بسم الله الرحمن الرحیم

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

ISSN 1022-6443

سال ۲۱، شمارهٔ ۲، پاییز ۱۳۸۱
شمارهٔ پیاپی: ۲۹

صاحب‌امتیاز: انجمن ریاضی ایران
مدیر مسؤول: محمدمهدی ابراهیمی
سردبیر: محمد اردشیر
ویراستار ارشد: حسین معصومی همدانی
مدیر اجرایی: سعید سیدآقا بنی‌هاشمی

ویراستار: رویا درودی
حروفچینی: TeX-پارسی ـ دفتر انجمن ریاضی ایران
همکار این شماره: فریده صمدیان

نشانی:
تهران ــ صندوق پستی ۴۱۸ـ۱۳۱۴۵
iranmath@ims.ir
http://www.ims.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی نشریهٔ علمی‌ـ‌ترویجیِ انجمن ریاضی ایران است که به چاپ و انتشارِ مطالبی می‌پردازد که هم جنبه‌های عام و فلسفیِ ریاضیات را ترویج دهند و هم بازگوکنندهٔ فرهنگ و روندِ ریاضیاتِ حاکم بر جامعهٔ ریاضی باشند. فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی از مقالات در زمینه‌های ریاضیات محض، ریاضیات کاربردی، علومِ کامپیوتر، فیزیک نظری، و کاربردهای ریاضیات در علومِ دیگر که در چارچوب زیر نوشته شده باشند استقبال می‌کند:

- ارائهٔ موضوعیْ فعال و مطرح در ریاضیات در قالبی که علاقه‌مندان به زمینه‌های پژوهشی را برای پیگیریِ موضوعِ مورد بحث آماده سازد؛
- ترجمهٔ مقاله‌هایی از نوع یاد شده در بالا یا ترجمهٔ مقالاتِ کلاسیکِ ریاضی (ترجمهٔ آزاد پذیرفته نمی‌شود)؛
- ارائهٔ موضوعاتِ آموزشی حاوی نکات و قضایا و برهانهایی ساده‌تر از آنچه در متونِ کلاسیک موجود است.

علاقه‌مندان می‌توانند سه نسخه از مقالهٔ خود را با شرایطِ زیر به نشانی دفتر مجله ارسال دارند:

- متن مقاله روی یک طرف کاغذ، یک خط در میان، و با حاشیهٔ کافیْ تایپ شده یا ترجیحاً، در دیسکتِ کامپیوتری تحت ادیتورِ «TeX-پارسی» یا «فارسی‌تک» باشد.
- فرستادنِ اصلِ مقالهٔ ترجمه شده ــ با ذکر نشانیِ کاملِ آن ــ لازم است.
- اصطلاحاتِ ریاضیِ به‌کار رفته باید بر طبقِ واژه‌نامهٔ ریاضی و آمارِ انجمن ریاضی ایران باشد و اگر لغتی در این واژه‌نامه نیست، معادلِ انگلیسیِ آن داده شود. در صورتی که مؤلف یا مترجم معتقد است اصطلاحِ خاصی از واژه‌نامه مناسب نیست باید ترجیح دادنِ اصطلاحِ پیشنهادیِ خود را توجیه کند.

هیأت تحریریه در رد، قبول، حک، و اصلاحِ مقالاتْ آزاد است و ملزم به ارایه دلایل توجیهی نیست.

- مقالات ارسالی به فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی نباید برای بررسی و چاپ به مجلات دیگر ارسال شده باشد.

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

سال ۲۱، شمارهٔ ۲، پاییز ۱۳۸۱
(تاریخ انتشار: زمستان ۱۳۸۲)
شمارهٔ پیاپی: ۲۹

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی هر سال در دو شماره (بهار و پاییز) منتشر و به اعضای حقیقی، حقوقی و مشترکین انجمن ریاضیِ ایران ارسال می‌شود.

علاقه‌مندان به عضویت حقیقی و دانشگاه‌ها، مؤسسات و کتابخانه‌ها که تمایل به عضویت حقوقی یا اشتراک سالانه دارند می‌توانند با دبیرخانهٔ انجمن ریاضی ایران تماس حاصل نمایند.

شماره‌های قبلی این مجله با هماهنگی دبیرخانه قابل فروش می‌باشند.

فهرست مطالب

روی جلد: آرتور کِیلی (Arthur Cayley)

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شمارهٔ ۲۹ (پاییز ۱۳۸۱)، صص. ۱ تا ۱۵

رستهٔ هندسه‌های تصویری

فیروز پاشایی

مقدمه

جورج موهر دانمارکی (۱۶۹۷_۱۶۴۰) و لورنزو ماشرونی ایتالیایی (۱۸۰۰_۱۷۵۰) به طور جداگانه ثابت کردند که ساختن تمام اشکال در هندسهٔ مسطحهٔ اقلیدسی را می‌توان فقط با پرگار انجام داد و حذف خط اشکالی ایجاد نمی‌کند. سپس این سؤال مطرح شد که با حذف دایره و اکتفا به خط چه روی می‌دهد؟ این بار چیزهایی از هندسه کم می‌شود و آنچه باقی می‌ماند هندسهٔ تصویری نام گرفته است. هندسهٔ تصویری رسماً توسط دزارگ فرانسوی (۱۶۶۱_۱۵۹۱) و شاگردان مونژ ابداع شد و طی قرون هفدهم و هیجدهم به بالاترین درجهٔ رشد خود رسید. گفتنی است که این هندسه از هندسهٔ اقلیدسی ساده‌تر و مفیدتر است زیرا با استفاده از چند اصل موضوعهٔ ساده، احکام غیرمنتظرهٔ جالبی (از قبیل قضیه‌های دزارگ، پاپوس و پاسکال) را به دست می‌دهد. به ویژه در هندسهٔ مقاطع مخروطی قضایای قوی و جامعی را مطرح نموده است. یک دلیل اصلی این برتری، وجود خاصیت دوگان در این هندسه است. آرتور کایلی (۱۸۹۵_۱۸۲۱) و فلیکس کلاین (۱۹۲۵_۱۸۴۹) به کاربردهای هندسهٔ تصویری در جنبه‌های نااقلیدسی نیز پی برده‌اند. کایلی گفته است: هندسهٔ متریک جزئی از هندسهٔ تصویری است و هندسهٔ تصویری تمام هندسه است.

در اواخر قرن نوزدهم تا نیمهٔ اول قرن بیستم (۱۹۵۵_۱۸۵۰)، مبانی این هندسه، به‌خصوص با کارهای کایلی و اشتاینر (هندسه‌های متناهی) و گراسمان، یک دگرگونی اساسی یافته و در حیطهٔ هندسهٔ جبری مورد مطالعه واقع شد، و این منجر به کشف قضایای بسیار جالب در این شاخه گردید. به‌طوری که امروزه متخصصین این شاخه در مطالعهٔ جامع یک هندسهٔ واریته یا یک اسکیم از شیوهٔ غوطه‌ور ساختن آن در یک فضای تصویری بهره می‌برند.

بنابراین، اهمیت بنیادی شاخهٔ نسبتاً جدید هندسه‌های تصویری و همچنین کاربردهای پایه‌ای آن در مطالعهٔ فراکتال‌ها، گراف، ترکیبیات، گرافیک‌های کامپیوتری، تئوری کدنگاری و . . . ، آشنایی جامع و عمیق با آن را ضروری می‌نماید.

در دو دههٔ اخیر این شاخه در یک رهیافت رسته‌ای (کاتگوریک) سمت و سو گرفته است. به بیان دقیق‌تر، ردهٔ تمام هندسه‌های تصویری در یک رسته به‌نام Proj مورد توجه ویژهٔ متخصصان قرار گرفته و با ایجاد چشم‌اندازی امیدوارکننده، میدان کار جدیدی را برای اهل پژوهش مهیا کرده‌است. کشف ارتباط صریح و مفید بین Proj و رسته‌هایی از قبیل Lat، Par و Vec و $\cdots$، خواص هندسه‌های تصویری را به برخی ساختارهای دیگر قابل تعمیم می‌سازد. البته، داشتن شناخت کافی از آن ساختارها نیز در مطالعهٔ هندسه‌های تصویری تأثیر به‌سزایی خواهد داشت.

هدف اصلی این مقاله، معرفی رستهٔ Proj و بیان ویژگی‌های انواع ریختی (مورفیسم)های آن است. در سه بخش اول، پس از تعریف هندسهٔ تصویری و ریختی بین دو هندسه، به توصیف و بیان برخی ویژگی‌های مفاهیم همریختی، تکریختی، بروریختی، یکریختی، ریختی‌های آغازی و پایانی، انواع نشانندها و ریختی‌های خارج‌قسمت (در این رسته) پرداخته می‌شود. در بخش‌های ۴ و ۵، تعریف هندسه‌های خارج قسمت، معرفی زیررسته‌ای به‌نام HProj و بیان قضایای یکریختی در آن و بالاخره احکامی در تجزیهٔ ریختی‌ها را خواهیم داشت.

۱. تعاریف و خواص مقدماتی

برمبنای تعریف جبری ارائه‌شده توسط کلاین برای هندسه، می‌توان گفت هندسهٔ تصویری دسته‌ای از خواص هندسی اشیاء را مطالعه می‌کند که تحت نگاشت تصویر به مرکز یک نقطه پایا می‌مانند. تعریف این هندسه به شیوهٔ اصل موضوعی، با مفاهیم اولیهٔ نقطه، خط و گذر به‌صورت زیر ارائه شده است:

یک هندسهٔ تصویری عبارت است از یک دستگاه $S = (P, L)$ متشکل از مجموعهٔ نقاط P و مجموعهٔ خطوط L، که در اصول سه‌گانهٔ زیر صدق می‌کنند:

۱ـ از هر دو نقطه دست کم یک خط می‌گذرد؛

۲ـ از هر دونقطهٔ متمایز حداکثر یک خط می‌گذرد؛

۳ـ اگر دو خط l_1 و l_2 از نقطه p بگذرند، به علاوه l_1 از نقاط a و b و l_2 از نقاط c و d بگذرد، در این صورت خط گذرنده از a و c با خط گذرنده از b و d در نقطه‌ای مانند q تلاقی می‌کنند.

۱.۱ مثال (۱) . صفحهٔ تصویری فانو: مجموعهٔ نقاط $P = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و مجموعهٔ خطوط L:

$$
\begin{aligned}
L = \{\ & l_{۱} = \{۱, ۲, ۴\}, l_{۲} = \{۱, ۳, ۰\},\\
& l_{۳} = \{۱, ۵, ۶\}, l_{۴} = \{۲, ۳, ۵\},\\
& l_{۵} = \{۲, ۶, ۰\}, l_{۶} = \{۳, ۴, ۶\},\\
& l_{۷} = \{۴, ۵, ۰\}\}.
\end{aligned}
$$

مثال (۲) مجموعهٔ نقاط $P = \{۰, ۱, ۲, ۳, \ldots, ۱۳\}$ و مجموعهٔ خطوط (هر خط شامل دقیقاً ۴ نقطه) به صورت زیر:

$$
\begin{aligned}
L = \ & \{\{۱, ۲, ۳, ۱۱\}.\{۴, ۵, ۶, ۱۱\}, \{۷, ۸, ۹, ۱۱\},\\
& \{۱, ۴, ۷, ۱۳\}, \{۲, ۵, ۸, ۱۳\}, \{۳, ۶, ۹, ۱۳\},\\
& \{۱, ۵, ۹, ۱۲\}, \{۲, ۶, ۷, ۱۲\}, \{۳, ۴, ۸, ۱۲\},\\
& \{۱, ۶, ۸, ۱۰\}, \{۲, ۴, ۹, ۱۰\}, \{۳, ۵, ۷, ۱۰\},\\
& \{۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳\}\}.
\end{aligned}
$$

در یک رهیافت رسته‌ای بیان زیر از تعریف هندسهٔ تصویری مورد توجه قرار می‌گیرد:

تعریف ۲.۱ یک هندسهٔ تصویری عبارت است از یک مجموعهٔ G (به‌نام مجموعهٔ نقاط) به همراه یک رابطهٔ سه‌تایی $l \subseteq G \times G \times G$ که در اصول موضوعهٔ زیر صدق می‌کنند:

$$\forall a, b \in G, l(a, b, a) \quad (۱)$$

$$(l(a, p, q)\&l(b, p, q)\&p \neq q) \Rightarrow l(a, b, p) \quad (۲)$$

$$(l(p, a, b)\&l(p, c, d)) \Rightarrow (\exists q \in G, l(q, a, c)\&l(q, b, d) \quad (۳)$$

نقاط a و b و c از G را همخط می‌نامیم وقتی که $l(a, b, c)$. تا پایان، منظور ما از هندسه، هندسهٔ تصویری خواهد بود. مثال کلاسیک هندسهٔ تصویری را به زبان تعریف اخیر مطرح می‌کنیم.

۳.۱ مثال فرض کنیم V یک فضای برداری روی (شبه) میدان K باشد و $V^* = V\backslash 0$. روی V^* رابطهٔ هم‌ارزی Δ را به معنی وابستگی خطی درنظر می‌گیریم. اگر برای هر X و Y و Z در $\frac{V^*}{\Delta}$، $l(X, Y, Z)$ به معنی این باشد که X و Y و Z دارای نماینده‌های وابستهٔ خطی در V^* هستند، $\frac{V^*}{\Delta}$ به همراه رابطهٔ همخطی l را هندسهٔ تصویری وابسته به V نامیده و با $P(V)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴.۱ هندسهٔ (G, l) و $S \subseteq G$ را در نظر می‌گیریم.

الف) S را یک زیرهندسه از G می‌نامند اگر به همراه تحدید l به آن تشکیل یک هندسه دهد؛

ب) S را یک زیرفضا از G می‌نامند اگر $\forall a \neq b \in S : (l(a,b,c) \Rightarrow c \in S)$

هر زیرفضا یک زیرهندسه است ولی عکس آن برقرار نیست. نمادهای $<$ و $\triangleleft$ را به ترتیب برای زیرهندسه و زیرفضا به کار می‌بریم. هرگاه $A \subseteq G$، کوچکترین زیرهندسهٔ (به ترتیب زیرفضای) شامل A را با $S(A)$ (با $C(A)$) نمایش می‌دهیم. بدیهی است که $C(\{a\}) = \{a\}$. برای $a \neq b \in G$، خط شامل a و b را با $a \vee b := C(\{a,b\})$ تعریف می‌کنیم و برای $E \triangleleft G$ و F، $E \vee F := C(E \cup F)$.

لم ۵.۱ اگر G یک هندسه باشد و $E \subseteq K \triangleleft G$، آنگاه $E \triangleleft G \Leftrightarrow E \triangleleft K$.

تعریف ۶.۱ هندسهٔ G و $A \subseteq G$ را در نظر می‌گیریم.

الف) اگر $\forall a \in A : a \notin C(A - \{a\})$، آنگاه A را مستقل در G می‌نامیم؛

ب) اگر $C(A) = G$، A را یک مولد G می‌نامیم؛

پ) هر مولد G را که مستقل باشد یک پایه برای G می‌نامیم.

روشن است که $A \subseteq G$ مستقل است اگر و تنها اگر تمام زیرمجموعه‌های متناهی آن مستقل باشند. درواقع، هر پایه یک زیرمجموعهٔ مستقل بیشین است. بنا برگزارهٔ زیر، تمام پایه‌های یک هندسه هم‌عدد هستند و می‌توان برای زیرفضاها مشخصهٔ بُعد را تعریف کرد.

گزاره ۷.۱ (اشتاینیتز) اگر $I \subseteq G$ مستقل و $A \subseteq G$ یک مولد G باشد، آنگاه یک نگاشت یک به یک $\phi : I \to A$ موجود است ([۴]).

تعریف ۸.۱ در هندسهٔ G، برای $E \triangleleft G$ با پایهٔ B، بُعد E را تعریف می‌کنیم: $\dim E := \mathrm{Card}(B) - ۱$.

در یک هندسه، نقاط زیرفضاهای صفربعدی و خطوط زیرفضاهای یک بعدی‌اند. زیرفضاهای دوبعدی را صفحه می‌نامند. خانوادهٔ تمام زیرفضاهای هندسهٔ G را با $L(G)$ نمایش می‌دهند. می‌توان دید که $L(G)$ با رابطهٔ شمول تشکیل یک مشبکه می‌دهد که تمام، مدولار، اتُمیستیک[1] و پیوستهٔ بالایی است. به هر مشبکه با این چهار ویژگی یک مشبکهٔ تصویری می‌گویند. (طبق تعریف، مشبکهٔ تمام آن است که هر زیرمجموعه‌اش یک کوچکترین کران بالا و یک بزرگ‌ترین کران پایین دارد. در مشبکهٔ مدولار برای هر سه عضو x و y و z با شرط $x \leq z$، تساوی $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$ برقرار است. در مشبکهٔ اتمیستیک برای هر عنصر x داریم: $x = \vee\{a | a$ یک اتم است و $a \leq x\}$. بالاخره در مشبکهٔ پیوستهٔ بالایی به ازای هر عنصر x و زیرمجموعه سودار D داریم: $x \wedge (\vee D) = \vee(x \wedge D)$.

تعریف ۱۰.۱ یک رسته متشکل است از یک رده از اشیاء و به ازای هر زوج (A,B) از اشیاء یک مجموعهٔ $Mor(A,B)$ از ریختی‌های از A به B، به علاوهٔ یک قانون ترکیب ریختی‌ها (به لحاظ صوری مشابه ترکیب توابع) که دارای خاصیت شرکت‌پذیری می‌باشند و به ازای هر شیء A یک ریختی $1_A : A \to A$ که نقش عنصر همانی را نسبت به این ترکیب ایفا می‌کند.

1) Atomistic

ثابت شده است که Proj با ردهٔ تمام مشبکه‌های تصویری هم‌ارز است ([۴]).

تعریف ۱۱.۱ در ردهٔ C، ریختی $f : A \to B$ را در نظر می‌گیریم.

الف) f را یک یکریختی می‌نامند اگر ریختی $g : B \to A$ موجود باشد به طوریکه $fog = 1_B$ و $gof = 1_A$،

ب) f را تکریختی می‌نامند اگر به ازای هر دوریختی $g_1, g_2 : C \to A$، از $fog_1 = fog_2$ نتیجه شود: $g_1 = g_2$؛

پ) f را بِروریختی می‌نامند اگر به‌ازای هر دوریختی $g_1, g_2 : B \to C$ و از $g_1of = g_2of$ نتیجه شود: $g_1 = g_2$.

تعریف ۱۲.۱ ردهٔ مقیّد رده‌ای است که اشیاء آن مجموعه و ریختی‌های آن نگاشت‌اند.

در ردهٔ مقیّد C ریختی $g : A \to B$ را در نظر می‌گیریم. اگر به ازای هر نگاشت $h : C \to A$ (به ترتیب $h : B \to C$) بین اشیاء C، از ریختی بودن goh (به ترتیب hog)، ریختی‌بودن h نتیجه شود، g را یک ریختی آغازی (به‌ترتیب پایانی) می‌نامند. منظور از یک نشاننده در C، ریختی آغازینی است که تکریختی باشد. ریختی خارج قسمت ریختی پایانی‌ای است که بروریختی باشد.

۲. ریختی‌های رده‌های Proj و HProj

مشابه ردهٔ Par، در ردهٔ Proj ریختی‌ها به صورت نگاشت‌های جزئی تعریف می‌شوند.

تعریف ۱.۲ هرگاه G_1 و G_2 دو هندسه باشند و $N < G_1$، نگاشت $g : G_1/N \to G_2$ را یک ریختی از G_1 به G_2 می‌نامیم اگر داشته باشیم:

$$(M_1) \quad \forall a, b \in G_1 \setminus N, \forall c \in N : l_1(a, b, c) \Rightarrow ga = gb$$
$$(M_2) \quad \forall a, b, c \in G_1 \setminus N : l_1(a, b, c) \Rightarrow l_2(ga, gb, gc).$$

این ریختی را با $g : G_1 - \to G_2$ نمایش داده و N را هستهٔ g نامیده و با $K(g)$ و نگارهٔ g را با Img نمایش می‌دهیم. در حالت $Img = \phi$، g را ریختی تهی می‌نامیم (در این حالت $K(g) = G_1$). به جای دو اصل فوق می‌توان یک اصل به صورت $(M) : F \lhd G_2 \Rightarrow (g^{-1}F) \cup N \lhd G_1$ ، یا به طور معادل به صورت $(\bar{M}) : \forall A \subseteq G_1 : g(C_1(A) - N) \subseteq C_2(g(A - N))$ درنظر گرفت.

بنا بر تعریف رده، باید نوعی ترکیب بین ریختی‌ها تعریف شود.

تعریف ۲.۲ فرض کنید $g_1 : G_1 - \to G_2$ و $g_2 : G_2 - \to G_3$ دو ریختی با هسته‌های N_1 و N_2 باشند. ریختی $g_2og_1 : G_1 - \to G_3$ با هستهٔ $N_1 \cup g_1^{-1}N_2$ و ضابطهٔ $(g_2og_1)a := g_2(g_1a)$ قابل تعریف است و شرایط ریختی را دارد، زیرا اگر $E \lhd G_3$، آنگاه:

$$(g_2og_1)^{-1}E \cup N_1 \cup g_1^{-1}N_2 = g_1^{-1}(g_2^{-1}E) \cup N_1 \cup g_1^{-1}N_2 = g_1^{-1}(g_2^{-1}E \cup N_2) \cup N_1 \lhd G_1.$$

نگاشت همانی $id : G \to G$ با هستهٔ ϕ نقش ریختی همانی را دارد. خانوادهٔ هندسه‌های تصویری به عنوان ردهٔ اشیاء به همراه مجموعهٔ ریختی‌های بین آنها رستهٔ Proj را تشکیل می‌دهد. به دلیل جزئی‌بودن این ریختی‌ها،تابعگون (فانکتور) فراموش‌کار $proj \to Par$ به طور طبیعی تعریف می‌شود. همچنین، (در مقالهٔ دیگری نشان خواهیم داد که) در بیان این ریختی‌ها برحسب یک مختصات همگن خاص، هر ریختی با یک نگاشت نیمخطی بین دو فضای برداری و هسته‌اش با هستهٔ آن نگاشت متناظر می‌گردد. بنابر امکان ناصفربودن هستهٔ نگاشت‌های نیمخطی، جزئی‌بودن ریختی‌ها در این رسته ضروری است.

طبیعی است که در یک رهیافت رسته‌ای، مطالعه و شناسایی انواع ریختی‌های بین هندسه‌های تصویری نقش اساسی در بررسی ساختار و نیز شناسایی زیرساختارهای رستهٔ Proj خواهد داشت.

حال، با تعریف ریختی خاصی به نام همریختی، زیر رستهٔ جالبی را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۳.۲ ریختی $g : G_1 - \to G_2$ با هستهٔ N را یک همریختی می‌نامیم اگر در اصول زیر صدق کند:

$(H_1) : \forall a, b \in G_1 \setminus N : ga \neq gb \Rightarrow ga \vee ga \subseteq g(a \vee b)$ (خاصیت بازتابی g);

$(H_2) : \forall a, b \in G_1 \setminus N : (a \neq b \wedge ga = gb) \Rightarrow (a \vee b) \cap N \neq \phi$ (خاصیت منظم بودن g).

گزارهٔ ۴.۲ الف) ریختی همانی، همریختی است؛

ب) ترکیب دو همریختی، همریختی است.

خانوادهٔ هندسه‌های تصویری به همراه همریختی‌های بین آنها زیررستهٔ HProj از Proj را تشکیل می‌دهند. در بخش ۴ با تفصیل بیشتری به این زیررسته خواهیم پرداخت.

۳. گزاره‌هایی در رستهٔ Proj

در اینجا به بیان و اثبات چند گزارهٔ مهم در Proj می‌پردازیم.

گزارهٔ ۱.۳ ریختی $g : G_1 - \to G_2$ را در نظر می‌گیریم. این ریختی

الف) بِروریختی است اگر و فقط اگر پوشا باشد؛

ب) تکریختی است اگر و فقط اگر یک به یک باشد و $K(g) = \phi$؛

پ) یکریختی است اگر و فقط اگر تکریختی و پوشا باشد و داشته باشیم:

$\forall a, b, c \in G_1 - K(g) : l_1(a, b, c) \Leftrightarrow l_2(ga, gb, gc)$ (به مرجع [۱۰] رجوع کنید).

اثبات الف) فرض‌کنیم g پوشا و $h_1, h_2 : G_2 - \to G_3$ ریختی‌هایی باشند که: $h_1 o g = h_2 o g$. برای هر $x \in K(h_1)$، یک $y \in G_1 - K(g)$ هست که $x = g(y)$ و در نتیجه $y \in g^{-1}(K(h_1))$. چون $y \in K(h_1 o g) = K(h_2 o g) = K(g) \cup g^{-1}(K(h_2))$ و $y \notin K(g)$، پس $y \in g^{-1}(K(h_2))$. و $x \in K(h_2)$ بنابراین $K(h_1) \subseteq k(h_2)$. اثبات $\supseteq$ مشابه است. پس $K(h_1) = K(h_2)$.

همچنین، چون g پوشااست، برای هر $x \in G - K(h_1)$، یک $y \in G_1 - K(g)$ هست که $x = g(y)$ و داریم $h_1(x) = (h_1 og)(y) = (h_2 og)(y) = h_2(x)$. بنابراین $h_1 = h_2$. حال برعکس، با فرض یک $p \in G_2 - Im(g)$ و اختیار هندسهٔ $G = \{q\}$ و دوریختی $h_1 : G_2 \to G$ و $h_2 : G_2 - \{p\} \to G$ خواهیم داشت:

$$K(h_1 og) = K(g) \cup g^{-1}(K(h_1)) = K(g) = K(g) \cup g^{-1}(K(h_2)) = K(h_2 og)$$

و درنتیجه $h_1 og = h_2 og$. درحالی که $h_1 \neq h_2$ و این با فرض تکریختی بودن g در تناقض است.

ب) هرگاه $h_1, h_2 : G - \to G_1$ ریختی‌هایی باشند که $goh_1 = goh_2$، از $K(g) = \phi$ نتیجه می‌شود $K(h_1) = K(goh_1) = K(goh_2) = K(h_2)$. همچنین برای هر $x \in G - K(h_1)$ دلخواه داریم: $(goh_1)x = (goh_2)x \Rightarrow g(h_1(x)) = g(h_2(x)) \Rightarrow h_1(x) = h_2(x)$. پس $h_1 = h_2$. برعکس، فرض می‌کنیم $K(g) \neq \phi$ (فرض خلف). یک $p \in K(g)$ و یک هندسهٔ ناتهی دلخواه G اختیار می‌کنیم.
اگر $h_1 : G \to G_1$ ریختی ثابت با مقدار p و هستهٔ ϕ و $h_2 : G \to G_1$ ریختی تهی باشد، خواهیم داشت $goh_1 = goh_2$ ولی $h_1 \neq h_2$. این با تکریختی‌بودن g در تناقض است. بنابراین $K(g) = \phi$. همچنین، اگر فرض کنیم g یک به یک نباشد، عناصر متمایز $a, b \in G_1 \setminus K(g)$ وجود خواهند داشت که $ga = gb$. برای هر هندسهٔ ناتهی G و ریختی‌های ثابت $h_1, h_2 : G - \to G_1$ به ترتیب با مقادیر a و b خواهیم داشت $goh_1 = goh_2$ و $h_1 \neq h_2$. باز این با تکریختی‌بودن g در تناقض است. پس g یک به یک است.

پ) یکریختی g دارای وارون g' بوده و درنتیجه تکریختی و بروریختی است. بنا بر M_2 داریم $l_2(ga, gb, gc) \Rightarrow l_1(g'(ga), g'(gb)g'(gc)) \Rightarrow l_1(a, b, c)$ و $l_1(a, b, c) \Rightarrow l_2(ga, gb, gc)$.

گزارهٔ زیر شرایط معادلی را دربارهٔ ارتباط تکریختی با زیرفضا و پایه بیان می‌کند.

گزارهٔ ۲.۳ برای تکریختی $g : G_1 \to G_2$ شرایط زیر معادل‌اند: [۱۰]

(۱) پایهٔ B از G_1 وجود دارد که gB مستقل است؛

(۲) اگر $A \subseteq G_1$ مستقل باشد، gA نیز مستقل است؛

(۳) برای هر $E \triangleleft G_1$، $\dim E = \dim C_2(gE)$؛

(۴) برای هر $E \triangleleft G_1$، $E = g^{-1}(C_2(gE))$؛

(۵) برای هر $E \triangleleft G_1$، یک $E_2 \triangleleft G_2$ هست که $E = g^{-1}(E_2)$؛

(۶) برای هر $A \subseteq G_1$ داریم $C_1(A) = g^{-1}(C_2(gA))$.

اثبات(۱ ⇐ ۲) فرض کنیم $A \subseteq G_1$ مستقل و متناهی باشد. یک $B' \subseteq B$ متناهی وجود دارد که $A \subseteq C_1(B')$ بنا بر (۱ـ۷)، $B'' \subseteq B$ وجود دارد که $A \cup B''$ پایه‌ای برای $C_1(B')$ است. gB' و gb''

مستقل‌اند و داریم $gB' \subseteq g(C_1(A\cup B'')) \subseteq C_2(gA\cup gB'')$ و $\infty > |gA\cup gB''| = |gB'|$.
پس gA نیز مستقل است؛

(۲ $\Leftarrow$ ۳) بنا بر $(\bar{M})$، اگر A پایه‌ای برای $E \triangleleft G_1$ باشد، gA پایه‌ای برای $C_2(gE)$ خواهد بود پس $\dim E = |A| = |gA| = \dim C_2(gE)$؛

(۳ $\Leftarrow$ ۴) با فرض $E \triangleleft G_1$ و $F := g^{-1}C_2(gE)$ داریم $E \subseteq F \triangleleft G_1$ و $gF \subseteq C_2(gE)$ و در نتیجه $C_2(gE) = C_2(gF)$. پس $\dim E = \dim F$، که در حالت $\dim E < \infty$ نتیجه می‌دهد $E = F$. در حالت $\dim E = \infty$ کافی است نشان دهیم هر پایهٔ E یک پایه برای F است؛

(۴ $\Leftarrow$ ۵) قرار دهید $E_2 := C_2(gE)$.

(۵ $\Leftarrow$ ۶) اگر $A \subseteq G_1$، داریم $C_1(A) \subseteq C_1(g^{-1}(gA)) \subseteq g^{-1}(C_2(gA))$. به علاوه یک $E_2 \triangleleft G_2$ وجود دارد که $C_1(A) = g^{-1}(E_2)$. چون $gA \subseteq E_2$، پس $C_2(gA) \subseteq E_2$ و $g^{-1}(C_2(gA)) \subseteq g^{-1}E_2 = C_1A$؛

(۶ $\Leftarrow$ ۱) به روش برهان خلف ثابت می‌شود.

تقریباً در همهٔ رسته‌ها، نشانند‌ه‌ها و ریختی‌های خارج قسمت نقش قابل توجهی دارند. قسمتی از بحث را به این ریختی‌ها در Proj اختصاص می‌دهیم.

گزارهٔ ۳.۳ برای ریختی $g : G_1 - \to G_2$ شرایط زیر معادلند: [۱۰]

(۱) ریختی g نشاننده است؛

(۲) g تک‌ریختی است و $\forall(a,b,c)\in G_1 - K(g) : l_1(a,b,c) \Leftrightarrow l_2(ga,gb,gc)$ ؛

(۳) $K(g) = \phi$ و تصویر هر زیرمجموعهٔ مستقل دو (سه) عضوی از G_1، یک زیرمجموعهٔ مستقل دو (سه) عضوی از G_2است؛

(۴) gیک یکریختی از G_1 به‌روی زیر هندسه‌ای از G_2 است؛

(۵) g آغازی است.

اثبات (۱ $\Leftarrow$ ۲) ثابت می‌کنیم $l_2(ga,gb,gc) \Rightarrow l_1(a,b,c)$. فرض می‌کنیم $l_2(ga_1,ga_2,ga_3)$. هندسهٔ یک بعدی $G = \{b_1,b_2,b_3\}$ و نگاشت $h : G \to G_1$ با ضابطهٔ $hb_i = a_i$ $(i = 1,2,3)$ را در نظر می‌گیریم. goh ریختی، g آغازی و در نتیجه h ریختی است. پس $l_1(a_1,a_2,a_3)$ ؛

(۲ $\Leftarrow$ ۳) از تعریف مجموعه‌های مستقل نتیجه می‌شود؛

(۳ $\Leftarrow$ ۴) با فرض $G' = g(G_1)$, نگاشت $\bar{g} : G_1 \to G'$ با ضابطهٔ $\bar{g}x := gx$ دوسویی است و داریم $l_2(\bar{g}a,\bar{g}b,\bar{g}c) \Leftrightarrow l_1(a,b,c)$. پس ، $G' < G_2$ و $\bar{g}$ یکریختی است؛

(۴ $\Leftarrow$ ۵) بدیهی است؛

(۵ $\Leftarrow$ ۱) فرض کنیم $K(g) \neq \phi$ (فرض خلف). یک $p \in K(g)$ و یک هندسهٔ G را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $A \subseteq G$ زیرفضای G نباشد، نگاشت $h : G \setminus A \to G_1$ با مقدار ثابت p ریختی

نیست در حالی که goh ریختی (تهی) است که این با فرض در تناقض است. ۱ـ۱ بودن g نیز به روش برهان خلف ثابت می‌شود. پس g نشاننده است.

تعریف ۴.۳ هر تکریختی را که در شرایط گزارهٔ اخیر صدق کند یک نشانندهٔ سره می‌نامیم. هر نشانندهٔ سره که بردش زیرفضا باشد یک زیرفضاـنشاننده نامیده می‌شود.
زیرفضاـنشاننده بودن ریختی g معادل است با اینکه g همریختی باشد و $K(g) = \phi$.
هر ریختی آغازی، نشاننده است. البته، دوگان این مطلب صادق نیست. یعنی، هر ریختی پایانی لزوماً بروریختی نیست (مثال ۳ـ۸). طبق تعریف، هر بروریختی پایانی را یک ریختی خارج قسمت می‌نامند.

گزاره ۵.۳ برای ریختی $g : G_1 - \to G_2$ با هستهٔ N شرایط زیر معادلند:

(۱) g پایانی است؛

(۲) برای هر $E \subseteq G_2$، اگر $g^{-1}(E) \cup N \lhd G_1$ آنگاه $E \lhd G_2$.

اثبات($1 \Leftarrow 2$) فرض می‌کنیم $E \subseteq G_2$ و $g^{-1}(E) \cup N \lhd G_1$. برای یک هندسهٔ ناتهی G و یک نگاشت ثابت $h : G_2 \setminus E \to G$، hog یک ریختی با هستهٔ $g^{-1}(E) \cup N \lhd G_1$ است. بنابر پایانی بودن g، hریختی است و $E = K(h) \lhd G_2$.

برعکس، برای اثبات ($2 \Leftarrow 1$) هندسهٔ G و نگاشت $h : G_2 \setminus M \to G$ را چنان اختیار می‌کنیم که hog ریختی باشد. h ریختی است. زیرا برای هر $F \lhd G$ داریم
$K(hog) \cup (hog)^{-1}F = g^{-1}(h^{-1}F \cup M) \cup N \lhd G_1$ و در نتیجه $(h^{-1}F \cup M) \lhd G_2$.

لم ۶.۳ برای هر خانوادهٔ $\{G_i\}_{i \in I}$ از هندسه‌ها، هم‌حاصلضرب اعضای آن تشکیل هندسه می‌دهد.

اثبات کافی است روی $\coprod_{i \in I} G_i := \bigcup_{i \in I} G_i$ رابطهٔ $l(x, y, z)$ را به معنی وجود یک $i \in I$ با ویژگی $x, y, z \in G_i$ و $l_i(x, y, z)$، یا نامتمایزبودن این سه نقطه در نظر بگیریم.

گزارهٔ ۷.۳ هر هندسهٔ G با حداقل دو نقطهٔ متمایز، تصویر یک بروریختی پایانی از همحاصلضرب خطوط خودش است.

اثبات Δ را مجموعهٔ تمام خطوط G و برای هر $\delta \in \Delta$، نگاشت‌های شمول $i_\delta : \delta \to \coprod_{\lambda \in \Delta} \lambda$ و $j_\delta : \delta \to G$ را درنظر بگیرید. ریختی $g : \coprod_{\lambda \in \Delta} \lambda \to G$ با شرط $f \circ i_\delta = j_\delta$ موردنظر است.

مثال ۸.۳ اگر G_1 را یک هندسهٔ تصویری دلخواه و G_2 را یک هندسهٔ تصویری ناتهی مجزا درنظر بگیریم، نگاشت متعارف $J_1 : G_1 \to G_1 \coprod G_2$ یک ریختی پایانی است؛ ولی خارج قسمت نیست.

گزارهٔ ۹.۳ برای هر ریختی $g : G_1 - \to G_2$، شرایط زیر معادل‌اند:

(۱) بروریختی بازتابی و منظم‌بودن؛

(۲) بروریختی پایانی و منظم‌بودن؛

(۳) همریختی پوشابودن.

اثبات به طور مستقیم از تعریف‌ها نتیجه می‌شود.

۴. هندسهٔ خارج‌قسمت و قضایای یکریختی در HProj

فرض کنیم G یک هندسه با رابطهٔ همخطی l باشد و $E \triangleleft G$. رابطهٔ دوتایی $*$ روی $G \setminus E$ به صورت $a * b \Leftrightarrow (a = b \vee \exists c \in E : l(a,b,c))$ یک رابطهٔ هم‌ارزی است. همچنین رابطهٔ سه‌تایی $\bar{l}$ روی $(G|E)/*$ با ضابطهٔ $\bar{l}(A,B,C) \Leftrightarrow (\exists a \in A, b \in B, c \in C) : l(a,b,c))$ یک رابطهٔ همخطی است. $(G \setminus E)/*$ به همراه $\bar{l}$ یک هندسه به نام هندسهٔ خارج‌قسمت تشکیل می‌دهد که آن را با $\frac{G}{E}$ نمایش می‌دهیم.

لم ۱.۴ برای $a, b \in G \setminus E$، شرایط زیر هم‌ارزند:

الف) $a * b$؛

ب) $a \in b \vee E$؛

ج) $a \vee E = b \vee E$.

اثبات به طور مستقیم از تعریف‌ها نتیجه می‌شوند ([۷]).

گزاره ۲.۴ تصویر متعارف $\pi : (G \setminus E) \to \frac{G}{E}$ یک همریختی پوشا است.

اثبات بدیهی است ([۷]).

گزاره ۳.۴ اگر $E \triangleleft K \triangleleft G$، آنگاه $\pi(K \setminus E) \triangleleft \frac{G}{E}$ و $\pi^{-1}(\pi(K \setminus E)) = k \setminus E$.

اثبات بنا به تعریف π و لم وگزارهٔ بالا ثابت می‌شود. ([۷]).

قضیهٔ ۴.۴ فرض کنیم $g : G - \to G'$ یک ریختی با هستهٔ N باشد و $E \triangleleft G$. در این صورت شرط لازم و کافی برای $E \subseteq N$ آن است که یک ریختی $\bar{g} : \frac{G}{E} - \to G'$ موجود باشد به‌طوریکه $g = \bar{g} \circ \pi$.

اثبات اگر $g = \bar{g} \circ \pi$، آنگاه $E = K(\pi) \subseteq K(g) = N$. برعکس، اگر $E \subseteq N$، بنا بر تعریف $*$، $\bar{g} : \frac{G}{E} - \to G'$ با ضابطهٔ $\bar{g}A := ga$ (a نماینده‌ای از A است) یک ریختی با هستهٔ $\pi(N \setminus E)$ خواهد بود.

بنا بر (۴ـ۳) خواهیم داشت: $K(\bar{g} \circ \pi) = E \cup \pi^{-1}(\pi(N \setminus E)) = N$. چون برای هر $a \in G \setminus N$ داریم $\bar{g}\pi a = ga$، پس $g = \bar{g} \circ \pi$.

$\bar{g}$ را ریختی القایی (القاء شده از g) می‌نامیم. ثابت می‌شود که $\bar{g}$ منحصر به‌فرد است (تمرین).

قضیهٔ ۵.۴ برای ریختی $g: G-\to G'$ و $E \lhd N = K(g)$ ، احکام زیر معادل‌اند:
(۱) ریختی القایی $\bar{g}: \frac{G}{E} - \to G'$ تکریختی بازتابی و پوشا است؛
(۲) $\bar{g}$یکریختی است؛
(۳) $E = N$ و g همریختی و پوشا است ([۱۰]).

اثبات(۱ ⇐ ۲) نگاشت g^{-1} نقش ریختی وارون g را ایفا می‌کند.
(۲ ⇐ ۳) از $K(\bar{g}) = \phi$ نتیجه می‌شود که $E = N$ و g پوشا است. حال، اگر $a, b \in G \setminus E$ متمایز باشند و $ga = gb$، آنگاه داریم $\bar{g}\pi a = \bar{g}\pi b$ و در نتیجه $\pi a = \pi b$. یعنی $x \in E$ای هست که $l(a, b, x)$. پس، g منظم است. همچنین، اگر $b_1, b_2, b_3 \in G'$ همخط باشند، خواهیم داشت $\bar{l}(\bar{g}^{-1}b_1, \bar{g}^{-1}b_2, \bar{g}^{-1}b_3)$ و بنا بر (۴ـ۲) نقاط همخط $a_1, a_2, a_3 \in G \setminus E$ وجود دارند که $a_i \in \pi^{-1}\bar{g}^{-1}b_i = g^{-1}b_i (i = 1, 2, 3)$. یعنی g بازتابی است. بنابراین g همریختی پوشا است.
(۳ ⇐ ۱) g و در نتیجه $\bar{g}$ پوشا است. g منظم است و $E = N$، پس $\bar{g}$ ریختی یک به یک است و $K(\bar{g}) = \phi$. بنابراین $\bar{g}$ تکریختی است. خاصیت بازتابی $\bar{g}$ نیز از g به ارث می‌رسد.

نتیجه ۶.۴ اگر V و W فضاهای برداری روی (شبه)میدان K باشند و $W \leq V$، آنگاه $P(V/W)$ با $P(V)/P(W)$ یکریخت است.

اثبات تصویر متعارف $\pi : V/W$ خطی و پوشا است. ثابت می‌شود که $P(\pi)$ یک همریختی پوشا با هستهٔ $P(W)$ است و یک یکریختی به صورت $P(V)/P(W) \to P(V/W)$ القاء می‌کند.

قضیه‌هایی مشابه با قضایای یکریختی گروه‌ها، در HProj (البته نه در Proj) برقرارند.

گزاره ۷.۴ اگر $g: G-\to G'$ همریختی باشد و $K(g) = E$، آنگاه
الف) $\bar{g}: \frac{G}{E} - \to G'$ تکریختی است؛
ب) $\bar{g}$ همریختی است.

اثبات الف) اگر $\bar{g}A = \bar{g}B$، آنگاه $a \in A$ و $b \in B$ وجود دارند که $ga = gb$ و در نتیجه $(a \vee b) \cap E \neq \phi$ و $A = B$. پس $\bar{g}$ یک به یک است. چون $K(g) = E$، پس $K(\bar{g}) = \phi$.
ب) بررسی بازتابی و منظم بودن $\bar{g}$ سرراست است.

۸.۴ قضیهٔ اول یکریختی برای همریختی پوشای $g: G-\to G'$، $\bar{g}: \frac{G}{K(g)} \to G'$ یکریختی است.

اثبات پوشایی $\bar{g}$ بدیهی است. بنابر (۴ـ۷) $\bar{g}$ تکریختی و همریختی و بنابر (۴ـ۵) یکریختی است.

۹.۴ قضیهٔ دوم یکریختی اگر $E_1, E_2 \lhd G$، آنگاه $\frac{E_2}{E_1 \cap E_2} \cong \frac{E_1 \vee E_2}{E_1}$.

اثبات نگاشت شمول $j : E_2 \to E_1 \vee E_2$ و تصویر متعارف $\pi : E_1 \vee E_2 \to \frac{E_1 \vee E_2}{E_1}$ همریختی پوشای $g = \pi \circ j$ را به‌دست می‌دهند. $\bar{g}$ یکریختی (القا شده توسط g) مورد نظر است.

۱۰.۴ قضیه سوم یکریختی اگر $E_1 \triangleleft E_2 \triangleleft G$ آنگاه $\frac{G}{E_2} \cong \frac{G/E_1}{E_2/E_1}$.

اثبات نگاشت شمول $j : G - E_1 \to G$ همریختی $\bar{j} : \frac{G}{E_1} \to G$ را القا می‌کند. همچنین، تصویر متعارف $\pi : G - \to \frac{G}{E_2}$ یک همریختی پوشا با هستهٔ E_2 است. در نتیجه $g = \pi \circ \bar{j}$ همریختی پوشا با هستهٔ E_2/E_1 است و یکریختی موردنظر را القا می‌کند.

۵. تجزیهٔ ریختی‌ها در Proj

لم ۱.۵ هرگاه ریختی $g : G- \to G'$ منظم باشد و $K(g) = N \subseteq E \triangleleft G$، در این صورت داریم
$g^{-1}(g(E \setminus N)) = E \setminus N$

اثبات فرض کنیم $a \in g^{-1}(g(E \setminus N))$. عنصر $b \in E \setminus N$ وجود دارد که $ga = gb$. اگر $a \neq b$، بنا بر منظم‌بودن g داریم $(a \vee b) \cap N \neq \phi$. یک $c \in (a \vee b) \cap N$ انتخاب می‌کنیم و خواهیم داشت $a \in b \vee c \subseteq b \vee N \subseteq E$. پس $a \in E \setminus N$. نیز بدیهی است که $E \setminus N \subseteq g^{-1}(g(E \setminus N))$.

گزارهٔ ۲.۵ فرض کنیم $g : G- \to G'$ یک ریختی دلخواه و $h : G- \to G''$ یک همریختی پوشا باشد. در اینصورت ریختی یکتای $f : G''- \to G'$ با خاصیت $g = f \circ h$ موجود است اگر و تنها اگر داشته باشیم $K(h) \subseteq K(g)$ ([۱۰]).

اثبات اگر $g = f \circ h$، آنگاه $K(h) \subseteq K(h) \cup h^{-1}(K(f)) = K(g)$. برعکس قرار می‌دهیم $M := K(g) \setminus K(h)$ و $N = h(M)$. بنابرگزارهٔ ۷ از بخش ۳ در [۱۰]، h یک بروریختی پوشا، منظم و پایانی است. پس، بنابر (۵ـ۱)، $h^{-1}(N) = M$ و در نتیجه $K(g) = K(h) \cup h^{-1}(N)$. شرط کافی برای وجود یک نگاشت خوش‌تعریف $f : G'' \setminus N \to G'$، این است که برای هر دو نقطهٔ متمایز a, b داشته باشیم $h(a) = h(b) \Rightarrow g(a) = g(b)$. این، بنابر منظم بودن h و ریختی بودن g برقرار است. حال چون h پایانی و بروریختی است پس f ریختی بوده و منحصربه فرد است.

نتیجهٔ ۳.۵ هر ریختی $g : G- \to G'$ تجزیه‌ای به صورت $g = \bar{g} \circ \pi$ دارد که $\pi : G- \to \frac{G}{K(g)}$ تصویر متعارف و $\bar{g} : \frac{G}{K(g)} \to G'$ یک ریختی با هستهٔ تهی است.

نتیجه ۴.۵ اگر $f_i : G- \to G_i$ $(i = 1, 2)$ دو همریختی پوشا با هستهٔ یکسان باشند، آنگاه یک یکریختی $f : G_1 \to G_2$ با شرط $f_2 = f \circ f_1$ وجود دارد.

نتیجهٔ ۵.۵ به ازای هر ریختی $g : G- \to G'$، همریختی پوشای $h : G- \to G''$ و ریختی $k : G''- \to G'$ به طور یکتا (تحت یکریختی) وجود دارند که $g = k \circ h$.

اثبات وجود این تجزیه نتیجهٔ مستقیم (۵ـ۳) است. حال فرض می‌کنیم دو تجزیهٔ $g = k_۱ \circ h_۱ = k_۲ \circ h_۲$ وجود داشته باشند. بنابر (۵ـ۴) یکریختی $\varphi : G''_۱ \to G''_۲$ وجود خواهد داشت که $k_۱ = k_۲ \circ \varphi$ و $h_۲ = \varphi \circ h_۱$.

گزاره ۶.۵ فرض کنیم $i : G_۱- \to G_0$ یک ریختی آغازی و $g : G- \to G_0$ یک ریختی دلخواه باشد. در این صورت شرط لازم و کافی برای وجود ریختی یکتای $f : G- \to G_۱$ با ویژگی $g = i \circ f$، آن است که $Im(g) \subseteq Im(i)$ ([۱۰]).

اثبات فرض کنیم f موجود باشد و $N = K(g)$. داریم $Im(g) = i(f(G \setminus N) \subseteq Im(i)$. برعکس، اگر $Im(g) \subseteq Im(i)$ ، برای هر $a \in G \setminus N$ یک نقطهٔ یکتای $b \in G_۱$ وجود دارد که $ga = ib$. حال $f : G \setminus N \to G_۱$ را با ضابطهٔ $f(a) := b$ تعریف کنید. چون i آغازی و $i \circ f \circ g$ ریختی است، پس f نیز ریختی است و چون i تکریختی است پس f منحصر به فرد است.

تعریف ۷.۵ ریختی $g : G_۱- \to G_۲$ را Sـچگال می‌نامیم اگر $G_۲ = S(Img)$. و آن را Cـچگال می‌نامیم اگر $G_۲ = C(Img)$. (C به «زیرفضای تولیدشده» و S به «زیرهندسهٔ تولیدشده» اشاره می‌کند)

نتیجه ۸.۵ هر ریختی دلخواه $g : G- \to G'$:

الف) یک تجزیه به صورت $g = i \circ f$ دارد که در آن $f : G- \to S(Img)$ یک ریختی و $i : S(Img) \to G'$ ریختی شمول است؛

ب) یک تجزیه به صورت $g = s \circ f$ دارد که در آن $f : G- \to C(Img)$ یک ریختی و $s : C(Img) \to G'$ ریختی شمول است.

نتیجه ۹.۵ هر ریختی $g : G_۱- \to G_۲$ یک تجزیه به صورت $g = i \circ f$ دارد که در آن i یک ریختی آغازی و f یک ریختی Sـچگال است.

قضیهٔ ۱۰.۵ هر ریختی $g : G_۱- \to G_۲$ یک تجزیهٔ یکتا به صورت $g = s \circ i \circ k \circ h$ دارد که در آن h یک همریختی پوشا و k یک ریختی $S-$چگال با هستهٔ تهی و i یک ریختی $C-$چگال آغازی و s یک ریختی مقطع است ([۱۰]).

اثبات وجود دنبالهٔ $G_۱- \xrightarrow{h} G_۱/K(g) \xrightarrow{k} S(Img) \xrightarrow{i} C(Img) \xrightarrow{s} G_۲$ (که در آن h تصویر متعارف و i و s ریختی‌های شمول‌اند) نتیجهٔ احکام بالا است. حال فرض می‌کنیم به ازای $j = ۱, ۲$تجزیه‌های $g = s_j \circ i_j \circ k_j \circ h_j$ موجود باشند. روشن است که $s_j \circ i_j \circ k_j$ها هستهٔ تهی دارند و بنابر(۵ـ۵)، یکریختی $\varphi_۱$ وجود دارد که $\varphi_۱ \circ h_۱ = h_۲$. همچنین، $s_j \circ i_j$ها آغازی و $k_j \circ h_j$ها $S-$چگال‌اند و ثابت می‌شود که یکریختی $\varphi_۲$ وجود دارد به‌طوریکه $\varphi_۲ \circ (k_۱ \circ h_۱) = k_۲ \circ h_۲$ و

$(s_2 \circ i_2) \circ \varphi_2 = s_1 \circ i_1$. داریم $\varphi_2 \circ k_1 = k \circ \varphi_1$ (زیرا h_1 و $\varphi_2 \circ k_1 \circ h_1 = k_2 \circ \varphi_1 \circ h_1$ بروریختی است). بالاخره به ازای $j = 1, 2$ داریم:

$$C(Im(i_j, \circ k_j \circ h_j)) = C(Im(i_j \circ k_j)) = C(S(i_j(Imk_j))) = C(i_j)S(Imk_j))) = C(Imi_j)$$

پس $i_j \circ k_j \circ h_j$ها چگال‌اند. حال، بنابر (۵ـ۹)، یکریختی φ_3 وجود دارد که $s_1 = \varphi_3 \circ s_2$. و از تساوی $s_2 \circ \varphi_3 \circ i_1 = s_2 \circ i_2 \circ \varphi_2$ نتیجه می‌شود $\varphi_3 \circ i_1 = i_2 \circ \varphi_2$. بنابراین، تجزیهٔ ریختی‌ها (تحت یکریختی) منحصر به فرد است.

سخن آخر: موضوع هندسه‌های تصویری به سرعت در حال بسط است. دربارهٔ ارتباط تنگاتنگ این هندسه‌ها با مشبکه‌ها و فضاهای برداری مطالعات قابل ملاحظه‌ای صورت گرفته است که در این خصوص یک مقالهٔ توصیفی (بزودی) تقدیم نشریه خواهد شد. تعریف و بررسی خواص حاصلضرب‌های مستقیم و نیمه مستقیم این هندسه‌ها نیز یک موضوع پژوهشی به‌روز و پرثمر می‌باشد. نویسنده خاضعانه متمنی راهنمایی‌ها، پیشنهادات و انتقادات اهل فن و افراد علاقمند می‌باشد.

مراجع

[1] Adamec, J., Herrlich, H. & Strecker, G.E. *Abstract and Concerte Categories* Wiley, New York, 1990.

[2] Adamec, J. *Theory of Mathematical Structures,* D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1983.

[3] Artin, E. *Geometric Algebra*, Interscience Publishers, New York, 1957.

[4] Berndt, O. "A Categorical definition of Semidirect Products", Applied Categorical Strutures 6 (1998), 37-62.

[5] Borceux, F."Hbook of Categorical Algebra 1,2"; Encyclopedia of Math. and its Applications 50, 51; Cambridge univ. Press,1994.

[6] Coxeter, H. S. M. *Projective Geometry (2nd ed.)*, Springer-Verlag, 1987.

[7] Faure, C.-A. & Frolicher, A. "Morphisms of Projective Geometries and of corresponding lattices", Geom. Dedicata 47 (1993), 25-40.

[8] Faure, C.-A. & Frolicher, A. "Morphisms of Projective Geometries and semilinear maps", Geom. Dedicata 53(1994), 237-262.

[9] Faure, C.-A. & Frolicher, A. "Dualities for infinite-dimensional Projective Geometries", Geom. Dedicata 56 (1995), 225-236.

[10] Faure, C.-A. & Frolicher, A. "Categorical Aspects in Projective Geometry", Applied Categorical Strutures 6(1998), 87-103.

[11] Gratzer, G. *General Lattice Theory*, Birkhauser, Basel, Stuttgart, 1978.

فیروز پاشایی
دانشگاه سمنان، دانشکدهٔ تربیت‌دبیر مهدی‌شهر، گروه ریاضی
پست الکترونیک: fpashaie@semnan.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شمارهٔ ۲۹(پاییز ۱۳۸۱)، صص. ۱۷ تا ۳۰

دیفرانسیل و انتگرال از مرتبهٔ کسری

زهرا خاتمی-یحیی علیزاده

چکیده

در این مقاله با استفاده از تابع گاما به معرفی انتگرال و مشتق کسری یک تابع می‌پردازیم و در ادامه به چند کاربرد از این موضوع در چند شاخهٔ مختلف و از جمله هندسهٔ فراکتالی اشاره می‌کنیم. هدف اصلی این مقاله معرفی مراجع مناسب برای مطالعه و آشنایی هرچه بیشتر با این موضوع می‌باشد.

۱ تاریخچهٔ پیدایش

در سال ۱۶۹۵، هوپیتال[۱] نامه‌ای به لایب‌نیتز[۲] نوشت مبنی بر این که $\frac{d^n y}{dx^n}$ وقتی $n = \frac{۱}{۲}$ چگونه توجیه می‌شود؟ و لایب‌نیتز [۱] در پاسخ، رابطهٔ نزدیک بین مشتقات و سری‌های نامتناهی (واگرا) را مطرح کرد و نوشت: "اگرچه سری‌های واگرا و هندسه رابطهٔ دوری با هم دارند، در سری‌های واگرا تنها مجاز به استفاده از توان‌های صحیح مثبت و منفی هستیم و تا به حال استفاده از توان‌های کسری را نداشته‌ایم" او ادامه می‌دهد: " $d^{\frac{۱}{۲}}x$ مساوی $x.\sqrt{\frac{dx}{x}}$ می‌باشد" و اظهار می‌دارد: "این یک پارادوکس آشکار از چیزی است که روزی نتایج مفیدی خواهد داد".

در سال ۱۸۱۹، لاکروا[۳] درکتاب هفتصد صفحه‌ای خود [۲]، دو صفحه را به مبحث مشتق از مرتبهٔ دلخواه اختصاص داد. او نشان داد که اگر $y = x^a$، آنگاه $\frac{d^{\frac{۱}{۲}}}{dx^{\frac{۱}{۲}}}y = \frac{\Gamma(a+۱)}{\Gamma(a+\frac{۱}{۲})}x^{a-\frac{۱}{۲}}$ ، به‌ویژه این نتیجه را به‌دست آورد که $\frac{d^{\frac{۱}{۲}}}{dx^{\frac{۱}{۲}}}x = ۲\sqrt{\frac{x}{\pi}}$ و این با نتایج حاصل از تعاریف «مدرن» ریمان [۳] نیز منطبق است.

---
1) L'Hopital 2) Leibniz 3) Lacroix

در سال ۱۸۲۳، آبل [۴] اولین کاربرد حساب دیفرانسیل کسری را در مسائل فیزیکی (مسألهٔ Tautochrone؛ مسألهٔ تعیین یک منحنی است به قسمی که اگر جسمی تحت تأثیر نیروی جاذبه بدون اصطکاک روی آن بلغزد، زمان حرکت آن مستقل از نقطهٔ شروع حرکت باشد) ارائه داد و البته این مسأله را حل نکرد. همچنین این مسأله مورد توجه ریاضی‌دانان معروفی چون اویلر، لاپلاس، فوریه، آبل، لیوویل و ریمان نیز بوده است.

در سال ۱۸۸۴، لوران[1] [۵] نظریهٔ عملگرهای تعمیم‌یافتهٔ D^v با v حقیقی را ارائه و منتشر کرد (که شامل D^v با v گویا یا گنگ و حقیقی و مختلط نیز می‌توانست باشد) و با انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری از مرتبهٔ دلخواه مواجه شد.

در سال ۱۸۹۲، هوی ساید[2] [۶] مشتقات از مرتبهٔ کسری را در توسعهٔ نظریهٔ خط انتقال خود به‌کار برد.

در سال ۱۹۳۶، جمانت[3] [۷] نظریهٔ انتقال هوی ساید را ادامه داد و از مشتقات از مرتبهٔ کسری در خاصیت کشسانی استفاده کرد.

در سال ۱۹۷۴، راس[4] "اولین کنفرانس دیفرانسیل و انتگرال از مرتبهٔ کسری و کاربردهای آن" را برگزار کرد و گزارش آن را در کتاب [۸] به چاپ رساند. در همین سال اولدهام[5] و اسپنیر[6] [۹] دومین رساله در مورد "حساب دیفرانسیل و انتگرال از مرتبهٔ کسری" را منتشر کردند.

در سال ۱۹۹۳، کنت میلر[7] و راس [۱۰] کتاب "مقدمه‌ای بر دیفرانسیل و انتگرال و معادلات دیفرانسیل از مرتبهٔ کسری" را ارائه دادند که این کتاب روش‌های خوبی را برای دانشمندان و ریاضی‌دانانی که در جستجوی مقدمه‌ای بر این موضوع جذاب هستند، ارائه می‌دهد.
در این کتاب حل معادلات

$$[D^{n/q} + a_1 D^{(n-1)/q} + \cdots + a_{n-1} D^{1/q} + a_n D^0] X(t) = Y(t)$$

وقتی n و q اعداد صحیح مثبت و a_iها ثابت‌اند، ارائه می‌شود (لازم به ذکر است که مقاله‌ای فارسی نیز تحت عنوان «بررسی مسائل مقدار مرزی و اولیه که شامل معادلات دیفرانسیل با مرتبه‌های کسری هستند» در [۱۵] به چاپ رسیده است.)

در سال ۱۹۹۷، کولوانکار[8] [۱۱] در پایان‌نامهٔ دکتری خود، به مطالعه در مورد ارتباط بین فراکتال‌ها و حساب دیفرانسیل و انتگرال از مرتبهٔ کسری پرداخت.

در سال ۲۰۰۰، هیلفر[9] [۱۲] کتابی با عنوان "کاربردهایی از دیفرانسیل و انتگرال از مرتبهٔ کسری در فیزیک" در ۹ بخش چاپ و منتشر کرد که هر بخش به کاربردی ویژه می‌پردازد.

---

1) Laurent 2) Heaviside 3) Gemant 4) Ross 5) Oldham 6) Spanier 7) Miller
8) Kolwankar 9) Hilfer

۲ تابع گاما

فرض کنید $F(n)$ تابع فاکتوریل باشد در این صورت برای هر عدد صحیح مثبت n داریم:

$$F(1) = 1,\ \ F(n) = nF(n-1),\ \ (n = 2, 3, \ldots). \tag{1}$$

تابع گاما نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

و در نتیجه داریم

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = -e^{-t}]_0^\infty = 0 - (-1) = 1$$

سپس توجه می‌کنیم که

$$\frac{d}{dt}(t^x e^{-t}) = x t^{x-1} e^{-t} - t^x e^{-t}$$

حال اگر از طرفین این فرمول از $t = 0$ تا $t = \infty$ انتگرال بگیریم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} [t^x e^{-t}]_0^\infty &= x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt - \int_0^\infty t^x e^{-t} dt \\ 0 &= x\Gamma(x) - \Gamma(x+1) \end{aligned}$$

پس

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

بنابراین تابع گاما را می‌توان به صورت زیر نیز برای هر x مثبت تعریف کرد:

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad x > 0, \tag{2}$$

ابتدا (۲) نشان می‌دهد که $\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1$ و همچنین نشان می‌دهد که $\Gamma(x)$ وقتی $x = 0$ است تعریف نمی‌شود، چرا که در غیراین صورت داریم:

$$0 = 0\,\Gamma(0) = \Gamma(1) = 1$$

که تناقض است. پس اگر بنویسیم $G(x) = \Gamma(x+1)$ خواهیم داشت:

$$G(1) = 1, \ \ G(x) = xG(x-1)$$

که از مقایسهٔ آن با (۱) درمی‌یابیم که

$$G(n) = F(n) = n!$$

پس برای تمام اعداد صحیح مثبت n داریم:

$$n! = \Gamma(n+۱)$$

حال با توجه به تعریف تابع گاما، تعریف زیر کاملاً طبیعی است:

$$x! = \Gamma(x+۱) \tag{۳}$$

که با توجه به آن $۱ = \Gamma(۱) = ۰!$. به کمک فرمول $\Gamma(x+۱) = x\Gamma(x)$ می‌توانیم $x!$ را وقتی که مقدار x کسری است، محاسبه کنیم. مثال گویای زیر منظور ما را بیان می‌کند:

$$(\frac{۷}{۲})! = \Gamma(\frac{۷}{۲}+۱) = \frac{۷}{۲}\Gamma(\frac{۷}{۲}) = \frac{۷}{۲}\times\frac{۵}{۲}\Gamma(\frac{۵}{۲}) = \cdots = \frac{۷}{۲}\times\frac{۵}{۲}\times\frac{۳}{۲}\times\frac{۱}{۲}\Gamma(\frac{۱}{۲}) = \frac{۱۰۵}{۱۶}\Gamma(\frac{۱}{۲})$$

در این مثال نمی‌توان بیش از این پیش رفت مگر آن که مقدار $\Gamma(\frac{۱}{۲})$ را بدانیم. طبق تعریف داریم:

$$\Gamma(\frac{۱}{۲}) = \int_۰^\infty t^{\frac{-۱}{۲}} e^{-t} dt$$

حال با اعمال تغییر متغیر $t = u^۲$ خواهیم داشت:

$$\Gamma(\frac{۱}{۲}) = ۲\int_۰^\infty e^{-u^۲} du$$

اما می‌دانیم $\int_۰^{-\infty} e^{-u^۲} du = \frac{\sqrt{\pi}}{۲}$، بنابراین $\Gamma(\frac{۱}{۲}) = \sqrt{\pi}$. پس در مثال فوق با جایگذاری این مقدار داریم

$$(\frac{۷}{۲})! = \frac{۱۰۵}{۱۶}\Gamma(\frac{۱}{۲}) = \frac{۱۰۵\sqrt{\pi}}{۱۶}.$$

۳ انتگرال‌گیری از مرتبهٔ کسری

فرض کنید تابع $f(x)$ برای $x > ۰$ تعریف شده باشد، می‌توانیم انتگرال نامعین f را از ۰ تا x بگیریم و آن را $(If)(x)$ بنامیم، بنابراین

$$(If)(x) = \int_۰^x f(t)dt$$

با تکرار این روند، دومین انتگرال را پیدا می‌کنیم

$$(I^۲f)(x) = \int_۰^x (If)(t)dt = \int_۰^x \left(\int_۰^t f(s)ds\right)dt$$

و با انتگرال‌گیری مکرر، سومین انتگرال را به‌دست می‌آوریم:

$$(I^{3}f)(x) = \int_{0}^{x} [\int_{0}^{t} (\int_{0}^{s} f(u)du)ds]dt. \qquad (۴)$$

حال با استفاده از استقراء روی n می‌توان انتگرال مکرر $(I^n f)(x)$ را به صورت زیر به یک انتگرال کاهش داد:

$$(I^n f)(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{0}^{x} (x-t)^{n-1} f(t)dt \qquad (۵)$$

این دستور به فرمول‌کوشی معروف است.

مثال ۱. فرض کنید $f(x) = x^k$ که $x > 0$ و k یک عدد صحیح مثبت است، بنابراین با توجه به تعاریف اخیر خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} (If)(x) &= \tfrac{x^{k+1}}{k+1} \\ (I^2 f)(x) &= \tfrac{x^{k+2}}{(k+1)(k+2)} \\ &\vdots \\ (I^n f)(x) &= \tfrac{k!}{(n+k)!} x^{n+k} = \tfrac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(n+k+1)} x^{n+k} \end{aligned} \qquad (۶)$$

حال فرض کنید که k عددی صحیح و نامنفی باشد، پس هنوز داریم:

$$\begin{aligned} (I^n f)(x) &= \frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots(n+k)} x^{n+k} \\ &= \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(n+k+1)} x^{n+k} \end{aligned}$$

اکنون این سؤال مطرح است که $(I^a f)(x)$ وقتی a هر عدد مثبت دلخواهی باشد، چیست؟ دقیقاً با پیروی از همان ایده‌ای که برای تابع فاکتوریل داشتیم، اکنون از فرمول کوشی به عنوان مبنا برای تعریفمان از $(I^a f)(x)$ استفاده می‌کنیم. درحقیقت برای هر a مثبت، تعریف می‌کنیم:

$$(I^a f)(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_{0}^{x} (x-t)^{a-1} f(t)dt$$

حال می‌دانیم که اگر a یک عدد صحیح مثبت باشد، آنگاه $\Gamma(a) = (a-1)!$ بنابراین تعریف $(I^a f)(x)$ وقتی a یک عدد صحیح مثبت باشد، با (۵) مطابق است.

مثال ۲. می‌خواهیم بررسی کنیم وقتی $f(x) = x^k$ و a هر عدد مثبت است، $(I^a f)(x)$ چیست؟ تعریف نشان می‌دهد که

$$(I^a f)(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_{0}^{x} (x-t)^{a-1} t^k dt$$

حال اگر تغییر متغیر $u = \frac{t}{x}$ را اعمال کنیم، خواهیم داشت:

$$(I^a f)(x) = \frac{x^{a+k}}{\Gamma(a)} \int_۰^۱ u^k(۱-u)^{a-۱}du,$$

تساوی زیر را می‌توان به سادگی به دست آورد ([۱۳] را ببینید):

$$\int_۰^۱ u^k(۱-u)^{a-۱}du = \frac{\Gamma(k+۱)\Gamma(a)}{\Gamma(a+k+۱)},$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$(I^a f)(x) = \frac{\Gamma(k+۱)}{\Gamma(a+k+۱)} x^{a+k},$$

و این رابطه درحالتی‌که a یک عدد صحیح است با (۶) مطابق است، پس نشان داده‌ایم‌که اگر $f(x) = x^k$ و $x > ۰$ و $a > ۰$ آنگاه

$$(I^a f)(x) = \frac{\Gamma(k+۱)}{\Gamma(a+k+۱)} x^{a+k}.$$

مثال ۳. می‌خواهیم $(I^{\frac{۱}{۲}} f)(x)$ را وقتی $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{۱}{۲}}$ محاسبه کنیم. طبق فرمول داریم:

$$(I^{\frac{۱}{۲}} f)(x) = \frac{\Gamma(\frac{۳}{۲})}{\Gamma(۲)} x = \Gamma(\frac{۳}{۲})x = \frac{۱}{۲}\Gamma(\frac{۱}{۲})x = \frac{\sqrt{\pi}}{۲}x.$$

مثال ۴. برای $f(x) = x^۲$ و $a = \frac{۳}{۲}$خواهیم داشت:

$$(I^{\frac{۳}{۲}} f)(x) = \frac{\Gamma(۳)}{\Gamma(\frac{۹}{۲})} x^{\frac{۷}{۲}} = \frac{۲x^{\frac{۷}{۲}}}{\frac{۷}{۲}\frac{۵}{۲}\frac{۳}{۲}\frac{۱}{۲}\Gamma(\frac{۱}{۲})} = \frac{۲x^{\frac{۷}{۲}}}{\frac{۱۰۵}{۱۶}\sqrt{\pi}} = \frac{۳۲}{۱۰۵\sqrt{\pi}} x^{\frac{۷}{۲}}$$

حال فرض‌کنیم $f(x) = x^k$، a و b دو عدد مثبت باشند. با قراردادن $g(x) = x^{b+k}$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} I^a(I^b f)(x) =& \frac{\Gamma(k+۱)}{\Gamma(b+k+۱)}(I^a g)(x) \\ =& \frac{\Gamma(k+۱)}{\Gamma(b+k+۱)} \frac{\Gamma(b+k+۱)}{\Gamma(a+b+k+۱)} x^{a+b+k} \\ =& (I^{a+b} f)(x) \end{aligned}$$

بنابراین اگر f به صورت توانی از x باشد، آنگاه داریم:

$$(I^a(I^b f))(x) = (I^{a+b} f)(x) = (I^b(I^a f))(x)$$

و این برای تمام توابع f صادق است، اما اثبات ساده نیست. در بخش بعدی نشان خواهیم داد که نتیجهٔ مشابهی برای مشتق از مرتبهٔ کسری صادق نیست.

۴ مشتق‌گیری از مرتبهٔ کسری

همان‌گونه که می‌دانیم پیدایش انتگرال (یعنی محاسبهٔ مساحت زیر یک منحنی) قبل از پیدایش مشتق (یعنی شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه) بوده است و این دو موضوع در قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال به هم مربوط شده‌اند؛ بدین معنی که مشتق‌گیری عکس فرآیند انتگرال‌گیری می‌باشد، یعنی:

$$\frac{d}{dx}(If)(x) = \frac{d}{dx}\int_{0}^{x} f(t)dt = f(x),$$

درحالی که انتگرال‌گیری از 0 تا x یعنی $(If)(x)$، معکوس مشتق‌گیری نیست، به عنوان مثال اگر $f(x) = e^x$ در آن صورت $\frac{df}{dx} = f'(x) = f(x)$ ولی

$$(If')(x) = \int_{0}^{x} e^t dt = e^x - 1 \neq f(x).$$

حال فرض کنید p و q دو عدد صحیح باشند و $p > q$. اگر از تابعی p بار انتگرال بگیریم (از 0 تا x) و سپس از تابع حاصل، q بار مشتق بگیریم، نتیجه‌ای که به‌دست می‌آید، با موقعی که از تابع $p - q$ بار انتگرال بگیریم یکی است، یعنی:

$$\frac{d}{dx}(I^p f)(x) = \frac{d}{dx}(I(I^{p-1} f))(x) = (I^{p-1} f)(x)$$

و با $q - 1$ بار دیگر تکرار این روند، نتیجه حاصل می‌شود، چرا که در بخش‌های قبلی اشاره کردیم که برای هر a مثبت

$$I(I^a f)(x) = (I^{1+a} f)(x)$$

همین بحث در حالت کلی صادق است. بنابراین اگر $a > 0$ و k یک عدد صحیح باشد و $a > k$ آنگاه

$$\frac{d^k}{dx^k}(I^a f)(x) = (I^{a-k} f)(x). \qquad (7)$$

دیدیم که (۷) وقتی $a > k$ صادق است اما اگر $k > a$ چه اتفاقی می‌افتد؟ شهودمان به ما می‌گوید که (۲−) بار انتگرال‌گیری باید با ۲ بار مشتق‌گیری برابر باشد. هم‌اکنون تعریف می‌کنیم: مشتق aام تابع f می‌شود $(I^{-a} f)(x)$ که از فرمول (۷) به‌دست می‌آید. برای روشن‌تر شدن مطلب، به ازای هر عدد مثبت a ، عدد صحیح k را انتخاب می‌کنیم به‌طوری‌که $k > a$ و تعریف می‌کنیم:

$$\frac{d^a}{dx^a} f(x) = \frac{d^k}{dx^k}(I^{k-a} f)(x).$$

مثال ۵. $\frac{1}{2}$امین مشتق x چیست؟ طبق تعریف (برای $k = 1$ و $a = \frac{1}{2}$) داریم:

$$\begin{aligned}
\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^x (x-t)^{-1/2} t\,dt\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dx}\left(\int_0^x u^{-1/2}(x-u)du\right) \quad (u = x-t)\\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dx}\left(x\int_0^x u^{-1/2}du - \int_0^x u^{1/2}du\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\int_0^x u^{-1/2}du + x.x^{-1/2} - x^{1/2}\right)\\
&= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}.
\end{aligned}$$

مثال ۶. مشتق $\frac{1}{2}$ام تابع $x^{-\frac{1}{2}}$ چیست؟ طبق تعریف (برای $k = 1$ و $a = \frac{1}{2}$) داریم:

$$\begin{aligned}
\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}x^{-\frac{1}{2}} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^x (x-t)^{-1/2}t^{-1/2}dt\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dx}\left(\int_0^1 (1-u)^{-1/2}u^{-1/2}du\right) \quad (t = xu)\\
&= 0
\end{aligned}$$

پس اگر $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ آنگاه

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}\left(\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}\right)f(x) = \frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}0 = 0 \neq \frac{d}{dx}f(x)$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم که رابطهٔ زیر همواره درست نیست:

$$\frac{d^a}{dx^a}\left(\frac{d^b}{dx^b}\right) = \frac{d^{a+b}}{dx^{a+b}}.$$

مثال ۷. اگر برای هر x، $f(x) = 1$ باشد، مشتق $\frac{1}{2}$ام تابع $f(x)$ چیست؟ شما در اینجا باید آمادهٔ یک نتیجهٔ غیرمنتظره باشید. با استفاده از همان بحث قبل می‌بینیم که

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(I^{1/2}f)(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^x (x-t)^{-1/2}.1\,dt\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dx}\left(\int_0^x (x-t)^{-1/2}dt\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dx}([-2(x-t)^{1/2}]_0^x)\\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dx}(2\sqrt{x})\\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

نتیجهٔ غیرمنتظره‌ای که به آن رسیدیم این است که مشتق $\frac{1}{2}$ام تابع ثابت $f(x) = 1$ صفر نیست.

۵ کاربردهایی از دیفرانسیل و انتگرال از مرتبهٔ کسری

اکتشافات اخیری که در ریاضیات به وقوع پیوسته است، کاربرد و کارآیی مشتقات از مرتبهٔ کسری را آشکار کرده است که یکی از آنها توابع ناهموار فراکتالی است.

اکثر توابعی که شما می‌شناسید هموار هستند، بدین معنی که می‌توان آنها را به طور موضعی به‌وسیلهٔ خطوط مستقیم تقریب زد. برای مثال تابع $f(x) = x^{۲}$ به خوبی به‌وسیلهٔ $۲x - ۱$ در نقطهٔ $x = ۱$ تقریب زده می‌شود (شکل ۱ را ببینید). مشتق تابع در یک نقطهٔ خاص، ضریب زاویهٔ خط راست تقریبی یا مماس بر منحنی را مشخص می‌کند.

شکل ۱. $f(x) = x^{۲}$ در نقطهٔ $x = ۱$. این تابع هموار می‌تواند به طور موضعی با خطوط مستقیم تقریب زده شود.

در دومین مثال، به تابع زیر که جمع شش تابع کسینوس است توجه کنید:

$$f(x) = \sum_{n=۰}^{۵} (\frac{۱}{۲})^{n} \cos(۳^{n} x)$$

این تابع نزدیک $x = ۱$ در شکل $۲.a$ خیلی نامرتب ظاهر می‌شود اما بعد از بزرگنمایی بیشتر در شکل‌های $۲.b$ و $۲.c$ تابعی هموارتر ظاهر می‌شود و همچنان که دیده می‌شود نزدیک $x = ۱$ با یک خط راست تقریب زده می‌شود. حال اگر از تابع برآورد در $x = ۱$ مشتق بگیریم خواهیم داشت:

$$f'(۱) = -\sum_{n=۰}^{۵} (\frac{۳}{۲})^{n} \sin(۳^{n}) \approx ۵/۵$$

شکل ۲. مجموع شش تابع کسینوس را می‌توان به طور موضعی به‌وسیلهٔ خط مستقیم تقریب زد. سه شکل، بزرگنمایی‌های پی در پی تابع در نقطهٔ $x = 1$ را نشان می‌دهد. تابع، تحت بزرگنمایی‌هایی پی‌درپی، هموارتر است و ضریب زاویهٔ خط مماس را واضح‌تر می‌کند.

که ضریب زاویهٔ خط راست تقریبی در این نقطه است.

توابع فراکتال ناهموارند و نمی‌توان آنها را به وسیلهٔ قطعات خط راست، به‌طور موضعی تقریب زد، مثل

تابع وایرشتراس که به‌صورت مجموع نامتناهی توابع کسینوس نوشته می‌شود:

$$f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} (\frac{۱}{۲})^n \cos(۳^n x)$$

در این تابع باید توجه کرد که هرچه ما روی نقطهٔ $x = ۱$ متمرکز می‌شویم، در پی یافتن جزئیات بیشتر و تغییرات ضریب زاویه و تعیین موقعیت آن در بزرگنمایی‌های بیشتر هستیم (شکل ۳).

شکل ۳. تابع وایراشتراس را نمی‌توان به طور موضعی به وسیلهٔ قطعات خطوط راست تقریب زد. سه شکل، بزرگنمایی‌های پی‌درپی تابع را در نزدیکی نقطهٔ $x = ۱$ نشان می‌دهد. ناهمواری در همهٔ نقاط به چشم می‌خورد. ضریب زاویهٔ خط مماس بر منحنی در $x = ۱$، در $۳.a$ به طور افقی، در $۳.b$ نامشخص و در $۳.c$ منفی ظاهر می‌شود.

از توابعی مانند وایراشتراس نمی‌توان از مرتبهٔ یک عدد صحیح مشتق گرفت اما می‌توان از این توابع فراکتالی از مرتبهٔ عدد کسری مشتق گرفت و حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری در مطالعهٔ خواص دیفرانسیل‌پذیری خم‌های فراکتالی مورد استفاده قرار می‌گیرد. فراکتال‌ها به‌وسیلهٔ قوانین اندازه‌گیری که مشتق کسری در یک نقطه می‌تواند این قانون را آشکار کند، مشخص می‌شوند.

در تحقیق اخیر پزشکان، نشان داده شده است که سطوح غده‌های سرطان سینه فراکتالی هستند و جالب این که آنها در قوانین مقیاسی برای سلول‌های خوش‌خیم و سلول‌های بدخیم متفاوت هستند. قوانین مقیاسی متفاوت، قادر به تشخیص دقیق سرطان‌های سینه می‌باشند.

دومین کشف مهم و جدیدی که ارزش حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری را بالا برد و آن را برجسته‌تر کرد این است که تعدادی از فرآیندهای فیزیکی به وسیلهٔ معادلات دیفرانسیل کسری مدل‌سازی شده‌اند. برجستگی مدل‌های ریاضی این است که می‌توان از آنها در پیش‌بینی رفتار و کسب آگاهی و بصیرت از فرآیندهای فیزیکی که رفتار را تحت تأثیر قرار می‌دهند، استفاده کرد. مدل‌های ریاضی به‌طور گسترده در فرآیندهای جابجایی و انتشار مورد استفاده قرار می‌گیرند. برای مثال پخش شدن آلودگی‌ها در اقیانوس و حرکت جریان الکتریکی در رساناها فرآیندهایی قابل انتشار هستند.

در اینجا توصیفی احتمالی موجب پدیدارشدن معادلهٔ دیفرانسیلی می‌شود که می‌تواند خواص متوسط پیش‌بینی شده را حل کند. از نمونهٔ مشابه معادلات در تجزیه و تحلیل اقتصادی مدل قیمت‌های سهام استفاده می‌شود. اخیراً دانشمندان به این نتیجه رسیده‌اند که بهتر است فرآیندهایی را که با افزایش انتشار یا جلوگیری از آن شکل می‌گیرند، در برخی روش‌ها، به‌وسیلهٔ معادلات دیفرانسیل کسری مدل‌سازی کنند تا معادلات دیفرانسیل از مرتبهٔ یک عدد صحیح. معادلات دیفرانسیل کسری کاربردهای بسیار زیادی در زمینه‌های ریاضیات اقتصادی، دینامیک اقیانوس، دینامیک اتمسفر و ریاضیات بیولوژیک پیدا کرده است.

تشکر

بدین وسیله از آقای مرتضی بیات به سبب بازبینی و تصحیح مقاله و راهنمایی‌های ارزنده‌شان و نیز از مسؤولین محترم مرکز تحصیلات تکمیلی در علوم‌پایهٔ زنجان به‌خاطر فراهم نمودن امکان‌های پژوهش تشکر می‌نمایم.

مراجع

[1] G.W. Leibniz, Letter from Hanover, Germany, to G.F.A. L'Hopital, September 30, 1695, *in Mathematische Schriften*, 1849; reprinted 1962, Olms verlag, Hildesheim, Germany, 2, 301-302 (1695).

[2] S.F. Lacroix, *Traité du calcul différentiel et du calcul integral* , 2nd ed., Courcier, Paris, pp. 409-410 (1819).

[3] B. Riemann, "Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation", *Gesammelte Werke*, publishhed posthumously, Teubner, Leipzig (1892).

[4] N.H. Abel, *Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales défines, Oeuvres Complètes*, Vol. 1, Grondahl, christiania, Norway (1881).

[5] H. Laurent, "Sur le calcul des dérivées á indices quelconques", Nouv. Ann. Math., 3(3), 240-252 (1884).

[6] O. Heaviside, "*Electrical Papers*", Macmillan, London (1892).

[7] A. Gemant, *A method of analyzing experimental results obtained from elastoviscous bodies*, Physics 7(1936) 311-317.

[8] B. Ross, editor, *Proceedings of the International Conference on Fractional Calculus and Its Applications*, University of New Haven, West Haven, Conn., June 1974; Springer-Verlag, New York (1975).

[9] K. Oldham and J. Spanier, *The Fractional Calculus*, Academic Press, New York (1974).

[10] K.S. Miller and B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, John Wiley & Sons, Inc. New York (1993).

[11] K.M. Kolwankar, "Studies of Fractal Structures and Processes Using Methods of Fractional Calculus", WWW. arXiv:chao-dyn/9811008V1 4Nov 1998.

[12] R. Hilfer, *Applications of Fractional calculus in Physics*, World Sciectific, Singapore, 2000.

[13] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd ed. McGraw-Hill, New York, 1976.

[۱۴] بهمن مهری، نهان علی‌اف و محمد جهانشاهی، «بررسی مسائل مقدار مرزی و اولیه که شامل معادلات دیفرانسیل با مرتبه‌های کسری هستند»، گزارش بیست و هفتمین کنفرانس ریاضی کشور (۱۳۷۵) صص ۱۱ـ۸.

زهرا خاتمی
مرکز تحصیلات تکمیلی در علوم پایهٔ زنجان
پست الکترونیک: zkhatami1@yahoo.com
یحیی علیزاده
مرکز تحصیلات تکمیلی در علوم پایهٔ زنجان
پست الکترونیک: yalizadeh@yahoo.com

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شمارهٔ ۲۹(پاییز ۱۳۸۱)، صص. ۳۱ تا ۵۳

دکتری آموزش ریاضی در دانشگاههای آمریکا

بیژن ظهوری زنگنه

چکیده

به‌طور سنتی، رشتهٔ آموزش ریاضی در دانشگاههای اروپا و آمریکا، مولود دپارتمان‌های ریاضی بوده است. با این حال، رشتهٔ آموزش ریاضی در آمریکا، در دانشکده‌های علوم تربیتی، مراکز بین دپارتمانی، و دپارتمان‌های ریاضی، با تنوع بیشتری ادامه یافته است.

همچنین، بررسی برنامهٔ درسی دوره‌های تحصیلات تکمیلی دپارتمان‌های ریاضی دانشگاه‌های ایالات متحدهٔ آمریکا، در حال حاضر، نشان می‌دهد که تأسیس برنامه‌های دکتری و کارشناسی‌ارشد آموزش ریاضی در آن‌ها، رشد بی‌سابقه‌ای پیدا کرده است.

در این مقاله، ضمن مروری بر چرایی و چگونگی تأسیس و توسعهٔ رشتهٔ آموزش ریاضی در دنیا، و اشاره به ویژگی‌های تحقیقاتی این رشته، برنامه‌های جاری دکتری آموزش ریاضی در دانشگاه‌های آمریکا مورد بررسی قرار می‌گیرد. این بررسی، عمدتاً با استفاده از وب سایت‌های این دانشگاه‌ها انجام گرفته است.

مقدمه

با مشاهدهٔ سایت‌های دپارتمانهای ریاضی دانشگاه‌های آمریکا وکانادا و برنامه‌های کارشناسی، کارشناسی‌ارشد و دکتری آن‌ها، ملاحظه می‌شود که نسبت به دوره‌های گذشته، تغییرات محسوسی در برنامه‌های درسی این دپارتمانها به‌وجود آمده است. از جمله مهم‌ترین این تغییرات آن است که برخلاف دهه‌های گذشته، «اصل

پاسخ‌گویی» محور اغلب برنامه‌های درسی دپارتمانهای ریاضی قرار گرفته است. مثلاً، سایت دپارتمان ریاضی انستیتوی تکنولوژی ماساچوست[1] (M.I.T) [۱]، سؤال‌های زیر را مطرح کرده است:

الف) چرا باید در رشته ریاضی درس بخوانم؟
ب) اگر مطمئن نباشم یا علاقه‌مند نباشم که ریاضیدان بشوم، آیا باز هم باید رشته ریاضی را انتخاب کنم؟
ج) با داشتن مدرک کارشناسی ریاضی، چه‌کار می‌توانم بکنم؟

بروشور دپارتمان ریاضی .M.I.T، به روشنی به این سؤال‌ها پاسخ داده است. هم‌چنین، سایت دانشگاه تورنتو دربارهٔ برنامهٔ کارشناسی ریاضی محض قید می‌کند که با گرفتن مدرک کارشناسی و کارشناسی ارشد در ریاضی، هیچ شغلی در انتظار شما نیست و باید تحصیلات خود را تا دورهٔ دکتری ادامه دهید. در آن صورت، ممکن است به مقام استادی در کالج یا دانشگاه دست یابید. این دیدگاه جدید، یک تغییر اساسی نسبت به دیدگاه سنتی درمورد دانشگاه دارد. زیرا در گذشته، فرض بر این بود که وظیفهٔ دانشگاه تولید علم است و ایجاد اشتغال متناسب با شأن تخصصی فارغ‌التحصیلان ریاضی، جزو وظایف جامعه است. با این حال، با توجه به مسألهٔ بیکاری وسیع فارغ‌التحصیلان دانشگاهی در آمریکا و سایر کشورهای پیشرفته، این دیدگاه با چالش جدی مواجه شده و پاسخگویی به مسألهٔ اشتغال، جزو وظایف اصلی دانشگاه‌ها شده است. به همین دلیل، ایجاد توانایی اشتغال برای فارغ‌التحصیلان دانشگاهی نیز، یکی از دغدغه‌های جدی دانشکده‌های ریاضی در آمریکا و کانادا گردیده است.

وضعیت پیش آمدهٔ کنونی، تداعی‌کنندهٔ اظهارنظر دکتر لطفعلی‌زاده در مورد آیندهٔ دپارتمان‌های ریاضی دانشگاههای آمریکا است که در میزگرد «پیشبرد ریاضیات در ایران» در دومین کنفرانس ریاضی کشور که در فروردین ۱۳۵۰ [۲] در دانشگاه صنعتی‌شریف برگزار گردید، بیان شد. وی در آن میزگرد، اظهار داشت که «... ریاضیات به‌صورت فعلی خود، و راههای مختلفی که دنبال می‌کند، کم‌کم ارتباط خود را با دنیای واقعی از دست می‌دهد و وارد یک نوع جدّ و جهد فکری می‌شود که به‌نظر بنده، کاملاً باارزش است. چون من معتقدم که منفعت و سودمندی، نباید ملاک در ارزیابی تحقیقات ریاضی باشد. ولی مسأله اینجاست که بودجهٔ مالی هنگفتی را نمی‌توان در این توسعه، توجیه کرد.

به عبارت دیگر، شما می‌توانید بگوئید که دپارتمان کوچکی داریم و در آن، عدهٔ محدودی در توسعه تئوری‌های زیبائی فعالیت می‌کنند و فرضیه‌های عمیقی به‌وجود می‌آورند. بسیار خوب! ولی نمی‌توانید انتظار تشکیل دپارتمانی متشکل از ۸۰ یا ۱۰۰ استاد داشته باشند و دولت میلیونها دلار بودجه در اختیار شما بگذارد.» (میزگردهای دومین کنفرانس ریاضی صفحات ۴۹ و ۵۰) [۲].

دکتر لطفعلی‌زاده پیش‌بینی می‌کرد که اگر دپارتمان‌های ریاضی در آمریکا و کانادا راه گذشتهٔ خود را ادامه دهند، به دپارتمان‌های کوچکی با ۵ یا ۶ نفر تبدیل می‌شوند. اما، دپارتمانهای ریاضی در آمریکا و

1) Massachusets Institute of Technology (M.I.T.)

کانادا، هم چنان دپارتمانهای بزرگی با ۸۰ تا ۱۰۰ نفر عضو هیأت علمی، باقی ماندند. یکی از علت‌های اصلی این امر را می‌توان، به‌هنگام شدن این دپارتمانها با نیازهای اجتماعی در هر زمان دانست. به همین دلیل است که اکنون، دپارتمانهای ریاضی دانشگاههای آمریکا و کانادا، خود را «پاسخگوی» اشتغال که یکی از اصلی‌ترین نیازهای اجتماعی فارغ‌التحصیلان می‌باشد نیز می‌دانند. در نتیجه، توسعهٔ رشتهٔ آموزش ریاضی، دوره‌های بازآموزی معلمان ریاضی، و کارشناسی‌ارشد دبیری ریاضی در دپارتمان‌های ریاضی آمریکا، پاسخ مناسبی به دغدغه‌های اشتغال است.

از این گذشته، افزایش تعداد دانشجویانی که در دانشگاه دروس ریاضی می‌گیرند، و ضرورت ارتقای فرایند یاددهی و یادگیری ریاضی در سطح دانشگاه، لزوم کارهای تحقیقاتی آموزش ریاضی در دانشگاهها را تشدید نموده است.

همان‌طور که میشل آرتیک [۳] استاد دپارتمان ریاضی دانشگاه پاریس می‌گوید، «بیش از سی سال است که هدف تحقیق در آموزش ریاضیات، روشن ساختن فرآیندهای یادگیری ریاضیات از طریق بررسیهای نظری و عملی بوده است. هم‌چنین، سعی می‌کرده‌اند راهبردهایی برای تدریس تدوین کنند که نتایج این تحقیقات در آنها، ملحوظ شده باشد، و سپس آنها را بیازمایند. تحقیقات، نخست معطوف به اولین سطح یادگیری یعنی سطح دبستان بود و آموزش فراتر از تعلیمات اجباری، یعنی دبیرستان و دانشگاه در حاشیه قرار داشت. اما افزایش تعداد دانشجویانی که امروزه در این سطح پیشرفته‌تر درس ریاضی می‌گیرند، موجب بروز مشکلاتی آموزشی شده است که چالشهای جدیدی را برای تحقیق (در زمینه آموزش) بوجود آورده است.» (صفحه ۴۹).

یکی از دغدغه‌های انجمن ریاضی و شورای ملی تحقیقات[1] (NRC)، چگونگی افزایش تعداد دارندگان مدرک دکتری آموزش ریاضی است. طبق گزارش «شورای ملی تحقیق» (NRC)، از سال ۱۹۸۰ تا ۱۹۹۸، در تمام ایالات متحده، تعداد کسانی که مدرک دکتری آموزش ریاضی خود را از ۱۲۶ دانشگاه این کشور اخذ کرده‌اند، فقط ۱۳۸۶ نفر بوده است.

به گفتهٔ ریز[2] (۲۰۰۰) [۴]، فارغ‌التحصیلان می‌دانند «فرصت‌های شغلی برای کسانی که دارای مدرک دکتری آموزش ریاضی هستند، هم‌چنان رو به افزایش است. به‌طور مثال، تعداد فزاینده‌ای از دپارتمان‌های ریاضی، نه فقط برای تدریس، بلکه برای انجام تحقیقات در زمینه‌های مرتبط با آموزش ریاضی، فعالانه به استخدام این افراد می‌پردازند. علاوه بر این تقاضای رو به تزاید دپارتمان‌های ریاضی به دارندگان مدرک دکتری آموزش ریاضی، در دانشکده‌ها و دپارتمان‌های آموزشی، آموزش و پرورش، موقعیت‌های دولتی، ناشران و کمپانی‌های اندازه‌گیری و آزمون سازی نیز، به دلیل نیاز به این فارغ‌التحصیلان فرصت‌های شغلی دیگری در انتظار آن‌هاست (رِیز، صفحه ۱۲۶۷).

1) National Research Council (NRC) 2) Reys

ریز (۲۰۰۰) در ادامه اضافه می‌کند که از طرف «بنیاد ملی علوم»[1] آمریکا، در اکتبر ۱۹۹۹ کنفرانسی در مورد دکتری آموزش ریاضی به‌نام «یک رشته، مسیرهای گوناگون، برنامه دکتری آموزش ریاضی»[2] برگزار گردید تا به تنوع ممکن در این رشته و چگونگی افزایش عرضه در مقابل تقاضای روزافزون دانشگاهها به فارغ‌التحصیلان آموزش ریاضی، بپردازد. نام این کنفرانس نشان‌دهنده «بین رشته‌ای» بودن دیسیپلین آموزش ریاضی است که می‌توان از مسیرهای مختلفی به آن رسید.

در نتیجه، با توجه به نیاز فزایندهٔ اجتماع و جامعهٔ ریاضی به رشتهٔ آموزش ریاضی و با عنایت به روند جهانی در رابطه با ضرورت پاسخگویی به نیازهای اشتغال فارغ‌التحصیلان رشته‌های ریاضی، این مقاله تلاش دارد به دو سؤال زیر، پاسخ دهد:

۱) سیر تاریخی رشتهٔ آموزش ریاضی چیست؟

۲) آموزش ریاضی چیست و مسایل تحقیقاتی آموزش ریاضی کدامند؟

سپس، با استناد به پاسخ سؤال‌های فوق، برنامهٔ آموزش ریاضی چند دانشگاه آمریکا مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

لازم به توضیح است که انتخاب آمریکا برای بررسی برنامهٔ دکتری ریاضی دانشگاه‌های آن به دلایل زیر انجام گرفته است:

الف) نظام آموزش عالی ایران از جهات گوناگون، شبیه نظام آموزشی دانشگاههای آمریکا و کانادا است[3].

ب) دروس اجباری و امتحان‌های مختلف جامع دوره‌های دکتری آموزش ریاضی، تا اندازهٔ زیادی ماهیت و هستهٔ اصلی و اجزای تشکیل‌دهنده رشتهٔ «بین رشته‌ای» آموزش ریاضی را مشخص می‌کند. در صورتیکه در دانشگاههای اروپا، به‌طورکلی دوره‌های دکتری، دروس اجباری و امتحان‌های جامع، وجود ندارند[4].

ج) هدف این مقاله، بررسی برنامه‌های متنوع آموزش ریاضی در دپارتمان‌های مختلف دانشگاههای آمریکا، و پیدا کردن فصل مشترک آن برنامه‌ها برای پیدا کردن هستهٔ اصلی برنامه‌های دکتری آموزش ریاضی است. در حالی که چنین تنوعی در برنامه‌های درسی دورهٔ دکتری کشورهای دیگر ملاحظه نمی‌شود.

پس از این مطالعه، تلاش شده است تا سؤال‌های زیر نیز، مورد بررسی اجمالی قرار گیرند:

الف) دارندگان مدرک دکتری آموزش ریاضی در آمریکا چه‌کار می‌کنند، یا چه‌کار می‌توانند بکنند؟

ب) جایگاه رشتهٔ آموزش ریاضی در ایران در چه دانشکده‌ای است؟

1) National Science Foundation (NSF) 2) one Field Many Routes ...

۳) بحث در مورد دلایل این شباهت، موضوع این مقاله نیست.

۴) ممکن است در بعضی از دانشگاههای اروپا، استثناهایی وجود داشته باشد.

ج) برای ایجاد دوره‌های دکتری آموزش ریاضی در ایران، چه باید کرد؟
د) برنامهٔ دکتری آموزش ریاضی در ایران چگونه می‌تواند باشد؟

تاریخچهٔ آموزش ریاضی

همان‌طور که کیل پاتریک (۱۹۹۴) اظهار می‌دارد، با وجودی که آموزش در ریاضی تاریخچه‌ای طولانی دارد؛ با این حال، سابقهٔ آموزش ریاضی به عنوان یک رشتهٔ دانشگاهی، به کم‌تر از یک قرن می‌رسد. زمان شروع این رشته، از هنگامی بود که آموزش معلمان به دانشگاه‌ها برده شد و ریاضی‌دانها تلاش کردند تا برنامهٔ درسی متوسطه را اصلاح کنند [۵]. به همین منظور، در سال ۱۸۸۸، ریاضی‌دان معروف فلیکس کلاین، پیشنهاد یک‌پارچگی مؤسسات فنی و دانشگاه‌ها را در پروس داد. وقتی که در پایان قرن، آن طرح موفق نشد، او به مدارس متوسطه توجه نمود و تلاش کرد تا تدریس ریاضی را به‌گونه‌ای اصلاح کند که دانش‌آموزان، برای مؤسسات فنی یا دانشگاه‌ها، آماده شوند. او از مفهوم «تابع» به عنوان زمینه‌ای برای سازمان‌دهی برنامهٔ درسی به صورتی استفاده کرد که تابع، به مطالعهٔ حسابان منجر شود. در سال ۱۹۰۴، کمیته‌ای توسط کلاین تشکیل شد و یک سال پس از آن، ریز مواد طرح مرانو[1] برای ریاضی معرفی شد [۵]. هم‌زمان با آن، تلاش‌های مشابه دیگری در کشورهای دیگر در حال انجام بود. به‌طور مثال، در سال ۱۹۰۴، فرانسه به اصلاح برنامهٔ هندسه پرداخت؛ در سال ۱۸۷۱، انگلستان اصلاح برنامهٔ آزمون‌های ورودی به دانشگاه‌ها را آغاز کرد؛ و در ایالات متحده نیز، پیشنهاد اصلاح برنامهٔ درسی یکپارچه داده شد (هاوسون[2]، ۱۹۹۰) [۶].

به گفتهٔ کیل پاتریک (۱۹۹۴)، این حرکت‌ها ادامه یافت و جلسات بین‌المللی متعددی، به وضعیت تدریس ریاضی در تمام سطوح مدرسه‌ای در کشورهای مختلف اختصاص یافت. کشورهای اطریش، مجارستان، بلژیک، دانمارک، فرانسه، آلمان، سوئد، بریتانیا، ایالات متحده، و ژاپن؛ یکی پس از دیگری، به این حرکت پیوستند. بالاخره، اولین مدرک دکتری در آموزش ریاضی، در سال ۱۹۱۱ به یکی از دانشجویان کلاین در گوتینگن اعطا شد [۵].

با این‌حال، جنگ جهانی اول به اصلاحات آموزشی خاتمه داد و به‌طور چشمگیری، فرآیند نهادینه شدن آموزش ریاضی را به عنوان یک رشته دانشگاهی، کند کرد. بعد از جنگ جهانی دوم نیز، تلاش مجدد برای سازگارکردن ریاضیات مدرسه‌ای با تقاضاهای علوم و تکنولوژی معاصر انجام شد. در راستای چنین تلاش‌هایی، پرواز اسپاتنیک[3] در سال ۱۹۵۷ توسط شوروی سابق، آمریکا را به شدت غافلگیر کرد و به جبران این عقب‌ماندگی، برنامه‌های درسی ریاضی موسوم به «دوره ریاضی جدید»[4] به‌وسیله عده‌ای از متخصصان ریاضی در آمریکا، تهیه شد. به گفتهٔ کیل پاتریک (۱۹۹۴)، توجیه استفاده از ایده‌های «ریاضی جدید» این بود که چون نمی‌توان با هیچ اطمینانی نیاز یک دانش‌آموز بزرگسال به ریاضی را

1) Merano 2) Howson 3) Sputnik 4) New Math Era

پیش‌بینی کرد، بنابراین مفاهیم پایه‌ای و ساختار ریاضی، باید اساس یادگیری آینده را فراهم نماید [۵]. این رویکرد که دیدگاه‌های آموزشی را نادیده گرفته بود، با مخالفت ریاضیدانان‌های آگاه، حرفه‌ای و تراز اول آمریکا روبه‌رو شد و ۷۵ نفر آن‌ها، بیانیه‌ای را امضا کردند که در آن، تأکید نمودند که باید به چگونگی یادگیری و روش‌های تحقیقات آموزشی، بها داده شود [۷].

در آن زمان، ریاضیدان‌ها به متخصصان علوم تربیتی انتقاد می‌کردند که که چرا در بعضی مواقع، بدون آشنایی با محتوای ریاضی، به تهیه و تدوین برنامهٔ درسی ریاضی می‌پردازند. اساس انتقاد آن‌ها این بود که عموماً، متخصصان رشته‌های علوم تربیتی و برنامه‌ریزی درسی، با وجودی که در سطح کلان برنامه‌ریزی‌های درسی و آموزشی مانند سیاستگذاری‌ها، تدوین اصول کلی برنامه‌ریزی درسی و استانداردهای آن، تبیین مبانی فلسفی و جهات دیگر، توانمند هستند، اما به دلیل نوع آموزش خود، تجربه و توانایی کمتری در زمینهٔ برنامهٔ درسی موضوعی به خصوص ریاضیات و علوم، دارند [۸]. در نتیجه، نباید در برنامه‌ریزی درسی ریاضی دخالت کنند. اما بیانیهٔ امضاء شده توسط ۷۵ ریاضی‌دان معروف، بر این نکته تأکید داشت که برخورد عکس‌العملی و غیرمنطقی، می‌تواند خطر بالقوهٔ جدیدی باشد و متذکر شد «ریاضی‌دان‌ها»، در برابر سلطه و حکمفرمایی آموزشگران حرفه‌ای (متخصصان علوم تربیتی و برنامه درسی) بر آموزش، و این‌که روش آموزش بر محتوا مقدم است، عکس‌العمل نشان می‌دهند. حال خود ممکن است بر تقدم محتوا بر روش آموزشی تأکید کنند که در هر دو صورت، به بی‌فایدگی منجر می‌شود [۶].

بنابراین، حمایت ریاضی‌دان‌های معروف از ضرورت «تعادل بین محتوا و روش‌های آموزشی»، باعث روی آوردن استعدادهای جدید و درخشان به رشتهٔ «آموزش ریاضی»[1] شد که در واقع، یک دیسیپلین بین رشته‌ای[2] بود[3].

بنا به اظهار هاوسون (۱۹۹۰)، بعد از این بیانیه و متعاقب نیازهای رو به افزایش جامعه به آموزش ریاضی، «کمسیون بین‌المللی تدریس ریاضی»[4] که در ابتدا در سال ۱۹۵۲ در رُم تشکیل شده بود، مجدداً فعال شد. این کمسیون، از طریق کنفرانس‌ها و گردهمایی‌های متعدد، ابتدا در اروپا و سپس در آمریکای لاتین، آفریقا و آسیای جنوب شرقی، جامعهٔ علمی را تشویق به بازسازی آموزش ریاضی کرد. در همین

1) Mathematics Education 2) Interdisciplinary

۳) در سفری که پالیس، رئیس کنگرهٔ ریاضی‌دان‌ها در سال ۱۳۷۹ به ایران داشت، نگارنده با ایشان دربارهٔ عدم اعتماد بعضی از افراد جامعهٔ ریاضی ایران نسبت به رشتهٔ آموزش ریاضی که در حال تکوین بود، اشاره کرد. پالیس در پاسخ گفت که «این دغدغه‌ها و جدال‌ها و عدم اعتمادها، بیشتر مربوط به دهه‌های ۵۰ و ۶۰ میلادی در غرب است و بیانیهٔ معروف ریاضی‌دان‌ها، عملاً به آن‌ها خاتمه داد. زیرا ریاضی‌دان‌های حرفه‌ای به این باور رسیده‌اند که برای توسعه و ارتقای ریاضی، چاره‌ای جز ایجاد تعادل بین محتوای ریاضی و روش آموزشی نیست که این مهم هم، توسط آموزش ریاضی به انجام می‌رسد».

4) International Commission on Mathematical Instruction (ICMI)

راستا، «سازمان همکاری‌های اقتصادی و توسعه»[1] و یونسکو، کشورهای در حال توسعه را برای پیگیری اصلاحات رخ داده شده در اروپا و ایالات متحده، کمک کردند و بالاخره در سال ۱۹۶۹، اولین «کنگرهٔ بین‌المللی آموزش ریاضی»[2] در لیون فرانسه برگزار شد [۹] و پس از آن، این کنگره‌ها هر چهار سال یک‌بار برگزار می‌شوند و شرکت‌کنندگان از بیش از ۸۰ کشور، در آن‌ها شرکت می‌کنند.

در اوایل قرن بیستم، اولین برنامهٔ دورهٔ دکتری آموزش ریاضی در آمریکا، در کالج معلمان دانشگاه کلمبیا و دانشگاه شیکاگو تأسیس شد. برنامه‌های دکتری آموزش ریاضی، تحت تأثیر برنامه‌های دکتری ریاضی در دانشگاه کلمبیا و دانشگاه شیکاگو قرار گرفته و شکل یافتند که در آن زمان، در حال توسعه و مورد احترام بودند. برنامه‌های دکتری آموزش ریاضی در طول زمان، تحوّل یافتند و راه را برای توسعهٔ سایر برنامه‌های دکتری که در شکل‌های گوناگون و در دانشگاههای مختلف شکل گرفت، هموار کردند.

با توجه به سیر تحوّل رشته آموزشی ریاضی به عنوان یک رشتهٔ دانشگاهی که از درون کنگرهٔ بین‌المللی ریاضی‌دان‌ها و دپارتمان‌های ریاضی رشد کرد و توسعه یافت، و با توجه به این‌که مسائل آموزش ریاضی، همیشه دغدغهٔ ریاضی‌دان‌ها و معلمان ریاضی بوده است، سؤال این است که واقعاً آموزش ریاضی چیست؟

آموزش ریاضی چیست؟

گویا (۱۳۷۵) به نقل از شونفیلد (۱۹۸۷) اظهار می‌دارد که، «به‌طور خلاصه، آموزش ریاضی یعنی هر آنچه که مربوط به آموزش و یادگیری ریاضی می‌شود. در واقع، بحثهای اساسی و نیروهای مؤثر در آموزش ریاضی را می‌توان با دو عنوان برنامهٔ درسی ریاضی و چگونگی تدریس و یادگیری ریاضی مطرح نمود که هر دو عنوان، ماهیت ریاضی، ماهیت دانش ریاضی و بسیاری مباحث دیگر را در بر می‌گیرد. علاوه بر این‌ها، تغییر دیدگاه نسبت به خود علم ریاضی و پیدایش فلسفه و روان‌شناسی تربیتی، همگی از نیروهای اساسی در تشکیل دیسپلین آموزش ریاضی هستند [۱۰]. این تعریف، از جامعیت زیادی برخوردار است و به‌خصوص، تجربهٔ شخصی نگارنده در «دوره‌های بازآموزی ریاضی دبیران ریاضی» و سؤال‌ها و ادعای مطرح شده در آن‌ها، این تعریف را عینی‌تر می‌کند. به‌طور مثال، در این دوره‌ها سؤال‌هایی از قبیل «چرا فلان مطلب را آن‌گونه، تدریس نمی‌کنیم؟»، «اگر مطالب به‌صورت شهودی تدریس شوند، بچه‌ها آن‌ها را بهتر می‌فهمند»، «من حد را با روش ε و δ درس دادم و بچه‌ها آن را خوب فهمیدند»، به تکرار مطرح می‌شدند که همگی، ماهیت آموزشی دارند و در حیطهٔ آموزش ریاضی قرار می‌گیرند. یعنی هیچ روشی در خود ریاضی وجود ندارد که ثابت کند آیا ادعاهای بالا درست یا نادرست هستند. در ریاضی، تنها ما می‌توانیم مسائلی را حل کنیم و جواب دهیم که قابل مُدل‌سازی ریاضی باشند. با یک مثال، این مطلب

1) The Organization for Economic Cooperation and Development (OECD) 2) Interational Congress On Mathematical Education (ICME)

را می‌توان بیشتر بازکرد.

فدائی (۱۳۸۰)، به دنبال پیداکردن استعارهٔ جدیدی برای مفهوم حد، سؤال‌های زیر را مطرح کرد [۱۱]:

۱) مشکلات یادگیرندگان در رابطه با تعریف $\varepsilon - \delta$ ای حدّ، کدامند؟
۲) آیا تعریف جدید حدّ، قادر به رفع یا کاهش مشکلات مفهومی تعریف $\varepsilon - \delta$ ای حدّ خواهد بود؟
۳) آیا تعریف جدید، می‌تواند جایگزین تعریف $\varepsilon - \delta$ای حدّ در برنامهٔ درسی ریاضی مدرسه‌ای شود؟
۴) آیا تعریف جدید، با شهود یادگیرنده سازگار است؟
۵) آیا تعریف جدید، از دقت لازم ریاضی، برخوردار است؟

از سؤال‌های فوق، چهار سؤال اوّل ماهیت تحقیقات آموزش ریاضی را داشتند، و برای پاسخگویی به هریک از آن‌ها، به مستندات و توجیهات آموزشی نیاز بود. اما سؤال (۵) در چارچوب ریاضی بود و پاسخگویی به آن، نیازمند مطالعهٔ نظری و تاریخی ریاضی بود [۱۱]. در واقع با توجه به ماهیت سؤال (۵)، باید یک مُدل ریاضی ارایه شده و نشان داده شود که این مدل، قادر است تمام مسایل و قضیه‌های آنالیز ریاضی را که بر اساس این تعریف بنا می‌شوند، به سادگی و دقت ثابت کند. یعنی با ارائهٔ این تعریف، باید بتوانیم قضیه‌های اساسی آنالیز ریاضی را ثابت کنیم و معادل بودن این تعریف را با تعریف $\varepsilon - \delta$، نشان دهیم. اما پاسخگویی به سؤال‌های (۱) تا (۴)، در خارج ریاضی قرار دارد و نیازمند علوم دیگری مانند نظریه‌های یادگیری و روان‌شناسی و برنامهٔ درسی ریاضی است. بنابراین، نیاز به روش‌های تحقیقی علوم انسانی و علوم تربیتی داریم، زیرا محور اصلی چهار سؤال فوق، انسان است.

در تمام رشته‌های علوم انسانی از جمله علوم اجتماعی و علوم تربیتی، درس‌هائی به‌نام «روش تحقیق» تدریس می‌شوند. اما در رشته های علوم ریاضی چنین درس‌هائی وجود ندارند. در نتیجه عنوان درس «روش تحقیق» در ذهن ریاضی‌دانها، مفهوم دیگری را نسبت به علمای علوم انسانی، تداعی می‌کند، از نظر ریاضی‌دانها، تحقیق کردن تنها با تحقیق کردن آموخته می‌شود و الگوریتم یا روشی وجود ندارد تا یاد بدهد که چگونه می‌توان یک محقق ریاضی شد. یعنی خودِ عمل تحقیق ریاضی، محقق ریاضی را تربیت می‌کند.

به بیان دیگر، اگر بخواهیم عبارت «روش تحقیق» علوم انسانی و علوم تربیتی را به فرهنگ ریاضی معنی کنیم، می‌توانیم بگوئیم که درس‌های «روش تحقیق» در علوم انسانی، روش اعتبار بخشی به تحقیقات انجام شده را نشان می‌دهند.

اما در ریاضی، اگر یک اثبات بر اساس «برهان خلف» باشد، معتبر است و اثبات دقیقی به حساب می‌آید، یعنی ریاضی‌دان‌ها آن‌را می‌پذیرند. یعنی اثباتِ درستی و سازگاری ریاضی از طریق علمی به نام «منطق ریاضی» به‌دست می‌آید، و اثبات قضیه‌ای که بر اساس منطق ریاضی معتبر باشد، اثباتی معتبر است. در واقع، می‌توان به زبان علوم انسانی و علوم تربیتی، «روش تحقیق ریاضی» را همان منطق

ریاضی نامید[1]. ریاضی‌دان‌ها از دبستان و دورهٔ راهنمایی تا دبیرستان و دورهٔ کارشناسی، با همین «روش تحقیق»، ادعاهای خود را ثابت می‌کنند یا با مثال نقض، «ادعاهای» نادرست را رد می‌کنند، و چون این‌کار به تدریج آموزش داده شده، نیازی به تدریس «روش تحقیق علم ریاضی» در دوره‌های کارشناسی‌ارشد و دکتری نیست. زیرا برای هر ریاضی‌کاری، واضح و بدیهی است، و هر ریاضی‌دان تازه‌کار نیز، با این روش تحقیق آشناست.

اما چگونه و با چه روشی، می‌توان به سؤال‌های (۱) تا (۴) بالا، پاسخ داد؟

مسلماً برای جواب به این سؤال‌ها، باید به افراد مورد سؤال یعنی دانش‌آموزان، مراجعه کنیم؛ چون «مشکلات مفهومی»، «شهود یادگیرنده»، «مشکلات یادگیرندگان»، «چگونگی یادگیری یادگیرنده» و امثال این‌ها، به انسان یعنی دانش‌آموز برمی‌گردد. پس برای بررسی این مسأله، باید به انسان مراجعه شود، و از انواع روش‌های تحقیق کمّی[2] و کیفی[3] در یافتن پاسخ، استفاده کرد. لازم به توضیح است که روش تحقیقات کمّی، همان روش تحقیقات آماری است که به اصطلاح، «روش علمی» نامیده می‌شود و بر اساس فلسفهٔ تحصّلی[4] بنا شده است. در این روش، اغلب رفتار بارز انسان‌ها مورد مطالعه قرار می‌گیرد و با استفاده از نمونه‌گیری از یک جامعه آماری، داده‌ها جمع‌آوری می‌شوند و با استفاده از آمار توصیفی و استنباطی، تحلیل داده‌ها انجام می‌شود و نتایج ارائه می‌گردد.

هم‌چنین، در روش تحقیق کیفی با استفاده از روش‌های میدانی[5] و بالینی[6]، به مطالعهٔ عمیق و همه‌جانبهٔ رفتار پنهان ذهنی و رفتار بارز یادگیری انسان‌ها، پرداخته می‌شود.

بنابراین، برای تحقیق در رشتهٔ آموزش ریاضی و جواب دادن به سؤال‌های (۱) تا (۴)، نیازمند آشنایی با روش‌های تحقیق کمّی یا روش‌های تحقیق کیفی هستیم. در نتیجه، آموزش این روش‌ها، یکی از مؤلفه‌های اصلی برنامهٔ درسی «رشته‌های آموزشی است»، و در رشتهٔ آموزش ریاضی نیز، آشنایی با این روش‌ها، یکی از ضرورت‌های مهم است.

علاوه بر این، پاسخ به سؤال (۳)، یعنی «آیا تعریف حدّ می‌تواند جایگزین تعریف $\varepsilon - \delta$ای حد در برنامهٔ درسی ریاضی مدرسه‌ای شود؟»، نیازمند رشتهٔ جدیدی در علوم تربیتی به نام مطالعات برنامهٔ درسی است. یعنی چگونگی برنامهٔ درسی ریاضی، بخشی از رشتهٔ «برنامهٔ درسی» است. به همین دلیل، برنامهٔ درسی نیز، یکی از مؤلفه‌های مهم برنامهٔ درسی آموزش ریاضی است.

---

۱) نگارنده به این مهم توجه دارد که استدلال استنتاجی تنها نوع استدلال ریاضی نیست و رشد و توسعهٔ ریاضیات تجربی با استفاده از روشهای شبیه‌سازی، این مطلب را نقض می‌کند. ولی برای ساده‌کردن مطلب و بیان روش تحقیق در آموزش ریاضی، این نوع استدلال بیان شده است.

2) Quantitative Research Method 3) Qualitative Research Method 4) Positivism
5) Field Methods 6) Clinical Methods

مطالعهٔ مقایسه‌ای

برای آشنایی بیشتر با ویژگی‌های برنامهٔ درسی دوره‌های دکتری آموزش ریاضی در آمریکا، یک مطالعهٔ مقایسه‌ای انجام گرفته است. در این مطالعه، ابتدا برنامهٔ دکتری آموزش ریاضی در دپارتمان ریاضی دانشگاه ایالتی میشیگان [۱۲]، دپارتمان ریاضی دانشگاه سیراکیوز [۱۳]، دپارتمان ریاضی دانشگاه ایالتی ایلنوی [۱۴]، دپارتمان ریاضی و آمار دانشگاه آمریکن [۱۵]، دپارتمان علوم ریاضی دانشگاه ایالتی مونتانا [۱۶]، دپارتمان علوم ریاضی دانشگاه مونتانا [۱۷]، دپارتمان علوم ریاضی دانشگاه ایلنوی شمالی [۱۸]، دپارتمان ریاضی دانشگاه آریزونا [۱۹]، دپارتمان ریاضی دانشگاه میشیگان غربی [۲۰]، و دپارتمان ریاضی و آمار دانشگاه ایالتی پورتلند [۲۱]، مورد بررسی قرار گرفتند. سپس، از بین آن‌ها، دپارتمان ریاضی پنج دانشگاه جهت بررسی عمیق‌تر انتخاب شدند. لازم به توضیح است که علت حذف پنج دانشگاه از ده دانشگاه فوق، تشابه جغرافیایی یا برنامه‌ای آن‌ها بود.

خلاصهٔ این بررسی‌ها را در جدول شماره (۱) می‌آوریم و سپس به مقایسهٔ این برنامه‌ها با برنامه دکتری آموزش ریاضی در دانشکده تحصیلات تکمیلی علوم تربیتی در دانشگاههای پردو [۲۲]، ایندیانا [۲۳]، مینه‌سوتا [۲۴]، میسوری [۲۵]، و برنامهٔ آموزش ریاضی و علوم دانشگاه کالیفرنیا در برکلی می‌پردازیم [۲۶]. در این جدول، تعداد واحدهای اجباری در ریاضی، آموزش ریاضی، روش‌های تحقیق (تحقیقات آموزشی)، کارآموزی، روش‌های تدریس دوره کارشناسی، بازآموزی دبیران ریاضی، و واحدهای اختیاری دکتری آموزشی ریاضی در پنج دپارتمان ریاضی دانشگاه‌های آمریکا، با هم مقایسه شده‌اند.

جدول ۱. برنامهٔ دکتری آموزش ریاضی در دپارتمان‌های ریاضی

دانشگاه	ریاضی	آموزش ریاضی	روش‌های تحقیقات آموزشی	کارآموزی	اختیاری	جمع واحدهای اجباری
ایالتی میشیگان	۹	۶	۱۲	—	۹	۳۶
سیراکیوز	۳۰	۱۲	۱۵	۱۵	۱۸	۹۰
ایالتی ایلنوی	۶	۳۰	۱۲	۳	۶	۵۷
آمریکن	۱۲	۹	۱۲	—	۱۲	۴۵
ایالتی مونتانا	۱۵	۱۰	۱۲	۶	۶	۴۹

تبصرهٔ ۱. در دپارتمان ریاضی دانشگاه ایالتی میشیگان، این واحدهای اجباری، اضافه بر واحدهائی است که دانشجو برای گذراندن امتحان جامع نیاز دارد. یعنی دانشجوی دکتری آموزش ریاضی باید در سه زمینه شامل آموزش ریاضی و انتخاب دو زمینهٔ ریاضی از چهار زمینهٔ آنالیز حقیقی و مختلط، جبر،

معادلات دیفرانسیل، و هندسه یا توپولوژی، امتحان جامع کتبی بدهد، که دانشجو، معمولاً این دروس را در دورهٔ کارشناسی‌ارشد خود می‌گذراند. علاوه بر این، امتحان کتبی جامع در آموزش ریاضی نیز شامل ۹ واحد است. بنابراین، اگر دانشجو دارای مدرک کارشناسی‌ارشد ریاضی باشد، بایستی این ۹ واحد را به واحدهای آموزش ریاضی خود اضافه نماید، و اگر دارای مدرک کارشناسی‌ارشد آموزش ریاضی بوده و این ۹ واحد را گذرانده باشد، بایستی واحدهای دو امتحان ریاضی که وی در دوره کارشناسی‌ارشد نگذرانده است، به این واحدها اضافه شود.

تبصرهٔ ۲. در دپارتمان ریاضی دانشگاه سیراکیوز، ۹۰ واحد دروس تحصیلات تکمیلی بعد از دورهٔ کارشناسی الزامی است. بنابراین، اگر دانشجو دارای مدرک کارشناسی‌ارشد ریاضی باشد، باید ۳۰ واحد ریاضی بگذارند، و اگر دارای مدرک کارشناسی‌ارشد آموزش ریاضی باشد، واحدهای ریاضی و آموزش ریاضی او از این واحدها، کم می‌شود.

تبصرهٔ ۳. در دپارتمان ریاضی دانشگاه آمریکن، دانشجویان دکتری باید در درس روش‌های تحقیقات کمّی یک امتحان «کارآیی»[1] بدهند. در نتیجه، می‌توان واحدهای این دروس را به جمع واحدهای تحقیقات آموزشی اضافه کرد. هم‌چنین، در این دپارتمان دانشجویان باید امتحان جامع خود را در چهار زمینه زیر بدهند:

الف) امتحان ریاضی برای آموزشگران ریاضی (در سطح کارشناسی)؛
ب) امتحان آموزش ریاضی (کتبی)؛
ج) امتحان آموزش ریاضی (شفاهی)؛
د) امتحان چهارم، از بین امتحان‌های جامع معمول و سنتی در دانشکدهٔ علوم تربیتی، و دپارتمان‌های روان‌شناسی، ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، و به‌وسیلهٔ دانشجو انتخاب می‌شود.

تبصرهٔ ۴. عنوان مدرک دکتری در دپارتمان ریاضی دانشگاه ایالتی مونتانا، «دکتری ریاضی با گرایش آموزش ریاضی» است. با این وجود، برنامهٔ این دپارتمان، با دپارتمان‌های ریاضی دیگر، تفاوت ساختاری ندارد. در این دپارتمان نیز، دانشجویان دکتری ریاضی با گرایش (تخصص) آموزش ریاضی، باید در سه زمینهٔ زیر امتحان جامع خود را بگذرانند:

الف) امتحان جامع در آموزش ریاضی که شامل ۱۰ واحد اجباری آموزش ریاضی در این دوره است؛
ب) امتحان جامع در تحقیقات آموزشی؛
ج) یک زمینه از بین امتحان‌های جامع ریاضی دپارتمان ریاضی که شامل یکی از موارد ریاضی کاربردی، سیستمهای دینامیکی، آنالیز تابعی، آنالیز عددی، معادلات دیفرانسیل پاره‌ای، احتمال، آنالیز حقیقی و مختلط، و توپولوژی است.

1) Proficiency

تبصرهٔ ۵. در دانشگاه ایلنوی شمالی [۱۸]، هم در دپارتمان علوم ریاضی، و هم در دانشکدهٔ علوم تربیتی، دکترای آموزشی ریاضی ارائه می‌شود.

چگونگی تأثیر محیط فیزیکی دانشکده‌ای بر شکل‌دهی برنامهٔ دکتری آموزشی ریاضی

با مقایسهٔ برنامهٔ دکتری آموزش ریاضی در دپارتمان‌های «مطالعات برنامه درسی»[1] یا «برنامهٔ درسی و تدریس»[2] در دانشکده‌های علوم تربیتی دانشگاه‌های پردو [۲۲]، ایندیانا [۲۳]، مینه‌سوتا [۲۴]، میسوری [۲۵]، و دانشگاه کالیفرنیا در برکلی [۲۶] با برنامه دکتری آموزش ریاضی در دپارتمان‌های ریاضی مطرح شده در جدول (۱)، به این نتیجه می‌رسیم که تأثیر محیط فیزیکی بر دروس اجباری و امتحان‌های جامع، دیده می‌شود. به‌طور مثال، در همهٔ این برنامه‌ها، به دلیل وجود دپارتمان‌های «مطالعات برنامه درسی» یا «برنامهٔ درسی و تدریس»، دروس اجباری این دپارتمان اجباری است. مثلاً در برنامهٔ دکتری آموزش ریاضی دانشگاه پردو، دروس اجباری از بین چهار دسته انتخاب می‌شوند که شامل موارد زیر هستند:

الف) آموزش ریاضی ۹ واحد؛
ب) دروس اجباری برنامه درسی ۶ واحد؛
ج) دروس اجباری تحقیقات آموزشی ۱۵ واحد؛
د) دروس ریاضی.

در این زمینه، در راهنمای برنامهٔ این دانشگاه نوشته شده است که دانشجویانی که مدرکی در سطح کارشناسی‌ارشد ریاضی دارند، از گرفتن دروس ریاضی معاف می‌باشند و سایر دانشجویان، موظف هستند با نظر استاد راهنما و کمیتهٔ پایان‌نامه، دروس ریاضی تحصیلات تکمیلی را بگیرند. هم‌چنین، در دانشگاه ایندیانا، دانشجویان می‌توانند دروس ریاضی را انتخاب نکنند. در دانشگاه میسوری نیز که رشتهٔ آموزش ریاضی در دپارتمان مستقل آموزش ریاضی است، دروس اجباری به‌صورت زیر است:

الف) ۳۰ واحد در آموزش ریاضی؛
ب) ۱۲ واحد در تحقیقات آموزشی؛
ج) ۱۲ واحد در ریاضی، آمار و یا روان‌شناسی.

بنابراین، مقایسه بین برنامه‌های دکتری آموزش ریاضی در دانشکده‌های ریاضی (جدول (۱)) و علوم تربیتی، نشان می‌دهد که در تمام آن‌ها، دروس آموزش ریاضی و دروس روش‌های تحقیقات آموزشی، اجباری است. با این حال، دروس ریاضی برنامهٔ دورهٔ دکتری آموزش ریاضی که در دپارتمان‌های ریاضی برگزار

1) Curriculum Studies 2) Curriculum and Instruction

می‌شوند، اجباری و دروس برنامهٔ درسی و دیگر دروس علوم تربیتی، اختیاری است. در حالی که دروس برنامه‌های درسی در دپارتمان‌های برنامه درسی اجباری و دروس ریاضی در بعضی از آن‌ها، اختیاری است.

امتحان‌های جامع دوره‌های دکتری آموزش ریاضی

در دپارتمان‌های ریاضی دانشگاه‌های مختلف آمریکا از جمله دانشگاه ایالتی میشیگان، دو امتحان جامع در ریاضی و یک امتحان در آموزش ریاضی، اجباری هستند. البته این امتحان‌ها در دانشگاه ایالتی میشیگان به‌صورت امتحان «تعیین توانایی»[1] هستند و یک امتحان دیگر و پیشرفته‌تر در رشتهٔ تخصصی آموزش ریاضی وجود دارد که به صورت شفاهی برگزار می‌شود.

جدول ۲. امتحان جامع دکتری آموزش ریاضی در دپارتمان‌های ریاضی

دانشگاه	تعداد امتحان‌های ریاضی	امتحان کتبی آموزش ریاضی	امتحان تخصصی شفاهی آموزش ریاضی	امتحان جامع Proficiency یا روش‌های تحقیق آموزشی	امتحانهای دیگر
ایالتی میشیگان	۲	/	/		
سیراکیوز	۰	/	/		
ایالتی ایلنوی	۰	/	/		
آمریکن	۱	/	/	/	انتخاب یک امتحان جامع از بین ریاضی، آمار، روان‌شناسی علوم تربیتی و ...
ایالتی مونتانا	۱	/	/	/	

در دوره‌های دکتری آموزش ریاضی در دانشکده‌های علوم تربیتی و در دپارتمان‌های برنامهٔ درسی یا آموزش ریاضی، امتحان جامع در ریاضی وجود ندارد و به‌جای آن، امتحان جامع در برنامهٔ درسی یا روان‌شناسی برگزار می‌شود. بنابراین، مکان فیزیکی بر شکل‌دهی رشتهٔ آموزش ریاضی اثر نمی‌گذارد، اما بر معلومات جنبی فارغ‌التحصیلان آن، اثرگذار است.

1) Qualify

ماهیت و هستهٔ اصلی رشته آموزش ریاضی

به‌طور خلاصه، با مقایسهٔ دروس اجباری و امتحان‌های جامع، به این نتیجه می‌رسیم که مانند ماهیت هر رشتهٔ بین رشته‌ای، آموزش ریاضی و ماهیت آن نیز، متأثر از مکان فیزیکی و اجرایی برگزاری آن نیست. یعنی، مسائل آموزش ریاضی زاییده فرآیند یادگیری و یاددهی ریاضی هستند و روش‌های تحقیق آن نیز، روش‌های تحقیقات آموزشی در علوم انسانی و علوم تربیتی است. با این حال، معلومات جنبی فارغ‌التحصیلان دکتری آموزش ریاضی متأثر از مکان فیزیکی و اجرائی این دوره‌ها است. یعنی دانشجویانی که در این رشته دکترای خود را می‌گیرند، با هم دانشکده‌ای‌های خود، علائق علمی مشترک دارند.

این مسأله، در سایر رشته‌هایی که به دلیل ماهیتشان امکان برگزاری آن‌ها در دو مکان فیزیکی وجود دارد نیز، صادق است، برای مثال، دانشجویان دکتری در رشتهٔ احتمال در دانشکده‌های ریاضی، آمار، مهندسی صنایع، مهندسی برق، مدیریت، و اقتصاد؛ مشغول به ادامه تحصیل هستند و در بسیاری از مواقع، استاد یکی از گرایش‌های احتمال در یک دپارتمان، می‌تواند با همین گرایش در دپارتمان دیگر، دارای علائق تحقیقاتی مشترک باشد[1].

لازم به توضیح است که در تدوین برنامه‌های درسی دوره‌های دکتری، به این مهم که دانشجویان فارغ‌التحصیل از یک دپارتمان، باید دارای علائق مشترک باشند، به اصطلاح، «ارتباط برقرار کردن» با هم‌دانشکده‌ای‌ها گفته می‌شود.

نکتهٔ جالب این است که تمام برنامه‌های دکتری آموزش ریاضی در دپارتمان‌های ریاضی یا در دانشکده‌های علوم تربیتی، بر این نکته تأکید می‌کنند و قصد دارند افرادی تربیت کنند که هم در دانشکده‌های علوم تربیتی و هم در دپارتمان‌های ریاضی، توانایی استخدام شدن و «ارتباط برقرارکردن» با هر دو جامعهٔ علمی— تخصصی را داشته باشند. به‌طور مثال، در هدف برنامهٔ دکتری آموزش ریاضی در دانشگاه ایالتی ایلنوی آمده که «اولین مسؤولیت برنامهٔ دکتری آموزش ریاضی در دانشگاه ایالتی ایلنوی، تربیت متخصّص برای شغل استادی در دانشگاه یا کالج— هم در دانشکده‌های علوم تربیتی، و هم در دپارتمان‌های ریاضی— است، تا آن‌ها بتوانند به هدایت تحقیق در مسایل مربوط به تدریس و یادگیری ریاضیات مدرسه‌ای و آموزش معلمان ریاضی بپردازند» [۲۶].

در برنامهٔ «آموزش علوم و ریاضی»[2] دانشگاه کالیفرنیا در برکلی نیز آمده است که مطالعات آموزش ریاضی، علوم و مهندسی "SESAME"، یک برنامهٔ تحصیلات تکمیلی منجر به درجهٔ دکتری در آموزش علوم، ریاضی و مهندسی ارائه می‌دهد. این برنامه برای فارغ‌التحصیلانی تنظیم شده که دارای تجربه‌های

---

۱) خیلی از هم‌رشته‌ای‌های تحقیقی نگارنده در دپارتمان‌های نام برده شده در بالا هستند. ولی همگی بر روی مطالب تحقیقاتی مشترک کار می‌کنیم و موضوع مقاله‌های پژوهشی ما نیز، در زمینه‌های مشترک است. اما در دپارتمان‌های مختلف کار می‌کنیم و حتی تحصیلات دانشگاهی ما نیز، در دانشکده‌های متفاوت بوده است.

2) Studies in Engineering, Science and mathematics Education (SESAME)

علمی پیشرفته در رشتهٔ تخصصی ــ علمی، و همین‌طور در نظریه‌های آموزشی و روش‌های تحقیق باشند. این برنامه دانشمندانی را تربیت می‌کند که توانائی ارتباط برقرارکردن با عالمان علوم تجربی، ریاضی‌دان‌ها، مهندسان و محققان علوم تربیتی و کاربران آموزشی را داشته باشند. برنامهٔ درسی این دوره، دروسی در توسعهٔ انسانی[1]، علوم شناختی[2] و تکنولوژی است، و آموزش و یادگیری را با دروس علوم، ریاضی و مهندسی، به هم مرتبط می‌کند. فارغ‌التحصیلان این برنامه، نقش راهبری نوآوری‌های آموزشی را در محیط‌های آموزشی، صنعت، و تشکیل موزه‌ها[3] به عهده دارند. [۲۶]

باید توجه داشت که ارتباط برنامه‌های دکتری آموزش ریاضی در خارج از دپارتمان‌های ریاضی با برنامه‌های آموزش ریاضی در دپارتمان‌های ریاضی، همه‌جانبه است و استادان آن‌ها، از هر دو دپارتمان هستند. به عنوان نمونه، آلن شونفیلد[4]، هم استاد دپارتمان ریاضی برکلی و هم استاد دانشکده علوم تربیتی است و این مورد، شامل سایر استادان برنامهٔ SESAME نیز می‌باشد. یعنی آنها، هم عضو دپارتمان‌های ریاضی، علوم کامپیوتر، فیزیک، مهندسی برق و غیره، و هم عضو دپارتمان‌های علوم تربیتی هستند. در برنامه SESAME آمده است:

«از دانشجویان SESAME انتظار می‌رود که حداقل در سطح کارشناسی‌ارشد، دارای توانائی ریاضی و دیسیپلین علمی باشند. فارغ‌التحصیلان SESAME با مدرک Ph.D، اغلب در دپارتمان‌های علوم ریاضی مشغول به کار می‌شوند» [۲۶].

در دپارتمان ریاضی دانشگاه برکلی، اغلب «دوره‌های کارشناسی‌ارشد» آموزش ریاضی و برنامه‌های آموزش معلمان، با همکاری دانشکدهٔ علوم تربیتی و دپارتمان آموزش ریاضی، اجرا می‌شود. هم‌چنین، در دانشگاه‌های میسوری و برکلی، دانشجویان دکتری آموزش ریاضی، تدریس دانشجویی[5] خود را از دپارتمان‌های ریاضی می‌گیرند [۲۵] و [۲۶].

جهت‌گیری محل اجرای برنامهٔ دکتری آموزش ریاضی

با توجه به مطالب بالا، برنامهٔ دکتری آموزش ریاضی در در دانشگاه‌هائی‌که از سابقهٔ طولانی‌تری در دکتری آموزش ریاضی برخوردار هستند، در دپارتمان‌های مستقل یا دانشکده‌های علوم تربیتی، و با همکاری نزدیک با دپارتمان‌های ریاضی برگزار می‌شود. اما در دانشگاه‌هائی‌که این برنامه را از دههٔ گذشته شروع کرده‌اند، ملاحظه می‌شود که اغلب دپارتمان‌های ریاضی میزبان دورهٔ دکتری آموزش ریاضی شده‌اند.

هم‌چنین، با توجه به ایدهٔ عمومی کردن و ارتباط با جامعه و اشتغال برای فارغ‌التحصیلان ریاضی، در اکثر دپارتمان‌های ریاضی، برنامهٔ دبیری ریاضی و بازآموزی معلمان نیز وجود دارد و به‌طور روزافزون،

1) Human Development 2) Cognitive Sciences

۳) منظور از تشکیل موزه‌ها، بیشتر آموزش‌های غیرمدرسه‌ای به منظور همگانی کردن علوم و ریاضی است.

۴) شونفیلد دکترای ریاضی خود را از دانشگاه استانفورد گرفته است. Alan. H. Schoenfeld

5) Teaching Assistant (TA)

این برنامه‌ها توسعه پیدا می‌کنند. در نتیجه، با استخدام افرادی با مدرک دکترای آموزش ریاضی در این دپارتمان‌ها، دوره‌های دکتری آموزش ریاضی راه‌اندازی می‌شوند. البته در دانشگاه‌هائی‌که قبلاً، این دوره در دپارتمان‌های مستقل «آموزش ریاضی» یا «مطالعات برنامهٔ درسی» و در درون دانشکده‌های علوم تربیتی آنها وجود داشته است، به‌طور طبیعی تأسیس دورهٔ دکتری آموزش ریاضی در دپارتمان ریاضی موضوعیت ندارد.

جایگاه رشتهٔ آموزش ریاضی در ایران

بررسی تاریخ آموزش ریاضی نشان می‌دهد که این رشته، مولود طبیعی ریاضی بوده است. تجربهٔ معاصر هم گواهی می‌دهد که حرف مشترک اغلب ریاضی‌دان‌ها در تخصص‌های مختلف، مسائل مربوط به فرایند یاددهی ــ یادگیری ریاضی است. به‌طور مثال، بحث‌هایی مانند این که «فلان مطلب بهتر است اجباری باشد»، «آن مطلب را اگر این‌طور درس بدهیم بهتر است»، و «مشکل یادگیری این مفهوم ریاضی، به این صورت است»، همگی ماهیت آموزش ریاضی دارند. به‌طور کلی، شکل‌گیری بسیاری از مسایل آموزش ریاضی، متأثر از دغدغه‌ها و دل‌مشغولی‌های معلمان ریاضی در سطح مدرسه و دانشگاه بوده و هست؛ مسایل و سؤال‌هایی که هر روز، ذهن آن‌ها را درگیر کرده است و مشتاق پیدا کردن راه‌حل‌های مناسب برای رفع آن دغدغه‌ها هستند. بنابراین، جدا کردن رشتهٔ آموزش ریاضی از منبع اصلیِ مسایل و انگیزه‌ها و دغدغه‌های آن، در واقع به معنی جدا کردن تحقیقات آموزشی از آزمایشگاه واقعی آن است. برای توضیح بیشتر، می‌توان به میزگردهای کنفرانس‌های بین‌المللی و ملی ریاضی توجه کرد که تمرکز اغلب آن‌ها، فرآیند یاددهی ــ یادگیری ریاضی است و همگی، ماهیت آموزش ریاضی دارند که از آن جمله، می‌توان به میزگردهای آموزش ریاضیِ اولین [۳۱] و دومین کنفرانس ریاضی کشور [۲]، اشاره کرد.

در واقع، نگرانی نگارنده این است که در صورت جدایی آموزش ریاضی از ریاضی، ممکن است آموزشگران عمومی مسایلی را مطرح کنند و برای حل آن‌ها تلاش کنند که شاید آن مسایل، دغدغه‌های اصلی جامعهٔ ریاضی و معلمان ریاضی نباشند و این روند، باعث ذهنی شدن این حوزهٔ معرفتی و عقیم ماندن آن شود. در ضمن، رابطهٔ تنگاتنگ بین ریاضی و آموزش ریاضی، باعث می‌شود تا راه‌حل‌های اصولی‌تری برای مسائل واقعی و اصلی آموزش ریاضی پیدا شوند که در نهایت، موجبات ارتقای یادگیری ریاضی و در نتیجه، اعتلای ریاضی در دپارتمان‌های ریاضی خواهد شد. بنابراین، وجود رشتهٔ آموزش ریاضی در دپارتمان‌های ریاضی، هم به رشد واقعی این رشته کمک می‌کند و هم، باعث رشد و اعتلای دپارتمان‌های ریاضی که میزبان این رشته هستند، می‌شود.

با استناد به مطالعات انجام شده، بدیهی است که جایگاه مناسب رشته آموزش ریاضی در ایران، دانشکده‌های علوم ریاضی است. گروه‌های ریاضی و دانشکده‌های علوم ریاضی برای بقا و رشد و ارتباط با دنیای واقعی، همانطور که دربارهٔ دانشگاههای آمریکا اتفاق افتاده؛ باید به ایجاد دوره‌های مختلف

کارشناسی‌ارشد آموزش ریاضی، بازآموزی دبیران، کارشناسی‌ارشد دبیری ریاضی و ایجاد دکتری آموزش ریاضی بپردازند.

برای ایجاد دوره‌های دکتری آموزش ریاضی در ایران، چه باید کرد؟

مطالعهٔ سیر تاریخی ایجاد رشته‌های دکتری آموزش ریاضی در دنیا به‌طور عام، و در ایالات متحده آمریکا به‌طور خاص و چگونگی رشد و توسعهٔ کنونی این رشته در دانشکده‌های علوم ریاضی، در دنیا و در ایالات متحده، می‌تواند الگوی مناسبی برای ایجاد رشتهٔ دکتری آموزش ریاضی در ایران باشد. این الگو، مشابه الگوی تأسیس رشتهٔ آموزش ریاضی در دانشگاههای کلمبیا و شیکاگو است که همان الگوی تأسیس رشتهٔ دکتری ریاضی در آن دانشگاه‌ها بود.

بنابراین، برنامهٔ دکتری ریاضی در ایران نیز می‌تواند الگوی مناسبی برای تأسیس رشتهٔ دکتری آموزش ریاضی در ایران باشد.

الف) دکتری ریاضی

می‌توان وارد دورهٔ دکتری ریاضی شد، دروس رشتهٔ اصلی را در زمینهٔ آموزش ریاضی گرفت و پایان‌نامه خود را در رشتهٔ آموزش ریاضی نوشت.

این الگو در دانشگاه کرمان انجام گرفته است.

ب) دکتری آموزش ریاضی

الگوهای متفاوتی برای ورود به دوره دکتری ریاضی در ایران وجود دارد. در دانشگاه صنعتی شریف، برای پوشش دوره دکتری در ریاضی محض، ریاضی کاربردی و علوم کامپیوتر، ۱۱ موضوع مطرح شده و هر داوطلب باید ۳ موضوع از این یازده موضوع را انتخاب کند[۱] [پیوست ۱].

با توجه به اینکه دو رشتهٔ آموزش ریاضی و آمار نیز در برنامهٔ علوم ریاضی قرار دارد [هر دو رشته در گروه علوم ریاضی شورای برنامه‌ریزی وزارت علوم تصویب شده‌اند]، می‌توان با اضافه کردن دو موضوع آموزش ریاضی و آمار استنباطی به این یازده موضوع، تقریباً تمام رشته‌های علوم ریاضی را پوشش داد. مثلاً علاقه‌مندان به ادامهٔ تحصیل در رشتهٔ آمار می‌توانند موضوع‌های آنالیز، احتمال و فرآیندهای تصادفی و آمار استنباطی را برای امتحان ورودی خود انتخاب نمایند.

با توجه به مدل دانشکده‌های علوم‌ریاضی در آمریکا برای دکتری آموزش ریاضی، داوطلب می‌تواند «آموزش ریاضی» و دوتا از دوازده موضوع دیگر را به عنوان دروس امتحان ورودی خود انتخاب نمایند.

داوطلب بعد از ورود به دوره دکتری آموزش ریاضی، باید حداقل ۱۲ واحد در آموزش ریاضی و ۸ واحد در دیگر رشته‌های علوم ریاضی انتخاب کند و موضوع اصلی امتحان جامع وی، باید در آموزش

۱) این موضوعات از موضوعات کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیات گرفته شده که شامل ۱۸ موضوع از جمله آموزش ریاضی می‌باشد.

ریاضی (مطالبی پیشرفته‌تر از دروس اجباری دوره کارشناسی‌ارشد آموزش ریاضی) و موضوع فرعی او در یکی از موضوعات علوم ریاضی باشد.

تبصرهٔ ۱. دارندگان مدرک کارشناسی‌ارشد در رشته‌های آموزش ریاضی، آمار، علوم کامپیوتر، فیزیک و مهندسی می‌توانند در آزمون دکتری آموزش ریاضی شرکت کنند.

تبصرهٔ ۲. پذیرفته‌شدگانی که مدرک کارشناسی‌ارشد آنها آموزش ریاضی نمی‌باشد، باید دروس اجباری کارشناسی‌ارشد آموزش ریاضی را به عنوان پیش‌نیاز علاوه بر ۲۰ واحد دروس دکتری خود بگذرانند.

جمع‌بندی

این مقاله، ابتدا به چرایی و چگونگی تأسیس و توسعهٔ رشتهٔ آموزش ریاضی در دنیا پرداخت. سپس به دلیل اشتراکات برنامه‌های درسی تحصیلات تکمیلی ایران با برنامه‌های مشابه در ایالات متحده آمریکا، با ورود به وب سایت‌های ۱۲ دانشگاه معروف آمریکا وضعیت آموزش ریاضی در حال حاضر، مورد مطالعه قرار گرفت. نتیجهٔ مطالعه نشان داد که مجدداً، دانشکده‌های علوم ریاضی در بسیاری از دانشگاه‌های آمریکا، به تأسیس و توسعهٔ دوره‌های تحصیلات تکمیلی آموزش ریاضی پرداخته‌اند. یکی از علت‌های اصلی چنین تمایلی، نیاز اجتماعی به پاسخگوکردن دانشگاه‌ها در مقابل ضرورت اشتغال بعد از فارغ‌التحصیلی است. این مسأله تا آن‌جا مورد توجه قرارگرفته است که کنفرانس‌های متعددی در رابطه با تشویق فارغ‌التحصیلان ریاضی به ادامهٔ تحصیل در دوره‌های دکتری آموزش ریاضی در دانشکده‌های علوم ریاضی منجر شده است.

در پایان، این مقاله با استناد به مطالعات انجام شده، به این جمع‌بندی رسید که با توجه به ویژگی‌های بومی وکنونی جهان، جایگاه اصلی و واقعی دوره‌های کارشناسی‌ارشد و دکتری آموزش ریاضی در ایران در دانشکده علوم ریاضی است و شورای عالی برنامه‌ریزی نیز با درایت و آینده‌نگری، بر این مهم تأکید داشته است و به همین علت، مجوز تأسیس دورهٔ کارشناسی‌ارشد آموزش ریاضی را درکمیتهٔ علوم ریاضی گروه پایه صادرکرده است. با این حال، بر ماهیت بین رشته‌ای «آموزش ریاضی» به عنوان یک حوزهٔ معرفتی، تأکید شده است.

مراجع

[1] Department of Mathematics at MIT /undergraduate study: Course 18 Major, www-math.mit.edu/udergraduate/major.html

[۲] گزارش دومین کنفرانس ریاضی ایران، دانشگاه صنعتی شریف، فروردین ۱۳۵۰.

[۳] آرتیک، میشل.(۱۹۹۹).یادگیری و یاددهی ریاضیات در سطح دانشگاه: مسایل اساسی تحقیقات نوین در زمینهٔ آموزش. ترجمهٔ سپیده چمن‌آرا (۱۳۸۲)، نشر ریاضی، سال ۱۳، شمارهٔ ۲، صص ۴۹ تا ۵۶. مرکز نشر دانشگاهی.

[4] Reys, R. E. (2000). Doctorates in Mathematics Education: An Acute Shortage. *Notices of the AMS*, 1267–1270.

[5] Kilpatrick, J. (1994). Mathematics Education, History of ... .In T. Husen and T. N. Postlethwaite (Editors–in–chief): *The International Encyclopedia of Education* (2nd Edition). Vol **6**, 3643–3647.

[6] Howson, G. (1990). Mathematics Education: A historical view. *Impact of Science on Society*. 160: 303–313

[۷] در باب برنامهٔ درسی ریاضیات دبیرستان (۱۹۶۱). ترجمهٔ جواد حاجی بابایی، ۱۳۷۵. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، شمارهٔ ۴۶، صفحهٔ ۲ تا ۷، گروه ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

[۸] گویا، زهرا. (۱۳۸۱). یادداشت سردبیر. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، شمارهٔ ۶۷، صفحه‌های ۲ و ۳. دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

[۹] گویا، زهرا. (۱۳۷۵). گزارشی از هشتمین کنگرهٔ بین‌المللی آموزش ریاضی در سویل، مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، شمارهٔ ۴۶، صفحه ۳۲ تا ۳۴. گروه ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

[۱۰] گویا، زهرا. (۱۳۷۵). آموزش ریاضی چیست؟ مجموعه مقالات مدعوین اولین کنفرانس آموزش ریاضی ایران، اصفهان، ادارهٔ کل آموزش و پرورش استان اصفهان.

[۱۱] فدایی، محمدرضا. (۱۳۸۰) استعاره‌ای جدید برای مفهوم حد در آموزش ریاضی. رسالهٔ دکتری منتشر نشده، دانشگاه شهید باهنر کرمان.

[12] Ph.D. in Mathematics Education, Department of Mathematics, Michigan State University,

www. math. msu. edu

[13] Ph.D. degree in Mathematics Education, Department of Mathematics, Syracuse University,

www. math. syr. edu

[14] Ph.D. program in Mathematics Education, Department of Mathematics, Illinois State University,

www. math. ilstu. edu

[15] Ph.D. in Mathematics Education, Department of mathematics and statistics, American university,

www. mathstat. american. edu

[16] Ph.D. in Mathematics Education Specialiation, Department of mathemattical sciences, Montana Sate University,

www. math. montana. edu

[17] Ph.D. of Mathematics Education Option, Department of Mathematical Sciences the University of Montana.

www. umt. edu/ math/ profile/ math- ed. html

[18] Ph.D. in Mathematics Education, Department of Mathematical Sciences, Northern Illinois university,

www. math. uiu. edu/ mathed/ doctorates. html

[19] Ph.D. The Mathematics Education Program, Department of Mathematics, University of Arizona,

www. hedgehog.math.argona.edu/ ~ merp/ medphd. html

[20] Doctoral Programs in Mathematics and Mathematics Education, The Department of Mathematics, Western Michingan University,

www. wmich. edu/math. stat/ Phd. html

[21] Ph.D. in Mathematics Education, Department of mathematics and statistics, Portland State University,

www. mth. pdx. edu/ deg_reg/ Mth_Ed_PHD_INFO. html

[22] Doctor of Philosophy in Mathematics Education, School of Education,

www. edci. purdue. edu/ math/ mathdoctoral. html

[23] Mathematics Education Graduate programs, School of Education, Indiana University. Bloomington,

www. indiana. edu/ ~ mathed

[24] Mathematics Education–M.A and Ph.D, Curriculum and Instruction, College of Education and Human Development, University of Minnesota,
www. education. umn. edu/ CI/ Fields/ math–grad. html

[25] Doctoral Program in Mathematics Education, University of Missouri, Columbia,
www. tiger. coe. missouri. edu/ ~ mathed/

[26] (SESAME), Graduate School of Education, UC Berkeley,
www. gse. berkeley. edu/ program/ cd/ programs/ SESAME. html

[27] M.S. in Mathematics with emphasis in Mathematics Education, Department of Mathematics, University of Minnesota,
www. math. umn. edu/ grad/ mathed. html

[28] Department of Mathematics, UC. Berkeley,
www. math. berkeley . edu

[29] CTFMS: Teach Math, Department of Mathematics, UC. Berkeley,
www. math.berkeley.edu

[30] Cognition and Development, Graduate school of Education, UC. Berkeley,
www. gse. berkeley. edu/ program/ cd/ cd. html

[۳۱] گزارش اولین کنفرانس ریاضی ایران، دانشگاه شیراز، فروردین ۱۳۴۹.

پیوست ۱

جدول مواد امتحانی کتبی مختلف برای امتحان دکتری ریاضی

داوطلب باید در سه مادهٔ مختلف از یازده مادهٔ زیر امتحان دهد
مصوب جلسهٔ کمیتهٔ تحصیلات تکمیلی مورخ ۸۰/۸/۲۰ و
مصوب شورای دانشکده مورخ ۸۰/۹/۴

۱) آنالیز (آنالیز ۱، آنالیز ۲، توابع مختلط، آنالیز حقیقی)

۲) جبر (جبر ۱، جبر ۲، جبر خطی، جبر پیشرفته)

۳) هندسه (آنالیز ۳، هندسه دیفرانسیل، توپولوژی، هندسه منیفلد ۱، توپولوژی جبری)

۴) معادلات دیفرانسیل (معادلات دیفرانسیل، معادلات دیفرانسیل (۲) (معادلات با مشتقات پاره‌ای)، نظریهٔ معادلات دیفرانسیل عادی، نظریهٔ معادلات دیفرانسیل با مشتقات پاره‌ای)

۵) آنالیز عددی (آنالیز عددی ۱، آنالیز عددی ۲، آنالیز عددی پیشرفته)

۶) بهینه‌سازی (تحقیق در عملیات ۱، تحقیق در عملیات ۲، تحقیق در عملیات پیشرفته)

۷) احتمال و فرآیندهای تصادفی (آمار و احتمال ۱، ۲، فرآیند تصادفی ۱، نظریهٔ احتمال)

۸) ترکیبیات (ریاضیات گسسته، آنالیز ترکیبی ۱، گراف و کاربرد)

۹) منطق (منطق ریاضی، نظریهٔ مجموعه‌ها، نظریهٔ مدلها)

۱۰) نظریهٔ اعداد (جبر ۳ (نظریهٔ گالوا)، نظریهٔ اعداد، نظریهٔ جبری اعداد ۱)

۱۱) علوم کامپیوتر (نظریه علوم کامپیوتر، زبانهای فرمال، نظریهٔ اتوماتا)

تبصرهٔ ۱ دارندگان مدرک کارشناسی‌ارشد در رشته‌های ریاضی، آمار، علوم کامپیوتر، فیزیک و مهندسی می‌توانند در آزمون دکتری ریاضی شرکت کنند.

تبصرهٔ ۲ متقاضیان شرکت در آزمون دکتری باید ۳ ماده امتحانی از ۱۱ ماده امتحانی فوق را در فرم پیوست انتخاب نمایند.

تبصرهٔ ۳ زمان برگزاری آزمون از تاریخ ۸۲/۲/۲۵ لغایت ۸۲/۲/۲۷ خواهد بود.

بیژن ظهوری زنگنه
دانشگاه صنعتی شریف، دانشکدهٔ ریاضی
پست الکترونیک: zangeneh@sina.sharif.edu

اصلاح شدهٔ مراجع مقالهٔ «روش‌های احتمالاتی در حل مسائل دترمینیستیک» نوشتهٔ دکتر بیژن ظهوری زنگنه مربوط به فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی شماره پیاپی ۲۸

مراجع

[1] Adams, M. and Guiliemin, V., *Measure Theory and Probability*, Wadsworth Inc, 1986.

[2] Bass, R.F. *Probabilistic Techniques in Analysis*, Springer-Verlag 1995.

[3] Billingsley, P., *Probability and Measure*, John Wiley and Sons, New York, 1995.

[4] Breiman, L., *Probability*, Siam, Philadelphia, 1992.

[5] Chung, K.L., *A Course in Probability Theory*, Acadamic Press, 1977.

[6] Kac, M., Statistical Independence in Probability, Analysis and Number Theory. Mathematical Association of America (Carus Mathematical Monograph, no 12) 1959.

[7] Karatzas and Shreve E., *Brownian Motion and Stochastic Calculus* Springer-Verlag New York 1988.

[8] Lamperti, J., *Probability* W.A. Benjamin Inc 1966.

[9] OKsendal, B., *Stochastic Differential Equations*, sixth edition, Springer-Verlag, Berlin 2003.

[10] Revuz, D. and Yor, M., *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer, Berlin 1992.

[۱۱] در باب برنامه‌ریزی درسی دبیرستان، ترجمه جواد حاجی‌بابایی، رشد آموزش ریاضی شماره ۴۶، ۱۳۷۴.

[۱۲] دوب، جوزف (ترجمه عطاءالله تقاء) سیر پیدایش دقت در احتمال ریاضی (۱۹۰۰ـ۱۹۵۰)، نشر ریاضی، سال ۱۲، شماره ۱ و ۲.

[۱۳] ظهوری زنگنه، بیژن، نظریهٔ فرآیندهای تصادفی، جزوات درسی، دانشگاه صنعتی شریف.

[۱۴] ظهوری زنگنه، بیژن، آنالیز تصادفی، جزوات درسی، دانشگاه صنعتی شریف.

[۱۵] مامفرد، دیوید، ترجمه شاپور اعتماد، طلوع عصر روشهای تصادفی، نشر ریاضی سال ۱۳، شماره ۱.

[۱۶] وینر، نوربرت، ترجمهٔ پرویز شهریاری، من یک ریاضیدانم، انتشارات فاطمی، خرداد ۱۳۶۸.

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شمارهٔ ۲۹(پاییز ۱۳۸۱)، صص. ۶۳ تا ۶۵

معرفی و نقد کتاب

دروغ‌های شاخدار و آمار: گشودنِ گره اعداد از سخنان رسانه‌ها*

لین آرتور استین

ترجمهٔ: محمدرضا مشکانی

در اواخر سال‌های ۱۹۸۰ مطبوعات پُر بود از داستان‌هایی دربارهٔ افزایش تعداد نوزادان کوکایینی که در زمان تولد معتاد بوده، گرفتار معلولیت‌های ذهنی چاره‌ناپذیر بودند و مشکلات حل‌نشدنی برای سامانه‌های پزشکی، آموزشی و اجتماعی‌مان ایجاد می‌کردند. سال‌ها بعد معلوم شد که مشکل نوزادان کوکایینی، گرچه جدّی است، اما فقط در حدود یک دهم آن چیزی است که کارشناسان پیش‌گویی کرده بودند.

مبالغه‌های مشابه در رسانه‌ها و نوشتگان حرفه‌ای فراوانند: گزارش‌هایی حاکی از اینکه قاتلان قتل‌های زنجیره‌ای مسؤول قتل ۴۰۰۰ نفر در سالند، معلوم شد که با ضریب ده اغراق کرده بودند. گزارش‌هایی که بی‌اشتهایی عصبی منجر به ۱۵۰٫۰۰۰ مرگ در سال می‌شود با ضریب ۲۰ گزافه‌گویی کرده بودند و گزارش‌هایی که مردان سفیدپوست به‌زودی فقط ۱۵ درصد کارگران آمریکایی را تشکیل خواهند داد با ضریب سه نادرست از آب در آمدند. (درحقیقت این ۱۵ درصد به «افزایش خالص» اشاره داشت، نه به خودِ نیروی کار یا حتی به واردشوندگان جدید به نیروی کار.)

---

*) *Damned Lies and Statistics: Untangling Numbers from the Media, Politicians, and Activities*, Jeol Best, the University of California Press, 2001, 196 pages, ISBN: 0-520-21978-3.

اینکه بسیاری از «واقعیات» منتشر شده (اغلب تا درجهٔ زیادی) نادرستند کسانی را که با کتاب کلاسیک دارل هاف تحت عنوان چگونه با آمار دروغ بگوییم (هاف، ۱۹۵۴) بزرگ شده بودند، شگفت زده نخواهد کرد. پیوند دروغ با آمار- که با عنوان کتاب جوئل بِست ادامه یافته- دست کم به توصیف مشهور بنجامین دیزرائیلی نخست وزیر نوزدهم انگلیس از سه نوع دروغ در زندگی سیاسی یعنی «دروغ‌ها، دروغ‌های شاخدار، و آمار» برمی‌گردد. این پیوند امروزه به همان قوّت قرن‌های پیشین باقی مانده است: کتاب هاف، پنجاه سال بعد از چاپ نخست هنوز چاپ می‌شود و نقل قول «دروغ‌های» دیزرائیلی طبق مسابقهٔ نمایشی پرطرفدار بی‌بی‌سی به نام «گیومه باز . . . گیومه بسته»، بیشترین نقل قول در رسانه‌های انگلیسی است (ریز، ۲۰۰۲). شهروندان باسواد به حق نسبت به آمار، مخصوصاً وقتی از سوی سیاستمداران، آگهی دهندگان و دیگر مدافعانی که هدف‌هایی خاص را تبلیغ می‌کنند به کار می‌رود، بدبینند. ریاضی‌دانان اغلب دلیلی اضافی برای بدگمانی خود دارند و آن احتیاط حرفه‌ای دربارهٔ کاربردپذیری استنباط آماری است، با علم به اینکه حقیقت به‌ندرت با مفروضاتی که این مدل‌های استنباطی بر اساس آنها ساخته می‌شوند سازگار است. نادقیق بودن استنباط آماری حتی هنگامی‌که به بی‌طرفانه‌ترین و حرفه‌ای‌ترین شیوه به کار گرفته شود، عمیقاً (و برای بسیاری از افراد به طور منفی) با تعیین قیاسی که صفت بارز استدلال ریاضی است، در تضادّ است.

امّا حقیقت آن است که آمار به «واقعیاتی» تبدیل شده است که جامعهٔ نوین براساس آنها ساخته می‌شود. لئونارد هنری کورتنی، اقتصاددان و سیاستمدار انگلیسی در یک سخنرانی دربارهٔ تقسیم کرسی‌ها به نسبت آرا در ساراتوگواسپرینگز در اوت ۱۸۹۵ خاطرنشان کرد که «سرانجام، واقعیات واقعیات‌اند». «هرچند که ممکن است واژه‌های سیاستمدار آگاه، یعنی «دروغ‌ها- دروغ‌های شاخدار- و آمار» را برای یکدیگر نقل کرده و آهسته بخندیم، هنوز هم ارقام ساده‌ای وجود دارند که ساده‌لوح‌ترین آدم باید بفهمد و زرنگ‌ترین شخص نمی‌تواند از آنها طفره برود» (نقل شده در بینر، ۱۸۹۶، ص. ۸۷). [ظاهراً، همین سخنرانی بود که موجب شد مارک تواین نقل‌قول «دروغ‌ها» را به دیزرائیلی نسبت دهد (تواین، ۱۹۲۴) و باعث شد که بسیاری افراد دیگر این نقل‌قول را به تواین نسبت دهند.]

اگرچه اکنون آنها را مسلّم می‌انگاریم، «واقعیات» همواره واقعیات نبودند- دست کم نه آن طوری که امروز آنها را می‌شناسیم، و قطعاً برحسب کمیّت‌ها توصیف نمی‌شدند. در چند هزارهٔ نخست تاریخ مکتوب، اکثر انسان‌ها در محیطی کیفی به سر می‌بردند تا محیطی کمّی. ساعت‌ها یک بیست و چهارم روز نبودند بلکه زمان‌هایی برای نیایش‌های رُهبانی بودند؛ پا دوازده اینچ نبود بلکه معیاری برای تشریح بدن بود. با این حال از قرن سیزدهم مردم شروع به فراگیری ارزش تعیین ملاک‌های استانداردیده (طول، زمان، پول) از طریق نوآوری‌هایی مانند ساعت‌های مکانیکی، طراحی بر اساس پرسپکتیو و دفترداری دوطرفه کردند (کرازبی، ۱۹۹۷). رفته رفته اعداد معانی مابعد طبیعی باستانی خود را از دست دادند و صرفاً کمیت‌هایی فاقد کیفیت شدند، که آنها را به عنوان ابزارهایی برای اندازه‌گیری سودمند ساخت، درست همان موقع که ارزش اندازه‌گیری اشیاء آشکار شد و ابزارهای اندازه‌گیری در دسترس قرار گرفتند.

اهمیت روزافزون اعداد (که برای اندازه‌گیری جزئیات به کار می‌روند) و علم حساب (که برای انبوهیدن اعداد منفرد به کار می‌رود) به آمار ابتدایی این امکان را داد که میانجی گذر از سنّت ارسطویی واقعیات به‌صورت کلی منتظر شناخت به درک علمی نوین از واقعیات به صورت مشخصات- جزئی، تجربی، و فردگرایانه- عمل کند. در قرن هفدهم و هجدهم واقعیات به صورت «اطلاعاتِ با ارزشِ تجربهٔ مستقل از نظریه» درآمدند و اعداد به جایی رسیدند که نمونهٔ اعلای واقعیات (نوین) باشند، زیرا زمانی فرا رسیده بود که به آنها به چشم «مقدّم بر تعبیر یا حتی تعبیرناشده» و در همان زمانی که به «سنگ بنای دانش منظم» تبدیل شده بودند، نگاه کنند (پووی، ۱۹۹۸).

در اوایل قرن نوزدهم، زمانی که انقلاب‌ها پایداری اجتماعی را تهدید می‌کردند، گزارش داده‌های اجتماعی (زاد و ولد، ازدواج و مرگ) و معیارهای اقتصادی (کشاورزی، تولید، حمل ونقل) حاکی از ساختار مطلوب نظم اجتماعی بود. سرشماری‌های ده‌سالانه به صورت عرف درآمدند، و شمارش اشیاء-جمعیت، درآمدها، ملک‌ها، شغل‌ها، محصولات ـ فعالیّت سیاسی رایج و مقبولی شد. بدین ترتیب آمار به عنوان «علم دولت» به‌وجود آمد، اما بدون بحث و جدل نبود. مثلاً سرشماری ۱۸۴۰ آمریکا که در آستانهٔ جنگ داخلی و درست یک سال بعد از تأسیس انجمن آمریکایی آمار، انجام شد باعث بحث سیاسی شدیدی شد زیرا هجوم آشکار و جنون‌آمیز سیاهان که از جنوب به شمال در حال افزایش بود، تأییدی بود بر عقیدهٔ برده‌داران مبنی بر اینکه بردگان نمی‌توانند آزاد زندگی کنند (کوهن، ۱۹۸۲). سال‌ها بعد روشن شد که این موضوع نوعی دست ساختهٔ آماری بوده که خطاهای معمولی شمارش را بزرگ می‌کرد، اما در آن زمان هیجان‌ها آنقدر شدید و درک آماری آنقدر ضعیف بود که کسی این موضوع را درنمی‌یافت.

اشتیاق به درک اجتماع از راه واقعیات کمّی نفوذ قابل ملاحظه‌ای به آمار (اجتماعی) بخشید. آمار وسیلهٔ مؤثری را برای ایجاد قضایای کلی جدید از طریق «کنار هم گذاشتن» واقعیات جداگانه عرضه کرد. ظاهراً آمار اندیشه‌های مجرّد اجتماعی از قبیل سازندگی، ثروت، بیکاری و تورّم را به حقیقت تبدیل کرد. آمار با تأکید بر اهدافی که از «فراوانی نامحدود تجلّی عینی موارد انفرادی» پاک شده بودند به عینی‌کردن جهان اجتماعی کمک کرد (دسه‌روسیه‌رس، ۱۹۹۸). آهسته آهسته، اعداد به جایی رسیدند که صرفاً به دلیل آنکه اعداد بودند باور شدند. برخلاف باور رایج، شور و شوق برای دقّت کمّی در خلال دو قرن اخیر آن قدر که ناشی از فشار اجتماعی برای عینی بودن در امور سیاسی، اقتصادی و اجتماعی بوده، ناشی از تقاضاهای فزایندهٔ علوم طبیعی نبوده است (پورتر ۱۹۹۵). در واقع گرایش (غالباً تقاضای) روزافزون به عرضهٔ اعداد به قصد پشتیبانی از هر نوع استدلال دست کم ظاهری از عینیّت را ارائه می‌کند. شور و شوق امروزی ما برای داده‌های عینی ـ همان چیزی که اکنون به عنوان «واقعیات» می‌انگاریم ـ عمدتاً پدیدهٔ فرهنگی جدیدی است. شاهد سرخط‌های خبری باشید که ریزه‌کاری‌های تلفات مرکز تجارت جهانی را گزارش می‌کنند: قطعاً تک تک مرگ‌ها اهمیّت زیادی دارند، اما آیا تعداد کل مرگ‌ها دقیق تا چهار رقم معنی‌دار از لحاظ خبری هیچ ارزشی دارد؟ این اشتیاق به شمردن هر چیز چنان قوی است که اعدادی که برای تأیید واقعیات به کار گرفته می‌شوند اغلب آن چیزی می‌شوند که پورتر آن را اهمیت «توتمی» (نمادی)

می‌نامد مفهومی مخالف شهرت «دروغ‌ها» که دیزراییلی، تواین، هاف و اکنون بست را نگران می‌کرد.

پس چگونه است که این همه واقعیاتی که به گستردگی انتشار می‌یابند، اصلاً واقعیات نیستند؟ پیروان مکتب فکری دروغ‌ها- و- آمار احتمالاً گاف‌های رایج را یا به تحریف عمومی یا به گزارشگری شمار نافهم نسبت خواهند داد. این پیام تاریخی شاهکار هاف است که: دروغ گفتن با آمار چنان آسان است که (تقریباً) هرکسی این کار را می‌کند. تک نگاشت کوتاه جوئل بِست استدلالی متفاوت و زیرکانه‌تر دارد: آمار نه تنها موضوع‌های اجتماعی را اندازه می‌گیرد، بلکه می‌آفریند (عینیّت می‌بخشد)، و پویایی عینیت بخشیدن به ساختارهای اجتماعی ذاتاً به سوی آمار بد گرایش دارد. به عقیدهٔ بِست، استاد جامعه‌شناسی و حقوق جنایی در دانشگاه دلاویر، دلیلش این است که:

مردمی که نگران نوعی موضوع جدید اجتماعی (مثلاً، کودک ربایی)اند برآنند که نگرانیشان را با استفاده از استاندارد امروزی واقعیت عینی، یعنی آمار، توجیه کنند. اما دقیقاً به دلیل اینکه نگرانی آنها جدید است، هیچ‌کس داده‌های صحیح منظم دربارهٔ مشکلی که آنها نگرانش هستند، گردآوری نخواهد کرد. داده‌هایی اندک که ممکن است دربارهٔ کودک ربایی‌ها موجود باشند محصولات فرعی کارهایی دیگرند، مثلاً گزارش‌های پلیس که در حوزه‌های استحفاظی گوناگون با تعریف‌های غیرقابل قیاس و استانداردهای ناهمتراز، یا شرح و تفصیلات روزنامه‌نگارانهٔ مواردی که از لحاظ خبری مخصوصاً ارزشمند به نظر می‌رسند، گردآوری شده‌اند. وقتی در محیطی سیاسی که برای مشروعیت احتیاج به اعداد دارد با نبود داده‌های بی‌نقص روبه‌رو شوند، کسانی که نگران موضوع جدید کودک‌ربایی هستند از بین هر نوع اعدادی که در دسترس‌اند، آنهایی را که بیشترین توجه را به هدف آنها جلب خواهد کرد، برمی‌گزینند. اعداد بزرگ نگرانی آنها را توجیه خواهند کرد؛ اعداد کوچک چنین نمی‌کنند. رسانه‌ها نیز همنوایی می‌کنند زیرا اعداد بزرگ خبرهای جذّاب‌تری می‌سازند. حتی متخصصان به اعداد بزرگ گرایش دارند زیرا باعث می‌شوند که کارشان مهمتر به نظر برسد و قراردادهای پژوهشی را توجیه می‌کنند. اختلافات کوچک نتایج قابل انتشاری را به‌وجود نمی‌آورند، اختلافات بزرگ است که چنین نتایجی را ایجاد می‌کنند. (این نمایشنامه مسلم می‌پندارد که همهٔ افراد دخیل در کار حسن‌نیت دارند. استدلال بِست دربارهٔ آن افراد نسبتاً کم شماری نیست که داده‌سازی کرده یا عمداً داده‌ها را تحریف می‌کنند. بلکه دربارهٔ نحوهٔ جریان داده‌ها است در دست‌های کسانی که سعی دارند منصف و درستکار باشند.)

به‌تدریج که مشکل (کودک ربایی) اهمیت همگانی می‌یابد، داده‌های بهتر در دسترس قرار می‌گیرند و در منابع مختلف گزارش می‌شوند. ناگزیر منابع دست دوم سوءتعبیرهایی را وارد می‌کنند که باعث می‌شود این آمار شگرف‌تر به نظر برسند. این «آمار جهش یافته» دقیقاً به این دلیل که جذّاب‌ترند، بارها تکرار می‌شوند.

دگرگونی‌های اتفاقی که باعث می‌شوند آماری کمتر شگرف به نظر برسد محتملاً باید به فراموشی سپرده شوند. شمار کمی می‌توانند از فشار داروینی که ارزش بقا را به اعداد شگرف می‌بخشد فرار کنند.

خواه از سر صدق و صفا یا فرصت طلبی برانگیخته شده باشند، خواه از نوعی بیماری اجتماعی به

خشم آمده باشند یا برای حمایت از موضعی جدید در مطبوعات یا دادگاه اجیر شده باشند، کسانی که به نفع آرمانی جدید سخن می‌گویند، اعداد بزرگ را برتر می‌شمارند تا مشکل را جدّی جلوه دهند و نیاز را فوری نشان دهند. برای رسیدن به این مقصود، پشتیبانان نوعاً تعریف‌های فراگیر را دوست دارند تا تعریف‌های دقیق را. (آیا ربودن کودکی توسط پدر یا مادر طلاق گرفته همانند ربودن کودک توسط یک بیگانه به شمار می‌آید؟ فراریان چطور؟). وانگهی «رقم ناشناختهٔ» به حساب نیامدهٔ همیشه حاضر وجود دارد، که مانند مادهٔ سیاه درکیهان، می‌دانیم که باید وجود داشته باشد امّا نمی‌توانیم آن را ببینیم یا اندازه بگیریم. به ازای هر یک کودک ربایی که به‌طور رسمی شمارش می‌شود ممکن است دو (یا ده) مورد وجود داشته باشند که شمرده نمی‌شوند.

آمارهای جهش‌یافته به محض اینکه درگردش افتادند به سختی می‌شود آنها را باز پس گرفت، مخصوصاً وقتی که عدد بزرگ و شگرف باشد: نمایش حادثه تکرار را تضمین می‌کند، درحالی که شمار نافهمی عامه مردم از تفکر انتقادی جلوگیری می‌کند، حتی اگر عدد تا یک مرتبهٔ بزرگی غلط باشد (پائولوس، ۱۹۸۸؛ دیودنی، ۱۹۹۳). سه قرن پیش ساموئل جانسون به طنز گفت که «اعداد گرد همیشه نادرست‌اند». اکنون جوئل بِست دلیل آن را بیان می‌دارد و قانون گریشام را روزآمد می‌کند که: آمارهای بد آمارهای خوب را از میدان بیرون می‌رانند.

بنابر تحلیل بِست، مشکلات اجتماعی از طریق فعالیت افرادی شکل می‌گیرند که اهمیت آنها را شناسایی کرده، نامگذاری، توصیف، اندازه‌گیری و تبلیغ می‌کنند. نامی که به طور گسترده قبول می‌شود وضعیتی را که بدیهی می‌پنداریم به چیزی که آزاردهنده است و ارزش اندازه‌گیری دارد، تبدیل می‌کند. اکثر آمارهای معمولی (مثلاً شاخص بهای مصرف‌کننده، بیکاری اقلیّت‌ها، نرخ رشد سرطان پستان) به این طریق تکامل یافتند که تنها پس از آنکه شخصی (یا سازمانی) دربارهٔ اهمیت آنها سر و صدا به پا کرد، اندازه‌گیری منظم شروع شد. به بیان دیگر، آمارهای (اجتماعی) فرآوردهٔ فعالیت اجتماعی‌اند، نه صرفاً نمایشی از اجتماع.

از انواع گوناگون مثال‌ها مانند حدس‌های بد، تعریف گول‌زننده، پرسش‌های گیج‌کننده، نمونه‌های ادیب، اندازه‌گیری نارسا، بیش تعمیم، مقایسه‌های غیرقابل قیاس (زمان‌ها، مکان‌ها، یا گروه‌های اجتماعی متفاوت)، شمار نافهمی عامهٔ مردم و مثال‌هایی بیشتر، بهره می‌گیرد.

هدف کتاب بست مشابه است با هدف کتاب سینتیا کراسن، حقیقت ناپاک: دستکاری واقعیت در آمریکا (کراسن، ۱۹۹۴). اما کتاب بست از دو جنبهٔ مهم تفاوت دارد: نخست، طول آن به اندازهٔ نصف کتاب کراسن است، بدین ترتیب برای مخاطبان وسیعتری قابل دسترسی است. مهمتر آنکه، درحالی که کراسن تحریف‌های مرتبط با تحقیق سفارشی را (جایی که طرح تحقیق نتایجی را تولید می‌کند که پشتیبانان مالی تحقیق دوست دارند) با سماجت مستند می‌سازد، بِست بر نیروهای طبیعی و اکثراً بی‌گناه که داده‌ها را تحریف می‌کنند تأکید می‌ورزد. از بسیاری جهات، تحلیل بِست هشداردهنده‌تر است. زیرا تشریح می‌کند که چگونه «واقعیات جهش یافته» می‌توانند به جاهایی نفوذ کنند که کمترین گمان دربارهٔ آنها می‌رود.

دروغ‌های زشت و آمار برخلاف کوتاهی‌اش ـ ۱۷۰ صفحهٔ کوچک ـ کتابی است که باید به کندی خواند.

تاحدّی تکراری است و نه بذله‌گویی‌یی که تک نگاشت هاف را کتابی کلاسیک ساخت و نه حدّت و شدّت سخن کراسن را دارا است. خوانندگان احتیاط را خواهند آموخت امّا یاد نمی‌گیرند که چگونه باید آمارهای خوب تولید کرد یا چگونه آمارهای بد را به آمارهای خوب تبدیل کرد.

بِست دربارهٔ آمار استنباطی، که عملاً موضوع هر کتاب آمار مقدماتی در این رشته است، تقریباً هیچ چیزی بیان نمی‌کند. معدودی مثال‌های خوب درکتاب وجود دارند: این کتاب راهنمایی برای تولید آمارهای خوب نیست.

هدف بِست متفاوت از کتاب‌های دیگر و به جهاتی عالمانه‌تر است. او درصدد آن است که نظریهٔ اجتماعی تأمل‌برانگیزی از واقعیات را در عصر ما که شیفتهٔ اعداد است، مستند سازد، یعنی اینکه آمارها در درجهٔ اول (نه اندازه‌های اجتماعی) فرآورده‌هایی اجتماعی دستخوش نیروهایی ذاتی‌اند که اعداد را در جهت بزرگی و شگرف بودن سوق می‌دهند. در این معنا از واژه، نخست باید به آمار، نه با ابزارهای مینی تب یا SPSS، بلکه با بدبینی خاص خبرنگاران کارآگاه خوب نزدیک شد: چه کسی آنها را تولید کرده، چرا تولید شده‌اند، هدف مورد نظرتان چه بوده، و چه اندازه ممکن است دقیق باشند؟

شاید پرسش شود چرا تک نگاشتی که به داده‌ها اختصاص دارد و عملاً تهی از هر نوع تحلیل استنباطی کمّی استاندارد است باید این قدر در آموزش عالی جلب توجه کند ـ گزیده‌هایی طولانی در مجلّهٔ اخبار آموزش عالی[1] چاپ شده‌اند (بست ۲۰۰۲)ـ یا چرا باید مجلهٔ دیدگاه‌های انجمن ریاضی آمریکا[2] نقد شود؟ به عقیدهٔ من یک دلیل آن است که اخیراً به روشنی دریافته‌اند که شمار فهمی نقطهٔ ضعف سامانهٔ آموزشی ماست که موازی با، اما متفاوت از، ضعف‌های مشهور این سامانه از حیث ریاضی است (مثلاً استین، ۲۰۰۱؛ مدیسون، ۲۰۰۲).

اما دلیلی دیگر که بست به آن اشاره دارد، پارادوکس اولویت‌های آموزشی ماست که به مقدار اندکی به رسمیت شناخته شده است: آن ابزارهای کمّیِ در معرض فریب دادن که بست تحلیلشان می‌کند تنها به ساده‌ترین مطالب ریاضی ـ متوسط‌ها، در صدها، نرخ‌هاـ بستگی دارند با این حال راهبردهای آموزشی ما در وهلهٔ اول به جنبه‌های پیشرفته‌تر آمار (و ریاضی) تأکید دارند و بسیاری از منابع داده‌های تحریف شده را صرفاً به دلیل اینکه ریاضی زیرساختی آنها خیلی ساده به نظر می‌رسند که نگرانشان باشیم، نادیده می‌گیرند. برای کمک به دانشجویان در برخورد با سیل واقعیات کمّی، به پیدا کردن راهی نیاز داریم که فرهیختگی‌شان را در استفاده از ابتدایی‌ترین جنبه‌های ریاضی تقویت کند و گسترش دهد تا در همان حال که به پیشبرد دانش و مهارت‌های خود در ریاضی پیشرفته‌تر ادامه می‌دهند، دربارهٔ داده‌ها نیز تفکر کنند. در نبود چنین مهارت‌هایی برای تفکر دربارهٔ داده‌ها، دانشجویان به امان اعداد به عنوان توتم رها خواهند شد و برای همیشه آمار را «به عنوان واقعیاتی کشف می‌کنیم نه به عنوان اعدادی که تولید می‌کنیم» خواهند نگاشت (بِست، ص. ۱۶۰).

1) Chronicles of Higher Education 2) Notices of AMS

مراجع

[1] J. A. BAINES, Parliamentary representation in England illustrated by the elections of 1892 and 1895, *J. Royal Stat. Soc.* **59** (March 1896), 38-124.

[2] JOEL BEST, Telling the truth about damned lies and statistics, *The Chronicle Review* (May 4, 2001), B7-B9.

[3] PATRICIA COHEN, *A Calculating People: The Spread of Numeracy in Early America*, Univ. of Chicago Press, Chicago, IL, 1982, 1999.

[4] ALFRED W. CROSBY, *The Measure of Reality: Quantification and Western Society*, 1250-1800, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1997.

[5] CYNTHIA CROSSEN, *Tainted Truth: The Manipulation of Fact in America*, Simon & Schuster, New York, 1994.

[6] ALAIN DESROSIERES, *The Politics of Large Numbers: A History of Statistical Reasoning*, Harvard University Press, Cambridge, MA, 1998.

[7] A. K. DEWDNEY, 200% *of Nothing: An Eye-Opening Tour through the Twists and Turns of Math Abuse and innumeracy*, John Wiley & Sons. New York, 1993.

[8] DARRELL HUFF, *How to Lie with Statistics*, W.W. Norton, New York, 1954.

[9] BERNARD L. MADISON, Educating for numeracy: A challenging responsibility, *Notices Amer. Math. Soc.* 49 (February 2002), 181.

[10] JOHN ALLEN PAULOS, *Innumeracy*, Hill and Wang, New York, 1988.

[11] MARY POOVEY, *A History of the Modern fact: Problems of knowledge in the Sciences of wealth and Society*, University of Chicago Press, Chicago, IL 1998.

[12] THEODORE M. PORTER, *Trust in Numbers: The Pursuit of Objectivity in Science and public Life*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995.

[13] NIGEL REES, *Quote...Unquote*, BBC Radio 4, URL http://www1c.btwebworld.com/quote-unquote/p0000149.htm.

[14] LYNN ARTHUR STEEN, *Mathematics and Democracy: The Case for Quantitative Literacy*, National Council on Education and the Disciplines, Princeton, NJ, 2001.

[15] MARK TWAIN, *Mark Twain's Autobiography*, Harper & Bros., New York, 1924.

مترجم: محمدرضا مشکانی
دانشگاه شهید بهشتی، دانشکدهٔ علوم ریاضی
پست الکترونیک: rmeshkani@hotmail.com

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شمارهٔ ۲۹(پاییز ۱۳۸۱)، صص. ۶۳ تا ۶۵

مسأله

این قسمت از فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی به طرح و سپس حلِ مسائلی در حدِ دروسِ دوره‌های کارشناسی و کارشناسی ارشدِ ریاضیات اختصاص دارد. از کسانی که مایل به ارسال مسائل یا حل مسائلِ مطرح شده می‌باشند، تقاضا می‌شود مسائل خود را به نشانی تهران، مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضی، پژوهشکدهٔ ریاضیات، صندوق پستی ۵۷۴۶ـ۱۹۳۹۵، محمدرضا پورنکی ارسال فرمایند. مسائلِ ارسال‌شده باید همراه با حل کامل مسأله باشد و در مجله به نامِ شخصِ فرستنده درج خواهد شد.

حل مسألهٔ ۴۸: ماتریس‌های $B=(b_{ij})_{n\times n}$ و $C=(c_{ij})_{n\times n}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم که در آن φ تابع فی اویلر را نمایش می‌دهد:

$$b_{ij}=\begin{cases}\varphi(i) & \text{اگر}\ \ i=j: \\ 0 & \text{اگر}\ \ i\neq j:\end{cases}\quad ,\ c_{ij}=\begin{cases}1 & \text{اگر}\ \ i|j: \\ 0 & \text{اگر}\ \ i\dagger j:\end{cases}$$

با توجه به تساوی $(i,j)=\sum_{d|(i,j)}\varphi(d)$ به دست می‌آوریم $A=CBC^t$ و لذا

$$\det(A)=\det(B)=\varphi(1)\varphi(2)\cdots\varphi(n).\square$$

حل مسألهٔ ۴۹: فرض کنید $S=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ و $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$. فرض کنید $\varepsilon>0$ دلخواه باشد و عدد طبیعی n_0 را طوری در نظر بگیرید که برای $n>n_0$ داشته باشیم $|S_n-S|<\epsilon/3$. حال به راحتی دیده می‌شود که مجموع‌های جزئی سری داده شده به صورت

$$L_{2^{n-1}+k}=S_{2^{n-1}}+S_{2^n}-S_{2^n-k}\ ,\quad 0\leq k<2^{n-1}$$

می‌باشد. پس اگر n را طوری انتخاب کنیم که $n_\circ < ۲^{n-۱}$، خواهیم داشت

$$|L_{۲^{n-۱}+k} - S| < \epsilon/۳ + \epsilon/۳ + \epsilon/۳ = \epsilon.$$

یعنی سری داده شده همگراست. □

حل مسألهٔ ۵۰: اگر در تساوی $Au.u = 0$ بردارهای

$$i, j, k, i+j, i+k, k+j$$

را به‌جای u قرار دهیم، ماتریس A به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$A = \begin{bmatrix} \circ & a & b \\ -a & \circ & c \\ -b & -c & \circ \end{bmatrix}$$

اکنون با فرض $v = \begin{bmatrix} -c \\ b \\ -a \end{bmatrix}$، تساوی $Au = v \times u$ برای هر u برقرار خواهد بود. □

حل مسألهٔ ۵۱: چون $\lim\limits_{x\to\circ^+} f'(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to\circ^+} f''(x) = +\infty$، پس بازه‌ای مانند $(\circ, r)$ وجود دارد که برای هر $x \in (\circ, r)$ داریم $f'(x) < \circ$ و $f''(x) > \circ$. پس روی $(\circ, r)$، f نزولی و f' صعودی است. بنا بر قضیهٔ مقدار میانگین برای هر $\circ < x < x_\circ < r$ داریم

$$f(x) - f(x_\circ) = f'(\xi)(x - x_\circ) > \circ,$$

که $\xi \in (x, x_\circ)$. درنتیجه $f'(x) < f'(\xi) < \circ$ و لذا

$$x - x_\circ < \frac{f'(\xi)}{f'(x)}(x - x_\circ) = \frac{f(x) - f(x_\circ)}{f'(x)} < \circ$$

حال اگر فرض کنیم $x \to \circ^+$، به‌دست می‌آوریم

$$-x_\circ \le \liminf_{x\to\circ^+} \frac{f(x)}{f'(x)} \le \limsup_{x\to\circ^+} \frac{f(x)}{f'(x)} \le \circ,$$

برای هر $x_\circ \in (\circ, r)$. پس $\lim\limits_{x\to\circ^+} \frac{f(x)}{f'(x)}$ موجود است و برابر صفر می‌باشد. □

تشکر: از آقایان مرتضی بیات، حسین تیموری فعال، سید جمال روئین، امیرحسین اصفهانی‌زادهٔ موسوی و خانم هانیه میرابراهیمی به خاطر ارسال حل مسائل متشکریم.

مسائل جدید

۵۲. فرض کنید G یک گروه باشد و N زیرگروهی نرمال از آن، با این ویژگی که مرکزساز N در G، $C_G(N) = \{g \in G : gn = ng \text{ ،} n \in N$ یعنی برای هر$\}$، زیرگروهی از N است. ثابت کنید اگر تمام زیرگروه‌های N در G نرمال باشند، آنگاه G/N آبلی است.

۵۳. فرض کنید A یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ n و با درایه‌های مختلط باشد که تمام مقادیر ویژهٔ آن حقیقی است و این ویژگی را دارد که $tr(A^۲) = tr(A^۳) = tr(A^۴) = l$. ثابت کنید l عددی صحیح است و برای هر عدد طبیعی K، $tr(A^k) = l$.

۵۴. فرض کنید a و n دو عدد طبیعی باشند و p یک مقسوم‌علیه فرد و اول از $a^{۲^n} + ۱$. ثابت کنید $p \equiv ۱ (mod\ ۲^{n+۱})$.

۵۵. فرض کنید K و K' دو میدان باشند که مشخصه‌ای مخالف ۲ و ۳ دارند و $f : K \to K'$ را یک همریختی بین گروه جمعی K و K' در نظر بگیرید با این ویژگی که $f(۱) = ۱$ و برای هر $x \in K$، $f(x^۳) = (f(x))^۳$. ثابت کنید f همریختی میدانی است.