. g باید از خویشتن آغاز می‌کرد. با خود درآمیخت و $g^۲$ به وجود آمد. در حقیقت $g^۲$ زاییده اتحاد g با خود g بود. $g^۲$ نیز می‌توانست چنین کند. به این ترتیب یاران دیگر پدید آمدند. اما این امر نمی‌توانست تا بی‌نهایت ادامه یابد، چون فرصت آنها محدود بود. تا g^n پیش رفتند، اما از آنجا

به بعد دوباره g پدید آمد و عضو جدیدی حاصل نشد. اعضاء گروه با خود اندیشیدند که با یکدیگر درآمیزند تا عنصر جدیدی پدید آید. اما فایده‌ای نداشت. (ص. ۲۷۵)

اولاً عمل گروه به وسیلهٔ عبارتِ «با یکدیگر در آمیختن» تعریف شده است که مبهم به نظر می‌رسد. ثانیاً معلوم نیست چرا وقتی عمل در هم آمیختن نمی‌تواند تا بی‌نهایت ادامه پیدا کند، باید g^n برابر عضو خنثای e شود.

۴. فشرده‌سازیِ تک‌نقطه‌ای فضای به طور موضعی فشردهٔ $\mathbb{R}$ در صفحهٔ ۲۹۸ ارائه گردیده است و مجموعهٔ حاصل از افزودن نقطهٔ در بی‌نهایت به $\mathbb{R}$ دستگاه وسعت‌یافتهٔ اعداد حقیق نامیده شده است که در واقع نام متعارفِ فشرده‌سازیِ دو نقطه‌ایِ $\mathbb{R}$ است. ضمناً باید متذکر شد که برای $\mathbb{R}$، از دیدگاه آنالیزِ ریاضی، فشرده‌سازیِ دونقطه‌ای نسبت به فشرده‌سازی یک‌نقطه‌ای برتری دارد.

۵. اعداد طبیعی در صفحهٔ ۱۰۱ به صورتِ مجموعه‌هایی خاص ارائه شده است و سپس اعداد منفی به عنوان قرینهٔ این اعداد و اعداد گویا به عنوان خارج‌قسمتِ آنها تعریف گردیده‌اند. اما معنای قرینهٔ یک مجموعه یا خارج‌قسمتِ دو مجموعه به‌دست داده نشده است؛ همچنین روشن نیست که چرا می‌توانیم اعداد حقیقی را روی یک خط نمایش دهیم.

۶. در صفحات ۶۳ و ۶۴ مؤلف در تبیینِ ارزشِ $p \Rightarrow q$ معیارهای اخلاقی را به کار برده است، در حالی که در ریاضیات ارزش $p \Rightarrow q$ بر حسب ارزش‌های p و q و بر اساس یک قرارداد صورت می‌پذیرد. از طرفی تناقض در یک دستگاه اصل‌موضوعی با تکیه بر قانونِ قیاسِ استثنائی است که درستیِ هرگزارهٔ قابل بیان به زبانِ دستگاه را به دست می‌دهد و اگر ما این قانونِ استنتاجی را نمی‌داشتیم معلوم نبود چرا تناقض در ریاضیات مشکل‌ساز می‌شد. جالب‌تر این است که در حال حاضر چالشی بین بعضی از فیلسوفانِ علم در مورد وجود «تناقضات مشاهده‌شدنی» مانند «گلی که هم آبی هست و هم نیست» یا «فردی که هم کچل است و هم نیست» و . . . در جریان است.

در پایان، نقاد بر خود لازم می‌داند از زحمات وافر نویسندهٔ محترم در اولین تلاش بسیار موفق‌اش در نگارشِ کتابی جذاب برای اشاعهٔ فرهنگ ریاضی قدردانی نماید. همچنین بیان این نکته ضروری می‌نماید که نقد حاضر ابتدا در اختیار نویسندهٔ کتاب قرار داده شد و پس از ملاحظهٔ اظهارات وی، برای نشریه ارسال گردید.

مراجع

[۱] چوبک، صادق،خیمه‌شب‌بازی، انتشارات جاویدان، ۱۳۵۴.

[۲] دولاشه، آندره، سرگذشت آنالیز ریاضی، انتشارات سیمرغ، ۱۳۵۳.

[۳] گردر، یوستین،دنیای سوفی، ترجمهٔ حسن کامشاد، انتشارات نیلوفر، ۱۳۷۵.

[۴] لانگ، سرژ،هنر ریاضی ورزیدن، ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور، نشر علوم پایه، ۱۳۷۱.

[۵] لانگ، سرژ،بحث ریاضی با دانش‌آموز، ترجمهٔ نعمت عبادیان، انتشارات مدرسه، ۱۳۷۱.

[۶] ۶ـ هدایت، صادق،حاجی‌آقا، انتشارات جاویدان، ۱۳۵۶.

محمد صال مصلحیان

مشهد، دانشگاه فردوسی، گروه ریاضی

پست الکترونیک: msalm@math.um.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شمارهٔ ۲۴(بهار ۱۳۷۹)، صص. ۵۷ تا ۵۸

مسأله

این قسمت از فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی به طرح و سپس حلِ مسائلی در حدِ دروسِ دوره‌های کارشناسی و کارشناسی ارشدِ ریاضیات اختصاص دارد. از کسانی که مایل به ارسال مسائل یا حل مسائلِ مطرح شده می‌باشند، تقاضا می‌شود مسائل خود را به نشانی تهران، مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضی، پژوهشکدهٔ ریاضیات، صندوق پستی ۵۷۴۶ـ۱۹۳۹۵، محمدرضا پورنکی ارسال فرمایند. مسائلِ ارسال‌شده باید همراه با حل کامل مسأله باشد و در مجله به نامِ شخصِ فرستنده درج خواهد شد.

حل مسائل شمارهٔ ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴ و ۳۵ در شماره‌های آینده به چاپ خواهد رسید.

مسائل جدید

۳۶. فرض کنیم $f \in C^1(a,b)$، $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ ، و $\lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty$. اگر به ازای هر $x \in (a,b)$، $f'(x) + f^2(x) \geq -1$، ثابت کنید $b - a \geq \pi$. مثالی بزنید که در آن $b - a = \pi$.

۳۷. فرض کنیم $P(z)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ n و با ضرایب مختلط باشد. اگر تمام ریشه‌های این چندجمله‌ای روی دایرهٔ واحد در صفحهٔ مختلط قرار بگیرند، ثابت کنید تمام ریشه‌های چندجمله‌ایِ $2zP'(z) - nP(z)$ نیز چنین هستند.

۳۸. فرض کنیم G زیرگروهی از $GL_2(\mathbb{R})$ (گروه ماتریس‌های وارون‌پذیر مرتبهٔ ۲ با درایه‌های حقیقی) باشد که توسط

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تولید می‌شود. اگر H شامل تمام ماتریس‌های

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix}$$

از G با خاصیتِ $a_{۱۱} = a_{۲۲} = ۱$ باشد، ثابت کنید H زیرگروهی آبلی از G است که متناهیْ‌مولد نمی‌باشد.

۳۹. فرض کنیم A و B دو ماتریس مربعی از مرتبهٔ n با درایه‌های حقیقی باشند. گیریم $t_۱, t_۲, \ldots, t_{n+۱}$، $(n+۱)$ عدد حقیقی متمایز باشند و به ازای هر $۱ \leq i \leq n+۱$ تعریف می‌کنیم $C_i = A + t_i B$. اگر به ازای هر $۱ \leq i \leq n+۱$، $C_i^n = ۰$، ثابت کنید A و B پوچ‌توان هستند.