بسم الله الرحمن الرحیم

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

ISSN 1022-6443

سال ۲۰، شمارهٔ ۲، پاییز ۱۳۸۰
شمارهٔ پیاپی: ۲۷

صاحب‌امتیاز: انجمن ریاضی ایران
مدیر مسؤول: محمدمهدی ابراهیمی
سردبیر: محمد اردشیر
ویراستار ارشد: حسین معصومی همدانی
مدیر اجرایی: سعید سیدآقا بنی‌هاشمی

ویراستار: رویا درودی
حروفچینی: TEX-پارسی ـ دفتر انجمن ریاضی ایران
همکار این شماره: فریده صمدیان

نشانی:
تهران ــ صندوق پستی ۴۱۸ـ۱۳۱۴۵
iranmath@ims.ir
http://www.ims.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی نشریهٔ علمی‌ـترویجیِ انجمن ریاضی ایران است که به چاپ و انتشارِ مطالبی می‌پردازد که هم جنبه‌های عام و فلسفیِ ریاضیات را ترویج دهند و هم بازگوکنندهٔ فرهنگ و روندِ ریاضیاتِ حاکم بر جامعهٔ ریاضی باشند. فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی از مقالات در زمینه‌های ریاضیات محض، ریاضیات کاربردی، علوم کامپیوتر، فیزیک نظری، و کاربردهای ریاضیات در علوم دیگر که در چارچوب زیر نوشته شده باشند استقبال می‌کند:

- ارائهٔ موضوعیْ فعال و مطرح در ریاضیات در قالبی که علاقه‌مندان به زمینه‌های پژوهشی را برای پیگیریِ موضوعِ مورد بحث آماده سازد؛
- ترجمهٔ مقاله‌هایی از نوع یاد شده در بالا یا ترجمهٔ مقالاتِ کلاسیکِ ریاضی (ترجمهٔ آزاد پذیرفته نمی‌شود)؛
- ارائهٔ موضوعاتِ آموزشی حاوی نکات و قضایا و برهانهایی ساده‌تر از آنچه در متونِ کلاسیک موجود است.

علاقه‌مندان می‌توانند سه نسخه از مقالهٔ خود را با شرایطِ زیر به نشانی دفتر مجله ارسال دارند:

- متن مقاله روی یک طرف کاغذ، یک خط در میان، و با حاشیهٔ کافیْ تایپ شده یا ترجیحاً، در دیسکتِ کامپیوتری تحت ادیتورِ «TEX-پارسی» یا «فارسی‌تک» باشد.
- فرستادنِ اصلِ مقالهٔ ترجمه شده ــ با ذکر نشانیِ کاملِ آن ــ لازم است.
- اصطلاحاتِ ریاضیِ به‌کاررفته باید بر طبقِ واژه‌نامهٔ ریاضی و آمارِ انجمن ریاضی ایران باشد و اگر لغتی در این واژه‌نامه نیست، معادلِ انگلیسیِ آن داده شود. در صورتی که مؤلف یا مترجم معتقد است اصطلاحِ خاصی از واژه‌نامه مناسب نیست باید ترجیح دادنِ اصطلاحِ پیشنهادیِ خود را توجیه کند.

هیأت تحریریه در رد، قبول، حک، و اصلاحِ مقالاتْ آزاد است و ملزم به ارایه دلایل توجیهی نیست.

- مقالات ارسالی به فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی نباید برای بررسی و چاپ به مجلات دیگر ارسال شده باشد.

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

سال ۲۰، شمارهٔ ۲، پاییز ۱۳۸۰
(تاریخ انتشار: زمستان ۱۳۸۱)
شمارهٔ پیاپی: ۲۷

فهرست مطالب

محمد اردشیر،
فِفِرمن و فلسفهٔ ریاضی لاکاتوش ۱

حسین خورشیدی،
رویکردهایی به مسألهٔ تعداد توپولوژی‌ها روی یک مجموعهٔ متناهی ۱۵

عبدالحسین امینی شارستانی،
ویتگنشتاین و مبانی ریاضیات ۳۷

محمدقاسم وحیدی اصل،
مروری بر فرآیندهای زیرجمعی، قضیهٔ ارگودیک، و چند کاربرد ۴۹

نقد کتاب ۷۱

مسأله ۸۵

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی هر سال در دو شماره (بهار و پاییز) منتشر و به اعضای حقیقی، حقوقی و مشترکین انجمن ریاضیِ ایران ارسال می‌شود.

علاقه‌مندان به عضویت حقیقی و دانشگاه‌ها، مؤسسات وکتابخانه‌هاکه تمایل به عضویت حقوقی یا اشتراک سالانه دارند می‌توانند با دبیرخانهٔ انجمن ریاضی ایران تماس حاصل نمایند.

شماره‌های قبلی این مجله با هماهنگی دبیرخانه قابل فروش می‌باشند.

روی جلد: ژان دیودونه

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شمارهٔ ۲۷(پاییز ۱۳۸۰)، صص. ۱ تا ۱۳

ففرمن و فلسفه ریاضی لاکاتوش

محمد اردشیر

چکیده

فلسفهٔ ریاضی لاکاتوش، یک فلسفهٔ جدّی است و از طرف فلاسفهٔ ریاضی مورد نقد و بررسی قرارگرفته است. یکی از مهم‌ترین نقادی‌ها، از طرف فِفِرمن انجام شده است. در این مقاله، ما به بررسی نقد فِفِرمن از فلسفهٔ ریاضی لاکاتوش می پردازیم.

۱ مقدمه

فلسفهٔ ریاضی لاکاتوش[1] به طورعمده، درکتاب معروف او با عنوان برهان‌ها و ردها: منطق اکتشاف ریاضی [3]و پنج مقاله در جلد دوم مقاله‌های فلسفی [4]در دهه هفتاد آخرین قرن هزارهٔ دوم انتشار یافت. فلسفهٔ ریاضی لاکاتوش، ازطرف فلاسفه و منطق دانان مورد نقد و بررسی قرارگرفت. فِفِرمن[2] در مقالهٔ منطق اکتشاف ریاضی و ساختار منطقی ریاضیات[2]، پس از شرح کوتاهی از فلسفهٔ ریاضی لاکاتوش، به نقد آن می‌پردازد. در این مقاله، ما ابتدا فلسفهٔ ریاضی لاکاتوش به شرح فِفِرمن را می‌آوریم (بخش ۲) و پس از آن بررسی و نقد فِفِرمن را به اختصار نقل می‌کنیم (بخش ۳). در بخش آخر، دیدگاه فِفِرمن را دربارهٔ لاکاتوش مورد ارزیابی قرار می‌دهیم.

1) I. Lakatos 2) S. Feferman

۲ خلاصه‌ای از فلسفهٔ ریاضی لاکاتوش

فلسفهٔ ریاضی لاکاتوش را باید در برنامهٔ کلی‌تر او، که به طور اساسی تحت تأثیر کارل پوپر[۱] است، ترسیم کرد. حتّی عنوان کتاب لاکاتوش، یعنی برهان‌هاو ردها: منطق اکتشاف ریاضی به تقلید از عنوان کتاب مشهور پوپر، یعنی منطق اکتشاف علمی[5] انتخاب شده است.

در تاریخ ریاضیات، دو جریان عمده را می‌توان به خوبی تمیز داد. یک جریان که از اقلیدس به ارث رسید و به روش صوری یا اصل موضوعی اشتهار یافت و جریان مسلّط در ریاضیات است و جریان دیگر، که از پاپوس[۲] شروع شد و به وسیلهٔ دکارت، لایبنیتز[۳] و بولتسانو[۴] دنبال شد. این جریان دوم در زمان ما دوباره با کارهای پولیا[۵] فعّال شد. جریان اوّل را من «دوران آرام» و جریان دوم را «دوران تلاطم» ریاضیات می‌نامم. در «دوران آرام»، ریاضی‌دانان به رشد و توسعهٔ ریاضیات می‌پردازند، امّا در «دوران تلاطم»، ریاضی‌دانان (و فلاسفهٔ ریاضی) به دنبال ارائهٔ طرحی کلی برای ریاضیات هستند. لاکاتوش با الهام از پوپر و پولیا، به بازسازی عقلانیِ رشد و توسعهٔ ریاضیات می‌پردازد و آن را منطق اکتشاف ریاضی می‌نامد. او سنّت قیاسی دوران آرام را که خطاناپذیر دانسته می‌شود، با ریاضیات خطاپذیر عوض می‌کند که خود را در پاسخ به نقدها توسعه می‌دهد. به جای رشد در بستر آرام انباشت قضایای اثبات شده، ریاضیات با پاسخ به حدس‌ها و نقدها توسعه می‌یابد. مفاهیم و حدس‌های ناپخته باید از کورهٔ برهان‌ها و ردها بگذرند. نتایج، چیزی جز حدس‌های بهبود یافته (قضایا) و مفاهیم بهبود یافته (زاده شده از برهان یا به طور نظری) نیستند. منطق اکتشاف ریاضی، نه روان‌شناسی است و نه منطق، بلکه ابداعی[۶] است. گرچه ریاضیات، محصول فعّالیّت بشری است، ولی با قوانین خود برای رشد و دیالکتیک، استقلال نسبی به‌دست می‌آورد.

روش برهان‌ها و ردها، تحلیل برهان نیز نامیده شده است. اجزای اساسی آن، به قرار زیر است ([3]، صفحات ۱۲۷ و ۱۲۸): اول یک حدس ابتدایی و سپس یک برهان غیرصوری[۷] (یک برهان غیرصوری، یک استدلال یا تجربهٔ ذهنی است که حدس ابتدایی را به حدس‌های کوچک‌تر یا لم‌ها[۸] تجزیه می‌کند). بعد مثال‌های نقض سراسری[۹] سر برمی‌آورد. در نهایت برهان برای یک لم پنهان، که مثال نقض سراسری برای آن یک مثال نقض موضعی است، بازبینی می شود. نتیجه، حدس بهبود یافته (قضیّه) و شاخص اصلی جدید آن، مفهوم زاده شده از برهان است.

توجه داریم که این فرآیند بیشتر برای نظریه‌های جوان صادق است.

لاکاتوش در پشتیبانی از تحلیل خویش از برهان، دو مثال مشخّص دارد. یکی حدس اویلر[۱۰]، که تقریبا تمام مرجع [3] را در بر می‌گیرد و دیگری قضیّهٔ کوشی[۱۱] دربارهٔ حدّ سری‌های توابع پیوسته، که در

1) K. Popper 2) Pappus 3) Leibniz 4) Bolzano 5) G. Pölya 6) Heuristic
7) Informal 8) Lemma 9) Global 10) Euler 11) Cauchy

ضمیمهٔ [3] آمده است.

۲ـ۱ حدس اویلر

کتاب برهان‌ها و ردها، در واقع بازسازی عقلانی برای یک حالت خاص، یعنی حدس اویلر است. ارائهٔ آن در قالب گفت‌وگو و به شیوه‌ای سقراطی، با نظر به تاریخ واقعی آن انجام می‌شود. حدس اویلر، که به حدس دکارت‌ـاویلر نیز مشهور است، بیانی بسیار ساده دارد. تساوی $V - E + F = ۲$ برای هر چندوجهی [1]، که در آن، V تعداد رأس‌ها، E تعداد یال‌ها و F تعداد وجه‌های آن است، برقرار است.

شاید یکی از علل مهمی که لاکاتوش این مثال را برای تأیید نظریهٔ خویش دربارهٔ تحلیل برهان برگزید، استفاده از مفاهیمی است که از نظر تاریخی به دوران یونان باستان بر می‌گردد و در فرآیند رشد به مفاهیم پیشرفته‌ای در توپولوژی جدید می‌رسد. علاوه بر آن، برای دنبال کردن مطالب، خواننده فقط به دانستن مقدمات کمی در هندسه و منطق نیاز دارد. کتاب شامل انبوهی از مثال‌های تاریخی در اثبات حدس و مثال‌های نقض برای آن است. یکی از نکته‌های بسیار جالب، شرح تاریخی تکوین تعریف چند وجهی می باشد. این که چگونه مثال‌های نقض منجر به تعریف جدید برای یک مفهوم می شوند.

به نظر من، جذاب‌ترین قسمت کتاب، ابتدای آن است. برای آشنایی با این کتاب و نیز روش لاکاتوش در بیان نظریهٔ خویش، این قسمت را به اختصار نقل می‌کنیم. لاکاتوش در این گفت‌وگوی سقراطی، برای نام اشخاص از حروف یونانی استفاده می‌کند. معلم وارد کلاس درس می‌شود:

معلم: در درس گذشته، به حدسی رسیدیم که دربارهٔ چندوجهی‌ها بود، یعنی برای هر چندوجهی، $V - E + F = ۲$، که در آن، V،تعداد رأس‌ها، E، تعداد یال‌ها و F، تعداد وجه‌های آن است. این تساوی را به روش‌های مختلف آزمودیم. اما هنوز آن را اثبات نکردیم. کسی برهانی برای آن پیدا کرد؟

زیگما: من باید اذعان کنم که هنوز برهانی پیدا نکرده‌ام . . . اما چون درستی آن در چندین حالت نشان داده شده [2]، شکی نیست که تساوی برای هر چندوجهی صُلب [3] به خوبی برقرار است. بنابراین گزارهٔ بالا، به نحو مطلوبی اثبات شده است [4]. اما اگر شما برهانی دارید، لطفاً ارائه کنید.

معلم: من یک برهان دارم. برهان من شامل تجربهٔ ذهنی [5] زیر است. قدم اول: چندوجهی را خالی تصور کنید که یک وجه آن، از جنس یک لاستیک نازک است. اگر یکی از وجوه آن را با ظرافت بِبُریم، می توانیم بقیه را روی تخته سیاه به آسانی بخوابانیم، بدون آن که تابخورد. وجوه و یال‌ها ممکن است تغییر شکل یابند و یال‌ها ممکن است به شکل منحنی درآیند، اما V و E تغییر نمی‌کنند. پس برای چندوجهی اصلی $V - E + F = ۲$ است اگر و فقط اگر برای این شبکهٔ

1) Polyhedra 2) Established 3) Solid 4) Demonstrated 5) Thought-experiment

مسطح $V - E + F = ۱$ باشد. به یاد آورید که ما یک وجه را بریدیم. شکل ۱، این شبکهٔ مسطح را برای مکعب نشان می‌دهد. قدم دوم: حال نقشه را مثلث‌بندی می‌کنیم. با رسم هر قطر، هم E و هم F را یک واحد اضافه می‌کنیم. پس مجموع $V - E + F$ تغییر نمی‌کند. شکل ۲ را نگاه کنید. قدم سوم: از نقشهٔ مثلث‌بندی شده، مثلث‌ها را یکی یکی جدا می‌کنیم. وقتی مثلثی را جدا می‌کنیم، یا یک یال را جدا می‌کنیم، که در این صورت، یک وجه و یک یال از بین می‌رود، مثل شکل ۳a، یا دو یال و یک رأس را جدا می‌کنیم، که در این صورت، یک وجه، دو یال و یک رأس از بین می‌رود، مثل شکل ۳b. پس تساوی $V - E + F = ۱$، برای قبل از جداکردن مثلث‌ها و بعد از آن درست است. در پایان این فرآیند، تنها یک مثلث می‌ماند. برای این مثلث، آشکارا تساوی $V - E + F = ۱$ درست است. بنابراین، ما حدس را اثبات کردیم.

دلتا: حال شما باید آن را یک قضیه بنامید. دیگر حدسی[1] در آن نماند.

آلفا: من شک دارم. گیریم که این تجربه برای مکعب یا هر چهار وجهی دیگر انجام پذیر باشد، چگونه می توانم بدانم که برای هر چندوجهی انجام پذیر است؟ برای نمونه، آقا، آیا شما یقین دارید که هر چندوجهی، بعد از آن که یک وجه آن جدا شد، می‌تواند به طور مسطّح روی تخته سیاه قرارگیرد؟ من در قدم اول شما شک دارم.

بتا: آیا شما یقین دارید که در مثلث‌بندی نقشه، همیشه برای هر یال، یک وجه جدید به وجود

1) Conjectural

می‌آید؟ من در قدم دوم شما شک دارم.

گاما: آیا شما یقین دارید که وقتی مثلثی را جدا می کنیم فقط دو حالت ممکن است روی دهد، یعنی یا یک یال از بین می‌رود یا دو یال و یک راس؟ آیا شما یقین دارید که در پایان این فرآیند، فقط یک مثلث می‌ماند؟ من در قدم سوم شما شک دارم.

معلم: البته، یقین ندارم.

آلفا: پس ما در وضعی بدتر از قبل هستیم! به جای یک حدس، حالا با سه حدس درگیریم! و شما آن را یک «برهان» می‌خوانید!

معلم: اعتراف می‌کنم که عنوان سنتی «برهان» برای این تجربهٔ ذهنی ممکن است کمی گمراه کننده باشد. فکر نمی‌کنم که درستی حدس اثبات شده باشد.

دلتا: پس چه کاری انجام‌شد؟ شما فکر می‌کنید یک برهان ریاضی چه چیزی را ثابت می‌کند؟

معلم: این سؤال ظریفی است که سعی می‌کنم بعداً به آن پاسخ دهم. فعلاً پیشنهاد می‌کنم واژهٔ فنی «برهان» را برای تجربهٔ ذهنی- یا «شبه تجربی»[1] نگاه‌داریم، که عبارت است از تجزیهٔ حدس اصلی به زیرحدس‌ها[2] یا لم‌ها، و بنابراین نشاندن [3]، یا قراردادن آن در بدنهٔ دانش. برای نمونه، «برهان» ما، حدس اصلی را- که دربارهٔ کریستال‌ها یا اجسام توپُر است- در نظریهٔ ورقه‌های لاستیکی [بخوانید توپولوژی] نشاند. یقیناً، دکارت یا اویلر، پدران حدس اصلی، حتی خواب آن را نمی‌دیدند.

آنچه گفته شد بخش اول کتاب برهان‌ها و ردها بود. این داستان با زیبایی تحسین برانگیزی در رفع مثال‌های نقض و بهبود برهان بالا ادامه می‌یابد. جای ترجمهٔ این کتاب در نشر فارسی خالی است.

۲ـ۲ قضیّهٔ کوشی

کوشی اوّلین قدم‌ها را برای ارائهٔ یک مبانی دقیق برای حساب دیفرانسیل و انتگرال، بدون استفاده از مفهوم بی‌نهایت کوچک‌ها برداشت. اوّلین مفاهیمی که به بازبینی احتیاج داشتند، مفاهیم حد و پیوستگی بودند که کوشی برای آن‌ها تعریف ارائه نمود. در واقع، این تعریف‌ها به دقّت تعریف‌هایی نیستند که امروزه به تعریف‌ها با ε و δ مشهورند. این تعریف‌ها از کارهای وایرشتراس[4] در اواسط قرن نوزده هستند.

کوشی برای قضیّهٔ زیر برهانی ارائه کرد:

فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ برای هر x به $f(x)$ میل کند و هر f_n پیوسته باشد، آن‌گاه f پیوسته است.

با علم امروزه می دانیم که این قضیّه غلط است و مثال‌های نقض فراوانی برای آن می‌توان یافت. نکتهٔ جالب این است که حتّی یکی از این مثال‌های نقض در زمان کوشی شناخته شده‌بود و آن تابع

1) Quasi-experiment 2) Subconjectures 3) Embedding 4) Weirstrass

$\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \cdots$ یا $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$ است، که به وسیلهٔ فوریه[1] در ۱۸۰۷ در مطالعهٔ انتشار حرارت ارائه شد. این تابع به تابعی به شکل زیر میل می‌کند:

در ۱۸۳۶ آبل[2] دریافت که تابع بالا یک «استثنا» برای قضیّهٔ کوشی است. امّا به جای بازبینی قضیّه، آبل توجه خویش را به بخش «امن» تابع‌های سری توانی معطوف کرد و نتایج خوبی به‌دست آورد. در ۱۸۴۷ زایدل[3]، یکی از دانشجویان دیریشله[4]، به بازبینی قضیّهٔ کوشی پرداخت و لم «پنهان» را که نتیجه را درست می‌کند، کشف کرد. لاکاتوش این فرآیند را به زبان جدید تحلیل می‌کند. برای بیان تحلیل لاکاتوش، ابتدا فرض کنید

$$s_n(x) = \sum_{m=1}^{n} f_m(x).$$

۱. هم‌گرایی. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ برای هر x به $f(x)$ میل می‌کند، یعنی برای هر x و $\varepsilon > 0$، N موجود است که برای هر n، اگر $n \geq N$ آنگاه $|f(x) - s_n(x)| < 0$.

۲. پیوستگی هر f_n یا s_n. برای هر x و $\varepsilon > 0$، $\delta > 0$ موجود است که اگر $|y - x| < \delta$ آنگاه $|s_n(y) - s_n(x)| < \varepsilon$.

۳. پیوستگی f. برای هر x و $\varepsilon > 0$، $\delta > 0$ موجود است که اگر $|y - x| < \delta$ آنگاه $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

قضیّهٔ کوشی می‌گوید شرایط ۱ و ۲، ۳ را نتیجه می‌دهند. ایدهٔ برهان، به طور طبیعی، به ارتباط دادن $|f(y) - f(x)|$ و $|s_n(y) - s_n(x)|$، برای nهای به اندازهٔ کافی بزرگ برمی‌گردد. در عمل به راحتی دیده می‌شود که برای این کار ۱ باید به شرط زیر تبدیل شود:

′۱. هم‌گرایی یکنواخت. برای هر $\varepsilon > 0$، N موجود است که برای هر x و هر $n \geqslant N$، $|f(x) - s_n(x)| < 0$.

1) Fourier 2) Abel 3) Seidel 4) Dirichlet

این فرض در برهان کوشی پنهان بود. قضیهٔ بهبود یافته این است: شرایط ′۱ و ۲، ۳ را نتیجه می‌دهند.

سری فوریه که یک مثال نقض برای قضیّهٔ کوشی بود، حال به یک مثال نقض برای این لم غلط تبدیل شد که «اگر $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ به $f(x)$ میل کند، آنگاه به طور یکنواخت میل می‌کند». مفهوم زاده‌شده از برهان، «همگرایی یکنواخت» است که شاخص اصلی قضیّهٔ بهبود یافته است.

۳ نقد فِفِرمن از فلسفهٔ ریاضی لاکاتوش

فِفِرمن نظرها، نقدها و سؤال های خویش را دربارهٔ فلسفهٔ ریاضی لاکاتوش در دَه بند خلاصه می‌کند[۱].

۱. از قبل از ۱۸۴۷ چه خبر؟

به نظر می‌رسد که روش تحلیل برهان نسبتاً دیر به صحنهٔ تاریخ ریاضیات آمد، یعنی در ۱۸۴۷. گفته می‌شود که این روش همان روش برهان ها و ردها است که تنها طرح[۲] ارائه شده به وسیلهٔ لاکاتوش برای پیشرفت ریاضیات است. اگر چنین باشد، لاکاتوش مدلی برای رشد ریاضیات تا قبل از ۱۸۴۷ ندارد. سؤال دیگری مربوط به همین موضوع، این است که آیا روش برهان‌ها و ردها، روشی توصیفی[۳] است یا دستوری[۴]؟ به نظر می رسد که در بهترین حالت، از ۱۸۴۷ به بعد روشی توصیفی باشد. امّا لحن بحث به گونه‌ای است که دستوری تلقّی شود.

۲. آیا روش تحلیل برهان، بهترین توصیف را برای دوران تلاطم مبانی ریاضیات بدست می‌دهد؟

مثال لاکاتوش از تدقیق آنالیز ریاضی به وسیلهٔ کوشی، نشان می دهد که دست کم برای نظریه‌های جوان چنین باشد. امّا چندین حرکت در مبانی ریاضیات وجود داشته، که پاسخی به انتقادی مشخّص یا مثال های نقض نبودند. مثلاً استفاده از اعداد موهومی یا نقاط در بی‌نهایت در هندسهٔ تصویری[۵]. این روش، هم‌چنین دربارهٔ پیشرفت‌هایی که ناشی از سازمان‌دهی درونی[۶] مبانی ریاضیات است، خاموش است. سازمان‌دهی‌های درونی، پاسخی برای انتقاد به برهان‌های غلط نیستند. مثال‌هایی از این نوع، عبارت‌اند از جبر خطی، آنالیز خطی، توپولوژی نقاط، نظریهٔ گروه‌ها و . . . .

۳. منطق اکتشاف ریاضی، چگونه با تجربهٔ واقعی ریاضی‌دانان مربوط می‌شود؟

اکثر ریاضی‌دانان در فاصلهٔ امنی از مسایل مشکل‌افزای مبانی کار می‌کنند. این بدان معنی نیست که مفاهیمی که در هر زمان به کار رفته، به روشنی درک شده است، بلکه ریاضی‌دان معمولاً در بستر «آرام»

---

۱) مرا به یاد ده فرمان موسی می‌اندازد.

2) Pattern 3) Descriptive 4) Normative 5) Projective 6) Internal organizational

پروژه‌ای کار می‌کند که به سختی از مسایل مبانی تأثیر می‌پذیرد. این پروژه، عبارت است از توسعهٔ حدس‌ها و جست‌وجوی برهان‌ها برای این حدس‌ها. آزمون این که کسی برای به‌دست آوردن چنین برهان‌هایی موفّق شده، غیر صوری است. تجربهٔ عمومی بر این است که این کوشش‌ها برای یافتن برهان را می‌توان آزمایش انتقاد (از خود) نامید و مثال نقض‌ها، عامل اصلی آن نیستند.

۴. آیا پایانی برای حدس زدن‌ها نیست؟

آن چه که لاکاتوش پیشنهاد می‌کند با تجربهٔ عادی هم‌خوانی ندارد. ریاضی‌دان حرفه‌ای به خوبی می‌داند که برای دستهٔ معیّنی از مسایل چه چیزهایی مناسب است و چه چیزهایی نامناسب. بنابراین کار حدس به کم‌ترین میزان می‌رسد. علاوه بر این، پس از مبارزهٔ موفّقیّت‌آمیز ریاضی‌دان برای حل یک مسأله یا تکمیل یک برهان، کار حدس پایان می‌پذیرد. گرچه این راست است که نتایج، در دوره‌های مختلف تاریخی مورد توجه قرار می‌گیرند و اهمّیت آن‌ها دوباره ارزیابی می‌شود، سپس ممکن است تعمیم یابند یا در پهنهٔ وسیع‌تری به کار روند، امّا این تصویری کاملاً متفاوت از مفهوم حدس بی‌پایان لاکاتوش است.

۵. بهبود یک برهان را چه چیزی تشکیل می‌دهد؟

لاکاتوش در این که چه چیزی یک برهان را بهبود می‌بخشد هیچ معیار نظری ارائه نمی‌کند، بلکه فقط مثال‌هایی می‌آورد تا تغییرهای ناشی از انتقادها یا مثال‌های نقض را نشان دهد. بدون شک، تغییر یا بهبود در برهان‌ها حاصل شده است. به نظر فِفِرمن ما برای آن چه که یک برهان را کامل می‌کند، معیارهای غیرصوری داریم، و این معیارها را می‌توان به شکلی منطقی توضیح داد. بهبود برای یک برهان عبارت است از گذار از برهان ناقص به برهان کامل. لاکاتوش باید این معیار را به طور ضمنی بپذیرد. اما او از بیان صریح آن احتراز می‌کند، چون با انکار او از روش قیاسی ریاضیات سازگار نیست. در این ارتباط و نکتهٔ ۴، این حکم لاکاتوش را به یاد آورید که همهٔ برهان‌ها بهبودپذیر نیستند، به ویژه برهان‌ها در نظریه‌های توسعه یافته. به عبارت دیگر، به نقطه‌های پایداری می‌رسیم که پایان بهبود برهان‌های مورد انتقاد است.

۶. برهان ابتدایی[1] چیست؟ و از کجا می‌آید؟

لاکاتوش می‌گوید برهان ابتدایی یک تجربهٔ ذهنی یا ایدهٔ طبیعی برهان است. امّا در مثال‌های مشخّص او، ایدهٔ برهان بسیار پیشرفته است، دارای ساختار منطقی با قدم‌های منظّم می‌باشد که به نظر می‌رسد در یک زنجیر منطقی از مفروضات به نتایج است. این که چنین برهان‌هایی حاصل صورت‌بندی حدس‌ها باشند غیرقابل تصوّر است. آیا نظریه‌ای مبتنی بر ابداع برای توصیف رشد چنین برهان‌هایی لازم نیست؟

۷. شکل حدس چگونه است؟

همهٔ مثال‌های لاکاتوش برای حدس‌ها دارای شکل زیر است:

همهٔ اشیایی که در فرض A صدق کنند، در نتیجهٔ B نیز صدق می‌کنند،

1) Initial proof

که از نظر منطقی صورت زیر را دارد:

$$\forall x\, \big(A(x) \rightarrow B(x)\big) \qquad (۱)$$

امّا شکل‌های دیگری از احکام ریاضی نیز هستند که از نظر تاریخی جالب توجه می‌باشند. برای مثال، احکام منفرد، مثل $e^{i\pi} = ۱$ یا $\frac{\pi}{۴} = ۱ - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۷} + \cdots$ یا این که ۶۴۱، عدد $۲^{۲^۵} + ۱$ را عاد می‌کند.

علاوه بر این، در ریاضیات احکام وجودی[1] نیز هستند، به صورت زیر:

$$\exists x A(x) \qquad (۲)$$

مثلاً، هفده ضلعی منتظم با خط‌کش و پرگار قابل ساختن است، یا معادله‌ای از درجهٔ پنج با ضرایب گویا وجود دارد که با رادیکال‌ها قابل حل نیست.

بنابراین به منطق فرض شده برای اکتشاف ریاضی که فقط به احکامی مثل (۱) محدود شود باید مشکوک بود.

۸. آیا تحلیل منطقی معمولی برای روش برهان‌ها و ردها، کارساز است؟

به باور فِفِرمن جواب مثبت است. صورت منطقی حدس ابتدایی را که لاکاتوش ارائه کرد در نظر بگیرید:

$$\forall x\, \big(A(x) \rightarrow B(x)\big) \qquad (۱)$$

ساختار برهان غیرصوری به این شکل است که (۱) به یک سری از زیرحدس‌ها یا لم‌ها به صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$\forall x\, \big(A(x) \rightarrow A_i(x)\big), \qquad (i = ۰, \ldots, n) \qquad (۲)$$

که انتظار می‌رود گزارهٔ زیر برقرار باشد:

$$\forall x\, \big(A_۱(x) \wedge \cdots \wedge A_n(x) \rightarrow B(x)\big) \qquad (۳)$$

به چند شکل این حدس می‌تواند دچار مشکل شود که دو شکل آن را مورد توجه قرار می‌دهیم.

(الف) در (۲) ممکن است مفاهیم در $A(x)$ آن قدرها روشن نباشند که لم بیان شده درست باشد. این چیزی است که لاکاتوش در حدس اویلر مطرح می‌کند ([3] صفحهٔ ۸).

(ب) ممکن است (۲) برقرار باشد ولی (۳) برقرار نباشد. این وقتی است که باید به دنبال «لم پنهان» بگردیم، یعنی خاصیّت $A_{n+۱}(x)$، به‌طوری که گزارهٔ زیر برقرار باشد:

$$\forall x[A_۱(x) \wedge \cdots \wedge A_n(x) \wedge A_{n+۱}(x) \rightarrow B(x)] \qquad (۳')$$

1) Existential statements

امّا در این صورت لم‌ها باید بازبینی شوند، ممکن است عبارت زیر ضرورتاً درست نباشد:

$$\forall x[A(x) \rightarrow A_{n+1}(x)] \qquad (2')$$

اگر وضع به این جا برسد باید به دنبال «بهبود» حدس ابتدایی رفت. یعنی حدس زیر

$$\forall x[A^*(x) \rightarrow B(x)] \qquad (1')$$

که علاوه بر آن، گزارهٔ زیر نیز برقرار باشد:

$$\forall x[A^*(x) \rightarrow A_i(x)] \quad (i = 0, \cdots, n+1) \qquad (2')$$

این کار، مثلاً با «تزریق» لم پنهان به فرض انجام‌پذیر است (برای مثال بگیریم $A^*(x) = A(x) \wedge A_{n+1}(x)$).

۹. آیا مفاهیم کاملاً روشن اصلاً وجود ندارند؟

در سراسر تاریخ ریاضیات، ساختار اعداد صحیح مثبت ۱، ۲، ۳، ... از ویژگی «روشنی کامل در مفهوم» برخوردار بوده‌است. در هیچ زمانی انتقاد از برهان‌ها به انتقاد از مفاهیم پایه‌ای اعداد برنگشت. یک منطق ابداعی باید بتواند پیشرفت ریاضیات را در این جا توضیح دهد. این که لاکاتوش از این موضوع غافل است نشان از این دارد که تز اصلی او را تهدید می‌کند. توجه داشته باشید که این مطلب فارغ از این موضوع است که آیا چیزی به نام «پایان پذیری مفهومی» وجود دارد یا نه. برای مثال، در این روزها، مفهوم عدد طبیعی بر حسب مفهوم مجموعه تعریف می‌شود، که تحویل یک مفهوم کاملاً روشن به مفهومی کاملاً غیر روشن است. البته در این راستا، همیشه می توان ادعا کرد که پس‌رفت نامتناهی وجود دارد.

۱۰. ویژگی متمایزکنندهٔ ریاضیات چیست؟

لاکاتوش هیچ کوششی در این ندارد که بگوید محتوای مفهومی ریاضیات یا ساختار تحقیق پذیری آن چیست که آن را از بقیّهٔ دانش بشری جدا می‌کند. او با ذکر مثال‌ها، معیارهای غیرصوری دارد امّا هیچ معیار نظری ارائه نمی‌کند. به نظر فِفِرمن آن چه لاکاتوش تحت عنوان ایدهٔ کلی «برهان» مطرح می‌کند، می‌تواند بدون کم و کاست به «دلیل متقاعدکننده» نیز برگردد. یعنی چیزی در «منطق اکتشاف ریاضی» نیست که نتوان در «منطق اکتشاف عقلی» یافت. اگر این ادعا درست باشد، چنین منطقی فقط بخش بسیار ناچیزی از رشد ریاضیات را می‌تواند توضیح دهد.

بعد از طرح این سؤال‌ها و نقدها، فِفِرمن در ۵ بند نظرهای اصلاحی خود را بر اساس بینش فلسفی خویش ارائه می‌کند. برای کامل شدن بحث، خلاصه‌ای از آرای فِفِرمن را به شرح زیر می‌آوریم:

۱. همان گونه که علم فیزیک یک تحلیل نظری را برای فهم طبیعت جهان فیزیکی مهیا می‌کند، منطق نیز سعی دارد یک تحلیل نظری را برای فهم طبیعت ریاضیات به‌دست دهد. روشن است که در هر دو حالت، بخشی از تجربه به تحلیل درمی‌آید و حوادث عارضی و یا مصنوعی در این تحلیل نمی‌گنجند.

۲. فرض بر این است که منطق، یک تحلیل نظری فراهم می‌کند که بتواند محتوای ریاضیات را توضیح دهد و این‌که ساختار تحقیق‌پذیری آن چیست.

۳. این سؤال که محتوای ریاضیات چیست، پاسخ نهایی ندارد. چند مکتب مختلف در طبیعت ریاضیات با هم مناقشه دارند. در بین آن‌ها، افلاطون‌گرایی[1]، ساختی‌گرایی[2]، متناهی‌گرایی[3] و محمول‌گرایی[4] از بقیّه مشهورتر هستند. آن چه که منطق در انجام آن بسیار موفّق بود، صورت‌بندی دقیق این مواضع بر اساس دستگاه‌های مختلف صوری بود. این کار باعث شد تا ما اطلاعات مهمّی در توانایی‌ها و محدودیت‌های هر یک از این مواضع و رابطهٔ بین آن‌ها به‌دست آوریم.

۴. تحلیل منطقی ساختار ریاضیات بسیار موفّق بوده است. گرچه تحلیل واحدی وجود ندارد، مثلاً، تحلیل معمولی (افلاطونی) منطق دو ارزشی[5] را به کار می‌برد و تحلیل ساختی، منطق محدودتری («شهودی»). این تحلیل منطقی دو بخش عمده دارد. بخش اوّل شامل نحو منطقی زبان[6] است که ساختار احکام ریاضی را توصیف می‌کند. این کار با تجربهٔ غیرصوری ما به خوبی هم‌خوانی دارد: تبدیل احکام از شکل غیرصوری به شکل منطقی و برعکس، که اساساً مشکلی در آن نیست. دومین بخش عبارت است از ساختار منطقی برهان‌ها[7]، که در بعضی دستگاه‌های قیاسی[8] توصیف می‌شود. در این حالت، ارتباط با تجربهٔ معمولی، کم و بیش خوب است: «کم» برای دستگاه‌های با روش هیلبرت[9] و «زیاد» برای دستگاه‌های استنتاج طبیعی[10] با روش گنتزن[11]. تقریباً این یک احساس عمومی است که منطق، تحلیل نظری خوبی برای ساختار برهان‌های کامل (بدون حفره، بدون قدم‌ها یافرض‌های نامطمئن) فراهم کرده است.

گرچه دستگاه‌های صوری به این قصد ابداع نشده‌اند که «قطعه‌های»[12] ریاضیات را در حالت‌های «منجمد»[13] به نمایش بگذارند، امّا می‌توان این دستگاه‌ها را برای مدل‌سازی رشد و تغییر در ریاضیات به‌کار برد.

1) Platonism 2) Constructivism 3) Finitism 4) Predicativism 5) Two-valued
6) Logical syntax of language 7) Logical structure of proofs 8) Deductive systems
9) Hilbert-style systems 10) Natural deduction 11) Gentzen-style systems 12) Slices
13) Frozen

۴ و امّا ...

۱. مشکل من با لاکاتوش از عنوان کتاب او برهان‌ها و ردها: منطق اکتشاف ریاضی شروع می‌شود. انتخاب این عنوان، به طور ضمنی، بر نگرش فلسفی افلاطون‌گرایی در ریاضیات استوار است. یعنی، اشیاء و روابط بین آن‌ها «موجوداتی» هستند که خارج از ذهن دارای وجودی مستقل می‌باشند و ریاضی‌دان فقط به «کشف» آن‌ها می‌پردازد. ساز و کار این کشف‌ها چیزی است که لاکاتوش می‌خواهد در قالب یک منطق، به معنای عام آن، ارائه کند. ممکن است کسی بپرسد که اگر عنوان کتاب، مثلاً به برهان‌ها و ردها: منطق خلق ریاضی تغییر یابد، چه اثری در «منطق» آن خواهد داشت. پاسخ این است که این عنوان، به طور ضمنی، بر این بینش فلسفی استوار است که اشیا و روابط بین آن‌ها، هویاتی[1] ساختهٔ ذهن آزاد بشر هستند. در این صورت، «منطقِ ساختن» این هویت‌ها، بسیار پیچیده‌تر از آن چیزی است که برنامهٔ لاکاتوش ارائه می‌کند. در این منطق، شهود ریاضی[2] نقش اساسی بازی می‌کند. اگر بخواهیم به اصطلاح لاکاتوش سخن بگوییم، نقش شهود ریاضی، هم در خلق «مفاهیم» تعیین کننده است و هم در «برهان» برای حدس‌ها. در عین حال باید اذعان کنم که نظریهٔ شهود ریاضی، نظریه‌ای جوان (البته نه به معنای کم‌سن) است.

۲. ففِرمن در نقش «بحران در مبانی ریاضیات» در تاریخ ریاضیات اغراق می‌کند. واقعیّت این است که اکثر ریاضی‌دانان حرفه‌ای، بدون توجه به قضایای گودل[3] در ناتمامیّت حساب پئانو[4] یا گودل-کوهن[5] در استقلال فرضیّهٔ پیوستار[6] به کار روزمرهٔ خود ادامه می‌دهند. حتّی غالب آنان، به این قضایا، در این که قضایای «ریاضی» باشند، به دیدهٔ شک می‌نگرند. دست کم دو تن از همکاران ما در دانشکدهٔ ریاضی تا چند وقت پیش نمی‌دانستند که «منطق و مبانی ریاضیات» نیز یکی از موضوع‌های رده‌بندی انجمن ریاضی امریکا است.

۳. ایراد ففِرمن به لاکاتوش در این که برنامهٔ لاکاتوش، برنامه‌ای دستوری است نه توصیفی، یک ایراد اساسی نیست. هر فلسفهٔ ریاضی اساساً دستوری است، زیرا هر فلسفه‌ای، ایدئولوژیک است.

۴. ففِرمن در این ادعا که عنوان «منطق اکتشاف ریاضی» را باید برای یک منطق فراگیر نگه داشت، محق است. این منطق فراگیر باید بتواند هم دوران آرام را توضیح دهد و هم دوران تلاطم را. ما نیز باور داریم که منطق ریاضی، به عنوان ابزاری نیرومند می‌تواند در تدوین این منطق فراگیر به کار گرفته شود.

---

1) Entities 2) Mathematical intuition 3) Godel 4) Incompleteness of Peano arithmetic
5) Cohen 6) Independence of continiuum hypothesis

۵. بر خلاف لاکاتوش و فِفِرمن، مفهوم «برهانِ درست» هرگز ساده نیست. بدون شک، دستگاه (استنتاج طبیعی) گنتزن قدمی بزرگ در مسیر روشن کردن آن بود. امّا هنوز منطق‌دان نمی‌داند برهان درست چیست، همان‌طور که فیلسوف نمی‌داند راستی (حقیقت) چیست و ریاضی‌دان نمی‌داند برهان چیست.

مراجع

[1] S. Feferman, *In the Light of Logic*, Oxford University Press, 1998.

[2] S. Feferman, *The logic of mathematical discovery versus the logical structure of mathematics*, in [1].

[3] I. Lakatos, *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*, Cambridge University Press, Cambridge, 1976.

[4] I. Lakatos, *Mathematics, Science and Epistomology*, Philosophical Papers, Vol. 2, J. Worrall and G. Currie (eds), Cambridge University Press, Cambridge, 1978.

[5] K. Popper, *The Logic of Scientific Discovery*, Hutchinson, 1959.

محمد اردشیر

دانشگاه صنعتی شریف، دانشکدهٔ علوم ریاضی

پست الکترونیک: ardeshir@math.sharif.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شمارهٔ ۲۷(پاییز ۱۳۸۰)، صص. ۱۵ تا ۳۶

رویکردهایی به مسألهٔ تعداد توپولوژی‌ها روی یک مجموعهٔ متناهی: از منظر مشبّکه

حسین خورشیدی

چکیده

متن حاضر بخشی از یک تحقیق موضوعی پیرامون مسئلهٔ شمارش توپولوژی‌ها روی یک مجموعهٔ متناهی است که شامل: ویژگی‌های مشبکهٔ توپولوژی‌ها، خواص توپولوژی‌های AT (اصلی)، معادل بودن این مسئله باشمارش پیش‌ترتیب‌ها روی n نقطه، نحوهٔ ارتباط مفاهیم توپولوژیکی روی یک مجموعهٔ متناهی و نتایج به دست آمده برای $n \leq ۱۶$ می‌باشد. متن از لحاظ مفاهیم توپولوژیکی خودکفا است.

۱ مقدمه

یافتن تعداد توپولوژی‌ها روی یک مجموعهٔ متناهی از آن دسته مسائلی است که طراحی آن نیاز به اطلاعات عمیق ندارد وهر شخص مبتدی ممکن است با این سؤال مواجه شود اما، پاسخگویی به آن چنان دشواراست که تاکنون (زمان نگارش این مقاله) فرمول صریحی برای تعیین آن به دست نیامده است؛ البته روابط نویدبخشی یافت شده که برخی از آنها ([۲۱] و [۱۷]) را ذکر خواهیم نمود. چنانچه این شمارش با تفکیک توپولوژی‌های هومئومورف باشد آن را شمارش توپولوژی‌های باانگ[۱] ودر صورت یکی دانستن توپولوژی‌های هومئومورف آن را شمارش توپولوژی‌های بی‌انگ[۲] می‌نامند.[۳]

1) labeled 2) unlabeled

۳) در اینجا واژهٔ «انگ» بر واژهٔ «نشان» ترجیح داده شده است زیرا عبارت نامصطلح «نشان زدن» معنی «برچسب زدن» را نمی‌رساند.

در اینجا حاصل بیش از ۸ سال تلاش[1] و جستجوی نگارنده برای درک این موضوع، که تقریباً در بین تمامی بزرگان ریاضی ایران مهجور مانده و گواه آن سمینارها و کنفرانسهای داخلی است، ارائه می‌شود. به سبب حجم زیاد، به ناچار مطالب به دو قسمت: «ازمنظرمشبکه» و «الگوریتمها و اعداد» تقسیم شده است. در قسمت دوم (که در حال تدوین است) الگوریتمهایی که ازسال ۱۹۶۶ (نخستین مقالات) تا سال ۲۰۰۰ بوجود آمده مورد بررسی قرار خواهد گرفت؛ اما پیش از آن شایسته است دیدگاه خود را وسعت داده از منظری زیباتر به موضوع بنگریم تا ساختار توپولوژی‌ها و روابط آنها با یکدیگر را مشاهده کرده، علاوه بر یافتن صورتی معادل برای مسئلهٔ فوق، شیوه‌ای متفاوت برای ارتباط با گستره‌ای از مفاهیم توپولوژیکی به دست آوریم. گفتنی است که رویکردهای دیگری مانند «تقریبهای مجانبی» و «گراف و ترکیبیات» نیز می‌توانند در نظر گرفته شوند. اما در باب رفتار مجانبی، تنها علاقه‌مندان را به [۳]، [۱۰]، [۱۱]، [۱۲]، [۱۳]، [۱۴]، [۱۵]، [۱۶]، [۲۶]، [۲۷] و [۲۸] ارجاع می‌دهیم. درخصوص گراف و ترکیبیات هرچند مسئلهٔ فوق با مسئلهٔ تعیین تعداد گرافهای جهت‌دار بازتابی و ترایایی[2] روی n نقطه معادل است و نگارنده جایگاه اصلی مسئله را در وادی ترکیبیات می‌داند اما ترجیح می‌دهد دست همکاری به سوی متخصصین این فن درازکرده متواضعانه، ایده‌های خود را که ظاهراً هنوز بکرند در محضرشان ابراز نماید. در هر حال مطالعهٔ [۶] و [۷] به جهت نگاهی که به گرافها دارند می‌تواند مفید باشد و مفاهیمی که در بخش ۴ دربارهٔ ترتیب‌ها بیان شده به نوعی همان مفاهیم نظریهٔ گراف هستند. در جای‌جای متن حاضر و مقالهٔ دیگر (الگوریتم‌ها) در حدّ توان، توشه‌ای از ترکیبیات برخواهیم گرفت.

از آنجا که تسریع و تسهیل در فهم و تا حد امکان اشراف بر موضوع در ضمنِ اختصار، مبنای اصلی در نگارش می‌باشد لذا از بیان اثبات اکثر قضایا صرف نظر شده است و به جای آن، بی‌نیاز نمودن خواننده از جستجوی تعاریف (که گاه منجر به مکاتباتی با نویسندگان مقالات می‌شود) ترجیح داده شده است.

در بخش بعدی نتایجی را که در مشبکهٔ توپولوژی‌ها به دست آمده مرور می‌کنیم و در بخش ۳ نکاتی را دربارهٔ توپولوژی‌های AT (اصلی) خواهیم دید. در بخش ۴ صورت معادل مسئلهٔ فوق (یعنی تعیین تعداد پیش‌ترتیب‌ها روی یک مجموعهٔ متناهی) ونیز ارتباط مفاهیم توپولوژیکی با یکدیگر و با مفاهیم متناظرشان در نظریهٔ ترتیب[3] را مشاهده می‌کنیم. ضمناً جوابهای به دست آمده برای $n \leqslant 16$ با ذکر نام پدیدآورندگان، در این بخش ارائه خواهند شد (جدول ۲).

برای آنکه متن از لحاظ مفاهیم توپولوژیکی خودکفا باشد تعاریف زیر را ارائه می‌کنیم:

۱.۱ تعریف: فرض کنیم X یک مجموعه باشد. خانوادهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های X را با $P(X)$ نمایش می‌دهیم. گردایهٔ τ از زیرمجموعه‌های X را یک توپولوژی روی X می‌نامیم هرگاه:

۱) نگارنده بخشی از مطالبی که در این مورد به دست آمده، حتی برخی از آنچه که در سال ۲۰۰۰ به چاپ رسیده است، در نخستین سال بررسی‌اش مشاهده کرد اما ازآنجا که «بی مایه فطیر است» هفت سال بقیه را به ناچار صرف جمع‌آوری منابع نمود وتنها سه مقاله را در داخل کشور یافت!

2) reflexive & trasitive digraphs 3) order theory

- X و $\varnothing$ عضو τ باشند؛
- اجتماع دلخواه از اعضای τ ، عضو τ باشد؛
- اشتراک تعداد متناهی از اعضای τ ، عضو τ باشد.

مقصود از فضای توپولوژیک X، مجموعهٔ X است که یک توپولوژی روی آن در نظر گرفته شده باشد.

از تعریف فوق معلوم است که $\tau \in P(P(X))$ و اگر X یک مجموعهٔ n عضوی باشد آنگاه $|P(X)| = ۲^n$ و $|P(P(X))| = ۲^{۲^n}$. لذا بزرگترین مشکل در بررسی این مسئله را می‌توان رشد سریع اعداد و نیز کوچک بودن دامنهٔ حالتهای مطلوب در مقایسه با حالتهای ناخواسته دانست؛ به‌عنوان مثال، اگر $n = ۳$ آنگاه از بین $۲^{۲^۳}$ حالت، تنها ۲۹ توپولوژی وجود دارد.

۲.۱ تعریف: اگر τ یک توپولوژی روی X باشد، هر عضو τ را یک مجموعهٔ بازگوییم. یک زیرمجموعه از X را بسته گوییم هرگاه متممش باز باشد. اشتراک همهٔ مجموعه‌های بستهٔ شامل یک مجموعهٔ خاص را بستار آن مجموعه نامیم.

بدیهی است که باز و یا بسته بودن یک زیرمجموعه کاملاً بستگی به τ دارد.

۳.۱ تعریف: اگر X و Y دو فضای توپولوژیک باشند تابع $f : X \longrightarrow Y$ را پیوسته گوییم هرگاه برای هر باز V از Y، $f^{-۱}(V)$ در X باز باشد. دو فضای X و Y را هومئومورف گوییم هرگاه تابعی $f : X \longrightarrow Y$ موجود باشد به قسمی که f یک به یک، پوشا و پیوسته و $f^{-۱}$ نیز پیوسته باشد.

۴.۱ تعریف: فرض کنیم τ یک توپولوژی روی X باشد. مجموعهٔ β شامل بازهایی از τ را یک پایه[1] برای τ نامیم هرگاه هر مجموعهٔ باز، اجتماعی ازمجموعه‌های عضو β باشد.

۵.۱ تعریف: اگر S گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد، توپولوژی پدید آمده توسط S، گردایه‌ای است متشکل از همهٔ اجتماعهای مقاطع متناهی اعضای S.

۲ مشبکهٔ توپولوژی‌ها

ابتدا تعاریفی از نظریهٔ مشبکه را مرور می‌کنیم:

۱.۲ تعریف:

۱ـ مجموعهٔ جزئاً مرتب $(L, \leqslant)$ را یک مشبّکه[2] گوییم هرگاه هر دو عضو مجموعه، بزرگترین کران پایین (یا رسند[3])، و کوچکترین کران بالا (یا وست[4])، داشته باشند. رسند دو عضو a و b را با نماد $a \wedge b$ و وست آنها را با $a \vee b$ نمایش می‌دهیم.

1) basis 2) lattice 3) meet 4) join

۲ـ مشبکهٔ $(L, \leqslant)$ را کامل[1] گوییم هرگاه هر زیرمجموعه‌اش دارای رسند و وست در L باشد.

۳ـ مشبکهٔ $(L, \geqslant)$ رادوگانِ[2] مشبکهٔ $(L, \leqslant)$ می‌نامیم. در واقع اگر $(L, \leqslant)$ را یک گراف جهت دار تصور کنیم دوگان آن با عکس کردن جهت‌ها به دست می‌آید.

۴ـ $(A, \leqslant)$ رازیرمشبکهٔ $(L, \leqslant)$ گوییم هرگاه $A \subseteq L$ و A رسندها و وستهای تعداد متناهی از عناصرش را در بر گیرد. زیرمشبکه کامل است اگر رسندها و وستهای تعداد دلخواه از عناصرش را شامل باشد.

۵ـ در مشبکهٔ $(L, \leqslant)$ عبارت «a ، b را می‌پوشاند» به معنای آن است که $b \leqslant a$ و اگر $b \leqslant c \leqslant a$ آنگاه $a = c$ یا $b = c$.

۶ـ کوچکترین عضو مشبکه با نماد 0 و بزرگترین عضو آن با نماد 1 نشان داده می‌شود.

۷ـ در مشبکه، یک اتم عضوی است که 0 رامی‌پوشاند.

۸ـ مشبکهٔ اتمی مشبکه‌ای است که هر عضو آن به غیر از 0 را بتوان به صورت وست اتم‌ها نوشت.

۹ـ در مشبکه، یک پادـاتم عضوی است که بوسیلهٔ 1 پوشانده می‌شود.

۱۰ـ مشبکهٔ پادـاتمی مشبکه‌ای است که هر عضو آن به غیر از 1 را بتوان به صورت رسند پادـاتمها نوشت.

۱۱ـ در یک مشبکه، عضو a را متمم[3] عضو b گوییم هرگاه $a \wedge b = 0$ و $a \vee b = 1$.

۱۲ـ مشبکه را متمم‌دار[4] گوییم هر گاه هر عضو آن دست کم یک متمم داشته باشد.

۱۳ـ مشبکه را توزیع‌پذیر[5] گوییم هر گاه برای هر a و b و c در آن

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \qquad , \qquad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

۱۴ـ مشبکه را مدولار[6] گوییم هرگاه $a \leqslant c$ ایجاب کند که $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$.

۱۵ـ نگاشتی از مشبکهٔ L به مشبکهٔ K را یک همریختی مشبکه[7] گوییم هرگاه رسندها و وستهای متناهی تحت آن حفظ شوند.

۱۶ـ یک همریختی مشبکه رایکریختی[8] گوییم هرگاه یک به یک و برو باشد. هر یکریختی از L به L را خودریختی[9] نامیم.

۱۷ـ مشبکهٔ $(L, \leqslant)$ رادوگانِ خود[10] گوییم هرگاه با مشبکهٔ $(L, \geqslant)$ یکریخت باشد.

---

1) complete 2) dual 3) complement 4) complemented 5) distributive 6) modular
7) lattice homomorphism 8) isomorphism 9) automorphism 10) self-dual

اکنون توپولوژی‌های مربوط به یک مجموعه را با توجه به مفاهیم فوق بررسی می‌کنیم. فرض کنیم که X یک مجموعه باشد، قرار می‌دهیم $Top(X) = \{\tau|$ است X یک توپولوژی روی $\tau\}$. ضمناً خاطرنشان می‌کنیم که مقصود از توپولوژی ناگسسته[1] و توپولوژی گسسته[2] به ترتیب $\{\varnothing, X\}$ و $P(X)$ می‌باشد.

۲.۲ قضیه: $Top(X)$ با رابطهٔ زیرمجموعه بودن یک مشبکهٔ کامل است. کوچکترین عضو آن توپولوژی ناگسسته و بزرگترین عضوش توپولوژی گسسته است. کوچکترین کران بالای دو توپولوژی τ و τ' توپولوژی پدید آمده توسط $\{G \cap G' | G \in \tau, G' \in \tau'\}$ و بزرگترین کران پایین آنها $\tau \cap \tau'$ می‌باشد. [۵]

۳.۲ قضیه: $Top(X)$ یک مشبکهٔ اتمی است. اتمها، توپولوژی‌هایی به شکل $\{\varnothing, G, X\}$ هستند که $\varnothing \subsetneq G \subsetneq X$. اگر $|X| = n$ آنگاه $Top(X)$ دارای $۲^n - ۲$ اتم است واگر X نامتناهی باشد آنگاه $Top(X)$ دارای $۲^{|X|}$ اتم می‌باشد. [۴۳]

قضیهٔ بعدی نیازمند چند تعریف است.

۴.۲ تعریف: اگر F خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد $\mathscr{F}$ رایک پالایه[3] می‌نامیم هرگاه دارای سه شرط زیر باشد:

- اگر $A, B \in \mathscr{F}$ آنگاه $A \cap B \in \mathscr{F}$ ؛
- اگر $A \in \mathscr{F}$ و $A \subseteq B \subseteq X$ آنگاه $B \in \mathscr{F}$ ؛
- $\varnothing \notin \mathscr{F}$.

پالایهٔ $\mathscr{F}$ را اصلی[4] گوییم هرگاه زیر مجموعهٔ ناتهی A از X موجود باشد که برای هر $B \in \mathscr{F}$ داشته باشیم $A \subseteq B$. مثال برای پالایه‌های اصلی را به‌سادگی می‌توان ساخت. مثالی از یک پالایه که اصلی نباشد خانوادهٔ $\mathscr{F} = \{E_n\}$ از زیرمجموعه‌های $\mathbb{N}$ است که $E_n = [n, +\infty)$ ، $n \in \mathbb{N}$.

۵.۲ تعریف: یک پالایه روی X را فراپالایه[5] می‌نامیم هرگاه به طور سره مشمول هیچ پالایه‌ای در X نباشد، به عبارت دیگر یک پالایهٔ ماکسیمال باشد.

۶.۲ تعریف: اگر $\mathcal{U}$ یک فراپالایه روی X باشد و $x \in X$ به طوری که $x \notin \bigcap \mathcal{U}$ در این صورت توپولوژی $\tau(x, \mathcal{U}) = \{G |\ x \notin G$ یا $G \in \mathcal{U}\}$ را یک فراتوپولوژی[6] می‌نامیم و اگر $\mathcal{U}$ فراپالایهٔ اصلی باشد آن را فراتوپولوژی اصلی[7] گوییم.

---

1) indiscrete 2) discrete 3) filter 4) principal 5) ultrafilter 6) ultratopology
7) principal ultratopology

با اندک تأملی معلوم می‌شود که باانتخاب x، تمام تک عضوی‌ها غیر از $\{x\}$ بازند وهر مجموعه‌ای که شامل x باشد درصورتی باز است که عضو $\mathcal{U}$ باشد. دربخش بعدی ساختار این توپولوژی‌ها را بیشتر بررسی می‌کنیم.

۷.۲ قضیه: $Top(X)$ یک مشبکهٔ پاد_اتمی است. پاد_اتمها، فراتوپولوژی هستند. اگر $|X| = n$ آنگاه $Top(X)$ دارای $n(n-۱)$ پاد_اتم است واگر X نامتناهی باشد $Top(X)$ دارای $۲^{۲^{|X|}}$ پاد_اتم می‌باشد. [۲۲]

در بین تمام سؤالاتی که دربارهٔ ساختار مشبکه‌ای $Top(X)$ مطرح شده، به نظر می‌رسد که مسئلهٔ متمم‌گیری[1]، در بین توپولوژی‌دان‌ها، بیشترین توجه را به خود جلب نموده باشد اما برای رعایت اختصار به چند قضیهٔ زیر بسنده می‌کنیم.

۸.۲ قضیه: $Top(X)$ متمم‌دار است. [۴۰][۴۴]

۹.۲ قضیه: تعداد متممهای یک توپولوژی روی n نقطه، مگر در چند حالت خاص، حداقل ۲^n است. [۷]

۱۰.۲ قضیه: اگر X نامتناهی باشد هر توپولوژی در $Top(X)$ ، به غیر از توپولوژی‌های گسسته و ناگسسته، دست کم دارای $|X|$ متمم در $Top(X)$ است. [۳۶]

۱۱.۲ قضیه: اگر X نامتناهی باشد، آنگاه زیرمجموعه‌ای از $Top(X)$ باعدد اصلی $|X|$ وجود دارد به طوری که هر دو عضو آن زیرمجموعه، متمم یکدیگرند. [۱]

حال به سایر مفاهیم تعریف ۱.۲ می‌پردازیم. دو قضیهٔ زیر تا حدی پیچیدگی ساختار $Top(X)$ را آشکار می‌کنند.

۱۲.۲ قضیه: اگر $|X| > ۲$ آنگاه $Top(X)$ توزیع‌پذیر و مدولار نیست. [۴۳][۴۰][۳۰]

قضیهٔ فوق را با مثالی از [۳۰] بهتر می‌توان لمس کرد. فرض کنید $X = \{a, b, c\}$ و $\mathcal{U}$ یک فراپالایهٔ اصلی از a باشد بنابر تعریف ۶.۲ داریم: $\tau(b, \mathcal{U}(a)) = \{\varnothing, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, X\}$.

1) complementation

حال نمودار زیر را در نظر بگیرید:

نمودار ۱

با توجه به نمودار فوق $\tau_2 \vee (\tau_4 \wedge \tau_3) = \tau_2 \vee \tau_1 = \tau_2$ ، در حالی که

$$(\tau_2 \vee \tau_4) \wedge (\tau_2 \vee \tau_3) = \tau_4 \wedge P(X) = \tau_4$$

پس $Top(X)$ توزیع‌پذیر نیست. به علاوه با وجود این‌که $\tau_4 \leq \tau_2$، اما $\tau_2 \vee (\tau_4 \wedge \tau_3) = \tau_2 \vee \tau_1 = \tau_2$ و $(\tau_2 \vee \tau_3) \wedge \tau_4 = P(X) \wedge \tau_4 = \tau_4$. پس $Top(X)$ مدولار هم نیست.

نکتهٔ جالبی که در مشبکهٔ $Top(X)$ می‌توان مشاهده کرد آن است که بنا بر قضایای ۳.۲ و ۷.۲ اگر X متناهی با بیش از ۳ عضو باشد تعداد اتمهای آن بیش از پاد-اتمهایش می‌باشد در حالی که اگر X نامتناهی باشد عکس این مطلب برقرار است و قضیهٔ زیر را خواهیم داشت.

۱۳.۲ قضیه: اگر $|X| > 3$ آنگاه $Top(X)$ دوگان خود نیست. [۴۰]

تا اینجا اطلاعاتی دربارهٔ ویژگی‌های درونی $Top(X)$ بیان شد. حال ارتباط این مشبکه را با سایر مشبکه‌ها بررسی می‌کنیم.

۱۴.۲ قضیه: برای هر مشبکهٔ L، مجموعه‌ای مانند X وجود دارد به طوری که L را می‌توان در $Top(X)$ نشاند.

این قضیه تعمیمی از قضیهٔ ویتمن[1] است که هر مشبکه را می‌توان در مشبکه‌ای از افرازهای یک مجموعه نشاند. از آنجا که مشبکهٔ همهٔ توپولوژی‌های افرازی[2] روی X، یعنی توپولوژی‌هایی که هریک پایه‌ای دارند که افرازی از مجموعهٔ X است، یک زیرمشبکهٔ کامل از $Top(X)$ را تشکیل می‌دهد و چون بنا بر قضیه‌ای از ری‌برن[3] مشبکهٔ توپولوژی‌های افرازی روی X بادوگان مشبکهٔ همهٔ افرازهای X یکریخت

1) Whitman 2) partition 3) Rayburn

است، نتیجه به دست می‌آید. [۳۱]

۱۵.۲ قضیه: اگر $2 \neq |X|$ آنگاه $Top(X)$ فقط همریختی مشبکه‌ای بدیهی دارد؛ یعنی هر همریختی مشبکه‌ای از $Top(X)$ بروی یک مشبکهٔ L، یک یکریختی است یا اینکه L تک عضوی است. [۲۳]

۱۶.۲ قضیه: اگر X از یک یا دو عضو تشکیل شده یا نامتناهی باشد آنگاه گروه خودریختی‌های مشبکه‌ای $Top(X)$ باگروه تقارن روی X یکریخت است. اگر X متناهی وبیش از دو عضو داشته باشد آنگاه گروه خودریختی‌های مشبکه‌ای $Top(X)$ با ضرب مستقیم گروه تقارن روی X و $\mathbb{Z}_2$، یکریخت است. [۲۳][۲۲]

در اثبات قضیهٔ اخیر، هارتمانیز[1] از ساختار اتمی $Top(X)$ استفاده کرد و بعداً فروهلیخ [2] همین قضیه را با استفاده از ساختار پادـاتمی $Top(X)$ اثبات نمود. این قضیه نتایجی را به دنبال دارد. اگر X نامتناهی و P یک خاصیت توپولوژیکی باشد در این صورت مجموعهٔ توپولوژی‌هایی در $Top(X)$ که خاصیت P را دارند می‌تواند به آسانی از ساختار مشبکه‌ای $Top(X)$ تشخیص داده شود. زیرا بنابر قضیهٔ فوق تنها خودریختی‌های $Top(X)$ برای مجموعهٔ نامتناهی X آنهایی هستند که جای عناصر X را تحت جایگشت عوض می‌کنند. بنابراین هر خودریختی از $Top(X)$ باید توپولوژی‌های $Top(X)$ را به روی توپولوژی‌های هومئومورفشان بنگارد. پس خواص توپولوژیکی اعضای $Top(X)$ از روی موقعیت آنها در مشبکه تعیین می‌شود؛ به عنوان مثال:

۱۷.۲ قضیه: اگر τ یک پادـاتم در $Top(X)$ باشد، آنگاه τ در اصل T_1 صدق می‌کند اگر و تنها اگر τ در $Top(X)$ متمم ماکزیمم نداشته باشد.

در قضیهٔ فوق «متمم ماکزیمم» بزرگترین عضو در مجموعهٔ متممهای τ تحت رابطه $\subseteq$ است. برای آگاهی بیشتر از ویژگی‌های مشبکه‌هایی از توپولوژی‌های خاص، علاقه‌مندان را به [۳۱] ارجاع می‌دهیم.

توپولوژی‌های AT (اصلی)

در این بخش نوع خاصی از توپولوژی‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم که در حالت متناهی اهمیت ویژه‌ای می‌یابند. تعریف ۱.۳ به الکساندروف[3] منسوب است و او آن توپولوژی رافضای «گسسته» نامید، اما به جهت آنکه در ۱۹۳۵ الکساندروف و تاکر[4] مستقلاً روشی کلی برای ساختن توپولوژی روی ترتیبهای جزئی ابداع کردند که به این توپولوژی منجر شد، به تبعیت از مرجع [۴۵]، این توپولوژی‌ها را«AT» می‌نامیم.

۱.۳ تعریف: یک توپولوژی را AT گوییم هرگاه اشتراک دلخواه بازهای آن، باز باشد.

1) Hartmanis 2) Fröhlich 3) Alexandrov 4) Tucker

البته ا.ک.استینر[1] ثابت‌کرده است که تعریف فوق با تعریفی که برای یک توپولوژیِ اصلی[2] بیان می‌شود معادل است؛ یک توپولوژی رااصلی گویند هرگاه گسسته باشد یا بتوان آن را به صورت رسند فراتوپولوژی‌های اصلی نوشت. بیشترین نتایجی که دربارهٔ مشبکهٔ این نوع توپولوژی به دست آمده منسوب به وی است ([۴۰] را ببینید). شباهت وانطباق آن با مشبکهٔ $Top(X)$ (بویژه درحالت متناهی) قابل توجه است. در اینجا برخی از این نتایج را ذکر می‌کنیم:

مشبکهٔ توپولوژی‌های AT (اصلی) مشبکه‌ای است کامل که کوچکترین عضو آن توپولوژی ناگسسته و بزرگترین عضوش توپولوژی گسسته است. این مشبکه هم اتمی وهم پاد_اتمی است که اتمهای آن منطبق براتمهای $Top(X)$ می‌باشند. اگرچه این مشبکه، زیرمشبکهٔ $Top(X)$ است اما یک زیر مشبکهٔ کامل نیست. البته اگر X متناهی باشد این دو مشبکه یکی هستند (زیرا اشتراک دلخواه اعضای توپولوژی، منجر به اشتراک تعداد متناهی می‌شود). مشبکهٔ AT_توپولوژی‌ها، متمم‌دار است و اگر $|X| \geqslant ۳$ مدولار نیست و اگر $|X| \geqslant ۴$ دوگان خود نیست. در حالتی که X نامتناهی باشد عدد اصلی این مشبکه $۲^{|X|}$ می‌باشد.

همان‌طور که از تعریف AT_توپولوژی بر می‌آید می‌توان برای هر عضو x از X، کوچکترین همسایگی در نظر گرفت به این صورت که آن را اشتراک تمام بازهای شامل x تعریف کنیم و لذا پایه‌ای که شامل این کوچکترین همسایگی‌ها باشد را می‌توان، به تعبیر [۴۰] و [۳۴]، پایهٔ مینیمال برای AT_توپولوژی مورد نظر دانست. گفتنی است که د.استفن در [۴۱] نیز این ساختار را به کار برده و نشان داده است که تنها توپولوژی روی مجموعهٔ n عضوی که بیش از $۳ \times ۲^{n-۲}$ مجموعهٔ باز دارد توپولوژی گسسته است و به طور ضمنی ثابت کرده که فراتوپولوژی‌ها روی مجموعهٔ n عضوی دقیقاً $۳ \times ۲^{n-۲}$ مجموعهٔ باز دارند. در ادامه این موضوع را به شکل دیگری ثابت می‌کنیم.

حال فرض کنیم X متناهی و دارای n عضو باشد. تمام توپولوژی‌ها روی X، AT هستند پس هر توپولوژی روی X یک پایهٔ مینیمال منحصر بفرد دارد. فرض کنیم β این پایهٔ مینیمال باشد. حال به اعضای β توجه می‌کنیم. اگر تمام اعضای آن تک عضوی باشند آنگاه β، توپولوژی گسسته را پدید می‌آورد. اما اگر β یک توپولوژی سره را تولید کند در این صورت دست کم یکی از اعضای β نباید تک عضوی باشد. بنابراین یک پاد_اتم (یا فراتوپولوژی)، توپولوژیی خواهد بود که پایهٔ مینیمال آن دارای n عضو بوده و تنها یکی از این n عضو، یک مجموعهٔ دوعضوی است و $(n-۱)$ عضو دیگر همگی تک عضوی‌اند، یعنی $\beta_{yz}=\{\{x\},\{y,z\}:x\in X-\{z\}\}$ که y و z دوعضومتمایز X می‌باشند (توجه کنید که $\{y\}\in\beta_{yz}$). حال اگر فراتوپولوژی متناظر را با τ_{yz} نمایش دهیم باتوجه به انتخابهایی که برای y و z مقدور است تعداد فراتوپولوژی‌ها به‌وضوح $n(n-۱)$ خواهد بود. همچنین اگر $\mathcal{U}(\{y,z\})$ یک فراپالایهٔ اصلی از $\{y,z\}$ باشد خواهیم داشت:

$$\mathcal{U}(\{y,z\})=\{A|A=\{y,z\}\cup B, B\in P(X-\{y,z\})\}$$

1) A. K. Steiner 2) principal

و لذا
$$\tau_{yz} = P(X - \{z\}) \cup \mathcal{U}(\{y, z\})$$

چون فراتوپولوژی τ_{yz} به صورت اجتماع دو مجموعهٔ جدا از هم نوشته شده است پس:

$$|\tau_{yz}| = ۲^{n-۱} + ۲^{n-۲} = ۲^{n-۲}(۲ + ۱) = ۳ \times ۲^{n-۲}.$$

اکنون در مرحله‌ای هستیم که می‌توانیم رابطهٔ زیر را که در [۲۱] برای تعداد توپولوژی‌ها روی یک مجموعهٔ n عضوی اثبات شده و در اصل مربوط به رسالهٔ دکتری فرگ[1] می‌باشد که در ۱۹۸۳ به اتمام رسیده است، ارائه کنیم. توپولوژی τ روی مجموعهٔ ناتهی X را یک توپولوژی طردکننده[2] می‌نامیم هرگاه نقطه‌ای مانند $p \in X$ یافت شود که $p \notin \bigcup\{G : G \in \tau - \{X\}\}$ یا به بیان معادل، هرگاه X کوچکترین همسایگی یک نقطه باشد. این خانواده از توپولوژی‌ها را Eـتوپولوژی می‌نامیم. اگر یک توپولوژی AT جزء این خانواده نباشد دراین صورت پایهٔ مینیمال آن از زیرمجموعه‌های سرهٔ X تشکیل شده است. خانوادهٔ توپولوژی‌هایی که طردکننده نیستند را با $nonE$ـتوپولوژی مشخص می‌کنیم.

۲.۳ قضیه: تعداد همهٔ توپولوژی‌ها روی مجموعهٔ متناهی X_n شامل n نقطه، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$N_n = \sum_{r=۰}^{n-۱} \binom{n}{r} N_r + M_n$$

که $N_۰ = ۱$ و N_r تعداد همهٔ توپولوژی‌ها روی مجموعهٔ X_r است و M_n تعداد همهٔ $nonE$ـتوپولوژی‌ها روی X_n می‌باشد.

برهان: مجموعهٔ X_n دارای $\binom{n}{n-۱}$ زیرمجموعهٔ متمایز $X_{n-۱}$ است که هر $X_{n-۱}$ به صورت $X_n - \{z\}$ برای $z \in X_n$ می‌باشد. اگر β پایهٔ مینیمال توپولوژی τ روی $X_{n-۱}$ باشد آنگاه $\beta^+ = \{U, X_n : U \in \beta\}$ یک پایهٔ مینیمال برای Eـتوپولوژی τ^+ روی X_n است. توجه کنید که $X_{n-۱} \in \tau^+$. بنابراین، باافزودن X_n به پایهٔ مینیمال هر توپولوژی روی $X_{n-۱}$، تعداد $N_{n-۱}$ توپولوژی متمایز روی X_n به دست می‌آید. از آنجا که توپولوژی‌ها روی $X_{n-۱}$ متمایزند، تعداد $\binom{n}{n-۱}N_{n-۱}$ توپولوژی متمایز روی X_n خواهیم داشت. همچنین تعداد $\binom{n}{n-۲}$ زیرمجموعهٔ متمایز $X_{n-۲}$ از X_n موجود است که باافزودن X_n به پایهٔ مینیمال هر توپولوژی روی هر $X_{n-۲}$ می‌توان تعداد $\binom{n}{n-۲}N_{n-۲}$، Eـتوپولوژی متمایز روی X_n به دست آوردکه در هر یک از آنها $X_{n-۲}$ بازاست اما $X_{n-۱}$ باز نیست و همچنان می‌توان این روند را ادامه داد. تعداد $\binom{n}{۲}$ زیرمجموعهٔ متمایز $X_۲$ از X_n موجود است. فرض کنیم $X_۲ = \{x_i, x_j\}$ پس برای توپولوژی‌ها روی $X_۲$ پایه‌های مینیمالِ $\beta_۱ = \{\{x_i\}, \{x_j\}\}$ و $\beta_۲ = \{\{x_i\}, X_۲\}$ و $\beta_۳ = \{X_۲, \{x_j\}\}$ و $\beta_۴ = \{X_۲\}$ را داریم. باافزودن X_n به هر β_k $(k = ۱, ۲, ۳, ۴)$، پایه‌های مینیمالِ $\beta_۱^+ = \{\{x_i\}, \{x_j\}, X_n\}$ و $\beta_۲^+ = \{\{x_i\}, X_۲, X_n\}$ و $\beta_۳^+ = \{X_۲, \{x_j\}, X_n\}$ و $\beta_۴^+ = \{X_۲, X_n\}$ برای Eـتوپولوژی‌ها روی X_n به دست می‌آید که در هر یک $X_۲$ باز است امابرای هر $r \geq ۳$، $X_r \subset X_n$ باز نیست. بنابراین $\binom{n}{۲}N_۲$ توپولوژی متمایز روی

1) Farrag 2) excluding

X_n وجود دارد. بالاخره تعداد $\binom{n}{1}$ زیرمجموعهٔ متمایز X_1 از X_n موجود است که هر یک پایهٔ مینیمال $\beta_1^+ = \{X_1, X_n\}$ را به دست می‌دهد. اگر توپولوژی‌های گسسته و ناگسسته رافراموش نکنیم برهان کامل می‌شود.[۲۱]

در قضیهٔ فوق مشکلی که باقی می‌ماند یافتن M_n است و الگوریتمهایی که در [۲۰] ارائه شده مبتنی بر یافتن تعداد $nonE$ـتوپولوژی‌هایی است که به طور اکید ضعیفتر از یک توپولوژی داده شده هستند و شرایط هم‌ارزی که در [۲۰] اثبات شده این امکان رافراهم می‌سازند.

توپولوژی‌ها و ترتیب‌ها

بیانِ نحوهٔ تناظر توپولوژی‌ها وپیش‌ترتیب‌ها (تعریف ۱.۴) وسپس بررسی ارتباط مفاهیم توپولوژیکی با یکدیگر و با مفاهیم متناظرشان در نظریهٔ ترتیب و در نهایت ارائهٔ آخرین نتایج به دست آمده در این باره محتوای این بخش را تشکیل می‌دهد.

۱.۴ تعریف: یک رابطه روی مجموعهٔ X را پیش‌ترتیب[1] گوییم هرگاه خاصیتهای بازتابی و ترایایی (اما نه لزوماً پاد متقارن) را داشته باشد. پیش‌ترتیب را شبه‌ترتیب[2] نیز می‌نامند.

اگر X یک مجموعه و $\leqslant$ یک پیش‌ترتیب روی آن باشد، الکساندروف و تاکر یک توپولوژی روی X که بوسیلهٔ این پیش‌ترتیب به دست می‌آید را چنین تعریف می‌کنند: برای هر $x \in X$ مجموعهٔ $\{y : x \leq y\}$ باز فرض شود. این توپولوژی یک ATـتوپولوژی است. برعکس، برای هر توپولوژی روی X می‌توان یک پیش‌ترتیب در نظر گرفت؛ اگر τ یک توپولوژی روی X باشد پیش‌ترتیب $\lhd$ روی X به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x \lhd y \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\forall\ U \in \tau)[x \in U \Longrightarrow y \in U]$$

این تابع ازتوپولوژی‌ها به پیش‌ترتیب‌ها لزوماً یک به یک نیست؛ در واقع، توپولوژی‌هایی را که یک پیش‌ترتیب خاص را پدید می‌آورند می‌توان در یک کلاس هم‌ارزی قرار داد. در هر کلاس هم‌ارزی دقیقاً یک ATـتوپولوژی وجود دارد. در واقع، ATـتوپولوژی بزرگترین توپولوژی در هر کلاس هم‌ارزی است. بویژه، هرکلاس هم‌ارزی ناتهی است؛ یعنی هر پیش‌ترتیب بوسیلهٔ یک ATـتوپولوژی پدید می‌آید. در واقع، مشبکهٔ توپولوژی‌های AT روی X تحت رابطهٔ $\subseteq$ و مشبکهٔ پیش‌ترتیب‌ها روی X تحت رابطهٔ $\supseteq$ ، به طور کانونی یکریخت هستند. [۲][۳۲][۴۰]

از مطالب بند قبل نتیجه می‌شود که در حالت متناهی مجموعهٔ تمام توپولوژی‌ها روی X (که همگی AT هستند) با مجموعهٔ تمام پیش‌ترتیب‌ها روی X در تناظر یک به یک است.

حال به انواع خاصی از توپولوژی‌ها و روابط آنها با یکدیگر می‌پردازیم. هدف نهایی رسیدن به جدول

1) preorder 2) quasiorder

۱ و نمودار ۲ می‌باشد که در مقالهٔ زیبای [۱۷] ارائه شده است. تعاریف از منابع مختلف جمع‌آوری گردیده وقضایا به منظور روانتر شدن متن به صورت نکاتی در بین تعاریف و نهایتاً در جدول ۱ ذکر شده‌اند.

۲.۴ تعریف: در بندهای زیر که اصول جداسازی[1] نیز نامیده می‌شوند مقصود از فضا یک فضای توپولوژیک است و مقصود از همسایگیِ یک نقطه (یک مجموعه)، مجموعهٔ بازی شامل آن نقطه (آن مجموعه) است:

۱ـ یک فضا را T_0 گوییم هرگاه برای هر دونقطهٔ متمایز در آن، یکی، همسایگی داشته باشد که شامل دیگری نباشد.

۲ـ فضا را T_1 گوییم هرگاه برای هر دو نقطهٔ متمایز از آن، یک همسایگی موجود باشد که شامل دیگری نباشد. ثابت می‌شود که این شرط معادل است با اینکه مجموعه‌های تک عضوی بسته باشند.

۳ـ فضا را T_2 (هاسدورف) گوییم هرگاه هر دو نقطهٔ متمایز آن همسایگی‌هایی با اشتراک تهی داشته باشند.

۴ـ فضا را منتظم[2] گوییم هرگاه هر مجموعهٔ بسته و هر نقطه خارج از آن مجموعه، همسایگی‌های جدا از هم داشته باشند.

۵ـ فضا را نرمال گوییم هرگاه برای هر دومجموعهٔ بستهٔ جدا از هم آن، همسایگی‌های جدا از هم وجود داشته باشد.

۶ـ فضا را کاملاً نرمال گوییم هرگاه هر دو زیرمجموعهٔ آن که هیچیک بستار دیگری را قطع نمی‌کند همسایگی‌های جدا از هم داشته باشند.

مفاهیم فوق را به کمک نمادهای تصویری زیر بهتر می‌توان لمس کرد. اگر برای نمایش نقطه، مجموعهٔ باز، مجموعهٔ بسته و مجموعهٔ دلخواه به ترتیب نمادهای •، ○، ⊠ و ♡ را به کار بریم:

فضای T_0:

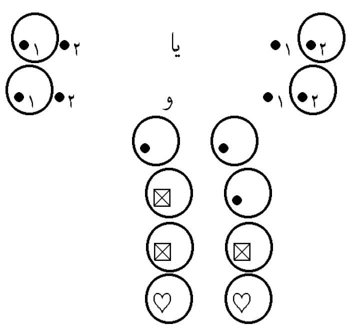
فضای T_1:

فضای T_2:

فضای منتظم :

فضای نرمال :

فضای کاملاً نرمال :



تعریف ۲.۴ بر اساس [۲۵] و [۳۱] بیان شده است و در آنجا اصول جداسازی T_3، T_4 و T_5 به ترتیب با افزودن شرط T_1 به هر یک از شرایط منتظم، نرمال وکاملاً نرمال بودن به دست می‌آیند. اما در [۳۳] ، منتظم یا نرمال بودنِ فضا علاوه بر شرایط مذکور در تعریف ۲.۴ منوط به داشتن شرط T_1 نیز می‌باشد. از

1) separation axioms 2) regular

آنجا که تنها توپولوژیِ متناهیِ $T_۱$ یا $T_۲$، توپولوژی گسسته است، توجه خود را به حالت ضعیفتری از اصول جداسازی $T_۳$ (منتظم)، $T_۴$ (نرمال) و $T_۵$ (کاملاً نرمال) که خاصیت $T_۱$ را نداشته باشد معطوف می‌کنیم. ضمناً برای فضاهای اصلی (AT) روابط زیر را داریم: [۱۷]

$$T_۱ = T_۲ \Rightarrow T_۳ \Rightarrow T_۵ \Rightarrow T_۴$$

۳.۴ تعریف: فضای توپولوژیک X را کاملاً منتظم[1] گوییم هرگاه برای هر $x \in X$ وهر همسایگی U از x، تابع پیوستهٔ f از X به $[۰, ۱]$ یافت شود به‌طوری‌که $f(x) = ۰$ و $f(X-U) = ۱$.

۴.۴ تعریف: (چند نوع همبندی)

۱ـ فضای X را همبند[2] گوییم هرگاه نتوان X را به صورت اجتماع دو زیرمجموعهٔ باز سرهٔ جدا از هم آن نوشت. ثابت می‌شود که با تبدیل کلمهٔ «باز» به «بسته» تعریف معادل به دست می‌آید.

۲ـ فضای X را فراهمبند[3] گوییم هرگاه نتوان X را به صورت اجتماع دو زیرمجموعهٔ باز سرهٔ آن نوشت. فراهمبند راابرهمبند[4] یا همبند قوی[5] نیز می‌نامند.

۳ـ فضای X را تحویل‌ناپذیر[6] گوییم هرگاه نتوان X را به صورت اجتماع دو زیرمجموعهٔ بستهٔ سرهٔ آن نوشت.

۴ـ فضای X را همبندِ مسیری[7] گوییم هرگاه برای هر دو نقطهٔ x و y در X تابع پیوستهٔ $f : [۰, ۱] \longrightarrow X$ یافت شود که $f(۰) = x$ و $f(۱) = y$.

در فضاهای AT (و در نتیجه در حالت متناهی) مفاهیم همبندی و همبندی مسیری معادلند و ثابت می‌شود که یک فضای AT فراهمبند است اگر و فقط اگر همبند و $T_۴$ باشد. [۱۵]

چون مفاهیم فراهمبند و تحویل‌ناپذیر در کتاب کلاسیک بورباکی [۴] ذکر نشده، بیان چند نکته در این زمینه مفید به نظر می‌رسد. خط حقیقی همبند است اما فراهمبند و نیز تحویل‌ناپذیر نیست. توپولوژی متمم متناهی[8]، یعنی توپولوژی که بازهای آن زیرمجموعه‌هایی باشند که متممشان متناهی است، روی یک مجموعهٔ نامتناهی، تحویل‌ناپذیر است اما فراهمبند نیست. در مجموعه‌های متناهی، یک توپولوژی فراهمبند است اگر و فقط اگر توپولوژی دوگان آن (شامل همهٔ متممهای مجموعه‌های باز در توپولوژی مفروض) تحویل‌ناپذیر باشد؛ بنابراین واضح است که تعداد توپولوژی‌های تحویل‌ناپذیر روی یک مجموعهٔ متناهی برابر با تعداد توپولوژی‌های فراهمبند است اما این توپولوژی‌ها یکی نیستند. [۳۸]

در بندهای تعریف زیر تنها سه مفهوم که در جدول ۱ ذکر شده مورد نظر است.

۵.۴ تعریف: (یکنواختی‌پذیر، متریک‌نماپذیر، متری‌پذیر)

---

1) completely regular 2) connected 3) ultraconnected 4) hyperconnected 5) strongly connected 6) irreducible 7) path connected 8) cofinite

۱ـ خانوادهٔ $\mathcal{U}$ از زیرمجموعه‌های $X \times X$، یک یکنواختی[1] روی X تعریف می‌کند هرگاه علاوه بر دو شرط اول پالایه، شرایط زیر را نیز داشته باشد:

- قطر، یعنی زوجهای (x,x) که $x \in X$، متعلق به هر یک از اعضای $\mathcal{U}$ باشد؛
- اگر $V \in \mathcal{U}$ آنگاه $V^{-1} \in \mathcal{U}$ که $V^{-1} = \{(y,x) | (x,y) \in V\}$ ؛
- برای هر $V \in \mathcal{U}$، عضو $W \in \mathcal{U}$ یافت شود به طوری که $W \circ W \subset V$.

در اینجا $S \circ T$ عبارت است از $\{(x,y) \in X \times X | \exists z \in X, (x,z) \in T, (z,y) \in S\}$. ثابت می‌شود که هر یکنواختی $\mathcal{U}$ یک توپولوژی یکتا روی X القا می‌کند به این صورت که برای هر $x \in X$، مجموعه‌های $U(x) = \{y \in X | xUy\}$ که با تغییر U در $\mathcal{U}$ به دست می‌آیند به عنوان بازهای پایه در نظر گرفته شوند. [۴]

۲ـ یک فضای توپولوژیک X را یکنواختی‌پذیر[2] گوییم هرگاه یک یکنواختی یافت شود که توپولوژی القا شده بوسیلهٔ آن بر توپولوژی موجود روی X، منطبق گردد.

۳ـ یک متریکنما[3] روی مجموعهٔ X نگاشت f از $X \times X$ به بازهٔ $[0, +\infty)$ از اعداد حقیقی است که شرایط زیر را داشته باشد:

- برای هر $x \in X$، $f(x,x) = 0$ ؛
- برای هر $x, y \in X$، $f(x,y) = f(y,x)$ ؛
- برای هر $x, y, z \in X$، $f(x,y) \leq f(x,z) + f(z,y)$.

هر متریکنمای f، یک یکنواختی روی X پدید می‌آورد به این صورت که $\mathcal{U}$ را خانوادهٔ همهٔ مجموعه‌های $V_r = \{(x,y) | f(x,y) < r\}$ به ازای هر $r > 0$، در نظر بگیریم. [۲۵]

۴ـ یک متریک[4] روی مجموعهٔ X، یک متریکنمای d است که اگر $d(x,y) = 0$ آنگاه $x = y$.

۵ـ یک فضای توپولوژیک X را متریکنماپذیر[5] گوییم هرگاه یک متریکنما یافت شود که توپولوژی القا شده بوسیلهٔ آن بر توپولوژی موجود روی X، منطبق گردد. اگر متریکنمای مذکور یک متریک باشد فضا را متری‌پذیر[6] گوییم.

هر یک از مفاهیم توپولوژیکی فوق، مفهوم متقابلی در نظریهٔ ترتیب دارد. به عنوان مثال، یک ATـتوپولوژی T_0 است اگر و فقط اگر پیش‌ترتیب متناظر، یک ترتیب جزئی[7] باشد. یک ATـتوپولوژی تحویل‌ناپذیر (فراهمبند) است اگر و فقط اگر مجموعهٔ پیش‌ترتیب شدهٔ متناظر به‌پایین (به‌بالا) جهتدار باشد؛ همچنین یک ATـتوپولوژی T_4 است اگر و فقط اگر هر مؤلفه به پایین جهتدار باشد. برای مجموعه‌های جزئاً مرتبِ متناهی این بدان معنی است که هر عضو، دقیقاً بر یک عضو مینیمال مسلط است. حالت

1) uniformity 2) uniformizable 3) pseudometric 4) metric 5) pseudometrizable
6) metrizable 7) partial order

خاصی از این نوع مجموعه‌های جزئاً مرتب، جنگلِ[1] متناهی است؛ مقصود از یک پیش‌ترتیبِ جنگلی پیش‌ترتیبی است که هیچ زوج غیرقابل مقایسه‌ای، کران بالای مشترک نداشته باشد؛ یک درخت[2] یک جنگلِ همبند (شبیه معنای آنها در گراف) است و هر درخت متناهی یک کوچکترین عضو دارد. [۱۷] حال فرض کنیم $\mathcal{A}^p$ ردهٔ همهٔ توپولوژی‌های AT که خاصیت معین p را دارند، نمایش دهد. حرف c برای «همبند» و حرف i برای «تحویل‌ناپذیر» به کارمی‌رود. اصول جداسازی T_s با عدد s نشان داده می‌شوند. $\mathcal{A}^{pq}$ بیان‌گر اشتراک $\mathcal{A}^p$ و $\mathcal{A}^q$ است. تناظر یک به یک بین توپولوژی‌های AT و پیش‌ترتیب‌ها، تناظری یک به یک بین رده‌های همتا در زیر برقرار می‌کند. برای اثبات‌ها می‌توان به [۲]، [۱۴]، [۱۵]، [۲۹]، [۳۷] و [۴۲] مراجعه کرد.

1) forest 2) tree

رده	خاصیت در توپولوژی AT	خاصیت متناظر در پیش‌ترتیب	نماد شمارش
$\mathcal{A}$	توپولوژی AT	پیش‌ترتیب	A_n
$\mathcal{A}^0$	T_0	ترتیب جزئی	A_n^0
$\mathcal{A}^1$	$T_3 + T_0 = T_2 = T_1$	رابطهٔ همانی	A_n^1
	= گسسته		
	= متری‌پذیر		
$\mathcal{A}^3$	T_3 = منتظم	رابطهٔ هم‌ارزی	A_n^3
	= کاملاً منتظم		
	= یکنواختی‌پذیر		
	= متریکنماپذیر		
$\mathcal{A}^4$	T_4 = نرمال	پیش‌ترتیبِ به‌طورمؤلفه‌ای به‌پایین جهتدار	A_n^4
$\mathcal{A}^5$	T_5 = کاملاً نرمال	پیش‌ترتیب جنگلی	A_n^5
$\mathcal{A}^{04}$	$T_4 + T_0$	ترتیب جزئی به‌طورمؤلفه‌ای به‌پایین جهتدار	A_n^{04}
$\mathcal{A}^{05}$	$T_5 + T_0$	ترتیب جزئی جنگلی	A_n^{05}
$\mathcal{A}^c$	همبند	پیش‌ترتیب همبند	A_n^c
$\mathcal{A}^{0c}$	همبند+ T_0	ترتیب جزئی همبند	A_n^{0c}
$\mathcal{A}^{1c}$	همبند + $T_1(T_2)$	ترتیب جزئی یک‌نقطه‌ای	A_n^{1c}
	= همبندوگسسته		
$\mathcal{A}^{3c}$	همبند+ T_3	رابطهٔ هم‌ارزی یک بلوکی	A_n^{3c}
	= ناگسسته		
A^{4c}	همبند+ T_4	پیش‌ترتیب به‌پایین جهتدار	A_n^{4c}
	= فراهمبند		
A^{5c}	همبند+ T_5	پیش‌ترتیب درختی	A_n^{5c}
A^{04c}	همبند+ T_4 + T_0	ترتیب جزئی به‌پایین جهتدار	A_n^{04c}
A^{5c}	همبند+ T_5 + T_0	ترتیب جزئی درختی	A_n^{05c}
A^i	تحویل‌ناپذیر	پیش‌ترتیب به‌بالا جهتدار	A_n^i
A^{0i}	تحویل‌ناپذیر+ T_0	ترتیب جزئی به‌بالا جهتدار	A_n^{0i}
A^{4i}	تحویل‌ناپذیر+ T_4	پیش‌ترتیب به‌بالا و به‌پایین جهتدار	A_n^{4i}
A^{5i}	تحویل‌ناپذیر+ T_5	پیش‌ترتیب کلی	A_n^{5i}
A^{04i}	تحویل‌ناپذیر+ T_4 + T_0	ترتیب جزئی به‌بالا و به‌پایین جهتدار	A_n^{04i}
A^{05i}	تحویل‌ناپذیر+ T_5 + T_0	ترتیب کلی=ترتیب خطی	A_n^{05i}

جدول ۱

این رده‌های متشکل از فضاها و مجموعه‌های مرتب را می‌توان تحت رابطهٔ جزئیت بر طبق نمودار زیر مرتب نمود:

نمودار ۲

گفتنی است که مارسل ارنه[1] در [۱۷] نشان داده است که تمام اعداد فوق را می‌توان تنها با داشتن یکی از اعداد A_n یا A_n° به سادگی به دست آورد و این به خودی خود، نتیجه‌ای هیجان انگیز است. امید است در مقالهٔ (در دست تدوین) «الگوریتمها» این نتایج به شکل مناسبی در کنار سایر نتایج به دست آمده ارائه شود. همچنین وی رابطه‌ای برای شمارش تعداد ترتیب‌های جزئی روی n نقطه، $P_n = A_n^\circ$، یافته است [۱۵]، اما اذعان می‌کند که برای استفاده‌های عملی مناسب نیست. [۱۷] این رابطه چنین است:

$$P_n = \sum_{r=0}^{2^{n^2}-1} \prod_{i=0}^{n-1} b^r_{ni+i} \prod_{j=0}^{n-1} (1 - b^r_{ni+j} b^r_{nj+i}) \prod_{k=0}^{n-1} (1 - b^r_{ni+j} b^r_{nj+k} (1 - b^r_{ni+k}))$$

که $b_i^r = \lfloor 2^{-i} r \rfloor - 2\lfloor 2^{-i-1} r \rfloor$ بیانگر iـامین رقم در بسط دودویی r $(0 \leqslant i < n^2)$ است. هر رابطهٔ دوتایی روی $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ بوسیلهٔ یک جمعوند معرفی شده که r از 0 تا $2^{n^2} - 1$ تغییر می‌کند. مقدار b^r_{ni+j}، ۱ است اگر i و j باهم در رابطه باشند و در غیر این صورت صفر است. حاصل ضربها روی i بازتابی بودن، روی j پادمتقارن بودن و روی k ترایایی بودن را نشان می‌دهد. بنابراین تمام حاصل ضرب ۱ است اگروفقط اگر رابطهٔ مورد بررسی، یک ترتیب‌جزئی باشد و در سایر حالات صفر است.

ضروری به نظر می‌رسد که رابطهٔ بین A_n و A_n° را به عنوان حالت خاصی از قضیه‌ای که در [۱۳] (و

1) Marcel Erné

نیز [۱۵]) ثابت شده است و در اینجا از مقالهٔ [۱۷] نقل می‌شود ارائه کنیم؛ در روابط زیر $s_{n,m}$ و $S_{n,m}$ به ترتیب نشان دهندهٔ اعداد استرلینگ نوع اول و دوم می‌باشد:

$$A_n = \sum_{m=۱}^{n} S_{n,m} A_m^{\circ} \qquad , \qquad A_n^{\circ} = \sum_{m=۱}^{n} s_{n,m} A_m .$$

در پایان جدول زیر را که حاوی اعداد به دست آمده برای $n \le ۱۶$ است به همراه تاریخچهٔ آنها از مقالهٔ [۲۴] نقل می‌کنیم . علاوه بر این علاقه‌مندان را برای دریافت آخرین پیشرفتهای به دست آمده در زمینهٔ دنباله‌های مشهوری از اعداد صحیح به پایگاه The On-line Encyclopedia of Integer Sequences با نشانی http://www.research.att.com/~ njas/sequences/index.html ارجاع می‌دهیم. در این پایگاه با وارد کردن چند جملهٔ نخست دنباله می‌توان به آخرین نتایج دست یافت.

	ترتیب‌های جزئی/توپولوژی‌های $T_۰$		پیش‌ترتیب‌ها/توپولوژی‌ها
n	A_n°		A_n
۱	۱		۱
۲	۳		۴
۳	۱۹		۲۹
۴	۲۱۹		۳۵۵
۵	۴۲۳۱		۶۹۴۲
۶	۱۳۰۰۲۳	a	۲۰۹۵۲۷
۷	۶۱۲۹۸۵۹	b	۹۵۳۵۲۴۱
۸	۴۳۱۷۲۳۳۷۹	c	۶۴۲۷۷۹۳۵۴
۹	۴۴۵۱۱۰۴۲۵۱۱	d	۶۳۲۶۰۲۸۹۴۲۳
۱۰	۶۶۱۱۰۶۵۲۴۸۷۸۳	e	۸۹۷۷۰۵۳۸۷۳۰۴۳
۱۱	۱۳۹۶۲۸۱۶۷۷۱۰۵۸۹۹	e	۱۸۱۶۸۴۶۰۳۸۷۳۶۱۹۲
۱۲	۴۱۴۸۶۴۹۵۱۰۵۵۸۵۳۴۹۹	f	۵۱۹۳۵۵۵۷۱۰۶۵۷۷۴۰۲۱
۱۳	۱۷۱۸۵۰۷۲۸۳۸۱۵۸۷۰۵۹۳۵۱	f	۲۰۷۸۸۱۳۹۳۶۵۶۶۶۸۹۵۳۰۴۱
۱۴	۹۸۴۸۴۳۲۴۲۵۷۱۲۸۲۰۷۰۳۲۱۸۳	f	۱۱۵۶۱۷۰۵۱۹۷۷۰۵۴۲۶۷۸۰۷۴۶۰
۱۵	۷۷۵۶۷۱۷۱۰۲۰۴۴۰۶۸۸۳۵۳۰۴۹۹۳۹	g	۸۸۷۳۶۲۶۹۱۱۸۵۸۶۲۴۴۴۹۲۴۸۵۱۲۱
۱۶	۸۳۴۸۰۵۲۹۷۸۵۴۹۰۱۵۷۸۱۳۸۴۴۲۵۶۵۷۹	i	۹۳۴۱۱۱۱۳۴۱۱۷۱۰۰۳۹۵۶۵۲۱۰۴۹۴۰۹۵

,[a]Comtet(۱۹۶۶)[۸], [b]Evans (۱۹۶۷)[۱۹], [c]Erné (۱۹۷۰)[۱۳], [d]Erné (۱۹۷۲)[۱۴], [e]Das(۱۹۷۷)[۱۹],
,[f]Erné & Stege(۱۹۹۰)[۱۷, ۳۹], [g]Erné & Stege(۱۹۹۳)[۱۸], [i]Heitzig & Reinhold(۲۰۰۰)[۲۴].

جدول ۲

تشکر و قدردانی

بر خود لازم می‌دانم که از تلاش و همراهی برادر ارجمندم جناب آقای محمد فرشی که به انحاء مختلف، بویژه در تهیهٔ نخستین برنامه‌های رایانه‌ای جهت تولید توپولوژی‌ها، مرا یاری نمودند و از جناب آقای دکتر حمید مظاهری تهرانی که با محبت ایشان دسترسی به منابع مورد نیاز میسر شد و از تمامی استادان و همکاران ارجمندم در دانشکدهٔ ریاضی دانشگاه یزد بخصوص آقایان دکتر بیژن دواز و دکتر محمدعلی ایرانمنش که مرهون الطافشان هستم و در نهایت، از سروران و استادان گرانقدری که این مسئله بهانه‌ای برای کسب فیض از محضرشان بود به‌ویژه جناب آقای دکتر ارسلان شادمان که تجلی این مسئله یکی از برکات کلاس درس ایشان است با تمام وجود تشکر و قدردانی نمایم.

مراجع

[1] Bruce A. Anderson, *Families of mutually complementary topologies*, Proc. A.M.S. **29**(1971), 362-368.

[2] P. S. Alexandrov, *Diskrete Räume*, Mat. Sb. (N.S.) **2**, 501-518.

[3] J. P. Barthelemy, *An asymptotic equivalent for the number of total pre-orders on a finite set*, Discrete Math. **29**(1980), 311-314.

[4] Nicolas Bourbaki, *General Topology*, Vol. I, II, Springer-Verlag 1989.

[5] Garrett Birkhoff, *On the combination of topologies*, Fund. Math. **26**(1936), 156-166.

[6] Jason I. Brown and Stephen Watson, *Partial order complementation graphs*, Order **11**(1994), 237-255.

[7] Jason I. Brown and Stephen Watson, *The number of complements of a topology on n points is at least 2^n*, Discrete Mathematics **154**(1996), 27-39.

[8] L. Comtet, *Recouvrements, bases de filtre et topologies d'un ensemble fini*, V. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A-B **262**(1966), 1091-1094.

[9] S. K. Das, *A machine representation of finite T_0 topologies*, J. ACM **24**(1977), 676-692.

[10] J. L. Davison, *Asymptotic enumeration of partial orders*, Congr. Numer. **53**(1986), 277-286.

[11] D. Dhar, *Entropy and phase transitons in partially ordered sets*, J. Math. Phys. **19**(1978), 1711-1713.

[12] D. Dhar, *Asymptotic enumeration of partial ordered sets*, Pacific J. Math. **90**(1980), 299-305.

[13] M. Erné, *Endlich topologien*, Diploma thesis, Universität München (1970).

[14] M. Erné, *Struktur- und Anzahlformeln für Topologien auf endlichen Mengen*, Ph.D. Dissertation, Universität Münster (1972).

[15] M. Erné, *Struktur- und Anzahlformeln für Topologien auf endlichen Mengen*, Manuscripta Math. **11**(1974), 221-259.

[16] M. Erné, *On the cardinalities of finite topologies and the number of antichains in partially ordered sets*, Discrete Math. **35**(1981), 119-133.

[17] M. Erné and Kurt Stege, *Counting finite posets and topologies*, Order **8**(1991), 247-265.

[18] M. Erné and Kurt Stege, *The number of topologies and orders on 15 points*, Preprint, Universität Hannover, (1993).

[19] J. W. Evans, F. Harary and M. S. Lynn, *On the computer enumeration of finite topologies*, Comm. ACM **10**(1967), 295-297, 313.

[20] A. S. Farrag and Adel A. Sewisy, *Computer construction and enumeration of topologies on finite sets*, Intern. J. Computer Math. **72**(1999), 433-440.

[21] A. S. Farrag and Adel A. Sewisy, *Computer construction and enumeration of all topologies and hyperconnected topologies on finite sets*, Intern. J. Computer Math. **74**(2000), 471-482.

[22] Otto Fröhlich, *Das Halbordnungssystem der topologichen Räume auf einer Menge*, Math. Ann. **156**(1964), 79-95.

[23] Juris Hartmanis, *On the lattice of topologies*, Canad. J. Math. **10**(1958), 547-553.

[24] Jobst Heitzig and Jürgen Reinhold, *The number of unlabled orders on fourteen element*, Order **17**(2000), 333-341.

[25] John L. Kelley, *General Topology*, Spinger-Verlag (1975).

[26] D. J. Kleitman and B. L. Rothschild, *The number of finite topologies*, Proc. Amer. Math. Soc. **25**(1970), 276-282.

[27] D. J. Kleitman and B. L. Rothschild, *Asymptotic enumeration of partial orders on a finite set*, Trans. Amer. Math. Soc. **205**(1975), 205-220.

[28] D. J. Kleitman and K. J. Winston, *The asymptotic number of lattices*, Ann. Diser. Math. **6**(1980), 243-249.

[29] J. Knopfmacher, *Note on finite topological spaces*, J. Austral. Math. Soc. **9**(1969), 252-256.

[30] Roland E. Larson and W. J. Thron, *Covering relations in the lattice of T_1-topologies*, Trans. Amer. Math. Soc. **168**(1972), 101-111.

[31] Roland E. Larson and Susan J. Andima, *The lattice of topologies: a survey*,Rocky Mountain J. Math. **5**, no 2, (1975), 177-198.

[32] F. Lorrain, *Notes on topological spaces with minimal neighborhoods*, Amer. Math Monthly **76**(1969), 616-627.

[33] James R. Munkres, *Topology: a first course*, Printice-Hall, (1975).

[34] A. S. Mashhour and A. S. Farrag, *Simple topological space*, In: 14th An. Conf. in Stat. Comp. Sci. Res. Math. Cairo University, (1979), 78-85.

[35] Paul S. Schnare, *Multiple complementation in the lattice of topologies*, Fund. Math. **62**(1968), 53-59.

[36] Paul S. Schnare, *Infinite complements in the lattice of topologies*, Fund. Math. **64**(1969), 249-255.

[37] H. Sharp Jr., *Quasi-orderings and topologies on finite sets*, Proc. Amer. Math. Soc.**17**(1966), 1344-1349.

[38] L. A. Steen and Seebach, *Counter examples in topology*, Holt, Rinehart and Winston, New York (1970).

[39] K. Stege, *Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Quasiordnungen und Topologien*, Diploma thesis, Universität Hannover (1990).

[40] Anne K. Steiner, *The lattice of toplogies: structure and complementation*, Trans. Amer. Math. Soc. **122**(1966), 379-397.

[41] D. Stephen, *Topology on finite sets*, Amer. Math. Monthly **75**(1968), 739-741.

[42] R. E. Stong, *Finite topological spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **123**(1966), 325-340.

[43] R. Vaidyanathaswamy, *Treatise on set topology*, Indian Math. Soc. Madras (1947).

[44] A. C. M. Van Rooij, *The lattice of all topologies is complemented*,Canad. J. Math. **20**(1968), 805-807.

[45] Stephen Watson, *The number of complements in the lattice of topologies on a fixed set*, Topology and its Application **55**(1994), 101-125.

حسین خورشیدی

دانشگاه یزد، دانشکدهٔ ریاضی

پست الکترونیک: khorshidi@yazduni.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شمارهٔ ۲۷(پاییز ۱۳۸۰)، صص. ۳۷ تا ۴۸

ویتگنشتاین و مبانی ریاضیات

عبدالحسین امینی شارستانی

به دلایل متعدد فلسفهٔ ویتگنشتاین پیوندهای ویژه‌ای با مسائل مبانی ریاضیات دارد. او کتاب کم حجم اما مهم خود، رساله منطقی-فلسفی ترکتتوس[1]، را در فضای پر ثمر جدال مبانی در ۱۹۲۱ منتشر کرد. ترکتتوس کتابی فلسفی به عام‌ترین مفهوم آن است؛ اساساً به خود مسألهٔ فلسفه می‌پردازد. اما ساختار آن ناظر به منطق‌گرایی[2] فرگه و راسل صورت داده شده است. پس از آن، در دوره دوم زندگی فلسفی خود، ویتگنشتاین جریان‌های تازهٔ مبانی ریاضیات را در محفل‌های وین و کمبریج تجربه کرد. به خصوص در این دوره فلسفه‌های ریاضی ساخت-گرا بر او مؤثر افتاد و فضای نوشته‌های او را از سایهٔ سنگین ادبیات منطق‌گرایانه آزاد ساخت. سپس از میان این تجربیات اندیشه‌های ترکتتوس متحول گشت و به ویتگنشتاین پژوهش‌های فلسفی[3] رسید.

ویتگنشتاین پیش از هر چیز یک فیلسوف است. انگیزه‌های بنیادین کارهای او همان سؤالات دیرین سنت فلسفی است؛ مانند هستی، زیبایی، دانش و اخلاق. اما رهیافت او به مسأله با شیوهٔ کلاسیک متفاوت است. دیگر حل مسائل فلسفی با سرگردانی در پی یافتن پاسخی برای پرسش‌های تاریخ فلسفه صورت نمی‌گیرد، بلکه با روشن ساختن گزاره‌های زبان و بازنمایی کاربردهای عبارات، این پرسش‌ها ناپدید می‌شوند. به هر صورت فلسفه دیگر فعالیتی است که به زبان مربوط می‌شود. برای بررسی فلسفهٔ ویتگنشتاین بسیار مهم است که این منطق متفاوت او فراموش نشود.

مفسران فلسفه ویتگنشتاین را به دو دوره تفکیک می‌کنند: متقدم و متأخر. البته نه به این معنا که این دو دوره کاملاً از هم مجزا باشند. فلسفهٔ متقدم او یک طرح دقیق از ساختار زبان و جهان به دست می‌دهد. او انگیزه‌هایش را از کارهای فرگه و راسل می‌گیرد اما خود نظریهٔ تصویری زبان را به عنوان تبیین

1) *Tractatus Logico-Philosophicus* 2) Logicism 3) *Philosophical Invistigations*

بهتر ارائه می‌دهد. سپس در اواخر دههٔ ۲۰ و اوایل دههٔ ۳۰ ویتگنشتاین نزد پُزیتیویست‌های منطقی حلقهٔ وین و سپس در کمبریج به تشریح و تأمل درباره رسالهٔ منطقی‌ـفلسفی پرداخت. در این دوره که از آن به نام دورهٔ گذار یاد می‌کنند توجه ویتگنشتاین به فلسفهٔ ریاضی بیش از هر زمان دیگر بود. به این ترتیب اندیشه‌های ترکتتوس کم‌کم متحول شدند تا به آنجا که ما به صورت‌بندی تازه‌ای از مسائل می‌رسیم که فلسفهٔ متأخر او را تشکیل می‌دهد. کتاب معروف پژوهش‌های فلسفی نمایندهٔ ویتگشتاین متأخر است. پژوهش‌های فلسفی تبیین ترکتتوسی از مسألهٔ زبان و معنا را که مبتنی بر نظریهٔ تصویری زبان است کنار می‌گذارد و به تبیین شگفت‌انگیز تازه‌ای می‌رسد. اساساً در اینجا هر نوع نظریه‌پردازی در باب معنا جایگاه خود را از دست می‌دهد. به جای آن مفهوم «بازهای زبانی» به میدان می‌آید و تبیین بدیل را ارائه می‌دهد.

ترکتتوس نمایندهٔ فلسفه متقدم ویتگنشتاین است. این کتاب نتیجهٔ دوره‌ای از زندگی فلسفی اوست که او نزد راسل به یادگیری و اندیشه دربارهٔ مسایل اصول ریاضیات[1] گذراند. ویتگنشتاین از آن گروه از فیلسوفان است که ورودش به فلسفه از راه آموزش‌های منظم نبوده است. خانوادهٔ او که از اشراف اتریش بودند فرزندان خود را به دست مدارس مرسوم آن زمان نسپردند، بلکه خود به آموزش و تربیت آنان اهتمام کردند. اما خانهٔ آنها محل آمد و شد هنرمندان و روشنفکران وین بود (مانند گوستاو مالر) و این موضوع می‌توانست تأثیر جدی در شکل‌گیری ذهن فلسفی ویتگنشتاین داشته باشد. ویتگنشتاین در منچستر دانشجوی مهندسی هوانوردی بود که به کتاب اصول ریاضیات راسل و وایتهد دست یافت. اندیشه‌های نو فرگه و راسل در آن کتاب دربارهٔ منطق و فلسفه او را سخت به خود جذب نمود. او در سال ۱۹۱۲ به عنوان دانشجو وارد کمبریج شد و نزد راسل به آموختن و اندیشه دربارهٔ منطق و فلسفه پرداخت. ترکتتوس که او آن را در سال ۱۹۲۱ پس از آزادی از اسارت در جنگ منتشر کرد می‌تواند کارنامهٔ این دوره باشد.

بنابراین می‌توان گفت که فضای ترکتتوس تحت تأثیر اندیشه‌های راسل و فرگه است. به خصوص این اندیشهٔ نظریهٔ بازنمایی (نظریه توصیفات[2]) راسل که ما دارای یک زبان جهانی منطقی هستیم که گوهر همهٔ زبان‌هاست، در ترکتتوس پذیرفته شده است. ویتگنشتاین با تحسین می‌گوید که راسل نخستین کسی است که دریافت ساختار منطقی جمله‌های زبان ممکن است با ساختار نحوی آن کاملاً متفاوت باشد. با این حال ویتگنشتاین راه جداگانهٔ خود را می‌رود و از راسل و فرگه انتقاد می‌کند. به نظر او شیوهٔ قانون‌های بنیادین فرگه و نظریهٔ کلاس‌های راسل یک دید ناسازگار و نادرست درباره منطق به دست می‌دهد. در برابر، ویتگنشتاین نظریهٔ تصویری زبان را طرح کرد که اساساً تبیین تازه‌ای از زبان و جهان است و با این حال نتایج فنی فراوانی نیز برای مسائل مبانی ریاضیات در پی دارد. این نظریه تبیین تازه‌ای از منطق، ریاضیات، استنتاج منطقی، برهان ریاضی و از این قبیل ارائه می‌کند. به خصوص در این نظریه مبانی حساب بر اساس مفهوم «عمل[3]» سامان داده می‌شود. این اندیشه بسیار دارای اهمیت است و می‌توان نشانه‌های ریاضیات ساخت‌گرایانه را در آن به وضوح یافت.

---

1) *Principia Mathematica* 2) Theory of Description 3) operation

پرینکیپیا متمتیکا برنامهٔ منطق‌گرایی فرگه را پی می‌گیرد که اساس آن تقلیل ریاضیات به منطق است. راسل بر آن است که نوع سازگارتری از تبیین منطق گرایانهٔ ریاضیات را نسبت به فرگه ارائه دهد و بنابراین نظریه کلاس‌ها (نظریه انواع) را مطرح می‌کند و از آنجا کل ساختار اعداد را بر اساس کلاس‌ها و جبر میان آنها سامان می‌دهد. گذشته از نارسایی‌های خرد و بزرگ دستگاه راسل، به نظر ویتگنشتاین اساس نظریهٔ کلاس‌های او با روح برنامهٔ منطق‌گرایی ناسازگار است. زیرا اصل‌های بی‌نهایت و کاهش‌پذیری که منطق‌گرایی راسل نیازمند آنها است، بر فرض که درست باشند راستی آنها تصادفی خواهد بود نه منطقی. چیز دیگری که از این سخن ویتگنشتاین بر می‌آید تعهد او درترکتتوس به برنامهٔ منطق‌گرایی می‌تواند باشد.

فرگه در برابر این سخن کانت که گزاره‌های ریاضیات پیشینی ترکیبی هستند ایستاد. از نظر او گزاره‌های ریاضیات تحلیلی هستند. البته مفهوم تحلیلی نزد فرگه با کانت کاملاً یکسان نیست. فرگه یک فهرست از قانون‌های بنیادین منطق را ارائه می‌کند، آنگاه یک گزارهٔ تحلیلی خواهد بود اگر بتوان نشان داد که آن از قانون‌های بنیادین منطق و تعریف‌هایی که برابر آنها صورتبندی شده‌اند استنتاج می‌شود. کانت گزاره‌های تحلیلی را به نحو دیگری تعریف می‌کند اما در هر صورت مفهوم‌های تحلیلی فرگه، گزاره‌های تحلیلی کانت و این همانی لایبنیتز را می‌توان در یک گروه جای داد.

طبق صورت‌بندی کانت گزاره‌ها یا تحلیلی[1] هستند یا ترکیبی[2] و گزاره‌های ترکیبی یا پیشینی[3] هستند یا پسینی[4]. گزاره‌های تحلیلی آنهایی هستند که محمول آنها در موضوع مندرج باشد. پسینی بودن نیز وابستگی به ادراک حسی را می‌رساند. گزاره‌های پیشینی ترکیبی تابع ادراک‌های حسی ما نیستند، آنها ضروریند به این معنا که راست بودن هرگزاره‌ای درباره جهان فیزیکی محتاج راست بودن آنها است. اساساً التزام کانت به وجود گزاره‌های پیشینی ترکیبی مورد توجه بوده است. گزاره‌های حساب و هندسه مثال‌های مهم کانت برای این دسته هستند. این نوع گزاره‌ها هنگامی به میان می‌آیند که ما به فضا و زمان به مثابهٔ ظرف‌های ناگزیر تجربه‌های حسی می‌نگریم. در این صورت، این دو دیگر وابسته به تغییرات در ادراکات حسی ما نیستند و بنابراین گزاره‌های مربوط به آنها پیشینی خواهد بود. اما از جانب دیگر کانت فضا و زمان ادراکی[5] را به مثابهٔ اشیاء می‌نگرد نه خواص اشیاء؛ یعنی به فضا به مثابهٔ یک جعبه می‌نگرد و به زمان به مثابهٔ یک جریان. گزاره‌های مربوط به فضاـجعبه و زمان‌ـجریان ترکیبی خواهند بود. گزاره‌های حساب درباره زمان ادراکی هستند و گزاره‌های هندسی دربارهٔ فضای ادراکی. بنابراین آنها پیشینی ترکیبی هستند.

فرگه در برابر کانت برنامهٔ تحویل ریاضیات به منطق را در پیش گرفت و این اندیشه او بر راسل و ویتگنشتاین ترکتتوس نیز مؤثر افتاد. اما تبار منطق گرایی حتی به گذشتهٔ دورتر برمی‌گردد. اندیشهٔ لایبنیتز دربارهٔ ماهیت و راستی گزاره‌های ریاضی پتانسیل قوی از منطق‌گرایی را در خود دارد. لایبنیتز از آن گروه از فیلسوفان است که یک تبیین فراگیر از مسایل فلسفه بر اساس یک اندیشهٔ مرکزی قوی به دست داده‌اند.

1) Analytic 2) Synthetic 3) A priori 4) A postriori 5) Perceptual Space & time

او این کار را با مفهوم موناد[1] صورت داده است. مونادها وجودهای مستقلی هستند که هر کدام ادراک کاملی از جهان را در خود دارند. از اینجا است که هستی‌شناسی و معرفت‌شناسی و دیگر مسایل فلسفه لایبنیتز شکل می‌گیرد. به‌خصوص بازتاب آن در فلسفهٔ منطق لایبنیتز این است که او تمام گزاره‌ها را به گزاره‌های موضوع‌ـمحمول که محمول در موضوع مندرج است کاهش می‌دهد (یک گام فراتر از ارسطو). اما لایبنیتز همچنین میان دو نوع راستی گزاره‌ها تفاوت می‌گذارد: ۱ـ راستی استدلالی[2] ۲ـ راستی واقع[3]. راستی استدلالی چنین به دست می‌آید که ما گزارهٔ موردنظر را طی گام‌های متناهی به آنجا برسانیم که اندراج محمول در موضوع بدیهی گردد. به عبارت دیگر تا جایی که اصل امتناع تناقض داوری کند. لایبنیتز این نوع گزاره‌ها را این‌همانی[4] می‌خواند. اما راستی واقع چنین نیست، تنها خدا می‌تواند اندراج محمول در موضوع را در آنها به دست آورد، چون این کار متضمن بی‌نهایت گام است. گزاره‌های ریاضی این‌همانی هستند، آنها به این دلیل راست هستند که از خلاف آن تناقض می‌آید نه به خاطر اینکه از اشیای جهان راست بنیادی سخن می‌گویند (چون جهان مثل افلاطونی). بنابراین اندیشهٔ تحویل ریاضیات به منطق نزد لایبنیتز قدرتمندانه مطرح بوده است.

مسألهٔ مهم دیگر درمورد فرگه التزام او به اشیای مجرد است. او در کتاب مبانی حساب[5] بحث می‌کند که آیا با گزاره‌های حساب چون $۴ = ۲ \times ۲$ می‌توان تنها با بحث دربارهٔ فرایندهای روانشناسانه و طبیعی و تاریخی برخورد نمود (چنانکه رسم زمانهٔ او بود.) او سپس بحث را به اینجا می‌رساند که ما در این موارد نیازمند تحلیل معنایی محض و مفاهیمی از قبیل توجیه‌مندی تعریف‌ها[6] و استحکام منطقی برهان‌ها[7] هستیم. این دیدگاه او را به رهیافت منطق‌گرایانه به ریاضیات راه می‌برد. اما او همچنین استدلال می‌کند که راستی گزاره‌های حساب مستلزم وجود اشیایی است که (به حسب ظاهر) از آنها سخن می‌گویند. براین این بحث او را به پذیرش اشیای مجرد می‌کشاند (در برابر اشیای واقعی[8]) او می‌گوید اشیای مجرد دارای تأثیر عِلّی نیستند و نمی‌توان به آنها از راه اشاره و نامگذاری رسید. آنها خود را در نحو زبان نشان می‌دهند و وجود دارند. اما این همان جایی است که فرگه دچار تناقض شده است زیرا آرمان منطق‌گرایی می‌طلبد که ریاضیات دربارهٔ هیچ شیء خاصی نباشد چرا که منطق دربارهٔ چیز خاصی نیست.

راسل برای رهایی از این تناقض، داستان اشیای مجرد فرگه را کنار می‌گذارد. راستی گزاره‌های حساب نزد او مستلزم وجود اشیای بخصوصی نیست. به این ترتیب راسل نظریهٔ کلاس‌ها را برای تبیین منطقی حساب مطرح می‌کند. گزاره‌های حساب درباره کلاس‌ها هستند. کلاس‌ها اشیای حقیقی نیستند بلکه شیء‌ـجایگاه هستند.

نظریهٔ کلاس‌ها شاید بتواند ما را از تناقض فرگه برهاند اما خود دارای پیامدهای سنگین و ناخوشایند

1) Monad 2) Truth of reasoning 3) Truth of facts 4) Identity 5) *Foundations of arithmatics* 6) Justification 7) cogency 8) Concrete

است زیرا برای به دست آوردن بی‌پایانی رشتهٔ اعداد طبیعی و تمامیت اعداد حقیقی ناگزیر می‌گردد که اصل‌های بی‌نهایت[1] و کاهش‌پذیری[2] را وضع کند که اینها به گفتهٔ ویتگنشتاین هزینهٔ فراتر از منطق را به ما تحمیل می‌کند و باز برنامه منطق‌گرایی ناکام خواهد ماند. همچنین راسل برای دوری از ناسازگاری درونی نظریهٔ کلاس‌ها (پارادوکس راسل) نظریهٔ type (نظریهٔ طبقات) را طرح نمود که برایندش این است که هر کلاسی مجاز نیست. این چاره‌اندیشی راسل نیز به مانند وصله‌کردن درزهای یک نظریه است و ویتگنشتاین را از تردید در اساس صورت‌بندی او از ریاضیات و منطق باز نمی‌دارد.

منطق‌گرایی هر چند که اکنون اعتبار از کف داده است، در ابتدای قرن بیستم یک اتفاق مهم در فلسفهٔ ریاضیات بود. یک دلیل عمده برای آن میدان داری، پاسخ این گرایش به بسیاری از مسائل بنیادی فلسفهٔ ریاضیات بود که تا آن زمان هیچ نظریهٔ دیگری نتوانسته بود به آن حد به عمق و جزئیات مطلب پیش برود. این نظریه ماهیت متفاوت نظریه و برهان را در ریاضیات نسبت به علوم طبیعی توضیح می‌دهد و نیز کیفیت متفاوت راستی را در ریاضیات، و تبیین می‌کند که چرا ریاضیات برای یک مدعا هزینهٔ هنگفت می‌طلبد. این نظریه به کاربردمندی ریاضیات نیز اهمیت می‌دهد و آن را تبیین می‌کند.

ویتگنشتاین می‌گوید ریاضیات یک روش منطق است. این ما را ترغیب می‌کند که او را در ترکتتوس یک منطق‌گرا بدانیم اما بدون تردید داوری دربارهٔ ویتگنشتاین کار ساده‌ای نیست. آیا اصلاً می‌توان او را طرفدار مکتب خاصی دانست؟ زیرا برآیند ترکتتوس آن است که فلسفه یک فعالیت است نه مجموعه‌ای از گزاره‌های راستین. گذشته از آن اگر هم بخواهیم دربارهٔ منطق‌گرایی ترکتتوس سخن بگوییم باید که نخست به ارائهٔ متفاوت ترکتتوس از منطق و زبان توجه کنیم.

گوهر تبیین ترکتتوس از زبان و معنا آن چیزی است که از آن به نظریهٔ تصویری زبان یاد می‌کنند. هر گزارهٔ راست تصویر یک بوده است. این در طرح ترکتتوس سخنی است مهم و دارای پیامدهای سنگین فنی و فلسفی. پیش از هر چیز لازم است رابطه «تصویر بودن» دانسته شود. تصویر رابطه‌ای است میان یک وضعیت اشیاء با وضعیت اشیای دیگر. آنچه آنها را تصویر یکدیگر می‌سازد «ساختمان منطقی» آنها است [3] یعنی اینکه عناصر آنها در نسبت تصویری یکسان هستند. صفحهٔ گرامافون، اندیشهٔ موسیقایی و نوت‌نویسی موسیقایی همگی، هرچند در نگاه اول متوجه نباشیم، دارای ساختمان منطقی همسان هستند و این ما را مجاز می‌سازد که آنها را تصویر منطقی همدیگر بدانیم. برای برپایی این نظریه در مورد زبان و جهان، ترکتتوس ابتدا طرحی از جهان به دست می‌دهد:جهان مجموعهٔ بوده‌هاست. جهان مجموعهٔ چیزها نیست. هر بوده یک وضعیت چیزهای موجود است. یک وضعیت چیزها یک هیأتی از اشیا است در نسبتی خاص با همدیگر. و ... سپس رابطهٔ تصویری میان زبان و جهان به صورت زیر ارائه می‌گردد:

1) Infinity 2) Reducibility 3) logical form, pictorial form

جهان	$\rightarrow$	$\leftarrow$	زبان
بوده‌ها[1]	$\rightarrow$	$\leftarrow$	گزاره‌ها[2]
وضعیت چیزها[3]	$\rightarrow$	$\leftarrow$	گزاره‌های اتمی[4]
اشیا[5]	$\rightarrow$	$\leftarrow$	نام‌ها[6]

سخن ویتگنشتاین درباره جهان از جایگاه یک فیلسوف است. این سخن دارای ماهیت فلسفی است. اما به نظر می‌رسد که او جهان را از روی ساختاری که برای زبان قایل است ساخته است، به خصوص به نحوی که نظریهٔ تصویری او را تصدیق کند.

به این ترتیب نظریهٔ تصویری معنای ترکتوس شکل می‌گیرد. یک تصویر مستقل از راستیش دارای معناست و آن همان وضعیت چیزهایی است که می‌نگارد. بنابراین یک گزاره هنگامی معنادار است که یک وضعیت چیزهای ممکن را بنگارد. اما اینکه چه وضعیت چیزهایی ممکن است یا به عبارت دیگر یک شیء در چه وضعیت چیزهایی می‌تواند حضور داشته باشد از خواص گوهرین آن شیء است. به عنوان مثال، رشتهٔ «نظریه کلاس‌های راسل خوشبوست» دیگر بی معنا است.

یک تصویر همواره دارای معنا است اما برای راستیش باید با واقعیت سنجیده شود. این کار همانند کاربرد خط‌کش اندازه‌گیری انجام می‌شود. عناصر تصویر در جایگاه نقاط انتهایی خط‌کش در برابر اشیا (عناصر واقعیت) گذارده می‌شوند و از آنجا به دست می‌آید که آیا دارای صورت منطقی یکسان هستند یا نه. اما بنابراین یک گزاره دیگر از صورت منطقی وضعیت چیزها و خواص صوری (درونی) اشیا سخن نمی‌گوید، بلکه آنها خود را در گزاره نمایش می‌دهند. به ازای صورت منطقی واقعیت هیچ نمادی در گزاره پدید نمی‌آید. صورت منطقی گفتنی نیست بلکه نمایش دادنی است.

تفاوت میان گفتن و نمایش یک اندیشهٔ بنیادین ترکتوس است. این تفاوت در تبیین ویتگنشتاین از فلسفه، منطق و ریاضیات دارای اهمیت اساسی است. زیرا از آن برمی‌آید که تنها گزاره‌های علوم طبیعی معنا دارند و گزاره‌های منطق و متافیزیک بی‌معنایند. اما این نیز به معنای تعطیل این حیطه‌ها از فعالیت‌های انسانی نیست. به خصوص جایگاه تازه‌ای که فلسفه در این دیدگاه می‌یابد آن است که فلسفه دیگر یک فعالیت است برای روشن‌سازی گزاره‌های علوم طبیعی نه مجموعه‌ای از گزاره‌های راستین. بنابراین ویتگنشتاین در ترکتوس نظریهٔ بخصوصی دربارهٔ زبان و جهان به دست نمی‌دهد. به‌جز این، دوگانهٔ گفتن‌ـنمایش مبنایی است برای خرده‌گیری‌های فنی ویتگنشتاین بر فرگه و راسل. به عنوان مثال کثرت[7] از خواص صوری واقعیت است و بنابراین هیچ نمادی برای آن در گزاره نمی‌تواند گذارده شود. کثرت تنها می‌تواند در صورت گزاره نمایش داده شود. از جمله در گزارهٔ $\forall x.fx$ کلیت از خود متغیر x فهمیده می‌شود نه از نماد $\forall x$ که علامت ضرب منطقی است (4.0411). مثال دیگر: روابط منطقی میان

1) facts 2) propositions 3) states affairs 4) elementary propositions 5) objects, things 6) names 7) multiplicity

اجزای بوده‌ها روابط صوری هستند و بنابراین نمی‌توانند توسط نمادهایی چون $\wedge$، $\vee$، $\subset$، . . . و غیره نگاشته شوند. این نمادها دارای اصالت منطقی نیستند، آنها تنها علایم نگارشی هستند.

گزاره‌های منطق و ریاضیات نیز بی‌ـمعنا هستند. زیرا گزاره‌های معنادار آنهایی هستند که برای راستی‌شان با واقعیت سنجیده می‌شوند. ولی گزاره‌های منطق و ریاضیات چنین نیستند. آنها شبه‌ـگزاره[1] هستند. تمام هستی منطق را می‌توان در همانگویی‌ها خلاصه نمود که راستی آنها گوهرین است. آنها با واقعیت سنجیده نمی‌شوند بلکه راستی آنها از خواص صوری زبان است. اما به رغم بی‌معنایی، هرگز بی‌فایده نیستند، بلکه ساختار زبان و جهان و محدودیت‌های نحوهٔ اندیشیدن ما را از جهان نشان می‌دهند. سپس ویتگنشتاین بحث را به آنجا می‌رساند که ریاضیات یک روش منطقی است. گزاره‌های ریاضی معادلات میان نمادها هستند. آنها نیز شبه‌گزاره هستند (۶). معادلات ریاضیات و همانگویی‌های منطق معنادار نیستند اما با صورت خود به ما شهودی از ساختار منطقی زبان و جهان می‌دهند.

ارائهٔ بنیاد متفاوت ویتگنشتاین از منطق و ریاضیات نتایج گسترده‌ای در پی دارد. از جمله شهود و برهان در ریاضیات و منطق دیگر آن جایگاه پیشین را نخواهد داشت. شهود به معنای مشاهدهٔ یک واقعیت در جهان افلاطونی یا تجربی در ریاضیات جایی نخواهند داشت. به گفتهٔ او به این پرسش این گونه نیز می‌توان پاسخ داد که تمام شهود لازم را خود زبان برای ما فراهم می‌کند. برهان ریاضی نیز بیانگر هیچ ارتباط علمی نیست بلکه تنها وسیله‌ای کمکی است برای آن که ما گزارهٔ ریاضی را (معادلات میان نمادها را) آسان‌تر مشاهده کنیم. در منطق نیز روش‌های استنتاج دیگر اصالت نخواهند داشت. روش‌های متداول استنتاج منطقی تنها وسیله‌های مکانیکی برای مشاهدهٔ همانگویی‌ها هستند. ولی این از نظر منطق بی‌اهمیت است، گزاره‌های مقدمه و نتیجه از نظر منطق یکسانند، همه همانگویی هستند. از اینجا ویتگنشتاین می‌گوید که آن قانون‌های بنیادین استنتاج که فرگه صورت‌بندی نموده است ربطی به گوهر منطق ندارند. در منطق قانون‌های بنیادین و بنیادین تر نداریم. همهٔ گزاره‌های منطق از یک مرتبه هستند.

ویتگنشتاین از منطق‌گرایی راسل نیز انتقاد می‌کند. او می‌گوید ما در منطق به دنبال کلیت‌های گوهرین هستیم که راستی‌شان به خاطر خواص صوری زبان است، این کلیت‌ها تابع بوده‌های جهان نیستند که راستی‌شان راستی تصادفی است. به این ترتیب نظریهٔ کلاس‌ها دیگر در منطق به کلی زاید است. زیرا این نظریه برای برپایی خود، دو اصل بی‌نهایت و کاهش‌پذیری را به کار می‌گیرد. برآیند اصل بی‌نهایت آن است که ما بی‌نهایت شیء از type صفر داریم. این اصل برای بی پایانی اعداد طبیعی لازم است. اصل کاهش‌پذیری می‌گوید که برای اشیای داده شدهٔ یک type، به اندازهٔ کافی خواص برای آن اشیاء داریم که بدون سخن گفتن از «تمام خواص آن اشیا» قابل تعریف‌اند. راسل برای اثبات تمامیت اعداد حقیقی نیازمند این اصل است. این اصل‌ها بر فرض که درست باشند کلیت‌شان تصادفی است[2] نه گوهرین[3]. راستی آنها از صورت آنها برنمی‌آید. ولی ما در منطق به دنبال کلیت‌های گوهرین هستیم. بنابراین نظریهٔ

1) pseudo-proposition 2) accidental generality 3) essential gen.

کلاس‌های راسل برای برنامهٔ منطق‌گرایی مفید نخواهد بود. اما باید توجه نمود که این پایان داستان نیست، با کنارگذاشتن نظریهٔ کلاس‌های راسل انگیزه‌های پشت آن هنوز برجاست. به خصوص مسألهٔ تبیین منطقانهٔ اعداد طبیعی. ویتگنشتاین باید یک تبیین بدیل از اعداد طبیعی ارائه دهد.

ارائهٔ ویتگنشتاین از حساب بر حسب منطق بر پایهٔ مفهوم عمل صورت می‌گیرد. برای عمل فهم تفاوت آن با تابع دارای اهمیت است. هر تابع همراه دامنهٔ تعریف خود تعریف می‌گردد. ولی عمل چنین نیست، یک عمل خود هیچ صورتی را مشخص نمی‌کند بلکه تنها تفاوت میان صورت‌های مبنا و نتیجه را نمایش می‌دهد. به عنوان مثال ما دیگر یک تابع همانی عمومی نخواهیم داشت بلکه برای هر نوع تابع‌های همانی جداگانه داریم ولی ما یک عمل همانی یگانه داریم. عمل مفهومی تصمیم گرایانه است و تابع مفهومی توسیع‌گرایانه.

یک عمل در تناظر با یک سلسلهٔ صوری است. یک سلسلهٔ صوری با روابط صوری میان جمله‌هایش مرتب می‌شود. مانند سلسلهٔ صوری $a, O'a, O'O'a, \ldots$. در این سلسله ما توسط عمل O از یک جمله به تالی آن گذر می‌کنیم. آغاز داستان چنانکه گذشت از دوگانهٔ گفتن-نمایش است. ویتگنشتاین می‌گوید که خواص صوری و نسبت‌های صوری میان وضعیت‌ها گفتنی نیست بلکه تنها نمایش دادنی است. بنابراین در زبان هیچ نمادی به ازای شبه مفهوم‌ها مانند گزاره و عدد نیست. آنها نام‌های اشیای جهان نیستند بلکه به ازای یک سلسلهٔ صوری می‌توانند ارائه شوند. نمایش سلسلهٔ صوری با متغیر جمله عمومی آن صورت می‌گیرد. بنابراین اگر یک سلسلهٔ صوری از به کارگیری متوالی عمل O ساخته شود جملهٔ عمومی آن به صورت $[a, x, O'x]$است. به عنوان مثال صورت کلی گزاره $[p, \xi, N(\xi)]$ است که در آن p گزاره‌های اتمی و N عمل نایش است، یعنی $N(p) = \neg p$ و $N(p, q) = \neg p \wedge \neg q$ و به همین ترتیب.

به خصوص ویتگنشتاین حساب را نیز بر این شالوده می‌سازد، به طور شهودی، یک عدد طبیعی برابر تعداد مرتبه‌هایی که یک عمل به صورت متوالی به کارگرفته می‌شود تعریف می‌گردد. به بیان دقیق‌تر، اگر عمل Ω را داشته باشیم آن گاه تعریف‌های زیر را ترتیب می‌دهیم:

$$x = \Omega^{۰} x \mathrm{Def.}$$
$$\Omega' \Omega^{v} x = \Omega^{v+۱} x \mathrm{Def.}$$

بنابراین سری صوری $x, \Omega' x, \Omega'\Omega' x, \Omega'\Omega'\Omega' x, \ldots$ را به صورت $\Omega^{۰\,\prime} x, \Omega^{۰+۱\,\prime} x, \Omega^{۰+۱+۱\,\prime} x, \ldots$ خواهیم نوشت (علامت + معنای جبری ندارد) و بار دیگر می‌توانیم تعریف کنیم:

$$0 + ۱ = ۱ \ \mathrm{Def.}$$
$$0 + ۱ + ۱ = ۲ \ \mathrm{Def.}$$

به این ترتیب یک عدد عبارت است از توان یک عمل. از اینجا همهٔ قضایای نظریهٔ اعداد به قضایایی در نظریهٔ عمل کاهش خواهد یافت. به عنوان مثال برهان ویتگنشتاین برای $۲ * ۲ = ۴$ را در (6.241)

ببینید. این برهان از سوی دیگر نمونه‌ای است از برهان ریاضی که دیدگاه ویتگنشتاین را درباره ماهیت برهان ریاضی نشان می‌دهد.

مفهوم عدد، عدد متغیر است، صورت مشترک همه عددها، و این از منظر دعوای دامنه‌دار میان تصمیم‌گران و توسیع‌گرایان نیز دارای اهمیت است. بنابراین می‌شود گفت ویتگنشتاین در انتخاب میان تصمیم‌گرایی و توسیع‌گرایی، تصمیم‌گرا است.

ویتگنشتاین در دوران گذار بیشتر از هر زمانی به مبانی ریاضیات توجه نمود. او در این دوره نزد وایزمن و رمزی و دیگران هم‌فکری‌های جدی در مسایل مختلف مبانی ریاضیات داشت. عموماً او را در این دوره ساخت‌گرا می‌دانند، گرایشی که در دهه ۳۰ موقعیت بهتر را از آن خود کرد (به رغم فریادهای هیلبرت). در این دوره ساخت‌گرایی پخته‌تر شد و پیکره‌بندی بهتری یافت که ما گرایش‌هایی چون شهودگرایی و انواع متناهی‌گرایی را می‌بینیم. اما می‌توان از اندیشه‌های اولیه سخن گفت که در هنگام طرح‌شدن نظریهٔ مجموعه‌های کانتور در برابر آن ظهور کرد. به خصوص کرونه‌کر را نخستین کسی می‌دانند که در برابر کانتور با استدلالی ساخت‌گرایانه ایستاد. او در نامه‌اش به کانتور می‌گوید: «این یک اشتباه عجیب بعضی از ریاضی‌دانان است که می‌اندیشند چیزهایی از ریاضیات می‌تواند توسط نقادی مبانی حذف شود. ... وقتی چیزی محاسبه شد، نمی‌توان آن را حذف و ناپدید کرد. درواقع آنچه توسط این نقادی ناپدید می‌گردد نام‌ها و نمادها است که در حساب آورده شده‌اند ....» ویتگنشتاین نیز به همین شیوه استدلال می‌کند. مفاهیم کلیدی فلسفهٔ او در این دوره مفاهیم «حساب[1]» و «نثر[2]» است. او می‌گوید ریاضیات حساب است از همان نوع که از چرتکه انتظار داریم. در ریاضیات ارقام و نمادها جایگاه مهره‌های چرتکه را می‌گیرند. نمادها ریاضیات را بازنمایی نمی‌کنند بلکه آن را اجرا می‌کنند[3]. ولی ممکن است (بلکه ناگزیر است) که برای ساختن الگوریتم‌های ریاضی از نام‌ها وکلمات استفاده شود که ما را نسبت به ماهیت حساب‌وار ریاضیات به شک اندازد و ما تصور کنیم که ریاضیات از اشیا سخن می‌گویند. ویتگنشتاین این کلمات را «نثر» می‌نامد. به این ترتیب دیگر مسألهٔ مبانی ریاضیات حل می‌شود، یعنی ناپدید می‌گردد. زیرا آنچه در نقادی مبانی به صحنه می‌آیند و می‌روند نام‌ها و نمادها است که ربطی به گوهر ریاضیات ندارند.

مفهوم «حساب» ویتگنشتاین و «الگوریتم» کرونه‌کر نشان از دیدگاه‌های نزدیک آن دو دربارهٔ ماهیت ریاضیات دارد. اینکه آنچه در ریاضیات اهمیت دارد به‌دست آوردن فرمول است و نه چیز دیگر.

گوهر ساخت‌گرا را، به رغم گرایش‌های متعدد آن، می‌توان تصمیم‌گرایی دانست که در برابر توسیع‌گرایی به میان می‌آید. توسیع‌گرایی بخش جدایی‌ناپذیر ارائه‌های اصل موضوعی از ریاضیات است، این ارائه‌ها برآنند که ریاضیات یک ساختار از پیش موجود را بازنمایی می‌کند، مانند فرگه، کانتور، هیلبرت، راسل و رمزی.

توسیع‌گرایی را می‌توان در تطور مفهوم تابع در قرن ۱۹ دنبال کرد. دیریشله مشاهده کرد که نتایج او در مورد تابع‌ها بر جای خواهد بود اگر به جای تابع به مثابهٔ آنچه که توسط فرمول بیان می‌شود، مفهوم تابع به مثابهٔ نمودار را در نظر بگیریم، یعنی دیفرانسیل‌پذیری و دیگر خواص آن را کنار گذاریم. ریمان و دده کیند

1) calculus 2) prose 3) Signs do mathematics

و وبر در ترویج این دید دربارهٔ تابع مؤثر بودند و سرانجام از میان این کوشش‌ها نظریهٔ مجموعه‌های کانتور و مفهوم تابع به عنوان مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب سر برآورد. چنانکه گفته شد کرونه‌کر در برابر این گرایش ایستاد و اندیشه‌های او در دههٔ ۳۰ به صورت ریاضیات ساخت‌گرا متحول شد، مانند نظریهٔ محاسبه پذیری، تابع‌های بازگشتی و حساب λی چرچ. ویتگنشتاین نیز در برابر مفهوم دیریشله‌ای تابع قرار می‌گیرد. به عقیدهٔ او این مفهوم از تابع وقتی دارای معنا است که ما بتوانیم یک گسترش[1] یا به گفتهٔ ویتگنشتاین یک «جدول[2]» برای آن تابع بسازیم که این در موارد نامتناهی شدنی نیست. بلکه آنچه در ریاضیات با آن سر و کار داریم فرمول و «قاعده[3]» است که با جدول متفاوت است. قاعده و فرمول مفاهیمی تصمیم‌گرایانه است. حتی بیشتر، می‌توان اندیشه‌های اساسی حساب λی چرچ را در مفهوم عمل جستجو کرد (نگاه کنید به Marion).

ضد‌ـ‌توسیع‌گرایی ویتگنشتاین از نوع رادیکال آن است. او می‌گوید ریاضی‌دان خالق است و نه کاشف. ریاضیات چیزی را بازنمایی نمی‌کند بلکه ما ریاضیات را ایجاد می‌کنیم[4].

اندیشه‌های ویتگنشتاین دربارهٔ مبانی ریاضیات بی‌شک زمینهٔ جالبی برای بررسی است. سخنان او در این باره بیش از کلی‌گویی است. او دربارهٔ اعداد طبیعی، اعداد حقیقی، مسالهٔ پیوستار، سور، قانون طرد شق ثالث و از این قبیل سخن رانده است. اما داوری دربارهٔ آنچه او می گوید آسان نیست. مهم آن است که در طرح انبوه مکتب‌ها و گرایش‌ها منطق متفاوت ویتگنشتاین فراموش نشود. ترکتتوس بر آن است که در فلسفه نمی‌تواند نظریه‌پردازی صورت گیرد، فلسفه یک فعالیت است. بنابراین دیگر نمی‌توان از نظریهٔ تصویری ترکتتوس درباره معنا سخن گفت. خود او نیز ترکتتوس را همانند یک نردبان می‌داند که وقتی از آن فراز آمدیم آن را کنار می‌گذاریم. یا وقتی که گفته می‌شود ویتگنشتاین دورهٔ گذار «ریاضیات» را «حساب» می‌داند باید فضای فلسفهٔ متأخر او لحاظ شود. چرا که کاربرد کلمه‌های «ریاضیات» و «حساب» در بازی‌های زبانی مختلف کاملاً یکسان نیست. این‌گونه سخنان ویتگنشتاین بخشی از «بازنمایی» او از «ریاضیات» است و نباید در آن نظریهٔ خاصی را جستجو کرد. با این حال بسیاری از نویسندگان بی‌توجه به این مسأله بسیار تمایل دارند که ویتگنشتاین را در قالب دعواهای متداول مبانی ریاضیات کاهش دهند، به عنوان مثال ترکتتوس را در چهارچوب اتمیسم منطقی راسل تفسیر کنند یا که جایی دیگر او را یک ساخت‌گرا بنامند. این داوری‌ها چندان هم دور از انتظار نیست و شاید از دوگانگی میان ادبیات پژوهشی موجود در مبانی ریاضیات و ادبیات ویتگنشتاینی سرچشمه بگیرد. نوشتهٔ ما نیز از این مستثنا نیست، هرچند که تلاش شده است میان این دو یک نسبت دیالکتیکی برقرار شود.

سپاسگزاری: این نوشته بر مبنای پژوهشی شکل گرفته است که این جانب با راهنمایی **دکتر محمد اردشیر** درباره فلسفه ریاضیات ویتگنشتاین انجام داده‌ام. لازم است که از ایشان به خاطر راهنمایی‌هایشان در این زمینه و نیز به خاطر آموزش‌های ارزشمندشان در کلیّت مبانی ریاضیات تشکر کنم.

1) extention 2) list 3) rule 4) We make mathematics

یادداشت‌ها

(۱) در این باره سخن خواهیم گفت که اصطلاح نظریه اصلاً نا-ویتگنشتاینی است.

(۲) مثال معروف برای بازنمایی راسل: «پادشاه کنونی فرانسه هوشمند است». این جمله از دیدگاه منطق یک گزاره نیست بلکه فشردهٔ چند گزاره است: ۱ـ یک پادشاه فرانسه وجود دارد. ۲ـ تنها یک پادشاه فرانسه وجود دارد. ۳ـ هر کس که پادشاه فرانسه است هوشمند است.

(۳) تبارشناسی ترکتتوس ما را به منابع دیگری چون شوپنهاور و داستایوسکی نیز پیوند می‌دهد. این نیز دارای اهمیت است که بدانیم ویتگنشتاین به سنت فیلسوفان رمانتیک نیز پیوند می‌خورد همچنانکه به فیلسوفان تحلیلی.

(۴) این شبیه‌سازی برای ترکتتوس از سوی بعضی از نویسندگان (مانند Crayling) ارائه شده است و بیش از این نباید از آن انتظار داشت زیرا دقیق نیست و قدرت تبیین کافی ندارد. ما در اینجا به آن نمی‌پردازیم.

(۵) ولی با این حال ویتگنشتاین در ترکتتوس نظریه‌پردازی می‌کند. خود او نیز بر این وضعیت تناقض‌آمیز آگاه است، به همین خاطر در پایان می‌گوید که ترکتتوس یک نردبان است که وقتی از آن گذشتیم آن را کنار می‌گذاریم.

(۶) ویتگنشتاین در این باره به اندازهٔ کافی بحث می‌کند که «این همانی»ها[1] مانند $a = a$ گزاره‌های معنادار نیستند. $a = a$ هیچ وضعیت چیزی را نمی‌نگارد. این همانی شیء با نام a تنها نمایش دادنی است و از خود نگارش a بر می‌آید. این موضوع همچنین مبنای انتقاد دیگری است از ویتگنشتاین بر راسل. او می‌گوید موردهایی پیش می‌آید که ما وسوسه می‌شویم عبارت‌هایی چون $a = a$ را به کار ببریم. مشخصاً هنگامی که بخواهیم درباره شبه‌مفهوم‌ها چون «شیء»، «گزاره» و . . . سخن بگوییم. ولی از شبه‌مفهوم‌ها نمی‌توان توسط گزاره‌ها سخن گفت. بنابراین رشتهٔ «هیچ شیء وجود ندارد» بی معنا است. راسل این را درنیافته است و برای آن شبه‌گزاره نمادگذاری $\neg(\exists x).x = x$ را به کار برده است. اما گذشته از همه چیز (حتی اگر آن یک گزاره باشد) آیا آن گزاره باز هم راست نمی‌بود اگر در واقع اشیایی وجود می‌داشتند که با خود این همان نمی‌بودند؟ راسل این انتقاد را می‌پذیرد.

1) Identity

مراجع

[۱] رسالهٔ منطقی-فلسفی ویتگنشتاین، ترجمه دکتر م. ادیب سلطانی، انتشارات امیرکبیر ۱۳۷۱

[2] Wittgenstein. L. ,Tractatus Logico-Philosophicus, English version by D. F. Pears & B. F. McGuinness, Routledge & Kegan Paul Ltd. 1974.

[3] Wittgenstein L., Remarks on the Foundations of Mathematics, English Version by (reprinfed 1989). G. E. M. Anscombe, Basil Blackwell Oxford 1978

[4] Marion M. , Wittgenstein, Finitism and the Foundations of Mathematics, Clarendon Press Oxford 1998.

[5] Grayling A. C. , Wittgenstein, Oxford University Press 1988.

[6] Frege G., the Foundations of Arithmatic, English Version by J. L. Austin, M. A. Northwestern University Press, Evanston Illinois 198 (reprinter 1996).

[7] Dummett M. , the seas of Language, Oxford University Press 1993.

[8] Körner S., the philosophy of Mathematics, An introductory essay, Dover Publications 1968.

عبدالحسین امینی شارستانی

دانشگاه صنعتی شریف، گروه فلسفه،

پست الکترونیک: amini_a@mehr.sharif.edu

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شمارهٔ ۲۷(پاییز ۱۳۸۰)، صص. ۴۹ تا ۶۹

مروری بر فرایندهای زیرجمعی، قضیهٔ ارگودیک، و چند کاربرد

محمدقاسم وحیدی اصل

چکیده

در این مقاله، به اجمال، بر دو جریان فکری که در بسط نظریهٔ احتمال نوین تأثیرگذار بوده‌اند، مرور می‌کنیم. نخستین آنها، که با کارهای لاپلاس، پواسون، و کوشی آغاز می‌شود، از طریق مکتب روسی احتمال به دستاوردهای ارزنده‌ای منجر می‌شود که قانون اعداد بزرگ کولموگوروف، ۱۹۳۳، در رأس آنها قرار دارد. دومین آنها که شروع آن با استفاده کلاؤسیوس از نظریهٔ احتمال در فیزیک، و به ویژه با تأکید ماکسول بر ناگزیر بودن چنین استفاده‌ای رقم می‌خورد، نهایتاً به اثبات قضیه ارگودیک توسط بیرکهوف، در سال ۱۹۳۲، منجر می‌شود. قانون قوی اعداد بزرگ کولموگوروف را می‌توان به عنوان نتیجه‌ای از قضیهٔ ارگودیک بیرکهوف، که در چارچوب فرآیندهای تصادفی مانا بیان شده باشد، تلقی کرد، مشروط بر اینکه از قانون ۰ـ۱ کولموگوروف نیز استفاده کنیم.

در ادامه، این موضوع را مورد بحث قرار می‌دهیم که چگونه یک مسألهٔ واقعی کاربردی، یعنی پرکولاسیون نخستین گذر، موجب پدید آمدن قضیه ارگودیک فرآیندهای زیرجمعی گردید. این قضیه، که در صورت اصلی توسط کنیگمن در سال ۱۹۶۸ تدوین و اثبات شد، دو نتیجه اساسی قبلی، یعنی قضیه ارگودیک بیرکهوف و قانون قوی اعداد بزرگ کولموگوروف را، به عنوان دو نوع، شامل می‌شود.

در پایان چند کاربرد عمده قضیهٔ ارگودیک فرآیندهای زیر جمعی، از جمله پیشرفتهای اخیر در نظریهٔ پرکولاسیون نخستین گذر و نیز فرایندهای پوشانش، ارائه می‌شوند.

۱ مقدمه

دو جریان فکری سهمی ارزنده در بسط نظریهٔ احتمال داشته‌اند. نخستین آنها که از نیمهٔ اول سدهٔ هجدهم آغاز می‌شود، پایه در اندیشه‌ها و کارهای پیشگامانی چون لاپلاس، پواسون، و کوشی دارد و از اندیشهٔ فلسفی غالب در دورهٔ آغازین نظریهٔ احتمال، مبنی بر جهانشمول بودن مفهوم استقلال تأثیر پذیرفته است. میزان این تأثیرپذیری در حدی است که مؤلفان این دوره (عمدتاً تا پایان سدهٔ نوزدهم) ذکری از این فرض اساسی در کارهای خود به عمل نمی‌آورند. تنها در چند اثر لاپلاس است که ایدهٔ وابستگی از نوع مارکوفی جلوهٔ مختصری پیدا می‌کند (گنه دنکو و شی‌نین، ۱۹۹۲). اوج دستاوردهای این گروه به قانون قوی اعداد بزرگ (حالت مستقل و همتوزیع) منسوب است. برای بیان این قضیه فرض می‌کنیم که X_1، X_2، ...، X_n، ... دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و همتوزیع بر فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ باشد. به عبارت دیگر فرض می‌کنیم که X_n، برای هر n، تابعی اندازه‌پذیر از Ω به R باشد به طوری که برای هر زیرمجموعهٔ متناهی $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ از مجموعهٔ اعداد طبیعی $\mathbb{N}$، و مجموعه‌های بورل B_1، ...، B_k در R،

$$P(X_{i_1} \in B_1, \ldots, X_{i_k} \in B_k) = \Pi_{j=1}^{k} P(X_{i_j} \in B_j). \qquad (1)$$

تساوی (۱)، شرط استقلال متغیرهای تصادفی X_{i_1}، ...، X_{i_k} را بیان می‌کند. به علاوه برای هر n، $n \geq 1$،

$$P_{X_n}(B) = P_{X_1}(B) \qquad (2)$$

که در آن

$$P_{X_n}(B) = P(X_n \in B) = P(\{w : X_n(w) \in B\})$$

توزیع متغیر تصادفی (یا اندازهٔ احتمال القاشده به وسیلهٔ X_n) نامیده می‌شود.

قانون قوی اعداد بزرگ (حالت مستقل و همتوزیع) کولموگوروف بیان می‌کند که وقتی $n \to \infty$، دنبالهٔ متغیرهای تصادفی $\left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}, n = 1, 2, \ldots \right\}$ تقریباً به طور حتم به عدد

$$\mu = E[X_1] = \int_{\Omega} X \, dP$$

میل می‌کند.

دومین جریان فکری با کاربرد احتمال، احتمالاً برای نخستین بار توسط کلاسیوس[1] (۱۸۲۲ـ۱۸۸۸)، و به ویژه ماکسول[2] (۱۸۳۱ـ۱۸۷۹) در فیزیک آغاز می‌شود و با اثبات قضیهٔ ارگودیک به وسیلهٔ بیرکهوف به اوج خود می‌رسد. برای ماکسول روشهای نظریهٔ احتمالاتی ضروری بود، زیرا هم‌چنان که خود در سال ۱۸۷۵ نوشته است، محاسبهٔ سرعت یک مولکول تنها، غیر ممکن است (گنه‌دنکو و شی‌نین، ۱۹۹۲).

1) R. Clausius 2) J.C.Maxwell

دوره‌ای نو در کاربرد نظریهٔ احتمال در فیزیک، مشخصاً در نظریهٔ جنبشی گازها، با بولتسمان (۱۸۴۴ـ۱۹۰۶) اتریشی شروع می‌شود که اصطلاح "ارگودیک" هم به وسیلهٔ او وضع شده است. وی در مقاله‌ای به سال ۱۸۷۱ متذکر شد که دست کم برخی گزاره‌ها در ترمودینامیک باید با مجاز داشتن ملاحظات تصادفی اثبات شوند. در سال ۱۸۷۱، حین مطالعهٔ قانون انرژی جنبشی مولکولها (در ارتباط با تکمیل نظریهٔ ماکسول دربارهٔ قانون توزیع سرعتهای مولکولی) و تابعی معین از این توزیع اعلام کرد که "مسائل نظریهٔ مکانیکی گرما در عین حال مسائل نظریهٔ احتمال‌اند" (گنه‌دنکو و شی‌نین، ۱۹۹۲).

برای بیان قضیهٔ بیرکهوف به دو تعریف مقدماتی نیازمندیم. فرض کنید که $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ یک فضای احتمال و T تبدیلی از Ω به Ω باشد. T را اندازه‌پذیر می‌نامیم هرگاه برای هر A در $\mathcal{F}$، $T^{-1}(A) = \{w : T(w) \in A\} \in \mathcal{F}$. تبدیل اندازه‌پذیر T از Ω به Ω را اندازه‌نگهدار[1] می‌نامیم هرگاه برای هر A در $\mathcal{F}$، $P(T^{-1}A) = P(A)$. پیشامد A در $\mathcal{F}$ را ناوردا می‌نامیم هرگاه $T^{-1}A = A$. خانواده مجموعه‌ای ناوردا یک σـ میدان تشکیل می‌دهند.

در مطالعهٔ سیستمهای دینامیکی، Ω فضای فاز سیستم است و اگر w وضعیت سیستم در $t = 0$ باشد، آنگاه وضعیت آن در زمان t به توسط $T_t(w)$ داده می‌شود که در آن $T_t : \Omega \to \Omega$ حرکت[2] فضای فاز به خود آن است که به وسیلهٔ معادلات حرکت (برای ملاحظهٔ معادلات حرکت نگاه کنید به (۱۹۵۹)) القا شده است. برای یک سیستم محافظه کار، $T_t\left(T_\tau(w)\right) = T_{\tau+t}(w)$. با گسسته‌سازی و اختیار $T = T_1$، وضعیت سیستم در زمان n با $T^n(w)$ داده می‌شود. فرض کنید که $X(w)$ تابعی قابل مشاهده از وضعیت w باشد. از نظر فیزیکی، در انجام اندازه‌گیریها، زمان مشاهده در مقایسه با مقیاسی طبیعی از زمان برهم کنشهای مولکولی، کاملاً طولانی است. بنابراین ما نه $X(w)$، بلکه میانگین $X(w)$ها را روی وضعیتهای گوناگونی که w با تکامل سیستم از آنها عبور می‌کند، یعنی

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau X\left(T_t(w)\right) dt$$

را برای τهای بزرگ، یا در زمان گسسته،

$$\frac{1}{n} \sum_1^n X\left(T^{k-1}(w)\right)$$

را اندازه‌گیری می‌کنیم. گیبس[3] (۱۸۳۹ـ۱۹۰۳) این استدلال هوشمندانه را به عمل آورد که: در طی زمان، نقطهٔ $w_t = T_t(w)$ به تمامی فضای فاز سرکشی می‌کند و اینکه چگالی نقاط w_t در هر همسایگی به یک توزیع حدّی میل می‌کند. به‌طور شهودی، این توزیع حدّی نقاط، می‌بایست تحت T ناوردا باشد. اگر چنین توزیع حدّی، مثلاً اندازه‌ای مانند P، موجود باشد آنگاه باید بتوانیم به جای میانگین زمانی حدّی

$$\frac{1}{n} \sum_1^n X\left(T^{k-1}(w)\right)$$

1) measure-preserving 2) motion 3) Gibbs

میانگین فازی

$$\int_\Omega X(w)P(dw)$$

را قرار دهیم. نتیجهٔ بیرکهوف آن بود که این استدلال، در صورتی که به‌طور مناسب فرمولبندی شود، درست است (برایمن، ۱۹۶۸).

بیان احتمالاتی قضیهٔ بیرکهوف به این شرح است:

فرض کنید که T بر $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ اندازه‌نگهدار باشد. دراین‌صورت برای هر متغیر تصادفی X به‌طوری که $E||X|| < \infty$،

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{k-1} X\left(T^k(w)\right) = E[X|\mathcal{I}] \qquad a.s.$$

در اینجا $\mathcal{I}$، σـمیدان مجموعه‌های ناوردا و $E[X|\text{III}]$، امید ریاضی شرطی X به شرط $\mathcal{I}$، یعنی (بنابر قضیهٔ رادون ـ نیکودیم) تابع اندازه‌پذیر (نسبت به $\mathcal{I}$) یکتایی $(a.e.)$ بر Ω است به‌طوری که برای هر A در $\mathcal{I}$

$$\int_A X\, dP = \int_A E[X|\mathcal{I}]\, dP.$$

نتیجه‌ای از این قضیه آن است که اگر T ارگودیک باشد، یعنی اگر برای هر A در $\mathcal{I}$، $P(A) = 0$ یا $P(A) = 1$، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X\left(T^k(w)\right) = E[X] \qquad a.s.$$

یعنی حد مقداری ثابت دارد.

می‌توان با تعریف یک فرایند مانا بر اساس تبدیل اندازه‌نگهدار T به قضیهٔ ارگودیک بیرکهوف، بیشتر صورت احتمالاتی داد. فرض کنید که برای هر w در Ω،

$$X_1(\Omega) = X(w), X_2(w) = X\Big(T(w)\Big), \ldots, X_n(w) = X\Big(T^{n-1}(w)\Big), \ldots.$$

در این صورت دنبالهٔ متغیرهای تصادفی $\{X_n(w), n = 1, 2, \ldots\}$ یک فرایند تصادفی ماناست، یعنی برای هر k، فرایند X_{k+1}، X_{k+2}، ... همان توزیع را دارد که فرایند X_1، X_2، .... به عبارت دیگر برای کلیهٔ مقادیر حقیقی x_1، ...، x_n، و هر عدد صحیح مثبت k،

$$P(X_1 \le x_1, \ldots, X_n \le x_n) = P(X_{k+1} \le x_1, \ldots, X_{k+n} \le x_n).$$

برای بیان قضیهٔ ارگودیک بیرکهوف به زبان فرایندهای مانا، ابتدا تعریفی از پیشامدهای ناوردا را در این چارچوب ارائه می‌کنیم: پیشامد $A \in \mathcal{F}$ را ناوردا می‌نامیم هرگاه $\exists B \in \mathcal{B}_\infty$ به‌طوری که برای هر n، $n \ge 1$،

$$A = \{(X_n, X_{n+1}, \ldots) \in B\}.$$

در اینجا $\mathcal{B}_\infty$ کوچکترین σـ میدان شامل مستطیلهای اندازه‌پذیر از زیرمجموعه‌های R^∞، یعنی مجموعهٔ کلیهٔ زیردنباله‌های اعداد حقیقی است. هر مستطیل اندازه‌پذیر چنین تعریف می‌شود:

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) : x_1 \in B_1, \dots, x_n \in B_n\}.$$

در اینجا B_1، ...، B_n زیرمجموعه‌ای بورل Rاند.

ثابت می‌شود که دراین حالت نیز مجموعهٔ کلیهٔ پیشامدهای ناوردا یک σـ میدان تشکیل می‌دهد. در این صورت قضیهٔ ارگودیک بیرکهوف دارای برگردان زیر در چارچوب فرایندهای ماناست:

اگر X_1، X_2، ... یک فرایند مانا و $\mathcal{I}$، σـ میدان پیشامدهای ناوردا باشد، آنگاه، به شرطی که $E[|X_1|] < \infty$،

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \to E[X_1|\mathcal{I}], \qquad a.s.$$

این قضیه شباهت بیشتری با قانون قوی اعداد بزرگ (حالت مستقل و همتوزیع) دارد. اما باید توجه کرد که حد حاصل در قانون قوی اعداد بزرگ، عددی ثابت است در حالی که در قضیهٔ ارگودیک، حدّ حاصل یعنی $E[X|\mathcal{I}]$، متغیری تصادفی است. البته سادگی نتیجه در قانون قوی اعدد بزرگ، به بهای فرض استقلال به دست آمده است، در حالی که در قضیهٔ ارگودیک عملاً تنها همتوزیعی (به تبع فرض مانایی) حاکمیت دارد.

حال اگر فرایند X_1، X_2، ... ارگودیک باشد، یعنی هر پیشامد ناوردا دارای احتمال ۰ یا ۱ باشد، آنگاه حدّ حاصل مقداری ثابت دارد. به عبارت دیگر، به نظر می‌رسد قانون قوی اعداد بزرگ (حالت مستقل و همتوزیع)، نتیجه‌ای از قضیهٔ ارگودیک بیرکهوف باشد. در واقع چنین هم هست، اما ثابت بودن حد، وقتی X_1، X_2، ... دنباله‌ای مستقل و همتوزیع است، مستلزم استفاده از قضیه‌ای موسوم به قانون $0-1$ کولموگوروف است. به عبارت دیگر برای ورود به قانون قوی اعداد بزرگ کولموگوروف از راه قضیهٔ ارگودیک بیرکهوف، و اعلام آن به عنوان نتیجه‌ای از این، باز هم به مجوزی از طرف کولموگوروف نیازمندیم!

قضیهٔ ارگودیک بیرکهوف در سال ۱۹۳۲ و قانون قوی اعداد بزرگ کولموگوروف (حالت مستقل و همتوزیع) در سال ۱۹۳۳ منتشر شده‌اند. بنابراین دو جریان فکری متفاوت، اولی با تأکید بر نظریه و دیگری با تأکید بر کاربرد، حدوداً در یک زمان به یکی از درخشانترین نتایج در نظریهٔ احتمال، که مبنای علوم تجربی است، رسیده‌اند. در چارچوب کلاسیک، در زمینهٔ قانون قوی اعداد بزرگ، تنها یک گام فراتر از کولموگوروف برداشته شده است و آن ارائه برهانی مقدماتی از سوی اعتمادی (۱۹۸۱)، ریاضیدان ایرانی، و با فرضی ضعیفتر است؛ یعنی قرار دادن فرض استقلال دو به دو به جای فرض استقلال کامل. گر چه به گفتهٔ دادلی (۱۹۸۹) به ندرت با دنباله‌هایی از متغیرهایی تصادفی روبه‌رو می‌شویم که دو به دو مستقل باشند ولی کاملاً مستقل نباشد، اما نکتهٔ جالب در اینجاست که قضیهٔ اعتمادی نه از قضیهٔ ارگودیک بیرکهوف نتیجه می‌شود و نه از قضیهٔ ارگودیک فرایندهای زیرجمعی که قانون قوی اعداد بزرگ و قضیهٔ ارگودیک هر دو نتیجه‌هایی از آن‌اند (هانس و هالس، ۱۹۹۸). بنابراین نتیجهٔ اعتمادی لوای استقلال جریان فکری اول

را هم چنان برافراشته نگه داشته است.

نکتهٔ مهمتر اینکه، بر خلاف انتظار، قضیهٔ ارگودیک فرایندهای زیرجمعی، که در بخش آتی به آن می‌پردازیم، محصول کار ریاضیدانی که در اندیشهٔ به هم پیوستن دو جریان فکری مورد بحث در بالا و تعمیم قضیهٔ ارگودیک بیرکهوف باشد، نیست. بلکه فرایندهای زیرجمعی و قضیهٔ ارگودیک آنها، نتیجهٔ یک کار پژوهشی کاربردی اصیل، یعنی نظریهٔ پرکولاسیون است. در بخش ۲ توضیح مختصری از سابقه و شرح مسأله ارائه می‌شود و پس از تعریف فرایندهای تصادفی زیرجمعی به بیان قضیهٔ ارگودیک این فرایندها و سیر تحولاتی که قضیهٔ ارگودیک فرایندهای زیرجمعی با آنها رو به رو بوده، می‌پردازیم و در بخش ۳ چند کاربرد اصلی از این قضیهٔ مطرح می‌شوند.

۲ از نظریهٔ پرکولاسیون و فرایندهای زیرجمعی به قضیهٔ ارگودیک

در خصوص آغاز نظریهٔ پرکولاسیون دو روایت مختلف وجود دارد. برخی مانند اشتوفر (۱۹۸۵) مؤسسان این نظریه را فلوری و استاک‌ـ مایر می‌دانند که در جنگ جهانی دوم از آن برای توصیف این پدیده که چگونه مولکولهای شاخه‌ای کوچک با اتصال‌های شیمیایی بیشتر و بیشتر، کلان مولکولهای بزرگتر و بزرگتری تشکیل می‌دهند استفاده کردند. این فرایند پلیمری شدن می‌تواند منجر به تشکیل ژلاتین، یعنی شبکه‌ای از اتصال‌های شیمیایی شود که کل سیستم را در هم می‌تند. به زعم اشتوفر، فلوری و استاک مایر نظریه‌ای را پدید آوردند که می‌توان آن را نظریهٔ پرکولاسیون روی شبکهٔ بته[1] (یا درخت کیلی[2]) نامید. اما اغلب نویسندگان (کستن، ۱۹۸۲، گریمت، ۱۹۹۷، افروس، ۱۹۸۶) آغازگران این نظریه را برودبنت و همرزلی و مقالهٔ سال ۱۹۵۷ آنها می‌دانند. برودبنت در نیمه‌های دههٔ ۱۹۵۰ در انجمن تحقیقاتی بهره‌برداری زغال سنگ بریتانیا در طراحی ماسکهای گاز برای استفاده در معادن زغال سنگ به کار مشغول بود. وی به مسأله جالبی برخورد و آن را برای همرزلی ریاضیدان مطرح کرد.

جزء اصلی ماسک گاز با دانه‌های کربن پر می‌شود که گاز باید در آن جریان پیدا کند. کربن منفذهایی دارد که به نحو پیچیده‌ای با هم مرتبط‌اند و نوعی مازپیچ در پیچ تشکیل می‌دهند. گاز با جذب شدن در سطح داخلی منفذها می‌تواند به آنها وارد شود. معلوم شد که اگر منفذها گشاد، و خوب با هم مرتبط باشند، گاز در عمق صافی کربن نفوذ می‌کند. در غیر این صورت گاز نمی‌تواند از سطح خارجی کربن فراتر رود. جریان گاز در داخل این ماز فرایند جدیدی به شمار می‌آید که با فرایند انتشار تفاوت دارد.

برودبنت و همرزلی این پدیده را پرکولاسیون نامیدند، و به نظریه‌ای که زمینه‌ساز این نوع فرایند است، نظریهٔ پرکولاسیون گویند. خود همرزلی در مقاله‌ای با عنوان سر آغازهای نظریهٔ پرکولاسیون (۱۹۸۳)، تاریخچهٔ آغاز این نظریه و وجه تسمیهٔ آن را بیان می‌کند.

پس از آنکه برودبنت و همرزلی مقالهٔ پیشگام خود را در سال ۱۹۷۵ منتشرکردند، معلوم شد که نظریهٔ پرکولاسیون را می‌توان برای تعبیر و تفسیر انواع گوناگون پدیده‌های فیزیکی و شیمیایی به کار برد. خواص

1) Bethe 2) Caley

الکتریکی سیستمهای بی‌نظم، نظیر نیم‌رساناهای بلورین دارای ناخالصی، و موادی که از ترکیب یک عایق و فلز تشکیل می‌شود، احتمالاً بهترین کاربردهای شناخته شدهٔ نظریهٔ پرکولاسیون به شمار می‌آیند.

نظریهٔ پرکولاسیون، پدیده‌های بحرانی را به بهترین وجه توصیف می‌کند. صفت ممیزهٔ آنها وجود یک نقطهٔ بحرانی است که در آن برخی از خاصیتهای سیستم دستخوش تغییرات بحرانی می‌شوند. برای توصیف ریاضی این نظریه، فرض کنید که مشبکهٔ مربعی به عنوان اولین تقریب برای ساختار منافذ در هم پیچیده یا ماز صافی کربن ماسک گاز به کار رود. به عبارت دیگر گراف (نامتناهی) با مجموعهٔ رأسهای $V = \mathcal{Z}^2$ از نقاط با مختصات صحیح در صفحه را در نظر بگیرید و فرض کنید که هر دو رأس (z_1, z_2) و (z'_1, z'_2) به هم متصل باشند اگر و تنها اگر

$$|z_1 - z'_1| + |z_2 - z'_2| = 1.$$

گراف حاصل، یعنی مشبکهٔ مربعی، را با $\mathcal{L}^2 = (V, E)$ نشان دهید. حال برای وارد کردن احتمال، فرض کنید که p و q در $0 \leq p \leq 1$ و $p + q = 1$ صدق کنند. هر ضلع $e \in E$ را با احتمال p "باز" و در غیر این صورت "بسته" اعلام می‌کنیم. باز یا بسته بودن هر ضلع، مستقل از وضعیت دیگر اضلاع است. به‌طور صوری، فضای احتمال زیر را در نظر می‌گیریم. فضای نمونه‌ای Ω را $\Omega = \prod_{e \in E}\{0, 1\}$ اختیار می‌کنیم که اعضای آن با $w = \Big(w(e) : e \in E\Big)$ نمایش داده شده و پیکربندیها[1] نامیده می‌شوند. مقدار $w(e) = 0$ متناظر با بسته بودن ضلع e و $w(e) = 1$ متناظر با باز بودن ضلع e است. $\mathcal{F}$ را کوچکترین $\sigma-$میدان متشکل از زیرمجموعه‌های Ω شامل استوانه‌های متناهی بعدی اختیار می‌کنیم. سرانجام اندازهٔ حاصلضرب با چگالی p را بر $(\Omega, \mathcal{F})$ در نظر می‌گیریم. این اندازه عبارت است از

$$P_p = \prod_{e \in F} \mu_e$$

که در آن μ_e اندازهٔ برنولی بر $\{0, 1\}$ است، به‌طوری که $\mu_e\Big(w(e) = 0\Big) = q$ و $\mu_e\Big(w(e) = 0\Big) = p$.

یک کمیت مورد توجه در نظریهٔ پرکولاسیون، احتمال بحرانی $\theta(p)$ است که عبارت است از احتمال اینکه رأسی مفروض به خوشه‌ای نامتناهی، یعنی مؤلفه‌ای همبند متشکل از ضلعهای باز، تعلق داشته باشد. با توجه به ناوردایی نسبت به انتقال مشبکهٔ $\mathcal{L}^2$ و اندازهٔ احتمال P_p، می‌توان این رأس را، بی‌آنکه از کلیت چیزی کاسته شود، مبدأ مختصات اختیار کرد. بنابراین

$$\theta_p = P_p(\text{مبدأ مختصات به خوشه‌ای نامتناهی تعلق دارد}).$$

حال احتمال بحرانی

$$p_c = \sup\{p : \theta(p) = 0\}$$

1) Configurations

را تعریف کنید. اگر $p < p_c$، هیچ خوشهٔ نامتناهی موجود نیست و هر ضلع باز حداکثر به مؤلفهٔ متناهی همبندی متعلق است. اگر $p > p_c$، مبدأ به یک (و تنها یک) خوشهٔ نامتناهی تعلق دارد. یکی از درخشانترین نتایج دههٔ ۱۹۸۰ پاسخ دقیق و نهایی به حدس بسیار مورد مباحثهٔ $p_c = \frac{۱}{۲}$ برای مشبکهٔ $\mathcal{L}^۲$ به وسیلهٔ کستن (۱۹۸۰) بود. برای آشنایی تفصیلی با نظریهٔ پرکولاسیون، مشاهدهٔ روشها و فن‌ها و گنجینه‌هایی از مسائل باز می‌توان به چندین تک نگاری، و به ویژه به کستن (۱۹۸۲) و گریمت (۱۹۹۷)، و البته هزاران مقالهٔ پژوهشی، مراجعه کرد. بیانی ساده و با گرایش فیزیکی از نظریهٔ پرکولاسیون، به زبان فارسی، در افروس (۱۹۸۶) آمده است.

مدل مورد بحث از نظریهٔ پرکولاسیون، پرکولاسیون برنولی نامیده می‌شود. در سال ۱۹۶۵ همرزلی و ولش در مقاله‌ای بنیادین، مدل جدیدی از پرکولاسیون را با نام پرکولاسیون نخستین گذر بنیان نهادند. در مدل پرکولاسیون برنولی، که در قیاس با پرکولاسیون نخستین گذر، پرکولاسیون معمولی نیز نامیده می‌شود، فرض بر آن است که ”مایعی“ که از مبدأ وارد مشبکهٔ $\mathcal{L}^۲$ (یا هر گراف زمینه‌ای دیگر) می‌شود، با احتمال p اجازه عبور از ضلع e را دارد (ضلع باز است) و با احتمال q به مسیری مسدود برخورد می‌کند. در پرکولاسیون نخستین گذر فرض می‌شود که به هر ضلع e در E ”مختص زمانی“ [1] تصادفی $T(e)$ نسبت داده می‌شود که آن را زمان لازم برای عبور مایع از (یک سر به سر دیگر) ضلع e تلقی می‌کنیم. فرض می‌کنیم که خانوادهٔ $\Big(T(e) : e \in E\Big)$ از مختصهای زمانی، متغیرهای تصادفی نامنفی مستقل اما همتوزیع با توزیع مشترک F باشند. برای هر مسیر π، یعنی دنباله‌ای متناوب از رأس‌ها و ضلع‌ها که از رأسی شروع و به رأسی ختم می‌شوند، زمان گذر $T(\pi)$ از π را با

$$T(\pi) = \sum_{e \in \pi} T(e)$$

تعریف می‌کنیم که در آن مجموع‌یابی روی کلیهٔ مختصهای زمانی اضلاع π انجام می‌شود. زمان نخستین گذر $a(x, y)$ بین رأس‌های x و y با

$$a(x, y) = \inf\{T(\pi) : \text{است } y \text{ به } x \text{ مسیری از } \pi\}$$

داده می‌شود. بنابراین $a(x, y)$ مدت لازم برای ”خیس شدن“ y است در صورتی که در لحظهٔ شروع، مایع در x وارد سیستم شده باشد.

همرزلی و ولش از جمله فرایند زمان نخستین گذر

$$a_{mn} = a(e_m, e_n) \ , \ -\infty < m \le n < \infty$$

را که در آن $e_m = (m, ۰)$ و $e_n = (n, ۰)$ در نظر گرفتند. فرایند $\{a_{mn}\}$ از جمله واجد خاصیت زیرجمعی است. زیرا اگر r عددی صحیح باشد به‌طوری که $m \le r \le n$، آنگاه چون $a_{mr} + a_{rn}$

1) time coordinate

کوچکترین زمان لازم برای رفتن از $e_m = (m, \circ)$ به $e_n = (n, \circ)$ به شرط این است که همهٔ مسیرها از نقطهٔ $e_r = (r, \circ)$ عبور کنند، بنابراین طبق تعریف،

$$a_{mn} \leq a_{mr} + a_{rn} \quad , \quad -\infty < m \leq r \leq n < \infty. \qquad (۳)$$

از دیگر خاصیتهای عمدهٔ خانوادهٔ $(a_{mn} : m \leq n)$ از متغیرهای تصادفی، خاصیت مانایی است، به عبارت دیگر دو خانوادهٔ $(a_{mn} : m \leq n)$ و $(a_{m+۱,n+۱} : m \leq n)$ دارای توزیع‌های متناهی بعدی یکسان هستند. بدین ترتیب بود که همرزلی و ولش تولد فرایندهای زیرجمعی را اعلام کردند.

در بدو امر، با استخراج امید ریاضی از طرفین نابرابری (۳) و استفاده از مانایی فرایند، درمی‌یابیم که با $g_n = E(a_{\circ n})$،

$$g_{m+n} \leq g_n + g_m \quad , \quad m, n \in \mathbb{N}. \qquad (۴)$$

در نتیجه همرزلی و ولش قالبی کلیتر برای نظریهٔ تابع‌های زیرجمعی (هیله و فیلیپس، ۱۹۵۷) فراهم آوردند. به موجب این نظریه، حدّ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g_n}{n} = \gamma$$

موجود است به‌طوری که

$$\gamma = \inf_{n\geq ۱} \frac{g_n}{n}.$$

آنها γ را "ثابت زمانی" فرایند نامیدند.

همرزلی و ولش با در نظرگرفتن قیدهایی، در قالب تعریفهایی که اکنون منسوخ شده است، به نتایجی در مورد فرایند پرکولاسیون نخستین گذر $(a_{mn} : m \leq n)$ دست یافتند. از جمله ثابت کردند که (همرزلی و ولش، ۱۹۶۵، ص. ۶۸) اگر فرایند $(a_{mn} : m \leq n)$ در شرط

$$P\Big(\lim sup_{n\to\infty} \frac{a_{\circ n}}{n} \leq \gamma\Big) = ۱$$

صدق کند که در آن γ ثابت زمانی است، آنگاه

$$P\Big(\lim sup_{n\to\infty} \frac{a_{\circ n}}{n} = \gamma\Big) = ۱$$

و $a_{\circ n}/n$ در احتمال به γ میل می‌کند. اما اثبات نتیجهٔ مطلوب، یعنی همگرایی با احتمال ۱ فرایند $\frac{a_{\circ n}}{n}$ باید در انتظار تدوین و اثبات قضیهٔ ارگودیک فرایندهای زیرجمعی می‌ماند.

کینگمن (۱۹۶۸) سرانجام مهمترین گام را در بیان و اثبات قضیهٔ ارگودیک فرایندهای تصادفی زیرجمعی برداشت. تعریف او از فرایندهای تصادفی زیرجمعی، که اندکی مقیدتر از تعریف اولیهٔ این فرایندها در مقالهٔ همرزلی و ولش است، به این شرح است:

فرض کنید که $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ یک فضای احتمال و $\mathbb{N}$ مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی باشد. گردایه‌ای از متغیرهای تصادفی $\{X_{mn} : m, n \in \mathbb{N} \ , \ m < n\}$ که بر $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ تعریف شده‌اند، یک فرایند زیرجمعی نامیده می‌شود هرگاه

(i) اگر $m < n < p$، آنگاه برای هر w در Ω، $X_{mp} \le X_{mn} + X_{np}$؛

(ii) توزیع فرایند $\{X_{m+1,n+1}\}$ با توزیع فرایند $\{X_{mn}\}$ یکسان است؛

(iii) برای هر n در $\mathbb{N}$، $E[X_{\circ n}] < \infty$ و برای عددی حقیقی مانند A، $\inf_n E[\frac{X_{\circ m}}{n}] \ge A$.

قویترین نتیجه‌ای که توسط کینگمن در مورد فرایندهای زیرجمعی ثابت شد، چنین است:

قضیهٔ ارگودیک فرایندهای زیرجمعی (کینگمن، ۱۹۷۸). $\lim_{n\to\infty} \frac{X_{\circ} n}{n}$ تقریباً به‌طور حتم $(a.s.)$ و در L^1 موجود است و اگر ξ معرف این حد باشد، آنگاه

$$E[\xi] = \gamma = \inf_{n \ge 1} \frac{E[X_{\circ n}]}{n}.$$

اگر $\{X_{mn}\}$ مستقل باشد، به این معنی که وقتی $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$، متغیرهای تصادفی $\{X_{n_i, n_{i+1}}\}_{i=1}^{k-1}$ مستقل باشند، آنگاه

$$\xi = \gamma \qquad a.s.$$

خطوط اصلی برهان کینگمن برای قضیهٔ ارگودیک فرایندهای زیرجمعی، همان خطی را تعقیب می‌کند که قضیهٔ ارگودیک فرایندهای مانای بیرکهوف آن را پیموده است. به عبارت دیگر همان‌گونه که برای اثبات قضیهٔ بیرکهوف، لم ارگودیک ماکسیمال جنبهٔ اساسی دارد، کینگمن نیز ابتدا برقراری لم ارگودیک ماکسیمال را برای فرایندهای تصادفی زیرجمعی ثابت می‌کند. البته وی برهان ساده و زیبای گارسیا (۱۹۶۵) برای لم ارگودیک ماکسیمال را در مورد فرایندهای زیرجمعی تعمیم می‌دهد.

لیگت (۱۹۸۵) با تضعیف شرط مانایی فرایندهای زیرجمعی (شرط ii در بالا) حوزهٔ کاربرد قضیهٔ ارگودیک فرایندهای زیرجمعی را توسیع داده است. نتیجهٔ لیگت چنین است:

قضیهٔ ارگودیک فرایندهای زیرجمعی (لیگت، ۱۹۸۵). فرض کنید که $\{X_{mn}, \circ \le m \le n\}$ در شرایط زیر صدق می‌کند:

(i) $X_{\circ m} + X_{mn} \ge X_{\circ n}$؛

(ii) برای هر k، $\{X_{nk,(n+1)k}, n \ge 1\}$ یک فرایند ماناست؛

(iii) توزیع $\{X_{m,m+k}, k \ge 1\}$ به m بستگی ندارد؛

(iv) $E(X_{\circ 1}^{+}] < \infty$ و برای هر n، $E[X_{\circ n}] \ge \gamma_{\circ} n$ که در آن $\gamma_{\circ} > -\infty$.

در این صورت

(الف) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} E[X_{\circ n}] = \inf_n \frac{E[X_{\circ n}]}{n} \equiv \gamma$

(ب) حدّ $X = \lim_{n\to\infty} \dfrac{X_{\circ n}}{n}$ تقریباً به‌طور حتم و در L^{1} موجود است، و بنابراین $E[X] = \gamma$.
(ج) اگر دنباله‌های مانا در (ii) ارگودیک باشند، آنگاه

$$X = \gamma \qquad a.s.$$

چندین برهان دیگر برای اثبات قضیهٔ ارگودیک داده شده‌اند که از آن جمله می‌توان به برهان شورگر (۱۹۸۶) اشاره کرد. له‌ونتال (۱۹۸۸) قضیه‌ای را ثابت می‌کند که قضیهٔ ارگودیک بیرکهوف و قضیهٔ ارگودیک، صورت لیگت، از نتایج آن‌اند.

هم‌چنین، شاید ذکر اینکه کینگمن (۱۹۷۳) صورتی از قضیهٔ ارگودیک را برای فرایندهای تصادفی زیرجمعی پارامتر پیوسته بیان و ثابت کرده است، خالی از فایده نباشد. در واقع کاربردی از این صورت قضیهٔ ارگودیک در بخش ۳ ارائه خواهد شد.

یک فرایند زیرجمعی پارامتر پیوسته با فضای پارامتر $T \subseteq R$ خانواده‌ای از متغیرهای تصادفی مانند $\{X_{st} : s,t \in T, s < t\}$ است به‌طوری که

(i) $X_{su} \le X_{st} + X_{tu}$ هرگاه $s,t,u \in T$ و $s < t < u$؛

(ii) برای کلیهٔ مقادیر τ با $\tau \in T$، توزیع $\{X_{s+\tau,t+\tau}\}$ با توزیع $\{X_{st}\}$ یکسان است؛

(iii) برای هر t، $t \in T$، $t > \circ$، $g(t) = E[X_{\circ t}]$ موجود است، و ثابتی مانند A موجود است به‌طوری که برای کلیهٔ مقادیر t با $t \in T$، $t > \circ$،

$$g(t) \ge At.$$

نتیجهٔ کینگمن به شرح زیر است:

قضیهٔ ارگودیک فرایندهای زیرجمعی پارامتر پیوسته (کینگمن، ۱۹۷۳).
اگر $\{X_{st}, s < t, s,t \in T\}$ یک فرایند زیرجمعی پارامتر پیوسته باشد، آنگاه

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[X_{\circ t}]}{t} = \gamma$$

موجود است که در آن

$$\gamma = \inf_{t\in T} \frac{E[X_{\circ t}]}{t}.$$

به علاوه اگر $\{X_{st}\}$ تفکیک‌پذیر باشد به‌طوری که برای بازهٔ ناتبهگنی مانند I،

$$E\left[\sup_{s<t_s,t\in I} |X_{st}|\right] < \infty$$

آنگاه

$$\lim_{t\to\infty} \frac{X_{\circ t}}{t} \equiv \xi$$

تقریباً به‌طور حتم و در L^1 موجود است و $E[\xi] = \gamma$.

لازم به ذکر است که فرایند یک پارامتری، $\{X_t, t \in T\}$ تفکیک پذیر نامیده می‌شود هرگاه زیرمجموعهٔ چگال شمارایی مانند $D \subset T$ و پیشامدی پوچ مانند $\Lambda \subseteq \Omega \Big(P(\Lambda) = 0\Big)$ موجود باشد به‌طوری که برای هر مجموعهٔ بستهٔ C و هر بازهٔ باز l

$$\{w : X_t(w) \in C, t \in l \cap D\} - \{w : X_t(w) \in C, t \in l \cap T\} \subset \Lambda.$$

تعریف مشابهی را برای فرایندهای دوپارامتری می‌توان بیان کرد.

سرانجام، اضافه می‌کنیم که قضیهٔ ارگودیک به وسیلهٔ اسمایت (۱۹۷۶) برای فرایندهای زیرجمعی چندپارامتری، یعنی فرایندهایی که مجموعهٔ اندیسگذار آنها زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{N}^r \times \mathbb{N}^r (r > 1)$اند، ثابت شده است.

۳ چند کاربرد

بدیهی است که قضیه‌ای که دو نتیجهٔ بسیار مهم و مرکزی، یعنی قانون قوی اعداد بزرگ و قضیهٔ ارگودیک فرایندهای مانا، را به عنوان دو حالت خاص در برمی‌گیرد، و به ویژه با توجه به شرایط نسبتاً آسانی که منجر به تعریف فرایندهای تصادفی زیرجمعی می‌شوند، می‌تواند در انواع زمینه‌های نظری و کاربردی مورد استفاده داشته باشد. بنابراین تنها به ذکر چند کاربرد شاخص قضیهٔ ارگودیک فرایندهای زیرجمعی، که پس از این با عنوان قضیهٔ ارگودیک از آن یاد می‌کنیم، می‌پردازیم.

۱.۳ پرکولاسیون نخستین گذر

طبیعی است که نظر به زایش فرایندهای تصادفی زیرجمعی از بطن فرایندهای پرکولاسیون نخستین گذر و تنوع مدلهای پرکولاسیون، اولین و مهترین کاربردهای قضیهٔ ارگودیک در همین زمینه باشد. اولین کاربرد قضیهٔ ارگودیک در مدل پرکولاسیون نخستین گذر برای اثبات وجود حدّ $\frac{a_{0n}}{n}$ با احتمال ۱ و در L^1 به وسیلهٔ کینگمن (۱۹۶۸) صورت گرفت و در پی آن مجموعه‌ای از قضیه‌ها در ارتباط با فرایندهای پرکولاسیون نخستین گذر به اثبات رسیدند که اهم آنها در تک نگاری برای مشبکه $\mathcal{L}^2$ اسمایت و ویرمن (۱۹۸۵) درج شده‌اند. وحیدی اصل (۱۹۷۹) نتایج مشابهی را برای مشبکه مکعبی، $\mathcal{L}^3$، ثابت کرد. نهایتاً همین نتایج توسط کستن (۱۹۸۵) به مشبکهٔ $d-$بعدی، $\mathcal{L}^d$، $d \geq 1$ بسط داده شدند. البته لازم به ذکر است که حصول نتایج پراهمیت در پرکولاسیون نخستین گذر، کاربردی سرراست از قضیهٔ ارگودیک نیست. به عبارت دیگر، اگر چه در اغلب موارد وجود حد فرایند زیرجمعی موردنظر مستقیماً از قضیهٔ ارگودیک نتیجه می‌شود ولی اثبات ثابت بودن حد یا ارگودیک بودن دنباله، که در اغلب موارد انتظار آن می‌رود، مستلزم فنون اغلب موردی و پیچیده است. به عنوان مثال، از قضیهٔ ارگودیک، تنها این نتیجه را می‌توان گرفت

که فرایند $\{\frac{a_{\circ n}}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ تقریباً به‌طور حتم و در L^{1} به متغیر تصادفی X همگراست، اما اثبات تبهگن بودن X، یعنی اثبات اینکه

$$P(X = \gamma) = 1$$

از قضیهٔ ارگودیک حاصل نمی‌شود.

نظریهٔ پرکولاسیون معمولی، به دلیل کاربرهای متنوع، در جهات مختلف توسیع یافته است. از جملهٔ آنها می‌توان از پرکولاسیون جهتدار[1] (دورت، ۱۹۸۴ و ۱۹۸۸)، پرکولاسیون پیوستار (هال ۱۹۸۵ و میستر و روی، ۱۹۹۶) به عنوان نمونه نام برد. اما پرکولاسیون نخستین گذر عمدتاً در دو جهت توسیع و تعمیم یافته است و در هر دو، قضیهٔ ارگودیک نقشی اساسی دارد. اولین مورد از این توسیعها، جایگزینی گرافهای منظم، عمدتاً مشبکهٔ $\mathcal{L}^d$، $d \geq 1$ ، با گرافهای تصادفی بوده است. وحیدی اصل و ویرمن (۱۹۹۰) پرکولاسیون نخستین گذر را روی گرافهای تصادفی (نامتناهی) موسوم به وورونوی و دلانی مطالعه کرده‌اند. برای تشریح این مدل، فرض کنید که $\mathcal{P}$ مجموعهٔ نقاطی باشد که تحت یک فرایند پواسون همگن در صفحه تحقق یافته است. در چنین فرایندی، تعداد نقاط در هر مجموعهٔ بورل B در R^2 یک متغیر تصادفی پواسون با میانگین $\lambda|B|$ است که در آن $|B|$ اندازهٔ لبگ مجموعهٔ B را نشان می‌دهد. بی‌آنکه از کلیت کاسته شود، فرض خواهیم کرد که $\lambda = 1$. در این صورت $\mathcal{P}$ مجموعه‌ای شمارا از نقاط است به‌طوری که هر مجموعهٔ فشرده در R^2 تنها شامل زیرمجموعه‌ای متناهی از $\mathcal{P}$ است. برای هر $p \in \mathcal{P}$، یک ناحیهٔ چند ضلعی مانند $V(p)$ نظیر می‌شود که متشکل از کلیهٔ نقاط صفحهٔ R^2 است که به p نزدیکترند تا به هر نقطهٔ دیگر p'، $p' \in \mathcal{P}$ و $p \neq p'$. گراف $\mathcal{V}$ که متشکل از کلیهٔ ضلعها و رأس‌های ناحیه‌های $V(p)$، $p \in \mathcal{P}$ ، است، موزائیک بندی وورونوی[2] (۱۹۱۱) (یا موزائیک بندی دیریکله یا چند ضلعی سازی تایسن[3] (۱۹۱۱)) نامیده می‌شود. مثلث بندی دلانی[4] $\mathcal{D}$، گرافی است که رأسهای آن بر نقاط $\mathcal{P}$ واقع‌اند و دو رأس p و p' به وسیلهٔ یالی به هم وصل‌اند اگر و تنها اگر $V(p)$ و $V(p')$ مجاور و یک ضلع مشترک داشته باشند. وحیدی اصل و ویرمن (۱۹۹۰) مدل پرکولاسیون نخستین گذر زیر را روی موزائیک بندی وورونوی یا مثلث بندی دلانی معرفی کردند. فرض کنید که $\{T(e) : e \in \mathcal{E}(\mathcal{G})\}$، که در آن $\mathcal{G} = \mathcal{V}$ یا $\mathcal{D}$، متغیرهای تصادفی نامنفی مستقل و همتوزیع با تابع توزیع مشترک F باشند. متغیر تصادفی $T(e)$، مانند معمول، "زمان پیموده شدن" ضلع e را نشان می‌دهد. فرض شده است که متغیرهای تصادفی $\{T(e) : e \in \mathcal{E}(\mathcal{G})\}$ از فرایند پواسون مولد گرافهای $\mathcal{V}$ و $\mathcal{D}$ مستقل باشند. برای هر دو رأس u و v، زمان پیموده شدن $T(\pi)$ مسیری مانند π از u به v عبارت است از مجموع زمانهای پیموده شدن ضلعهای متعلق به π زمان نخستین گذر (نامقید) از u به v، که با $t(u, v)$ نشان داده می‌شود، به صورت

$$t(u, v) = \inf\{T(\pi) : \pi \in \mathcal{R}\}$$

1) oriented 2) Voronoi Tessellation 3) Theissen polygonalizalion 4) Delaunay triangulation

تعریف می‌شود که در آن $\mathcal{R}$ مجموعهٔ کلیهٔ مسیرها از u به v است. این تعریف را می‌توان به نقاط دلخواه $u, v \in R^۲$ با تعریف $t(u, v) = t(p_u, p_v)$، که در آن p_u و p_v نزدیکترین رأسها (با احتمال ۱ یکتا) به ترتیب به u و v هستند، توسیع داد. اگر $x, y \in R^۲$، برای سهولت $p_{(x,\circ)}$ را با p_x و $t\Big((x,\circ),(y,\circ)\Big)$ را با $t(x, y)$ نشان می‌دهیم. وحیدی اصل و ویرمن (۱۹۹۰) ثابت کردند که

قضیه- برای موزائیک‌بندی وورونوی و مثلث بندی دلانی، هر دو، ثابتی مانند $\mu(F) < +\infty$ موجود است به‌طوری که

$$\lim_{x\to\infty} \frac{t(\circ, x)}{x} = \mu(F)$$

تقریباً به‌طور حتم و در $L^۱$ موجود است اگر و تنها اگر

$$\int_\circ^\infty [۱ - F(x)]^۳ \, dt < \infty.$$

اخیراً مطالعهٔ مدلهای پرکولاسیون نخستین‌گذر به گرافهای (متناهی) دلخواه تسری‌یافته است. به‌عنوان نمونه نگاه کنید به هوفستاد، هوگمیسترا، میگم (۱۹۹۸).

توسیع پرکولاسیون نخستین‌گذر در جهت دیگر، به منظور اثبات "قضیه‌های شکل "است. کاکس و دورت (۱۹۸۱) با تعمیم مدل رشد ریچاردسون (۱۹۷۳)، مدل زیر را درنظرگرفتند. فرض کنید که $t(x, y)$ زمان نخستین گذر از x به y در مشبکهٔ مربعی $\mathcal{L}^۲$ باشد. با توسیع زمان نخسین گذر از $\mathcal{L}^۲$ به $R^۲$ با تعریف $t(x, y) = t(x_{Z^۲}, y_{X^۲})$ که در آن $x, y \in R^۲$ و $x_{Z^۲}$ و $y_{Z^۲}$ نزدیکترین نقاط به ترتیب به x و y در مشبکهٔ $\mathcal{L}^۲$اند، کاکس و دورت (۱۹۸۱) ثابت کردند که برای هر $x \in R^۲$، $t(\circ, nx)/n$، وقتی $n \to \infty$، با احتمال ۱ و در میانگین به حدی مانند $\phi(x)$ میل می‌کند هرگاه

$$\int [۱ - F(t)]^۴ \, dt < \infty.$$

آنها برقرار بودن همین حد در احتمال را بدون هیچ‌شرطی روی میانگین F ثابت کردند. حال اگر

$$A_t = \{x : t(\circ, x) \le t\}$$

"ناحیهٔ خیس‌شده "پیش از زمان t باشد به شرطی که مایع در مبدأ زمان وارد سیستم شود، کاکس و دورت "قضیهٔ شکل "مهمّ زیر دربارهٔ ناحیهٔ "خیس شده" را ثابت کردند:

قضیه- فرض کنید $e_۱ = (۱, \circ)$. در این صورت، در احتمال،

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t(\circ, ne_۱)}{n} = \gamma.$$

اگر $\gamma > \circ$، در این صورت برای هر $\epsilon > \circ$،

$$P\Big(\{x : \phi(x) \le ۱ - \epsilon\} \subseteq t^{-۱} A_t \subset \{x : \phi(x) \le ۱ + \epsilon\}, \text{برای } t \text{ های به‌قدر کافی بزرگ}\Big) = ۱$$

اگر و تنها اگر $E[Y^{۲}] < \infty$، که در آن Y مینیمم مختصهای زمانی چهار ضلعی است که از مبدأً خارج می‌شوند. اگر $\gamma = ۰$ آنگاه برای هر مجموعهٔ فشردهٔ K

$$P\Big(K \subseteq t^{-۱}A_t, \text{برای کلیهٔ } t \text{های به‌قدر کافی بزرگ}\Big) = ۱.$$

وحیدی اصل و ویرمن (۱۹۹۲) «قضیهٔ شکل» کاکس و دورت را برای گرافهای وورونوی و دلانی به صورت زیر توسیع دادند.

قضیه- برای هر $\epsilon > ۰$،

$$P\Big(\{x : R^{۲} : \phi||x|| \leq ۱ - \epsilon\} \subseteq t^{-۱}A_t \subseteq \{x \in R^{۲} : \phi||x|| \leq ۱ + \epsilon\},$$
$$\text{برای کلیهٔ } t \text{های به‌قدر کافی بزرگ}\Big) = ۱$$

اگر و تنها اگر

$$E[Y^{۲}] = \int_{۰}^{\infty} t[۱ - F(۱)]^{۳}\, dt < \infty.$$

اگر $\phi = ۰$، آنگاه برای هر مجموعهٔ فشردهٔ K

$$P\Big(K \subseteq t^{-۱}A_t, \text{ برای کلیهٔ } t \text{های به‌قدر کافی بزرگ}\Big) = ۱.$$

در اینجا $\phi = \lim_{x\to\infty} \dfrac{t(۰, (۰, x))}{x}$ و $||\cdot||$ نرم اقلیدسی است.

توجه کنید که بر خلاف "قضیهٔ شکل" کاکس و دورت که در آن به علت نامشخص‌بودن شکل تابع $\phi(x)$، شکل ناحیهٔ خیس پیش از زمان t، tی بزرگ، نامشخص است، در نتیجهٔ اخیر، به دلیل همسانگردی فرایند پواسون همگن، شکل این ناحیه معین و در واقع "مستدیر" است.

سرافینی (۱۹۹۷) قضیهٔ شکل وحیدی اصل و ویرمن را به گرافهای دلانی تولید شده به وسیلهٔ فرایندهای پواسون d-بعدی، $d > ۲$، تعمیم داده است.

۲.۳ حاصلضربهای ماتریسهای تصادفی

فرض کنید که $A_۱$، $A_۲$، ... یک دنبالهٔ مانا از ماتریسهای تصادفی $k \times k$ با درایه‌های مثبت باشد و فرض کنید که

$$\alpha_{m,n}(i, j) = (A_{m+۱} \dots A_n)(i, j),$$

یعنی $\alpha_{m,n}(i, j)$ درایهٔ iام ستون jام حاصلضرب $A_{m+۱} \dots A_n$ است. با توجه به اینکه

$$\alpha_{۰,m}(۱, ۱)\alpha_{m,n}(۱, ۱) \leq \alpha_{۰,n}(۱, ۱),$$

بنابراین اگر

$$X_{mn} = -\log \alpha_{m,n}(۱, ۱)$$

آنگاه

$$X_{\circ m} + X_{mn} \geq X_{\circ n}$$

که همان شرط (i) در قضیهٔ ارگودیک فرایندهای زیرجمعی لیگت (۱۹۸۵) است. دیگر شرایط این قضیه نیز در مورد X_{mn} صادق است (برای تفصیل بیشتر نگاه کنید به دورت، ۱۹۹۱، صفحهٔ ۳۲۶) و بنابراین برای کلیهٔ مقادیر i، j،

$$\frac{۱}{n} \log \alpha_{\circ,n}(i,j) \rightarrow -X, \qquad a.s.$$

این نتیجه برای نخستین بار توسط فورستنبرگ (۱۹۶۰) ثابت شده است. بحث بیشتر دربارهٔ حاصلضربهای ماتریسهای تصادفی را می‌توان در کوهن، کستن، و نیومن (۱۹۸۵) یافت.

۳.۳ دنباله‌های صعودی در جایگشتهای تصادفی

فرض کنید که π جایگشتی از $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ و $l(\pi)$ طول طولانیترین دنبالهٔ صعودی در π باشد، یعنی، بزرگترین kای که برای آن اعداد صحیحی مانند $i_۱ < i_۲ < \cdots < i_k$ موجود باشند به‌طوری که

$$\pi(i_۱) < \pi(i_۲) < \cdots < \pi(i_k).$$

همرزلی (۱۹۷۰) به این مسأله، با قراردادن یک فرایند پواسون با نرخ $\lambda = ۱$ در صفحه، درآویخت. وی برای $s < t \in (\circ, \infty)$، طول طولانیترین مسیر صعودی واقع در مربع R_{mn} با رأسهای (s, s)، (s, t)، (t, t)، (t, s) را با Y_{st} نشان داد. به عبارت دیگر Y_{st} بزرگترین kای را نشان می‌دهد که برای آن نقاط (x_i, y_i) در فرایند پواسون موجودند به‌طوری که $s < x_۱ < \cdots < x_k < t$ و $s < y_۱ < \cdots < y_k < t$. با مشاهدهٔ اینکه

$$Y_{\circ m} + Y_{mn} \leq Y_{\circ n}$$

و تحقیق برقراری دیگر شرایط قضیهٔ ارگودیک لیگت (برای دنباله $\{-Y_{\circ n}\}$) نتیجه می‌شود که

$$\frac{Y_{\circ n}}{n} \rightarrow \gamma \equiv \sup_{n \geq ۱} \frac{E[Y_{\circ n}]}{n} \qquad a.s.$$

حال برای بازگشت از این نتیجه دربارهٔ فرایندهای تصادفی به مسألهٔ جایگشت تصادفی، فرض کنید که $\tau(n)$ کوچکترین مقدار t باشد که برای آن n نقطه در $R_{\circ t}$ موجودند. فرض کنید که n نقطه (پواسونی) در $R_{\circ,\tau(n)}$ به صورت (x_i, y_i) نوشته شوند که در آن $\circ < x_۱ < x_۲ < \cdots < x_n \leq \tau(n)$ و فرض

کنید که π_n جایگشت یکتای $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ باشد به‌طوری که $y_{\pi_n(n)} < \cdots < y_{\pi_n(۲)} < y_{\pi_n(۱)}$.
ملاحظه می‌شود که $Y_{\circ,\tau(n)} = l(\pi_n)$. به‌آسانی (به کمک قانون قوی اعداد بزرگ) ثابت می‌شود که

$$\frac{\tau(n)}{\sqrt{n}} \to ۱ , \qquad a.s.$$

بنابراین نتیجه می‌شود که

$$\frac{l(\pi_n)}{\sqrt{n}} \to \gamma \qquad a.s.$$

همرزلی (۱۹۷۰) ثابت کرده است که $\frac{\pi}{۲} \le \gamma \le e$ و کینگمن (۱۹۷۳) ثابت کرده است که $۱/۵۹ < \gamma < ۲/۴۹$. از کارهای بعدی در زمینهٔ مسألهٔ جایگشت تصادفی (لوگان و شپ (۱۹۷۷) و ورشیک و کروف (۱۹۷۷)) نتیجه می‌شود که $\gamma = ۲$.

۴.۳ فرایندهای پوشانش

یک فرایند پوشانش، به‌طور کلی، دنباله‌ای شمارا از مجموعه‌ها در فضای اقلیدسی، مثلاً خط حقیقی یا صفحهٔ دکارتی است. تعریف ریاضی صوری فرایندهای پوشانش را می‌توان چنین بیان کرد (هال، ۱۹۸۸).
فرض کنید که $\mathcal{P} = \{\xi, \xi_۲, \ldots\}$ گردایه‌ای شمارا از نقاط در فضای kـبعدی اقلیدسی، و $\{S_۱, S_۲, \ldots\}$ گردایه‌ای شمارا از مجموعه‌های ناتهی باشد. فرض کنید که

$$\xi_n + S_n = \{\xi_n + x : x \in S_n\}.$$

در این صورت $\mathcal{C} \equiv \{\xi_n + S_n : n = ۱, ۲, \ldots\}$ یک فرایند پوشانش است. ξ_n "مرکز" مجموعهٔ $\{\xi_n + S_n\}$ نامیده می‌شود. خلأ $V = V(R)$ در زیر مجموعه‌ای مانند R از فضای kـبعدی، عبارت است از مقدار آن بخش از R که توسط هیچ یک از مجموعه‌های $\mathcal{C}$ پوشانده نشده است:

$$V = \int_R I\{X \notin \cup_n(\xi_n + S_n)\}\, dx$$

که در آن I نشان‌دهندهٔ تابع نشانگر است.

فرایند پوشانش زیر توسط وحیدی اصل (۱۹۹۹) مورد مطالعه قرارگرفته است. فرض کنید که $B^l_{s,t}$ معرف مستطیل $[s,t] \times [\circ, l]$ باشد. یک فرایند پواسون همگن دوبعدی $\mathcal{P}$ را با نرخ λ در صفحه درنظر بگیرید. حال با درنظرگرفتن تحدید $\mathcal{P}$ به $B^l_{s,t}$ دایره‌ای به مرکز هر یک از نقاط پواسونی و به شعاع ثابت r رسم کنید. با فرض اینکه X^l_{st} مساحت پوشانده شده در داخل مستطیل $B^l_{s,t}$ به توسط چنان دایره‌هایی باشد، با تشخیص اینکه X^l_{st} برای هر l ثابت یک فرایند زیرجمعی است ($\{-X^l_{st}\}$ یک فرایند زیرجمعی است)، با استفاده از قضیهٔ ارگودیک ثابت می‌شود که

برای هر l ثابت، حد

$$\lim_{t\to\infty} \frac{X^l_{\circ t}}{t} = \alpha^l$$

تقریباً به‌طور حتم و در L^1 موجود است. α^l را ضریب پوشانش نامیده‌ایم.

توجه شود که در اینجا هم مشاهدهٔ زیرجمعی بودن فرایند $\{X^l_{st}\}$ و استفاده از قضیهٔ ارگودیک، وجود حدی مانند X^l را برای $\frac{X^l_{\circ t}}{t}$ مستقیماً نتیجه می‌دهد و مابقی، و قسمت اساسی کار، اثبات تبهگن بودن X^l است، یعنی اثبات اینکه

$$P(X^l = \alpha^l) = 1.$$

وحیدی اصل و شفیعی (۲۰۰۱) این نتیجه را به فرایندهای پوشانشی که در آن مجموعه‌های پوشانندهٔ S_n به‌جای دایره‌ای به شعاع ثابت r، مربعهایی تصادفی به ضلع L هستند که L دارای توزیع یکنواخت در بازه‌ای مانند (a, b) است، توسیع داده‌اند و آن را همراه با فرایند پوشانشی دیگری که در آن ξ_n مراکز، نقاطی هستند که به طور تصادفی (با توزیع یکنواخت) در ناحیه‌هایی مربع شکل از صفحه توزیع شده‌اند، برای نمونه‌گیری فضایی، یا نمونه‌گیری در سطح، مورد استفاده قرار داده‌اند.

مراجع

Breiman, L. (1968). *Probability.* Addison - Wesley, Reading, Massachusetts.

Broadbent, S.R. and Hammersley, J.M. (1957). Percolation processes. Crystals and Mazes. *Proceedings of Cambridge Philosophical Society.* **53**, 629-641.

Cohen, J. , Kesten, H. ,and Newman, C. (1985). *Random matrices and their applications.* **AMS** Contemporary Math. 50. Providence, **RI**.

Cox, J.T. and Durrett, R. (1981) Limit theorems for percolation processes with necessary and sufficient conditions. *Annals of Probability.* **9**, 583 - 603.

Dudley, R.M. (1989). *Real Analysis and Probability.* Wadssworth & Brooks / Cole. Pacific Grove, California.

Durrett, R. (1984). Oriented Percolation in Two Dimensions. *Annals of Probability.* **12**, 999 - 1040. Durrett, R. (1988). *Lecture Notes on Particle Systems and Percolation.* Wadsworth & Brooks / Cole. Belmont, California.

Durrett, R. (1991). *Probability: Theory and Examples.* Wadsworth & Brooks / Cole. Belmont, California.

Efros, A.L. (1986). *Physics and Geometry of Disorder*: Percolation theory. Mir Publishers, Moscow.

[ترجمه‌ای از این کتاب به زبان فارسی به وسیلهٔ محمد قاسم وحیدی اصل با عنوان فیزیک و هندسهٔ بی‌نظمی از سوی انتشارات انجمن فیزیک ایران منتشر شده است.]

Etemadi, N. (1981). An elementary proof of the strong law of large numbers. *Z. Warsch. Verw. Gebiete* **55**, 119 - 122.

Garsia, A.M. (1965). A simple proof of E. Hopf's maximal ergodi theorem. *J. Math. and Mech.* (Indiana Univ.) **14**: 381 - 382.

Gnedenko, B.V. and Sheinin, O.B. (1992). The Theory of Probability, in *Mathematics of 19th Century*, Mathematical Logic, Algebra, Number Theory, Probability Theory, A.N. Kolmogorov and A.P. Yushkevich eds. PP. 211 - 280, Birkhauser. Verlag, Basel.

Grimmett, G. (1999). Percolation. Springer - Verlag. New York.

Hall, P. (1985). On continuum percolation. *Annals of Probability.* **13**, 1250 - 1266.

Hammersley, J.M. (1970). A few seedlings of research. Proceedings of 6th Berkeley symposium. **Vol. I**, 345 - 394.

Hammersley, J.M. (1983). Origins of percolation theory, *Annals of the Isreal Physical Society.* **5**, 47 - 57.

Hammersley, .J.M. and Welsh, D.J.A. (1965). First-passage percolation, subadditive processes, stochastic networks and generalized renewal theory, in *Bernoulli, Bayes, Laplace Anniversary Volume*, eds.J.Neyman and L.Lecam, 60 - 110, Springer - Verlag.

Hansen, J.C. and Hulse, P. (1998). Subadditive ergodic theorems for random sets in infinite dimensions. *Statistics and probability Letters*, **50**, 409-416.

Hille, E. and Phillips, R.S. (1957). Functional Analysis and Semi-groups. *American Mathematical Society.* Providence, RI.

Hall, P. (1988). *Introduction to the Theory of Coverage Processes.* New York: John Wiley & Sons.

Hofstad, R., Hooghiemstra, G. and Mieghem, P. (2001). First-passage percolation on the random graph. *Prob. Eng. Inf. Sciences.* **Vol. 15**, 225-237.

Kesten, H. (1980). The critical probability of bond percolation on the square lattice equals $\frac{1}{2}$, *Communications in Mathematical Physics.* **74**, 49-59.

Kesten, H. (1982). *Percolation Theory for Mathematicians*, Birkhauser, Boston.

Kesten, H. (1985). First-passage percolation and a higher dimensional generalization, in *Particle Systems, Random Media and Large Deviations*, ed.R.Durrett, 235 - 251, Contemporary Mathematics 41, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

Kingman, J.F.C. (1968). The ergodic theory of subadditive stochastic processes. *Journal of Royal Statistical Society.* **ser. B. 30**. 499 - 510.

Kingman, J.F.C. (1973). Subadditive ergodic theory. *Ann. Prob.* 1, 883-909.

Kingman, J.F.C. (1976). *Subadditive Processes.* Ecole d' ete de probabilities de St-Flour, 1975. Lecture Notes in Math. Springer 539 : 167 - 223.

Leventhal, S. (1988). A proof of Liggett's version of the subadditive ergodic theorem. *Proceedings of American Mathematical Society.* **102**, 169 -173.

Liggett, T.M. (1985). An improved subadditive ergodic theorem. *Annals of probability.* **13**, 1279 - 1285.

Logan, B.F. and Shepp, L.A. (1977). A variational problem for random Young tableaux. *Advances in Mathematics.* **26**, 206 - 222.

Meester, R. and Roy, R. (1996). *Continuum Percolation.* Cambridge Tracts in Mathematics, London.

Schurger, K. (1986). Stochastic processes and its applications. 21.

Serafini, H.C. (1997). First-passage percolation on the Delaunay graph on a d - dimensional Poisson process, Ph.D thesis, Department of Mathematics, New York University.

Smythe, R.T. (1976). Multiparameter subadditive processes. *The Annals of Probability.* **4**, 772 -782.

Smythe, R.T. and Wierman, J.C. (1978). *First-passage percolation on the square lattice*, Lecture Notes in Mathematics no. 671, springer. Berlin.

Stauffer, D. (1985). *Introduction to percolation theory.* Taylor & Francis

Ltd. London.

Vahidi - Asl, M.Q. (1979). *First-passage percolation on the simple cubic lattice.* Ph.D. thesis. Department of Mathematics, University of Oregon.

Vahidi-Asl, M.Q.(1999) Covering a surface, *Bulletin of the Iranian Mathematical Society.* **25**, 25-36.

Vahidi - Asl, M.Q. and Shafie, K. (2002). Coverage processes with applications in areal sampling, submitted.

Vahidi - Asl, M.Q. and Wierman J.C. (1990). First-passage percolation on the Voronoi tessellation and Delaunay triangulation in *Random Graph's 87.* M. Karonski, J. Jaworski, and A. Rucinski. eds. John Wiley & Sons Ltd.

Vahidi - Asl, M.Q. and Wierman, J.C. (1992). A shape result for first-passage percolation on the Voronoi tessellation and Delaunay triangulation. *Random Graphs, volume 2.* Frieze, A. and Luczak, T. eds. John Wiley & Sons, Inc.

Voronoi, G. (1908). Nouvelles applications des paramètres continus àla théorie des formes quadratiques. Deuxième mémoire. Recherches sur les paralleloèdres primitifs. *J. Reine Angew. Math.* **134**. 198 - 287.

محمدقاسم وحیدی اصل
دانشگاه شهید بهشتی، دانشکدهٔ علوم ریاضی، گروه آمار
پست الکترونیک: m-vahidi@cc.sbu.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شمارهٔ ۲۷(پاییز ۱۳۸۰)، صص. ۷۱ تا ۸۳

معرفی و نقد کتاب

گسترش ریاضیات ۱۹۰۰ تا ۱۹۵۰[1]

به کوشش: ژان پل پیه

ارسلان شادمان

این معرفی در ادامهٔ معرفی و نقد کتاب مورد بحث است که در صفحات ۵۳ تا ۶۶ شمارهٔ ۲۶ فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی درج شد. در آنجا قسمت ناظر به ظاهر کتاب، راهنمای ۱۹۰۰ تا ۱۹۵۰، کتابنامه، نام‌ها، عکس‌ها، جمع‌بندی و نتیجه‌گیری همراه با معرفی چهار مقالهٔ اول درج گردید. اکنون معرفی مقاله‌های ۵ تا ۱۲ می‌آید که جایگاهِ آن پیش از بخش (ج) در صفحهٔ ۶۳ شمارهٔ ۲۶ فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی است.

قسمت دوم

۵. هَیمَن، والترک.: نظریهٔ توابع ۱۹۰۰ تا ۱۹۵۰، صفحات ۳۶۹ تا ۳۸۴.
این مقالهٔ ۱۵ صفحه‌ای به زبان انگلیسی از میان مباحث اصلی نظریهٔ توابع تحلیلی یک متغیرهٔ مختلط

1) Development of mathematics 1900-1950, Edited by Jean-Paul PIER, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1994. ISBN 3-7643-2821-5 (Basel) ISBN 0-8176-2821-5 (Boston)

فقط سه مبحث را که مورد علاقهٔ نویسنده است با رایحهٔ غالب آنالیز (غیر هندسی) که دیدگاه مؤلف است، مرور می‌کند، هر چند دید هندسی را نیز گاهگاهی مطرح می‌کند. در یک مقدمهٔ چند سطری مؤلف بیان می‌کند که در قرن ۱۹ گاوس، کوشی و ریمان نظریهٔ توابع را بنا نهادند و در قرن ۲۰ موضوع به شدت رشد یافت به گونه‌ای که نمی‌توان به وجهی شایسته همهٔ نتایج ۱۹۰۰ تا ۱۹۵۰ را اینجا مرور کرد، از این رو خود را به مباحث سه‌گانهٔ زیر محدود می‌کند: توابع تام[1]، توابع ناقص‌ریخت[2] و توابع قرص یکه.

نویسندهٔ مقاله که خود کتاب‌های توابع ناقص‌ریخت و توابع زیرهمساز[3] (۲ جلد) را تألیف کرده و نتایج متعددی در زمینهٔ مورد بحث دارد فقط سه مقالهٔ خود را در مراجع گنجانده است. در این مرور کارهای مهمی را در زمینهٔ یک متغیرهٔ مختلط بررسی کرده است و ارتباط کار را با توپولوژی نیز بدون اشاره نگذاشته است، اما جای تأسف است که روحیهٔ اوایل قرن را تا آخر نگه داشته و به تحولات اساسی که در آنالیز مختلط چند متغیره در نیمهٔ اول قرن (دورهٔ مورد بحث) رخ داده کوچکترین اشاره‌ای نکرده است. با این وجود، مقاله کاملاً خواندنی و جذاب است و شاید صاحب‌نظری مانند هیمن به خود حق می‌دهد مقاله‌ای بنویسد که هم حجم آن معقول باشد و هم خواننده را با آثاری از ریاضی‌دانان نامی مانند آهلفرس[4]، بیبرباخ[5]، بورل[6]، کاراتئودوری[7]، کارلمان[8]، کارتان[9]، دوبرانژ[10]، دانژوا[11]، هادامار[12]، خود هیمن، هاینس[13] ، کوبه[14]، لانداو[15]، لیتلوود[16]، مونتل[17]، نوانلینا[18]، فراگمن[19]، پیکار[20]، پوانکاره، رادو[21]، ریمان، شوتکی[22]، والیرون[23]، وایل[24]* و غیره در ارتباط با موضوع محدودی بنمایاند و توقع مخاطبین را در آن نداند که به تفصیل در همهٔ زمینه‌های قابل ذکر صحبت کند. برخی از مسائلی که مطرح می‌کند در این اواخر (مثلاً ۱۹۹۳) جواب قطعی یافته‌اند که ذکر کرده است، اما همین مسائل بیشتر تخمین‌های ثابت‌هایی هستند که در نظریهٔ توابع مطرح‌اند یا نامساوی‌هایی از قبیل پندارهٔ بیبرباخ که برهان آن توسط دوبرانژ در ۱۹۸۵ ارائه شد. خوانندگان ایرانی می‌توانند کتاب قدیمی نظریهٔ توابع تحلیلی تألیف دکتر علی افضلی‌پور از انتشارات دانشگاه تهران (۱۳۲۸) را برای درک بسیاری از مبانی مطرح شده در مقاله مطالعه کنند. ناچارم بحث دربارهٔ این مقاله را رها کنم، وگرنه ممکن است تحت تأثیر رشتهٔ تخصصی خود قرار گیرم و وارد جزئیات و فنون محاسباتی شوم، که خارج از افق مطرح شده برای معرفی اجمالی مقالات این کتاب است.

۶. **اوزل**، کریستیان: ماقبل تاریخ پندارهای ویل، صفحات ۳۸۵ تا ۴۱۳.

این مقاله نیز به زبان فرانسه و راجع به پندارهای آندره ویل[25] دربارهٔ مباحثی است که بیشترین تأثیر را در تحریک فکر ریاضی‌دانان مبارز در زمینهٔ هندسهٔ جبری مجرد از ۱۹۴۹، هنگام طرح پندارها، تا ۱۹۷۳ هنگام حل آن توسط دولینی[26] داشته است. هدفِ مقاله ارائهٔ تاریخ نظریه‌هایی است که مقدّم بر

1) entire 2) meromorphic 3) subharmonic 4) Ahlfors 5) Bieberbach 6) Borel 7) Carathéodory 8) Carleman 9) Cartan 10) de Branges 11) Denjoy 12) Hadamard 13) Heins 14) Koebe 15) Landau 16) Littlewood 17) Montel 18) Nevanlinna R. 19) Phragmén 20) Picard E. 21) Rado 22) Schottky 23) Valiron 24) Weyl. H.

*) در پانویس شماره ۱۰ ص ۵۴ شمارهٔ پیش Weil نادرست است و Weyl درست است

25) André Weil 26) Deligne

انشای پنداره‌ها بودند و نویسنده می‌کوشد نشان دهد چگونه منجر به طرح پنداره‌ها شدند. همهٔ نظریه‌های مورد بحث از دیدگاه نویسنده سرشتی استعاری دارند. نخست از اعداد جبری الهام می‌گیرند (آرتین[1]) سپس به توابع جبری یک متغیره مربوط می‌شوند (اشمیت[2]) و نهایتاً به هندسهٔ خمهای جبری می‌رسند (آ. ویل). خود پنداره‌ها ناظر بر آنند که برای واریته‌های جبری روی یک هیأت متناهی، نظریه‌ای کوهومولوژیک مشابه نظریهٔ کوهومولوژیک واریته‌های جبری روی هیأت اعداد مختلط، موجود است. پس از این کلیات که در پاراگراف اول مقدمهٔ اوزل می‌بینید، به تاریخچهٔ مختصری از حساب چندجمله‌ای‌ها با ضرایب در $\mathbb{F}_p$ (که $\mathbb{F}_p = \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ و p یک عدد اول است) و مشابهت آن با حساب متداول اعداد صحیح، کار ددکیند (۱۸۶۷) اشاره می‌شود. تجزیهٔ یکتا به حاصل‌ضرب عوامل اول در اینجا نیز توسط ددکیند انجام شده است. بخشی از قسمت ابتدای این بحث، یعنی همنهشتی مضاعف به پیمانهٔ عدد p و یک چندجمله‌ای M، قبلاً در کار گالوا (۱۸۳۰) نیز دیده می‌شود. توضیحاً اگر A و B دو چندجمله‌ای باشند، می‌گوییم A همنهشت مضاعف B به پیمانهٔ عدد p و چندجمله‌ای M است هرگاه $A-B$ بخشپذیر بر M به پیمانهٔ p باشد، و می‌نویسیم $A \equiv B(\mod d.p, M)$.

خود مقاله، پس از یک صفحه مقدمات فوق بر حسب نام چند نفر تنظیم شده است: کورنبلوم[3]، جوان ۲۴ ساله‌ای که در جنگ اول (۱۹۱۴) کشته شد. در کاری که باید در رسالهٔ او انجام می‌شد، ولی ۵ سال پس از مرگش به کوشش لانداو تنظیم و منتشر شد، ثابت می‌کند که اگر A و M چندجمله‌ای‌هایی باشند که به پیمانهٔ p ناهمنهشت o و بیگانه باشند، آنگاه بینهایت رده از چندجمله‌ای‌های P که به پیمانهٔ p تحویلناپذیر و (به پیمانهٔ مضاعف p و M) با A همنهشت‌اند، وجود دارد (این قضیه مشابه قضیهٔ دیریشله ناظر به اعداد اول در یک تصاعد حسابی است). سپس مفهوم سرشت‌های χ (به پیمانهٔ مضاعف p و M) و تابع $L(s,\chi)$ را بر حسب متغیر حقیقی s و سرشت χ برای رده‌های F به شکل

$$L(s,\chi) = \sum_F \frac{\chi(F)}{p^{[F]s}}$$

وارد می‌کند (با توضیحات کافی اوزل، عبارت کاملاً قابل درک است، به ویژه $[F]$ درجهٔ ردهٔ F است)، که در تعقیب کار دیریشله است و برای سرشت خاص $\chi_۰$ که در آن

$$\chi_۰(p) = \begin{cases} ۰, & \text{اگر } P|M \\ ۱, & \text{اگر نه} \end{cases}$$

مشابه تابع زتای ریمان دستور

$$L(s,\chi_۰) = \frac{۱}{۱ - \frac{۱}{p^{s-۱}}} \prod_{P|M} (۱ - \frac{۱}{p^{[P]s}})$$

1) Artin 2) Schmidt 3) Kornblum

را به دست می‌آورد. قضیه‌ای از کورنبلوم می‌گوید که $\chi \neq \chi_0 \Rightarrow L(1,\chi) \neq 0$.
سپس اوزل به ترتیب تاریخی مؤلفین، به شرح کار امیل آرتین (رساله ۱۹۲۱) که در ۱۹۲۴ منتشر شد می‌پردازد و هشت صفحه را به آن اختصاص می‌دهد، موضوع آن توسیع تربیعی هیأت کسرهای گویا با ضرایب در F_p است که بر مبنای $\mathbb{Q}$ به تقلید از ددکیند (۱۸۹۳) انجام شده است. اوزل در این انشا تصویر روشنی از کار آرتین را می‌نمایاند که سرانجام این حکم را در بردارد که $L(s,\chi)$ به شکل حاصل‌ضربی متناهی در مورد χ حقیقی و $\chi \neq \chi_0$، تجزیه می‌شود و $\mathrm{Re}\ s = 1 \Rightarrow L(s,\chi) \neq 0$ ؛ این نتیجه را با شیوهٔ لانداو در نظریهٔ اعداد ثابت می‌کند. از آنجا تعداد چندجمله‌ای‌های تحویل‌ناپذیر P را که $P \equiv A(\mod .M)$ و درجهٔ ν دارند تخمین می‌زند که به شکل

$$\frac{p^{\nu}}{\nu\Phi(M)} + O(\frac{p^{\nu\theta}}{\nu})$$

است، جایی که θ کوچکترین کران بالای قسمت حقیقی صفرهای تابع $L(s,\chi)$ است و البته $\frac{1}{2} \leq \theta < 1$ و $\Phi(M)$ مرتبهٔ گروه ضربی به پیمانهٔ M است.

نوبتِ فردریک کارل اشمیت[1] که می‌رسد به تعمیم کار آرتین علاقه‌مند می‌شود، یعنی به توسیع متناهی دلخواهی از هیأت کسرهای گویای $k(z)$ با ضرایب در یک هیأت متناهی k می‌پردازد. تعریف تابع زتا در این مورد با مشکلاتی مواجه می‌شود و اشمیت ناچار می‌شود به سراغ روش ددکیند و وبر[2] برود که هیأت توابع جبری یک متغیر مختلط را در ۱۸۸۲ بررسی کرده بودند. نظریهٔ رویهٔ ریمان وابسته و مفاهیم مورد نیاز درکتاب «نظریهٔ توابع جبری یک متغیر» (۱۹۰۲ تألیف هنسل[3] و لاندسبرگ[4]) موضوع را شرح داده‌اند. بنابراین اشمیت پس از رسالهٔ خود در (۱۹۲۵)، دیدگاه خود را از توجه به ایدآل‌های اول برمی‌گرداند به توجه به مقسوم‌علیه‌ها یعنی عبارت‌های صوری به شکل $c = p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_s^{e_s}$ که p_iها ایدآلهای ماکسیمال اول مربوط به مکان‌های P_i هستند و e_i عدد صحیح است. این مقسوم‌علیه‌ها یک گروه ضربی جابجایی تشکیل می‌دهند که از مقسوم‌علیه‌های اول به شکل $c = p$ به طور آزاد تولید می‌شوند. مرتبهٔ یک مقسوم‌علیه تعریف می‌شود که امروز آن را درجه می‌نامند، گونه تعریف می‌شود و غیره، نهایتاً به ازای هر مقسوم‌علیه cبا مرتبهٔ f، اشمیت قرار می‌دهد $|c| = p^f$ و تابع

$$Z(s) = \prod_p \frac{1}{1-|p|^{-s}}$$

را تعریف می‌کند که برای $\mathrm{Re}\ s > 1$ همگرا است و برابر است با $\sum_c \frac{1}{|c|^s}$ که c در مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های صحیح تغییر می‌کند. قضیهٔ ریمان‌ـرُخ[5] ناظر به این سری است، و تعداد جمله‌های سری را هنگامی که c در رده‌ای مفروض با مرتبهٔ ناکمتر از $2g - 2$ است، به دست می‌دهد. به علاوه اشمیت نشان می‌دهد که تابع

1) F. K. Schmidt 2) Weber 3) Hensel 4) Landsberg 5) Riemann-Roch Theorem

$Z(s)$ به همهٔ صفحهٔ مختلط توسیع می‌یابد و تکینگی‌های آن فقط در نقاطی روی خط‌های $\mathrm{Re}\ s = ۱$ و $\mathrm{Re}\ s = ۰$ است. سپس فرمول صریح $Z(s)$ را نیز بر حسب g (گونهٔ K) به دست می‌دهد که برای تکرار در اینجا فرمول اندکی پیچیده به نظر می‌رسد و شکلی از قضیهٔ ریمان‌ـرخ را نیز به شکل دستور ساده‌ای به کار می‌گیرد تا دستور معادلهٔ تابعی

$$Z(۱ - s) = p^{(g-۱)(۲s-۱)} Z(s)$$

را به‌دست آورد، سپس یک تابع زتای آرتینی را تعریف می‌کند و ارتباط سادهٔ بین $Z(s)$ و آن را نشان می‌دهد.

پس از کار اشمیت، اوزل به معرفی کار هاسه[1] می‌پردازد و طی آن پندارهٔ ریمان را برای تابع زتای اشمیت در حالت گونهٔ ۱ ثابت می‌کند (۱۹۳۶ کنگرهٔ بین‌المللی اسلو) و هم‌ارزی آن را با برخی تخمین‌ها در مورد تعداد مقسوم‌علیه‌های درجه ۱ نشان می‌دهد. تخمین را به گونهٔ g دلخواه نیز تعمیم می‌دهد:

$$|N_۱ - (q + ۱)| \leqslant ۲g\sqrt{q}$$

که فرع بر پندارهٔ ریمان در مورد تابع زتای

$$Z(s) = \prod_{n \geq ۱} (\frac{۱}{۱ - \frac{۱}{q^{ns}}})^{N_n} = ۱ + \frac{N_۱}{q^s} + \cdots$$

است (N_n تعداد مقسوم‌علیه‌های اول درجه n است)، تابعی که توسط هاسه به شکل $Z(s) = Z_0(s)L(s)$ تجزیه می‌شود، که $Z_۰$ و L را نیز توضیح می‌دهد، به ویژه

$$Z_0(s) = ۱ + \frac{q + ۱}{q^s} + \cdots$$

$$L(s) = ۱ + \frac{N_۱ - (q + ۱)}{q^s} + \cdots + \frac{q^g}{q^{۲gs}} = \prod_{i=۱}^{۲g} (۱ - \frac{\omega_i}{q^s})$$

تابع $L(s)$ به شکل چندجمله‌ای درجه $۲g$ بر حسب $\frac{۱}{q^s}$ است. پس

$$N_۱ - (q + ۱) = -\sum_{i=۱}^{۲g} \omega_i$$

و پندارهٔ ریمان یعنی $|\omega_i| = q^{\frac{۱}{۲}}$ برای هر i، آشکارا نابرابری نامبرده را نتیجه می‌دهد. سرانجام هاسه به نظریهٔ ناقص‌ریختی‌های K هدایت می‌شود، که اوزل در یک صفحه آن را با نتیجه‌گیری پندارهٔ ریمان در حالت مورد بحث بیان می‌کند.

در دو قسمت آخر، اوزل به معرفی کارهای آندره ویل و سپس به هدایت او به پندارهٔ‌ها می‌پردازد: برهان پندارهٔ ریمان برای گونهٔ دلخواه، تأسیس هندسهٔ جبری مجرد و غیره. پندارهٔ‌ها به شرح زیرند:

1) Hasse

۱. تابع زتای هر واریتهٔ جبری X_0 با بعد n روی k، گویاست؛
۲. تابع زتای فوق در یک معادلهٔ تابعی

$$Z(\frac{1}{q^n t}) = \pm q^{\frac{nx}{2}} t^x Z(t)$$

صدق می‌کند که در آن χ نقش کاراکتریستیک اویلر-پوانکاره را ایفا می‌کند؛
۳. داریم

$$Z(t) = \frac{P_1(t)P_3(t)\cdots P_{2n-1}(t)}{P_0(t)P_2(t)\cdots P_{2n}(t)}$$

که $P_0(t) = 1 - t$ و $P_{2n}(t) = 1 - q^n t$ و $P_h(t)$ برای $1 \leq h \leq 2n - 1$ چندجمله‌ای است که ریشه‌های آن اعداد صحیح جبری با قدرمطلق $q^{\frac{-h}{2}}$اند؛
۴. رابطهٔ χ با اعداد بتیِ X_0، یعنی با B_h و یا درجهٔ P_h، به این شکل است:

$$\chi = \sum_{h=0}^{2n} (-1)^h B_h \ .$$

ویل نشان می‌دهد که اگر یک نظریهٔ کوهومولوژیک مناسبی برای خمینه‌های جبری روی یک هیأت kی متناهی وجود داشته باشد، پنداره‌ها را می‌توان نتیجه گرفت.

اوزل در خاتمه بیان می‌کند که چگونه گروتندیک[1] با هدف تأسیس چنین نظریه‌ای از ۱۹۵۷ به تجدید بنای هندسهٔ جبری پرداخت و شاگرد او دلینی در ۱۹۷۳ موفق شد کار را به انجام برساند.

مقاله پر از اشارات عالمانه و توضیحات در عین حال روشن است و برای این رشتهٔ پیچیده، خواندن مقاله بسیار سودمند است، خواه برای متخصصان هندسهٔ جبری یا برای سایر ریاضیدانان. کتابنامه نسبتاً مختصر است و فقط ۳۱ عنوان اصلی را در بر دارد.

۷. **کاهان**، ژان پیر: از سریهای تیلر تا حرکت براونی، با منظره‌ای در مسیر بازگشت، صفحات ۴۱۵ تا ۴۲۹.

این مقالهٔ ۱۵ صفحه‌ای به زبان فرانسه، سریهای تیلر[2] با ضرایب مختلط را از دید احتمالات بررسی می‌کند. در چکیده‌ای ۱۰ سطری خود نویسنده به روشنی وضع مقاله را تشریح می‌کند: «پیشنهاد این مقاله یک گردش است: از بورل[3] حرکت را آغاز می‌کنیم و از شعار تحریک‌آمیزی که در ۱۸۹۶ مطرح کرد: *«یک سری تیلر، در حالت کلی، دایرهٔ همگراییش را به عنوان برش می‌پذیرد»*، سپس تعدادی از آثار متأثر از این ادعا را مرور می‌کنیم: تأثیر آن بر خود بورل، تعبیرهایی به کمک نظریهٔ بئر[4]، تعبیرهای احتمالاتی، اثر اشتاینهاوس[5] و برخورد آن با نظریهٔ حرکت براونی وینر[6]. وقتی به اینجا می‌رسیم، سال ۱۹۳۳ است، منظره

1) Grothendieck 2) Taylor 3) Borel 4) Baire 5) Shteinhaus 6) Wiener

با کتاب Grundbegriffe کولموگوروف[1] دگرگون می‌شود. اما نظریهٔ حرکت براونی با پُل لوی[2] از سویی تثبیت می‌شود و از سویی نازک‌کاری‌هایی در آن به عمل می‌آید. ناوردایی مسیرهای حرکتَ براونی مسطح با نمایش‌های همدیس آخرین جملهٔ عنوان مقاله را توجیه می‌کند، منظره‌ای در مسیر بازگشت، که منظور آن تأثیرات بعدی احتمال در آنالیز است. مقاله مشتمل است بر بخش‌های زیر:

بخش اول مقاله: کارهای بورل از ۱۸۹۶ تا ۱۸۹۷ راجع به سری‌های تیلر، با تحلیلی که بورل در ۱۹۱۲ از آنها ارائه می‌کند.

منظور از دایرهٔ برش آن است که تابع $f(z) = \sum a_n z^n$ در هیچیک از نقاط مرز قابل توسیع تحلیلی نباشد. دلیل آن که سخن بورل به منزلهٔ یک شعار تحریک‌آمیز تلقی می‌شود این است که تا آن زمان سری‌های تیلر غیرقابل توسیع به عنوان سری‌های استثنایی تلقی می‌شدند، مثال نقض پوانکاره و معیار هادامار شناخته شده‌اند.

آقای کاهان با زیبایی کم نظیری ریشهٔ مفاهیم، لم‌ها و قضایای مهمی از احتمالات و نظریهٔ اندازه را در همین کار بورل و یادداشتی که به میتتاگ‌ـلفلر[3] نوشته است می‌بیند و آن را توجیه می‌کند. او سعی می‌کند کلمات کلیدی به‌کاررفته را توجیه کند، مانند اصطلاح در حالت کلی که در شعار تحریک‌آمیز بورل هست. در یک کلام، گمانم این مقاله از آنهایی است که واقعاً برای ترجمه و انتشار (مثلاً در فرهنگ و اندیشه) بسیار مناسب است. در هر حال خواندن اصل مقاله به همهٔ دانشجویان کارشناسی ارشد ریاضی محض و کاربردی و رشتهٔ آمار توصیه می‌شود، البته زبان فرانسهٔ نه چندان سختی را نیاز دارد.

بخش دوم مقاله: منظور از در حالت کلی چیست؟ دیدگاه احتمالات، دیدگاه مجموعه‌ها و دیدگاه توپولوژی. از دید بورل، منظور تقریباً حتمی است، یعنی دید احتمالاتی است، هاوسدورف[4] در ۱۹۱۸ ملاحظه کرده است که سری‌های تیلر با ضرایب صحیح قابل توسیع به خارج از دایرهٔ همگرایی، مجموعه‌ای شمارا تشکیل می‌دهند، و بقیهٔ سری‌های تیلر، مجموعه‌ای ناشمارا. پولیا[5] نیز در ۱۹۱۸ نشان می‌دهد که، برای توپولوژی مناسبی (توپولوژی همگرایی یکنواخت روی فشرده‌ها)، مجموعهٔ سری‌های تیلر غیرقابل توسیع یک مجموعهٔ باز چگال تشکیل می‌دهد. او به کتابی از هادامار و ماندلبرویت در این زمینه نیز ارجاع می‌دهد که چاپ ۱۹۲۶ است.

بخش سوم مقاله به نقطه‌نظر اشتاینهاوس اختصاص دارد. اشتاینهاوس در ۱۹۲۳ بین احتمالات شمارای بورل و اندازهٔ لُبگ[6]، اتحاد برقرار کرد. سپس در ۱۹۳۰ مسألهٔ سری‌های تیلر توسیع‌پذیر را از دید احتمال کاملاً حل کرد و به اثبات رساند و به شعار بورل برای اولین بار دقت ریاضی بخشید. کاهان کار اشتاینهاوس را شرح می‌دهد که مرحلهٔ اساسی آن با قانون صفر و یک کولموگوروف همخوانی دارد. اهمیت کار اشتاینهاوس، دربارهٔ سریهای با متغیر تصادفی مستقل است که قبلاً با رادماخر[7] (۱۹۲۲) و خینچین[8]

1) Kolmogorov 2) Paul Lévy 3) Mittag-Lefler 4) Hausdorff 5) Polya 6) Lebesgue
7) Rodemacher 8) Khinchin

و کولموگوروف (۱۹۲۵) شروع شده بود، اما اینک (۱۹۳۰) سری‌های اشتاینهاوس مورد توجه قرار می‌گیرند، و توابع مستقل موضوع یک سلسله مقاله از ۱۹۳۶ تا ۱۹۵۳ می‌شوند.

بخش بعدی مقاله در تلاقی با حرکت براونی نام دارد که از مطالعهٔ مقالهٔ فیزیکی اینشتاین[۱] (۱۹۰۵) دربارهٔ حرکت براونی توسط وینر (به توصیهٔ راسل[۲]) شروع می‌شود. وینر به نوشته‌های ژان پرن[۳] (۱۹۰۹ و ۱۹۱۲) توجه می‌کند. در اینجا کاهان چند سطر معرفی حرکت براونی را از زبان پرن نقل می‌کند و به مشتق‌ناپذیری دیوانه‌وار قانون حرکت آن توجه می‌کند تا آن که رهیافت وینر را به دنبال رهیافت پاله[۴] و زیگموند[۵] شرح می‌دهد و نشان می‌دهد که چه جهش عظیمی انجام شده است. سرانجام آخرین بخش مقاله را با عنوان نقش جدید احتمالات به عنوان موتور در دو صفحه می‌نویسد که نشان می‌دهد اگر یک موضوع آنالیز، دایرهٔ برش سری تیلر، در تکوین احتمالات نقش داشت، اینک جهت برعکس می‌شود و احتمالات در جهات گوناگون در تکامل آنالیز مؤثر است (از ۱۹۳۳ تاکنون) و نهایتاً آن که حرکت براونی را در هندسهٔ صفحه حتی مؤثرتر از ژئودزیک‌ها ارزیابی می‌کند. از بیم آن که به درازاکشیدن سخن ناپذیرفتنی شود، از برگرداندن همهٔ این دو صفحه خودداری کردم وگرنه بسیار آموزنده و در واقع مورد نیاز است. فهرست مراجع این مقاله سه صفحه است که فقط یکی از کارهای خود کاهان را در بر می‌گیرد و آن هم باید خواندنی باشد: حرکت براونی و آنالیز کلاسیک (۱۹۷۶)، بولتن انجمن ریاضی لندن.
واقعاً مقالهٔ کاهان شایستهٔ ترجمه و درج در فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی است.

۸. **لیشنرویچ**، آندره: هندسه و نسبیت، صفحات ۴۳۱ تا ۴۴۱.

این مقاله، بدون مراجع و بدون بخشبندی، پروازی بر فراز ارتباط دوجانبهٔ هندسهٔ دیفرانسیل و فیزیک نظری، خصوصاً نسبیت در فاصلهٔ زمانی ۱۹۰۰ تا ۱۹۵۰ انجام می‌دهد. توقع عمومی بر آن است که چنین مقاله‌ای پر از فرمول‌های گوناگون باشد، اما نویسنده با تمام مهارت و تسلط بر موضوع به بیانی زیبا تقریباً عاری از فرمول (جز موارد استثنایی) می‌پردازد و از مکانیک لاگرانژ که در آن برای اولین بار خمینه‌های دیفرانسیل به طور طبیعی مورد توجه انسان قرار گرفت تا ریمان و فرض‌های مورد نیاز مبانی هندسه، که به تصریح مطالب ضمنی قبل می‌پردازد، تا مفهوم تانسور توسط بلورشناس فویگت[۶]، پس از آن کریستوفل[۷]، تا برسیم به ریچی[۸] و لوی-چیویتا[۹] اشاراتی به موقعیت تا سال ۱۹۰۰ است که از سویی موجب هندسی شدن موضوع می‌شود و از سوی دیگر کاربردهای متعددی در دینامیک کلاسیک، هیدرودینامیک و الاستیسیته داشت. مقالهٔ ۱۹۰۰ ریچی و لوی-چیویتا (در *Math. Ann.*) را یکی از دوستان و همکاران اینشتاین به نام گروسمن به خوبی می‌شناخت و بر اثر توجه او، اینشتاین در ۱۹۱۱ به بستری آماده برای بسط تئوری نسبیت عام دست یافت.

1) Einstein 2) Russel 3) Perrin 4) Paley 5) Zygmund 6) Voigt 7) Christoffel
8) Ricci 9) Levi-Civita

لیشنرویچ به ما می‌گوید برای تهیهٔ این مقاله، ترجمهٔ فرانسوی مقالهٔ ۷۵ صفحه‌ای ریچی و لوی‐چیویتا را با عنوان «روش‌های هندسهٔ دیفرانسیل مطلق و کاربردهای آن» بازخوانی کردم. در این نوشتار به تشریح نکاتی از آن مقاله می‌پردازد، و پس از یک صفحه در این مورد به داوری دربارهٔ وضع ریاضیات در آن زمان می‌نشیند: باید نابغه‌ای مانند اینشتاین از این عمارت ریچی و لوی‐چیویتا استفاده می‌کرد، زیرا ریاضی‌دانان در جمع به آن کم توجه بودند، فقط پوانکاره بود که درک کرد کاربردهایی در «هندسی کردن مسائل دینامیک» می‌تواند داشته باشد. با پایان گرفتن جنگ جهانی اول و ظهور نسبیت، وضعیت به کلی دگرگون شد و در ۸ صفحهٔ بقیهٔ مقاله لیشنرویچ این تأثیر را شرح می‌دهد. ضمناً گام‌های اساسی رشد هندسهٔ دیفرانسیل را می‌نمایاند و نام‌آوران این زمینه را با کارهای مهم نام می‌برد. این مقاله نیز بسیار جالب است و ترجمهٔ آن برای فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی توصیه می‌شود.

۹. **ماوهین،** ژان: مسائل مقدار مرزی معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی: از تقریبات پیاپی تا توپولوژی، صفحات ۴۴۳ تا ۴۷۷.

این مقاله به زبان انگلیسی، در ۷ بخش و فهرست مراجع مرکب از ۹۱ عنوان نگارش یافته است. جالب توجه است که همهٔ مراجع جز دو مورد تاریخ‌نگاری، مربوط به دورهٔ مورد نظر ۱۹۰۰‐۱۹۵۰ یا احیاناً اواخر قرن ۱۹ است. دو مورد استثنایی یکی کتاب تاریخ آنالیز تابعی، تألیف دیودونه (۱۹۸۱) و دیگری کتاب یوسف لیویل[1] ۱۸۰۹ تا ۱۸۸۲، آقای ریاضیات محض و کاربردی، تألیف لوتسن[2] (۱۹۹۰) است. ماوهین به ما می‌گوید که تاریخ مسألهٔ کوشی قبلاً مورد توجه قرار گرفته و در دایره‌المعارف اوایل قرن بیستم (۱۹۱۰) هم نوشته شده است اما برای مسائل مقدار مرزی چنین نشده است. در مورد معادلات خطی، این مسائل به بروک تیلر[3] و لئونارد اویلر[4] برمی‌گردد که تارهای مرتعش را در قرن ۱۸ بررسی کردند و کار مهم اشتورم و لیوویل در نیمهٔ اول قرن ۱۹ مربوط به آن است که مراجع جالبی را برای مطالعهٔ آن معرفی می‌کند. اما مسائل مقدار مرزی غیرخطی نیز در رشد ریاضیات نقش به سزایی داشته‌اند و نه تنها نظریهٔ معادلات با مشتقات جزئی و حساب تغییرات بلکه توپولوژی جبری و آنالیز تابعی را نیز در بر می‌گیرد. هدف مقاله آن است که کارهای عمدهٔ این زمینه را به اختصار بنمایاند و برای آن که از حد اختصار تجاوز نکند فقط به مسائل وجودی پرداخته است و مباحث مهمی مانند یکتایی، چندگانگی، انشعاب و تقریب را مسکوت می‌گذارد. بخش‌های مقاله به شرح زیرند:

کار بنیانگذارانهٔ پیکار، شرایط دقیق وجود و یکتایی با روش تقریبات پیاپی، روش‌های تغییراتی، روش‌های توپولوژیکی، توسیع و روش‌های لره[5]‐شاودر[6]، جواب‌های بالایی و پایینی و نتایج وابسته به آنها.

مقاله برای مطالعه در درس نظریهٔ معادلات دیفرانسیل معمولی به عنوان پروژهٔ مستقل و یا برای ارائه در سمینارهای دانشجویی و تاریخ ریاضیات بسیار جالب و سودمند است.

1) Joseph Liouville 2) Lützen 3) Brook Taylor 4) Leonard Euler 5) Leray 6) Schauder

۱۰. **نایرنبرگ**، لویز: معادلات با مشتقات جزئی در نیمهٔ اول قرن ، صفحات ۴۷۹ تا ۵۱۹.

در این مقاله که به زبان انگلیسی است، نخست مقدمه (بدون عنوان)، سپس بخشهای زیر می‌آید: معادلات کلی، مشتمل بر قضیهٔ کوشی‌ـکووالوسکی[1]، مسأله باز (وجود جواب غیر تحلیلی)، مسألهٔ طرح سالم[2] و مسألهٔ طرح بیمار[3]؛ معادلات بیضوی، مشتمل بر معادلات خطی با ضرایب منظم، تخمینهای پیشاپیش، اصل ماکسیمم، نظریهٔ درجهٔ (براور[4]، لره‌ـشاودر[5])؛ معادلات بیضوی و حساب تغییرات، مشتمل بر چند مبحث؛ معادلات هذلولوی با مباحث دیگر مشتمل بر دینامیک سیالات، انتگرال تکین (عملگر شبه دیفرانسیل و تبدیل فوریه)، هندسه، نهایتاً کتابنامه‌ای مشتمل بر ۲۳۳ عنوان پایان بخش مقاله است.
مباحث عمده‌ای که نویسنده مطرح می‌کند، وجود جواب، شرایط مرزی گوناگون، شرایط آغازی، یکتایی جواب‌ها، تخمین‌ها، نظم جواب‌ها.
مقاله جالب است اما طبعاً دستورهای متعددی را مطرح می‌کند و با توجه به اطالهٔ کلام در معرفی سایر مقاله‌ها ناچارم از این بحث بگذرم. فقط اشاره کنم که در مقاله بخشهایی مطرح می‌شود که تاریخچه‌های بسیار جالبی را با معرفی مرجع دربرمی‌گیرد. مثلاً در بخش معادلات بیضوی نه تنها به توزیعهای شوارتس[6] (چارچوب طبیعی معادلات با مشتقات جزئی) بلکه به جریانهای[7] دورام[8] و روشهای فریدریکس[9] نیز حقاً می‌پردازد، زیرا این کارها اساساً در نیمهٔ اول قرن بیستم انجام شده و تا اندازه‌ای بر ناتوانیهای دامن‌گیر معادلات با مشتقات جزئی غلبه کرده است و دیده شده است که ابزارهای گوناگون آنالیز تابعی ابزارهایی اجتناب ناپذیر برای رهیافت به بررسی کمی و کیفی معادلات هستند. شخصاً مطالعهٔ این مقاله و ارائه آن را در سمینارهای کارشناسی ارشد، شدیداً توصیه می‌کنم.

۱۱. **پیه**، ژان ـ پُل: انتگرال و اندازه از ۱۹۰۰ تا ۱۹۵۰، صفحات ۵۱۷ تا ۵۶۴.

این مقاله توسط گردانندهٔ اصلی همایش به زبان فرانسه نگارش یافته است و به موضوعی اختصاص دارد که تقریباً همهٔ دانشجویان کارشناسی ارشد ریاضی محض و کاربردی اساساً از آن با اطلاع هستند، زیرا در درس آنالیز حقیقی به نظریهٔ اندازه و انتگرال می‌پردازند. اما آیا می‌دانند که پیش از لبگ، کانتور و پئانو و بورل چگونه اندازهٔ یک مجموعه را در $\mathbb{R}^n$ معرفی می‌کردند و مشکلات اصلی آن چه بود؟ تا آن که قدر مفهوم اندازهٔ بورل (۱۸۹۸) را بشناسند؟ حساب انتگرال نیز در اواخر قرن ۱۹ توسط ریمان، داربو[10]، اشتیلتیس[11] ترقی‌هایی کرده است که از نظریهٔ مطرح شده توسط کوشی بسیار جلو افتاده است،

1) Cauchy-Kowalewski Theorem 2) Well-posed problem 3) Ill-posed problem
4) Brouwer 5) Leray-Schauder 6) Schwartz distrubutions 7) currents 8) de Rham
9) Friedrichs 10) Darboux 11) Stieltjes

اما هنوز به پختگی کافی نرسیده است. در یکی از نخستین مقالات مهم قرن بیستم، به تاریخ ۲۹ آوریل ۱۹۰۱، لُبگ در یادداشتی که به آکادمی علوم پاریس داده است طرح خود را از انتگرال یک تابع بر بازهٔ $[a, b]$ و اندازهٔ یک زیرمجموعهٔ $[a, b]$ به روشنی ارائه می‌کند و آقای پیه در نخستین صفحات مقالهٔ خود نقل‌قول مفصلی از این کارها را می‌آورد و به روشنی نشان می‌دهد که لبگ فرق بین مجموعه‌های اندازه‌پذیر بورل و مجموعه‌های اندازه‌پذیر (لبگ) را تشریح کرده است. در کتابی که لبگ به سال ۱۹۰۳ نوشت و بعدها مرتب تجدید چاپ شد، درس انتگرال، کارهای کوشی، ریمان، داربو، ژردان[1] تشریح می‌شود سپس نظر خود را می‌آورد که به هر تابع کراندار بر $[a, b]$ یک عدد $\int_a^b f(x)dx$ را وابسته کند و ویژگیهای آن را به عنوان اصل موضوع مطرح می‌کند و از آنجا به طرح اندازهٔ مجموعه‌ها هدایت می‌شود، و توابع اندازه‌پذیر نیز تعریف می‌شوند و سپس انتگرال را تعریف می‌کند که اصول موضوع مطرح شده را برمی‌آورند. سپس آقای پیه نقل‌قولی از ۱۹۰۹ بورل را نیز می‌آورد که جالب است به زبان ما تقریباً چنین ترجمه می‌شود:
« ... جامه‌ای است که به اندازه دوخته شده است و با ویژگی‌های اندام هر تابع خاصی تناسب دارد ... »

آقای پیه کارهای دیگر، اعم از مقاله و کتاب را که دیگران نیز پس از لبگ نوشتند، با تشریح و نقل‌قولهای مفید و خواندنی، ارائه می‌کند، از قبیل ژردان، یونگ[2]، دانژاو[3]، لوزین[4]، اگوروف[5]، ریس[6]، رادن[7]، کاراتئودوری[8]، دولاواله‌پوسن[9]، دانیل[10] و غیره. ضمناً بخشهایی را که دیدگاه انتگرال ریمان را همراه با نظریهٔ اندازه در هم بیامیزد و سعی کند انتگرال به معنای دیگر را نیز مطرح کند و نتایج مفیدی بگیرد، می‌آورد، از قبیل دانژاو و پس از او هاکه[11] که مفهوم S-انتگرال را مطرح می‌کند، و یا کار تونلی[12] که می‌خواهد انتگرال لبگ را بدون استفاده از اندازه، بسط دهد. در ۱۹۲۴، الکساندروف[13] ثابت می‌کند که انتگرال پرون و انتگرال دانژاو یکی هستند، که از حیث تاریخی این کار را از سویی هاکه و از سوی دیگر لومان[14] انجام داده‌اند. اگر اجازه دهید بقیهٔ نامهای مطرح شده در این مقاله را مسکوت بگذارم و خوانندهٔ این معرفی کتاب را دعوت کنم که به مطالعهٔ خود مقاله بپردازد. البته نقل‌قولهایی که به زبان اصلی، گاه ایتالیایی و خوشبختانه گاه انگلیسی است، ممکن است برای خوانندهٔ «غیر اروپایی» که ما هستیم چندان قابل استفاده نباشد. سرانجام مقالهٔ پیه با این جمله خاتمه می‌یابد: پس از دورهٔ مورد بحث (۱۹۰۰ تا ۱۹۵۰)، نظریهٔ انتگرال، که یکی از قدیمی‌ترین نظریه‌های تاریخ ریاضیات است، اگر نگوییم همواره یکی از روزآمدترین نظریه‌ها خواهد بود، دست کم می‌توانیم بگوییم که یکی از ضروری‌ترین آنها باقی خواهد ماند. فهرست مراجع مشتمل بر ۸۳ عنوان است.

1) Jordan 2) Young 3) Denjoy 4) Lusin 5) Egorov 6) Riesz 7) Radon 8) Carathéodory 9) de la Vallée Poussin 10) Daniell 11) Hake 12) Tonelli 13) Alexandrov 14) Looman

اشراف بر محتوای این مقاله برای دانشجویان کارشناسی ارشد ریاضی محض و کاربردی بسیار سودمند است.

۱۲. **شوارتس**، ولفگانگ: ملاحظاتی در تاریخ اعداد اول از ۱۸۹۶ تا ۱۹۶۰، صفحات ۴۶۵ تا ۶۱۳.

این مقاله را ولفگانگ آلمانی به زبان انگلیسی نوشته است. پس از چکیدهٔ جالب و کوتاه، که ترجمهٔ آن در پایان خواهد آمد، با مقدمه‌ای شروع می‌کند که به سه بخش تقسیم شده است و پیش از بخش اول با عنوان تک‌نگاری‌های مربوط به اعداد اول، جدول گاهشماری تولد و وفات ۱۸ ریاضیدان ازگاوس[1] تا بومبیری[2] را در بر می‌گیرد که این افراد نقش به‌سزایی در نظریهٔ اعداد اول داشته‌اند. پس از مقدمه، در بخش دوم به قرن ۱۹ می‌پردازد که مشتمل برگاوس، چبیشف[3]، توابع L دیریشله[4] و مقالهٔ ریمان است؛ بخش سوم به هادامار و دولاواله پوسن می‌پردازد که مشتمل بر قضیهٔ اعداد اول، مسائل تحقیقی دیگر راجع به توزیع اعداد اول و شاخه‌های جدید اعداد اول است؛ بخش چهارم با عنوان برهان‌های دیگری از قضیهٔ اعداد اول، مشتمل است بر لانداو، قضایای تاوبری[5]، برهان‌های مقدماتی، بخش پنجم با عنوان دقت بیشتر در جملهٔ باقیمانده، مشتمل است بر جملهٔ باقیمانده در قضیهٔ اعداد اول، بی‌نظمی توزیع اعداد اول، محاسبهٔ $R(x)$، اعداد اول متوالی؛ بخش ششم مقاله، اعداد اول را در تصاعدهای حسابی مطرح می‌کند که مشتمل است بر قضیهٔ پاژ-سیگل-والفیس[6]، قضیهٔ برون- تیچمارش[7]، قضیهٔ بومبیری-وینوگرادوف[8]؛ بخش هفتم به پندارهٔ ریمان می‌پردازد، که مشتمل است بر نتایج موید پنداره، صفرهای حاصل‌جمعهای فرعی، ابزارهای فنی و محاسباتی؛ بخش هشتم به تابع موبیوس[9] می‌پردازد که مشتمل است بر پنداره‌هایی در مورد $\mu(n)$ پندارهٔ مرتنس[10]؛ سرانجام، بخش ۹ به جمعبندی می‌پردازد که مشتمل است بر معادلهٔ فرما[11]، نتیجهٔ آدلمان[12]، فووری[13] و هیث-براون[14] و نتیجه‌گیری.

بخش ۱۰ مقاله مراجع است که شامل ۵۳ عنوان است و پس از آن بخش ۱۱ نیز وجود دارد که از صفحهٔ آخر یکی از نامه‌های ک.ف گاوس به تاریخ ۲۴ دسامبر ۱۸۴۹ در گوتینگن، و از یک صفحهٔ

---

1) Gauss 2) Bombieri 3) Tchebycheff 4) Dirichlet L-functions 5) Tauberian Theorems 6) Page-Siegel-Walfisz 7) Brun-Tichmarsh Theorem 8) Bombieri-Vinogradov Theorem 9) Möbius Function 10) Mertens Conjecture 11) Fermat's Equation 12) Adleman 13) Fouvry 14) Heath-Brown

دست‌نوشتهٔ ریمان راجع به توزیع اعداد اول عکس گرفته و منتشر نموده است.

در داخل این مقاله عکسهایی مناسب با موضوع به چشم می‌خورد که معرفی آنها به بخش عکسها موکول شد.

ترجمهٔ چکیده: نخستین برهان قضیهٔ اعداد اول که می‌گوید

$$\pi(x) \sim x.(\log x)^{-1}$$

در ۱۸۹۶ بوسیلهٔ ژاک هادامار (در بولتن انجمن ریاضی فرانسه جلد ۲۴ صفحات ۱۹۹ تا ۲۲۰) و شارل-ژان دولاواله پوسن (در سالنامهٔ انجمن علوم بروکسل، جلد ۲۰ صفحات ۱۸۳ تا ۲۵۶) به طور مستقل به دست آمد.

این مقاله، با بحث کوتاهی راجع به کارهای ریاضی که منجر به برهان قضیهٔ اعداد اول شد شروع می‌شود و سعی می‌کند که این نتیجهٔ مهم را با تأثیرات آتی آن در طول نیمهٔ اول قرن بیستم در زمینهٔ نظریهٔ تحلیلی اعداد به اختصار بیان کند.

نکات برجستهٔ مطرح شده در مقاله عبارتند از:

- روشهای غربال برون و سلبرگ[1]
- روش هاردی-لیتلوود[2] در نظریهٔ جمعی اعداد
- قضیهٔ پاژ-سیگل-والفیس
- صفرهای تابع زتا در نوار بحرانی و مرتبهٔ آنها، لوینسن[3]
- برهان مقدماتی اردیش-سلبرگ[4] برای قضیهٔ اعداد اول
- قضیهٔ اعداد اول بومبیری - وینوگرادوف

در برخی از قسمتهای مقاله ترجیح داده‌ایم بسطهای جدیدتر نظریه را نیز بیان کنیم.

ارسلان شادمان

دانشگاه تهران، دانشکدهٔ علوم، گروه ریاضی و علوم کامپیوتر،

صندوق پستی ۱۴۱۵۵/۶۴۵۵،

پست الکترونیک: chademan@khayam.ut.ac.ir

1) Selberg 2) Hardy-Littlewood 3) Levinson 4) Erdös-Selberg

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شمارهٔ ۲۷ (پاییز ۱۳۸۰)، صص. ۸۵ تا ۸۷

مسأله

این قسمت از فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی به طرح و سپس حلِ مسائلی در حدِ دروسِ دوره‌های کارشناسی و کارشناسی ارشدِ ریاضیات اختصاص دارد. از کسانی که مایل به ارسال مسائل یا حل مسائلِ مطرح شده می‌باشند، تقاضا می‌شود مسائل خود را به نشانی تهران، مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضی، پژوهشکدهٔ ریاضیات، صندوق پستی ۵۷۴۶ـ۱۹۳۹۵، محمدرضا پورنکی ارسال فرمایند. مسائلِ ارسال‌شده باید همراه با حل کامل مسأله باشد و در مجله به نامِ شخصِ فرستنده درج خواهد شد.

حل مسائل شمارهٔ قبل:

حل مسألهٔ ۴۴. فرض می‌کنیم $f(x) = x^۳ + ax^۲ + bx + c$ چندجمله‌ای مشخصهٔ ماتریس A باشد. در نتیجه $det(A) = -c$ و $tr(A) = -a$، لذا فرض ایجاب می‌کند که $a = ۰$ و $c = -۱$. یعنی $f(x) = x^۳ + bx - ۱$ چندجمله‌ای مشخصهٔ ماتریس A خواهد شد و لذا بنا بر قضیهٔ کیلی‌ـهامیلتون $A^۳ + bA - I = O$. چون A وارون‌پذیر است لذا با ضرب طرفین تساوی اخیر در $A^{-۳}$ به دست می‌آوریم $(A^{-۱})^۳ - b(A^{-۱})^۲ - I = O$. پس $g(x) = x^۳ - bx^۲ - ۱$ چندجمله‌ای مشخصهٔ ماتریس $A^{-۱}$ است و در نتیجه $tr(A^{-۱}) = b = ۰$. پس $A^۳ = I$. □

حل مسألهٔ ۴۵. با تغییر متغیر $x = \sin\theta$ به دست می‌آوریم

$$\int_۰^۱ f(x)dx = \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} f(\sin\theta)\cos\theta\ d\theta.$$

همچنین با تغییر متغیر $x = \cos\theta$ نیز به دست می‌آوریم.

$$\int_۰^۱ f(x)dx = \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} f(\cos\theta)\sin\theta\ d\theta.$$

در نتیجه

$$۲\int_{۰}^{۱} f(x)dx = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \big(f(\sin\theta)\cos\theta + f(\cos\theta)\sin\theta\big)d\theta \leq \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} d\theta = \frac{\pi}{۲}.$$

پس

$$\int_{۰}^{۱} f(x)dx \leqslant \frac{\pi}{۴}. \ \square$$

حل مسألهٔ ۴۶. فرض کنیم $a, b \in R$ دلخواه باشند. می‌توانیم بنویسیم

$$۰ = (a+b)^{۲} = a^{۲} + ab + ba + b^{۲} = ab + ba,$$

و در نتیجه $ab = -ba$. پس برای هر $a, b \in R$داریم $ab = -ba$.
اکنون فرض می‌کنیم a، b و c اعضای دلخواهی از Rباشند. در این صورت

$$abc = a(bc) = -((bc)a) = -(b(ca)) = (ca)b = c(ab) = -((ab)c) = -abc,$$

و لذا $abc + abc = ۰$. $\square$

حل مسألهٔ ۴۷. برای هر $x \geqslant -۱$ داریم

$$۰ \leqslant (x+۱)(x-\frac{۱}{۲})^{۲} = x^{۳} - \frac{۳}{۴}x + \frac{۱}{۴}.$$

چون برای هر $۱ \leqslant i \leqslant n$، $x_i \geqslant -۱$، لذا برای هر $۱ \leqslant i \leqslant n$،

$$x_i^{۳} - \frac{۳}{۴}x_i + \frac{۱}{۴} \geqslant ۰.$$

در نتیجه

$$\sum_{i=۱}^{n}(x_i^{۳} - \frac{۳}{۴}x_i + \frac{۱}{۴}) \geqslant ۰,$$

$$\sum_{i=۱}^{n} x_i^{۳} - \frac{۳}{۴}\sum_{i=۱}^{n} x_i + \sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{۴} \geqslant ۰,$$

$$-\frac{۳}{۴}\sum_{i=۱}^{n} x_i \geqslant -\frac{۱}{۴}n,$$

$$\sum_{i=۱}^{n} x_i \leqslant \frac{n}{۳}. \ \square$$

مسائل جدید

۴۸. فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد که درآیهٔ (i,j)ــام آن برابر با بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک i و j است. دترمینان ماتریس A را محاسبه کنید.

۴۹. فرض کنید سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد. آیا سری زیر همگرا است؟

$$a_1 + a_2 + a_4 + a_3 + a_8 + a_7 + a_6 + a_5 + a_{16} + a_{15} + \cdots + a_9 + a_{32} + \cdots .$$

۵۰. فرض کنید A یک ماتریس 3×3 باشد با این ویژگی که برای هر بردار ستونی u از $\mathbb{R}^3$، بردارهای Au و u بر هم عمود باشند. ثابت کنید بردار ستونی $v \in \mathbb{R}^3$ موجود است طوری که برای هر بردار ستونی u از $\mathbb{R}^3$ داریم $Au = v \times u$ که در آن $\times$ حاصل‌ضرب خارجی را نمایش می‌دهد.

۵۱. فرض کنید f تابعی باشد دو بار مشتق‌پذیر با مشتقات پیوسته روی بازهٔ $(0, +\infty)$. اگر $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to 0^+} f''(x) = +\infty$، ثابت کنید

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{f'(x)} = 0.$$

تشکر: از آقای سلمان رستمی از زنجان که حل مسائل ۴۰، ۴۱ و ۴۲ را ارسال کرده‌اند متشکریم.