بسم الله الرحمن الرحیم

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

ISSN 1022-6443

سال ۲۲، شمارهٔ ۱، بهار ۱۳۸۲
شمارهٔ پیاپی: ۳۰

صاحب‌امتیاز: انجمن ریاضی ایران
مدیر مسؤول: محمدمهدی ابراهیمی
سردبیر: محمد اردشیر
ویراستار ارشد: حسین معصومی همدانی
مدیر اجرایی: سعید سیدآقا بنی‌هاشمی

ویراستار: رویا درودی
حروفچینی: TEX-پارسی-دفتر انجمن ریاضی ایران
همکار این شماره: فریده صمدیان

نشانی:
تهران ــ صندوق پستی ۴۱۸-۱۳۱۴۵
iranmath@ims.ir
http://www.ims.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی نشریهٔ علمی‌ـترویجیِ انجمن ریاضی ایران است که به چاپ و انتشارِ مطالبی می‌پردازد که هم جنبه‌های عام و فلسفیِ ریاضیات را ترویج دهند و هم بازگوکنندهٔ فرهنگ و روندِ ریاضیاتِ حاکم بر جامعهٔ ریاضی باشند. فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی از مقالات در زمینه‌های ریاضیات محض، ریاضیات کاربردی، علوم کامپیوتر، فیزیک نظری، وکاربردهای ریاضیات در علوم دیگر که در چارچوب زیر نوشته شده باشند استقبال می‌کند:

- ارائهٔ موضوعیْ فعال و مطرح در ریاضیات در قالبی که علاقه‌مندان به زمینه‌های پژوهشی را برای پیگیریِ موضوعِ مورد بحث آماده سازد؛
- ترجمهٔ مقاله‌هایی از نوع یاد شده در بالا یا ترجمهٔ مقالاتِ کلاسیکِ ریاضی (ترجمهٔ آزاد پذیرفته نمی‌شود)؛
- ارائهٔ موضوعاتِ آموزشی حاوی نکات و قضایا و برهانهایی ساده‌تر از آنچه در متونِ کلاسیک موجود است.

علاقه‌مندان می‌توانند سه نسخه از مقالهٔ خود را با شرایطِ زیر به نشانی دفتر مجله ارسال دارند:

- متن مقاله روی یک طرف کاغذ، یک خط در میان، و با حاشیهٔ کافیْ تایپ شده یا ترجیحاً، در دیسکتِ کامپیوتری تحت ادیتورِ «TEX-پارسی» یا «فارسی‌تک» باشد.
- فرستادنِ اصلِ مقالهٔ ترجمه شده ــ با ذکر نشانیِ کاملِ آن ــ لازم است.
- اصطلاحاتِ ریاضیِ به‌کاررفته باید بر طبقِ واژه‌نامهٔ ریاضی و آمارِ انجمن ریاضی ایران باشد و اگر لغتی در این واژه‌نامه نیست، معادلِ انگلیسیِ آن داده شود. در صورتی که مؤلف یا مترجم معتقد است اصطلاحِ خاصی از واژه‌نامه مناسب نیست باید ترجیح دادنِ اصطلاحِ پیشنهادیِ خود را توجیه کند.

هیأت تحریریه در رد، قبول، حک، و اصلاحِ مقالاتْ آزاد است و ملزم به ارایه دلایل توجیهی نیست.

- مقالات ارسالی به فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی نباید برای بررسی و چاپ به مجلات دیگر ارسال شده باشد.

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

سال ۲۲، شمارهٔ ۱، بهار ۱۳۸۲
(تاریخ انتشار: بهار ۱۳۸۳)
شمارهٔ پیاپی: ۳۰

فهرست مطالب

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی هر سال در دو شماره (بهار و پاییز) منتشر و به اعضای حقیقی، حقوقی و مشترکین انجمن ریاضیِ ایران ارسال می‌شود.

علاقه‌مندان به عضویت حقیقی و دانشگاه‌ها، مؤسسات وکتابخانه‌هاکه تمایل به عضویت حقوقی یا اشتراک سالانه دارند می‌توانند با دبیرخانهٔ انجمن ریاضی ایران تماس حاصل نمایند.

شماره‌های قبلی این مجله با هماهنگی دبیرخانه قابل فروش می‌باشند.

روی جلد: خواجه نصیرالدین طوسی

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شمارهٔ ۳۰(بهار۱۳۸۲)، صص. ۱ تا ۱۲

حدس آنتروپی مینیمال

حمیدرضا فنائی

مطالعهٔ خمینه‌ها در هندسه امری طبیعی است و در این زمینه تشخیص خمینه‌ها از یکدیگر مسأله‌ای مهم است. در این راستا ناورداهای مختلف بکار می‌آیند و کار تشخیص را ساده می‌سازند. البتّه بطور کلّی این که بتوان فضاهای مشخصی را توسط یک یا دو ناوردا از یکدیگر تمیز داد، امری بسیار خوشبینانه بنظر می‌رسد ولی اخیراً این تشخیص صورت گرفته است و نشان داده است که برخی مفاهیم در عین پیچیده بودن ظاهرشان، در عمق بسیار ساده و طبیعی هستند. این نوشته در صدد آن است تا به حدس آنتروپی مینیمال بپردازد، کمی از تاریخچهٔ آن بگوید، چگونگی اثبات آن را به اختصار شرح دهد و برخی از کاربردهای بسیار آن را در هندسه و سیستمهای دینامیکی بازگو کند. لازم است یادآور شویم که مراجع اصلی ما دو مقالهٔ [۴] و [۵] بوده‌اند و خوانندهٔ علاقمند، جزئیات بیشتر و ایده‌های دیگر را در مقالات مذکور در فهرست مراجع پیدا خواهد کرد.

۱. قضیهٔ اساسی

ما در این مقاله با خمینه‌های ریمانی کار خواهیم کرد و آنها را هموار، فشرده، همبند، جهت پذیر و بی لبه فرض خواهیم کرد. فرض کنیم که (Y, g) یک چنین خمینهٔ ریمانی (n بعدی) باشد. فضای $(\tilde{Y}, \tilde{g})$ را همان فضای پوششی عمومی با متریک ترفیع یافته می‌گیریم. اکنون به ازای $y \in \tilde{Y}$ و $R > 0$ ، $B(y, R)$ را گوی به مرکز y و به‌شعاع R در $\tilde{Y}$ می‌گیریم. می‌دانیم که حدّ زیر موجود بوده و مستقل از انتخاب نقطهٔ y است ([۱۹]):

$$h(g) = \lim_{R \to +\infty} \frac{1}{R} \log \mathrm{vol}(B(y, R)).$$

این کمّیت آنتروپی حجمی متریک g نامیده می‌شود. اینکه بتوان برخی متریکهای خاص را صرفاً از طریق این مفهوم تشخیص داد واقعاً دور از انتظار می‌باشد. در واقع با ضرب متریک در یک عدد ثابت، آنتروپی حجمی نیز تغییر می‌کند و لذا نمی‌تواند به تنهایی کارآمد باشد، امّا می‌توانیم به‌عنوان مثال، حجم خمینه را ثابت و برابر ۱ بگیریم و آنگاه در صدد آن برآییم که متریکهای با حجم ثابت ۱ را از طریق آنتروپی حجمی‌شان شناسایی کنیم. اوّلین کسی که به این موضوع پرداخت کاتوک بود ([۱۷]). او توانست ثابت کند که اگر g_0 متریک خاصی باشد (موضعاً متقارن با انحنای منفی)، آنگاه برای هر متریک دیگر g_1 که به‌طور همدیس با g_0 معادل باشد داریم:

$$h^n(g_1)\mathrm{vol}(Y,g_1) \geq h^n(g_0)\mathrm{vol}(Y,g_0)$$

و مهمتر اینکه، اگر تساوی‌های $\mathrm{vol}(Y,g_1)=\mathrm{vol}(Y,g_0)$ و $h(g_1)=h(g_0)$ رخ دهند حتماً g_1 با g_0 ایزومتریک است. بنابراین به کمک دو ناوردا توانسته‌ایم متریکهای خاصی را از یکدیگر تشخیص دهیم. توجّه کنید که کمّیت $h^n(g)\mathrm{vol}(Y,g)$ تحت ضرب g در یک ثابت مثبت تغییر نمی‌کند. یکی از طرق اثبات نامساوی فوق، استفاده از این مطلب است که آنتروپی حجمی تابعی محدّب بر حسب متریک است. متریکهای موضعاً متقارن نقش فضاهای مدل را در هندسهٔ ریمانی بازی می‌کنند و بیان اینکه متریک خاصی با آنها ایزومتریک باشد، در واقع به‌طور کامل آن متریک را شناسایی می‌کند. ماحصل قضیهٔ قبل این است که وقتی در کلاس همدیس متریکهای مدل هستیم، دو کمّیت آنتروپی حجمی و حجم خمینه برای تشخیص متریک مورد نظر از متریکهای مدل کفایت می‌کند. توجّه داریم که نتیجهٔ قبل در بعد ۲، بی نقص است چرا که در هر کلاس همدیس، چنین g_0ای وجود دارد. پس می‌توانیم از این به بعد فرض کنیم که $n \geq 3$. حال سؤال طبیعی این است که شرط به‌طور همدیس معادل بودن را می‌توان برداشت یا خیر؟ بگذارید قبل از دادن جواب، به کار عمدهٔ دوّم بپردازیم که توسط گروموف صورت گرفت ([۱۵]). ایدهٔ اساسی گروموف این بود که کران پایینی برای کمّیت $h^n(g)\mathrm{vol}(Y,g)$ به‌کمک یک ناوردای توپولوژیک بدست داد. این ناوردا همان مفهوم حجم سادکی Y است که با $||Y||$ نمایش داده می‌شود و فقط به توپولوژی Y وابسته است. نامساوی زیر حاصل کار گروموف است:

$$h^n(g)\mathrm{vol}(Y,g) \geq C_n||Y||$$

که در آن C_n ثابت مثبتی است که فقط به n، بعد خمینهٔ Y، بستگی دارد. توجّه داریم که این نامساوی برای هر متریک ریمانی g بر Y ثابت شده است و شرط انحنای منفی لازم نیست. شاید خالی از لطف نباشد که تعریف $||Y||$ را ارائه دهیم. برای زنجیر $c=\sum\lambda_i\sigma_i$ که به‌فرم ترکیب خطی حقیقی از سادکهاست، نرم L^1 را چنین تعریف می‌کنیم $||c||_1=\sum|\lambda_i|$. حال شبه نرم القایی زیر را بر گروه همولوژی $H_k(Y,\mathbb{R})$ بدست می‌آوریم:

$$||\gamma||=\inf\{||c||_1 \mid [c]=\gamma \ \& \ \partial c=0\}.$$

اکنون اگر $[Y]$ همان کلاس n بعدی بنیادی Y باشد، قرار می‌دهیم $||Y|| = ||[Y]||$. با این تعریف ممکن است داشته باشیم $||Y|| = ۰$، کمااینکه برای کرهٔ S^n و چنبرهٔ T^n اتّفاق می‌افتد. امّا نکتهٔ مهم این است که اگر Y متریکی با انحنای منفی بپذیرد، حتماً $||Y|| \neq ۰$. در واقع گروموف و ترستون توانستند در حالتی که Y متریکی با انحنای ثابت ۱− مانند $g_۰$ بپذیرد، حجم سادکی $||Y||$ را صریحاً بر حسب $\mathrm{vol}(Y, g_۰)$ محاسبه کنند. این نشان می‌هد که ثابت C'_n، تنها وابسته به n، بعد خمینهٔ Y، است به قسمی که:

$$h^n(g)\mathrm{vol}(Y, g) \geq C'_n h^n(g_۰)\mathrm{vol}(Y, g_۰)$$

امّا متأسفانه $C'_n < ۱$ و لذا نامساوی کاتوک در حالت کلّی حاصل نشده است! پس حدس زیر هنوز ثابت نشده بود:

حدس [۱۵]، [۱۶]، [۱۷]: نامساوی کاتوک در حالت کلّی برقرار است و حالت تساوی منجر به «تساوی» متریکها می‌شود.

توجّه کنید که حدس قبلی در مورد خمینه‌های با حجم ثابت ۱ بیان می‌کند که $h(g) \geq h(g_۰)$ و بدین علّت به حدس آنتروپی مینیمال معروف شده بود. در اینجا بد نیست اشاره کنیم که آنتروپی حجمی همواره تحت تسلّط مفهوم دینامیکی خاصی است موسوم به آنتروپی توپولوژیک $h_{\mathrm{top}}(g)$. یکی از روشهای بیان این مفهوم به‌شرح زیر است:

فرض کنید (M, d) فضایی متریک فشرده و φ_t یک شار بر آن است. برای $m, m' \in M$ و $T \geq ۰$ قرار می‌دهیم:

$$d_T(m, m') = \sup\{d(\varphi_t(m), \varphi_t(m')), ۰ \leq t \leq T\}.$$

حال زیر مجموعهٔ $Z \subset M$ را به ازای $\delta > ۰$، یک مجموعهٔ (T, δ) ـتولید کننده می‌نامیم هرگاه $M \subset \cup_{z \in Z} B_{d_T}(z, \delta)$، که در آن $B_{d_T}(z, \delta)$ همان گوی به مرکز z و به شعاع δ با متریک d_T است. اگر $N(T, \delta)$ مینیمم کاردینال یک مجموعهٔ (T, δ)ـتولید کننده باشد، آنتروپی توپولوژیک شار φ_t عبارت است از:

$$h_{\mathrm{top}}(\varphi_t) = \sup_{\delta > ۰} \lim_{T \to +\infty} \frac{۱}{T} \log N(T, \delta).$$

حالت خاص و مهم شار ژئودزیکی بر خمینهٔ ریمانی فشردهٔ (Y, g) هنگامی حاصل می‌شود که M را همان کلاف مماس واحد $S_g Y$ بگیریم و d را یک متریک دلخواه بر آن. بگذارید دقیقتر شار ژئودزیکی را تعریف کنیم.

برای خمینهٔ ریمانی (Y, g) مانند قبل، TY را کلاف مماس Y و $S_g Y$ را کلاف مماس واحد آن بنامید و $\pi : TY \to Y$ را نگاشت تصویر بگیرید. چون Y کامل است (بنا بر فشردگی)، پس ژئودزیکها بر کلّ $\mathbb{R}$ تعریف میشوند. اگر $v \in TY$ برداری دلخواه باشد و $x = \pi(v)$، یگانه ژئودزیک γ با شرایط اوّلیهٔ

زیر را $\gamma_{(x,v)}$ (یا ساده‌تر γ_v) بنامید:

$$\begin{cases} \gamma(\circ) = x, \\ \gamma'(\circ) = v. \end{cases}$$

حال برای $t \in \mathbb{R}$، دیفیومرفیسم $\varphi_t : TY \to TY$ از کلاف مماس TY به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varphi_t(x,v) = \left(\gamma_{(x,v)}(t), \gamma'_{(x,v)}(t)\right).$$

خانوادهٔ دیفیومرفیسمهای φ_t تشکیل یک شار می‌دهند، یعنی $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ و $\varphi_\circ = Id_{TY}$. چون ژئودزیکها همواره با سرعت ثابت حرکت می‌کنند لذا S_gY تحت φ_t ناورداست. تحدید φ_t را به S_gY، شار ژئودزیکی خمینهٔ ریمانی (Y,g) مینامیم.

حال اگر نماد $h_{\text{top}}(g)$ نشان دهندهٔ آنتروپی توپولوژیک شار ژئودزیکی باشد، مطابق با [۱۹] یا [۱۰] همواره داریم $h_{\text{top}}(g) \geq h(g)$ و در حالت انحنای نامثبت $h_{\text{top}}(g) = h(g)$ (تساوی برای متریکهای بدون نقاط مزدوج نیز برقرار است [۱۳]). یکی از قضایای معروف و جالب توجّه که توسط مارگولیس ثابت شده است ([۲۰]) بیان می‌کند که اگر متریک g با انحنای منفی باشد آنگاه

$$h_{\text{top}}(g) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \log N(T)$$

که $N(T)$ تعداد ژئودزیکهای تناوبی با طول نابیشتر از T است. اصل وردشی در نظریهٔ ارگودیک بیان می‌کند که $h_{\text{top}}(g) = \sup_\mu h_\mu(g)$ که در آن μ اندازهٔ احتمالی است بر S_gY که تحت شار ژئودزیکی ناورداست و $h_\mu(g)$ آنتروپی نظریهٔ اندازه‌ای نظیر آن است (برای اطلاعات بیشتر [۲۵] را ببینید). به‌ویژه در حالت خاصی که μ همان اندازهٔ لیوویل μ_L است داریم $h_{\text{top}}(g) \geq h_{\mu_L}(g)$. اندازهٔ لیوویل به‌صورت موضعی همان حاصلضرب اندازهٔ ریمانی القایی از g بر Y و اندازهٔ طبیعی لبگ بر کرات واحد در فضاهای مماس بر نقاط خمینهٔ Y است. چون فرض کرده‌ایم که Y فشرده است، پس S_gY نیز فشرده خواهد بود و لذا می‌توانیم اندازهٔ μ_L را با نرمالیزه کردن یک اندازهٔ احتمال بگیریم. این اندازه تحت شار ژئودزیکی ناورداست. برای متریک موضعاً متقارن $g_\circ$ با انحنای منفی، این موضوع شناخته شده است که $h_{\text{top}}(g_\circ) = h_{\mu_L}(g_\circ)$. یعنی اندازهٔ لیوویل همان اندازهٔ آنتروپی ماکسیمال است. عکس این مطلب هنوز هم حدس ثابت نشدهٔ بسیار معروفی است ([۷]). در اینجا با توجّه به این توضیحات، بد نیست اشاره کنیم که آنچه کاتوک را به نامساویش رهنمون ساخت در واقع نتیجهٔ زیر بود که او برای متریک با انحنای منفی $g_\circ$ و هر متریک دیگر g_1 ثابت کرد:

$$h(g_1) \int_{S_{g_\circ}Y} \sqrt{g_1(v,v)}\; d\mu_L(g_\circ)(v) \geq h_{\mu_L}(g_\circ).$$

بازگردیم به حدس آنتروپی مینیمال. فرض کنید $(X, g_\circ)$ خمینهٔ ریمانی ($n \geq 3$ بعدی) است و $g_\circ$ موضعاً متقارن با انحنای منفی است. (Y,g) را مطابق قبل می‌گیریم. فرض می‌کنیم که X و Y

از لحاظ توپولوژیک با هم ارتباط دارند بدین صورت که نگاشت پیوستهٔ $f : Y \to X$ با درجهٔ ناصفر وجود دارد. در این حالت سه ریاضیدان فرانسوی، بسون، کورتوا و گالو، موفّق شدند پس از مطالعات بسیار قضیهٔ عمیق زیر را که حدس آنتروپی مینیمال از نتایج فوری آن است، ثابت کنند ([۳]):

قضیهٔ اساسی. همواره داریم:

$$h^n(g)\mathrm{vol}(Y, g) \geq |\mathrm{deg} f| \ h^n(g_\circ)\mathrm{vol}(X, g_\circ)$$

تساوی وقتی و فقط وقتی اتّفاق می‌افتد که f هموتوپ باشد با یک پوشش ریمانی (پوشش موضعاً ایزومتریک با تقریب یک ثابت).

توجّه کنید که فرض $n \geq ۳$ را داشتیم. اشاره کنیم که حکم قضیه، بدون فرض فشردگی Y نیز برقرار است. این قضیه نشان می‌دهد که متریکهای موضعاً متقارن با انحنای منفی در کلاس همهٔ متریکهای ریمانی بر خمینه‌های به‌طور توپولوژیک مرتبط با X، دقیقاً با دوکمّیت شناخته می‌شوند: آنتروپی و حجم! در بخش بعدی نتایجی از این قضیه بیان خواهد شد و در بخش آخر هم کمی راجع به اثبات آن سخن خواهیم گفت.

۲. چند کاربرد مهم

یکی از مهم‌ترین نتایج قضیهٔ فوق عبارت است از اثبات حدسی معروف از گروموف ([۱۵] یا [۱۶]) که به‌شرح زیر است:

نتیجه. اگر $g_\circ$ با انحنای ثابت ۱− باشد و g نرمالیزه شده به‌صورت $\mathrm{Ricci}(g) \geq -(n-1)g$ باشد، آنگاه $\mathrm{vol}(Y, g) \geq |\mathrm{degf}|\mathrm{vol}(X, g_\circ)$ و تساوی در حالت $n \geq ۳$ وقتی اتّفاق می‌افتد که f هموتوپ باشد با یک پوشش ریمانی.

این نتیجه کاربرد جالب توجّهی از قضیهٔ مقایسه‌ای بیشاپ است. نتیجه‌ای که خود این نتیجه بدست می‌دهد و به‌خودی خود بسیار حائز اهمیت است عبارت است از:

نتیجه. فرض کنید M خمینه‌ای فشرده و ۴ بعدی باشد که متریک هذلولوی حقیقی (یعنی با انحنای ثابت ۱−) می‌پذیرد. در این صورت (با تقریب یک ثابت) این یگانه متریک اینشتین بر M خواهد بود.

صورت مختلط این قضیه با تکنیکهایی کاملاً متفاوت در [۱۸] بدست آمده است. تا اکنون صورت کواترنیونی و کیلی این حکم، حل نشده مانده‌اند. یکی دیگر از کاربردهای هندسی عبارت است از قضیهٔ موستو ([۲۱]) که به‌طور سرراست از حالت تساوی قضیهٔ اساسی ناشی می‌شود.

نتیجه. فرض کنید (X, g_0) خمینهٔ ریمانی (فشرده) موضعاً متقارن با انحنای منفی باشد. اگر (Y, g) خود (فشرده) موضعاً متقارن با انحنای منفی (و هم‌بعد X) باشد، در این صورت هر هم ارزی هموتوپی $f : Y \to X$ هموتوپ است با یک ایزومتری.

در اینجا به چند کاربرد دینامیکی نیز اشاره می‌کنیم. در سیستمهای دینامیکی روی خمینه‌ها حدس معروفی وجود دارد ([۷]) که همچنان ثابت نشده مانده است. به‌طور ساده این حدس بیان می‌کند که روی برخی خمینه‌ها، شباهت دستگاه دینامیکی شار ژئودزیکی دو متریک، باعث شباهت خود متریکها می‌گردد. به فرم دقیقتر، این حدس ادّعا می‌کند که اگر شارهای ژئودزیکی دو خمینهٔ ریمانی با انحنای منفی تحت یک همیومرفیسم مزدوج باشند، آنگاه این دو خمینه ایزومتریک هستند (در انحنای مثبت، مثال نقض وجود دارد). نتیجهٔ زیر در این راستا عالی است:

نتیجه. فرض کنید (X, g_0) خمینه‌ای ریمانی فشرده (با بعد بزرگتر یا مساوی ۳) و موضعاً متقارن با انحنای منفی باشد. در این صورت هر خمینهٔ ریمانی دیگری که شار ژئودزیکی آن با شار ژئودزیکی (X, g_0) تحت یک دیفیومرفیسم C^1 مزدوج باشد با (X, g_0) ایزومتریک است.

نکته‌ای که در اینجا باید یادآور شد این است که بنا بر نتیجهٔ شناخته شدهٔ [۲]، اگر تجزیهٔ آنوسوف از کلاس C^∞ باشد، حتماً شار ژئودزیکی ما با نظیرش از یک خمینهٔ فشردهٔ موضعاً متقارن با انحنای منفی به‌طور C^∞ مزدوج است. بنابراین کاربردی مستقیم به صورت زیر پیدا می‌کنیم:

نتیجه. اگر (Y, g) خمینه‌ای ریمانی فشرده (با بعد بزرگتر یا مساوی ۳) و با انحنای منفی باشد به‌طوریکه تجزیهٔ آنوسوف آن از کلاس C^∞ باشد، آنگاه g موضعاً متقارن است.

البته شرط C^r برای r به اندازهٔ کافی بزرگ نیز کفایت می‌کند و حدس ثابت نشده‌ای ادّعا می‌کند که شرط C^2 نیز کافی است! اشاره‌ای کنیم به خمینهٔ همساز مجانبی. یعنی یک خمینهٔ ریمانی همبند ساده با انحنای منفی که برای آن تمام کرات ساعتی انحنای میانگین ثابت دارند (مستقل از کرات ساعتی). کرات ساعتی همان زیرخمینه‌های تراز تابع بوزمان هستند که در بخش بعدی تعریف خواهند شد. بنابر [۱۲]، خمینهٔ ریمانی فشرده با انحنای منفی که فضای پوششی عمومی آن، همساز مجانبی است حتماً شار ژئودزیکی‌اش با نظیرش از یک خمینهٔ فشردهٔ موضعاً متقارن با انحنای منفی، به‌طور C^∞ مزدوج است. لذا حکم زیر به روشنی برقرار است:

نتیجه. اگر (Y, g) خمینه‌ای ریمانی فشرده (با بعد بزرگتر یا مساوی ۳) و با انحنای منفی باشد به‌طوریکه فضای پوششی عمومی آن همساز مجانبی است، آنگاه g موضعاً متقارن است.

مفهوم همساز مجانبی به‌وضوح برگرفته از مفهوم شناخته شده‌تر همساز است. یک خمینهٔ ریمانی (موضعاً) همساز نامیده می‌شود هرگاه تمامی کرات ژئودزیکی در فضای پوششی عمومی آن، انحنای میانگین ثابت داشته باشند. حدس معروفی از لیشنرویچ بیان می‌کند که هر چنین خمینه‌ای باید موضعاً متقارن از

رتبهٔ ۱ باشد (عکس این مطلب همواره برقرار است). این حدس در حالتی که فضای پوششی عمومی نظیر فشرده باشد توسط زابو ([۲۴]) ثابت شده بود (که به حالت انحنای مثبت منتهی می‌گشت). در حالت دیگر وقتی فضای پوششی عمومی نظیر فشرده نباشد، مثالهای نقضی توسط دامک و ریچی ([۹]) یافت شده است، امّا این مثال نقض‌ها هیچ یک خارج قسمت فشرده نمی‌پذیرند. کار بسون، کورتوا و گالو نشان می‌دهد که حدس در حالت باقیمانده، برقرار است:

حدس. هر خمینهٔ فشردهٔ موضعاً همساز با انحنای منفی، موضعاً متقارن (از رتبهٔ ۱) است.

در ارائهٔ نتایج متعدّد قضیهٔ برجستهٔ بسون، کورتوا و گالو به همین مختصر قناعت می‌کنیم و خوانندهٔ علاقمند را به مقالات مورد نظر ارجاع می‌دهیم.

۳. چگونگی اثبات

اکنون می‌خواهیم ایده‌ای از چگونگی اثبات قضیهٔ اساسی را به‌دست بدهیم. در واقع اثبات این قضیهٔ عمیق به‌طرز چشمگیری ساده و طبیعی است و نمونهٔ بارزی است از به‌کارگیری مؤثر ابزارها و مفاهیم موجود در جهت پیدا کردن نگاشتی طبیعی از Y به X که نامساوی مورد نظر را بدست دهد و در حالت تساوی همان ایزومتری موجود باشد. این ایده پس از آنکه نویسندگان [۳] در مقالاتی پیش تر، تکنیکهای دیگری را برای اثبات حالاتی «موضعی» از قضیهٔ اساسی بکار برده بودند، توسط آنها کشف شد.

حالت (Y, g) با انحنای منفی را در نظر بگیریم. این فرض از کلّیت مطلب نمی‌کاهد. فضای پوششی عمومی $(\tilde{Y}, \tilde{g})$ را در نظر می‌گیریم. مرز هندسی $\partial\tilde{Y}$ عبارت است از کلاسهای هم ارزی ژئودزیکهایی که در زمان مثبت در فاصلهٔ کرانداری از یکدیگر قرار می‌گیرند. بنابراین نظیر هر ژئودزیک $\gamma(t)$ نقطه‌ای از مرز هندسی داریم که آن را با $\xi = \gamma(+\infty)$ نمایش می‌دهیم. شرط انحنای منفی باعث می‌شود که برای هر دو ژئودزیک $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$، تابع $d(\gamma_۱(t), \gamma_۲(t))$ محدّب باشد. لذا اگر $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$ هر دو یک نقطهٔ $\xi \in \partial\tilde{Y}$ را بدست دهند و $\gamma_۱(۰) = \gamma_۲(۰)$، آنگاه حتماً $\gamma_۲ = \gamma_۱$. یعنی نظیر هر $\xi \in \partial\tilde{Y}$ و هر $y \in \tilde{Y}$، دقیقاً یک ژئودزیک γ با سرعت واحد وجود دارد که $y = \gamma(۰)$ و $\xi = \gamma(+\infty)$. پس به ازای هر انتخاب $y_۰ \in \tilde{Y}$ به‌عنوان مبدأ، فضای $S_{y_۰}\tilde{Y}$ متشکل از بردارهای به‌طول واحد مماس بر $y_۰$ به‌طور طبیعی با $\partial\tilde{Y}$ تحت $v \mapsto \gamma_v(+\infty)$ یکی می‌شود و لذا توپولوژی روی $\partial\tilde{Y}$ تعریف می‌کند. از طرفی عمل گروه $\Gamma = \pi_۱(Y)$ بر $\tilde{Y}$، به‌طور طبیعی عملی به روی ژئودزیکها تعریف می‌کند که خود عملی بر مرز هندسی بدست می‌دهد: $\xi \mapsto \gamma \cdot \xi$. حال برای سادگی فرض می‌کنیم که $g_۰$ هذلولوی حقیقی است یعنی انحنای خمینهٔ ریمانی $(X, g_۰)$ برابر ثابت -۱ است و اینکه نگاشت $f : Y \to X$ یک هم ارزی هموتوپی است (پس $|deg f| = ۱$). حالت کلّی به‌طور مشابه حاصل می‌شود ([۶] را ببینید). با این مفروضات، ترفیع $\tilde{f} : \tilde{Y} \to \tilde{X}$ وجود دارد که یک شبه ایزومتری بوده و به‌طور پیوسته قابل توسیع به

یک هیومرفیسم $\bar{f} : \partial\tilde{Y} \to \partial\tilde{X}$ است ([۱]). اگر $\rho : \pi_1(Y) \to \pi_1(X)$ را نمایش القایی از f بگیریم، در این صورت

$$\forall\gamma \in \pi_1(Y), \quad \bar{f} \circ \gamma = \rho(\gamma) \circ \bar{f}.$$

حال $M(\partial\tilde{Y})$ را فضای اندازه‌های بورل مثبت و متناهی بر $\partial\tilde{Y}$ می‌گیریم. در این صورت برای هر $\mu \in M(\partial\tilde{Y})$، اندازهٔ القایی $\bar{f}_*\mu$ را در $M(\partial\tilde{X})$ خواهیم داشت با خاصیت زیر:

$$\bar{f}_* \circ \gamma_* = \rho(\gamma)_* \circ \bar{f}_*.$$

به‌کمک این مقدّمات می‌توانیم نگاشت مطلوب $F : Y \to X$ را بسازیم. برای این منظور کافی است نگاشت $\tilde{F} : \tilde{Y} \to \tilde{X}$ را به‌شرح زیر تعریف کنیم:

$$\tilde{F}(y) = (\mathrm{bar} f_* \mu_y)$$

که در آن bar همان نگاشت مرکز ثقل است: $M(\partial\tilde{X}) \to \tilde{X}$. این مفهوم ابتدا در [۱۴] مطرح شد و سپس به‌طور قطعی‌تر در [۱۱] به‌کارگرفته شد. نگاشت $y \mapsto \mu_y$ هم همان نگاشت معروف پترسون-سالیوان است از $\tilde{Y} \to M(\partial\tilde{Y})$. این مفاهیم را توضیح خواهیم داد، امّا قبل از آن، یک نتیجه‌گیری می‌کنیم بدین صورت که $\tilde{F} \circ \gamma = \rho(\gamma) \circ \tilde{F}$ و لذا نگاشت موعود $F : Y \to X$ بدست می‌آید. می‌توان دید که F (حداقل) از کلاس C^1 است، با f هموتوپ می‌باشد و برای هر $y \in Y$ داریم:

$$|\mathrm{Jac} F(y)| \le \left(\frac{h(g)}{h(g_0)}\right)^n$$

و اگر تساوی در یک نقطهٔ y_0 رخ دهد آنگاه $D_{y_0} F$ یک ایزومتری (با تقریب یک ثابت) است.

با مفهوم تابع بوزمان شروع می‌کنیم. فرض کنید y_0 نقطهٔ ثابتی در $\tilde{Y}$ است که برای ما حکم مبدأ را دارد. به ازای $\xi \in \partial\tilde{Y}$، دیدیم که ژئودزیک یکتای $\gamma(t)$ پرمایش شده بر حسب طول وجود دارد که $\gamma(0) = y_0$ و $\gamma(+\infty) = \xi$. حدّ زیر برای هر $y \in \tilde{Y}$ موجود است:

$$B_0(y,\xi) = \lim_{t\to+\infty} (d(y,\gamma(t)) - t)$$

و به‌دلیل انحنای منفی، وقتی که ξ ثابت گرفته شود، تابعی محدّب بر حسب y است. این همان تابع بوزمان است (به پایهٔ نقطهٔ y_0) که ابزار بسیار مفیدی است ([۸] را ببینید). واضح است که $B_0(y_0,\xi) = 0$ و $B_0(y,\xi) \to -\infty$ وقتی که $y \to \xi$. یک کرهٔ ساعتی به‌مرکز ξ عبارت است از تمام نقاط y که برایشان $B_0(y,\xi)$ مقداری است ثابت. حال بپردازیم به مفهوم بعدی که مرکز ثقل است. فرض کنید که μ اندازه‌ای بر $\partial\tilde{Y}$ باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{B}(y) = \int_{\partial\tilde{Y}} B_0(y,\xi)\ d\mu(\xi).$$

در حالتی که با خمینه‌ای هذلولوی مانند $(X, g_\circ)$ کار می‌کنیم، می‌توانیم ببینیم که تابع $\mathcal{B}$ اکیداً محدّب است و نقطهٔ مینیمم یکتایی می‌پذیرد، به‌شرط آنکه μ اندازه‌ای بدون اتم باشد. این نقطهٔ مینیمم را مرکز ثقل μ می‌نامیم و با $\mathrm{bar}(\mu)$ نشان می‌دهیم. اگر آن را $x_\circ$ بگیریم، در واقع داریم:

$$\int_{\partial\tilde{X}} dB_{\circ(x_\circ,\xi)}(\cdot)\; d\mu(\xi) = \circ.$$

این نحوهٔ دیدن مرکز ثقل در ادامه بسیار مفید است. اکنون خانوادهٔ اندازه‌های پترسون-سالیوان $\{\mu_y\}_{y\in\tilde{Y}}$ را که در $M(\partial\tilde{Y})$ قرار دارند، معرفی می‌کنیم ([۲۲] یا [۲۳] را ببینید). عبارت زیر به سری پوانکارهٔ $\Gamma = \pi_1(Y)$ معروف است:

$$g_s(y,z) = \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-s\,d(y,\gamma(z))}$$

می‌توان دید که سری فوق برای $s > h(g)$ همگراست و برای $s \le h(g)$ واگراست. حال برای $s > h(g)$ قرار می‌دهیم

$$\mu_{y,z}(s) = \frac{\sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-s\,d(y,\gamma(z))}\delta_{\gamma(z)}}{\sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-s\,d(y,\gamma(y))}}$$

که در آن $\delta_{\gamma(z)}$ همان اندازهٔ (احتمال) دیراک متمرکز بر نقطهٔ $\gamma(z)$ می‌باشد. می‌توان دید که وقتی $s \to h(g)$، زیردنباله‌ای از اندازه‌های $\mu_{y,z}(s)$ همگرای ضعیف خواهد شد به اندازه‌ای مانند μ_y (که مستقل از z است) که محمل μ_y همان نقاط حدّی مدار $\Gamma(z)$ یعنی کلّ $\partial\tilde{Y}$ می‌باشد و دارای اتم نیست. دو خاصیت این خانواده عبارتند از خوشرفتاری تحت عمل گروه Γ بدین معنا که برای هر $\gamma\in\Gamma$ داریم $\mu_{\gamma(y)} = \gamma_*\mu_y$ و دیگری اینکه برای هر دو نقطهٔ $y, y' \in \tilde{Y}$، مجموعه‌های اندازهٔ صفر μ_y و $\mu_{y'}$ یکی هستند، به‌طور دقیقتر داریم:

$$\frac{d\mu_y}{d\mu_{y'}}(\xi) = e^{-h(g)B_{y'}(y,\xi)}.$$

در واقع خانوادهٔ اندازه‌های پترسون-سالیوان $\{\mu_y\}_{y\in\tilde{Y}}$ با دو خاصیت یاد شده به‌طور یکتایی (با تقریب یک ثابت) مشخص می‌شوند.

با این توضیحات بازگردیم به تابع طبیعی F. دیدیم که F به‌کمک رابطهٔ زیر تعریف شد:

$$\int_{\partial\tilde{X}} dB_{\circ(F(y),\xi)}(\cdot)\; d(\bar{f}_*\mu_y)(\xi) = \circ,$$

بنابراین داریم

$$\int_{\partial\tilde{Y}} dB_{\circ(F(y),\bar{f}(\eta))}(\cdot)\; e^{-h(g)B(y,\eta)}\; d\mu_\circ(\eta) = \circ.$$

توجّه داریم که منظور از $B_\circ$ (به‌ترتیب B) عبارت است از تابع بوزمان خمینهٔ $(\tilde{X}, \tilde{g}_\circ)$ (به‌ترتیب $(\tilde{Y}, \tilde{g})$). حال پایهٔ $\{e_i(z)\}$ برای $i = 1, \dots, n$ از فضای $T_z\tilde{X}$ را هموار بر حسب $z \in \tilde{X}$ می‌گیریم. تعریف می‌کنیم (برای $z \in \tilde{X}$ و $y \in \tilde{Y}$)

$$G_i(z, y) = \int_{\partial\tilde{Y}} dB_{\circ\,(z,\bar{f}(\eta))}(e_i(z))\; e^{-h(g)B(y,\eta)}\; d\mu_\circ(\eta)$$

و قرار می‌دهیم $G : \tilde{X} \times \tilde{Y} \to \mathbb{R}^n$ به‌صورت

$$G(z, y) = (G_1(z, y), \dots, G_n(z, y))$$

در این صورت به‌وضوح داریم $G(F(y), y) = 0$. حال با توجّه به اینکه توابع بوزمان $B_\circ$ و B نسبت به متغیر اوّلشان هموار هستند و $\partial\tilde{Y}$ فشرده است، نگاشت G هموار خواهد بود. به‌راحتی دیده می‌شود که در شرایط قضیهٔ تابع ضمنی هستیم! در واقع شرط وارون پذیری مشتق جزئی G نسبت به z از اینکه DdB مثبت معین است (تحدّب تابع B)، نتیجه می‌شود. پس تابع F (حداقل) از کلاس C^1 است. قضیهٔ تابع ضمنی همچنین مشتق تابع F را نیز به‌دست می‌دهد که پس از انجام محاسبات ما را به تخمین یاد شده راجع به $|\mathrm{Jac}F(y)|$ می‌رساند. برای دیدن جزئیات به [۴] رجوع کنید. اکنون رسیدن به حکم قضیهٔ اساسی ساده است. کافی است $\omega_\circ$ را (بترتیب ω) فرم حجم خمینهٔ ریمانی $(X, g_\circ)$ (بترتیب (Y, g)) بگیریم. در این صورت با توجّه به اینکه

$$\int_Y F^*(\omega_\circ) = \int_X \omega_\circ = \mathrm{vol}(X, g_\circ)$$

و تخمین یاد شده، می‌توان نوشت:

$$\mathrm{vol}(X, g_\circ) \le \int_Y |F^*(\omega_o)| = \int_Y |(\mathrm{Jac}F)\omega| \le \left(\frac{h(g)}{h(g_\circ)}\right)^n \int_Y \omega = \left(\frac{h(g)}{h(g_\circ)}\right)^n \mathrm{vol}(Y, g)$$

که همانی است که می‌خواستیم. در حالت تساوی باید داشته باشیم:

$$|\mathrm{Jac}F(y)| = \left(\frac{h(g)}{h(g_\circ)}\right)^n = 1$$

برای هر $y \in Y$، و لذا D_yF یک ایزومتری است.

در خاتمه اشاره می‌کنیم که اثبات اوّلیهٔ ارائه شده در [۳] از قضیهٔ اساسی، کمی طولانی‌تر بود و از ابزارهای دیگری نیز استفاده می‌کرد. امّا نویسندگان، اثباتی را که بیان کردیم در [۴] منتشر ساختند که به‌نحو جالب توجّهی ساده‌تر می‌باشد. در این اثبات آنچه واقعاً چشمگیر است این مطلب است که ما صریحاً ایزومتری F را در حالت تساوی ارائه می‌دهیم، چیزی که به‌هیچ وجه متصّور نمی‌شد که قابل دسترس باشد.

مراجع

[1] R. Benedetti, C. Petronio, *Lectures on hyperbolic geometry, Universitext*, Springer, Berlin, 1992.

[2] Y. Benoist, P. Foulon, F. Labourie, "Flots d'Anosov à distributions stable et instable différentiables", J. Am. Math. Soc. 5 (1992), 33-74.

[3] G. Besson, G. Courtois, S. Gallot, *Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative*, GAFA 5 (1995), 731-799.

[4] G. Besson, G. Courtois, S. Gallot, "Minimal entropy and Mostow's rigidity theorems", Erg. Th. Dyn. Sys. 16 (1996), 623-649.

[5] G. Besson, G. Courtois, S. Gallot, "A real Schwarz lemma and some applications", Rendiconti di Mat. Serie VII, 18 (1998), 381-410.

[6] G. Besson, G. Courtois, S. Gallot, "Lemme de Schwarz réel et applications géométriques", Acta Math. 183 (1999), 145-169.

[7] K. Burns, A. Katok, "Manifolds with non-positive curvature", Erg. Th. Dyn. Sys. 5 (1985), 307-317.

[8] H. Busemann, *The geometry of geodesics*, Academic Press Inc., New York, 1955.

[9] E. Damek, F. Ricci, "A class of non-symmetric harmonic riemannian spaces", Bull. Amer. Math. Soc. 27 (1992), 139-142.

[10] E.I. Dinaburg, "On the relations among various entropy characteristics of dynamical systems", Math. USSR Izv. 5 (1971), 337-378.

[11] A. Douady, C. Earle, "Conformally natural extensions of homeomorphisms of the circle", Acta Math. 157 (1986), 23-48.

[12] P. Foulon, F. Labourie, "Sur les variétés compactes asymptotiquement harmoniques", Invent. Math. 109 (1992), 97-111.

[13] A. Freire, R. Mane, "On the entropy of the geodesic flow in manifolds without conjugate points", Invent. Math. 69 (1982), 375-392.

[14] H. Furstenberg, "A Poisson formula for semi-simple Lie groups", Ann. Math. 77 (1963), 335-386.

[15] M. Gromov, "Volume and bounded cohomology", Publ. Math. Inst. Hautes Etud. Sci. 56 (1981), 213-307.

[16] M. Gromov, "Filling Riemannian manifolds", J. Diff. Geom. 18 (1983), 1-147.

[17] A. Katok, "Entropy and closed geodesics", Erg. Th. Dyn. Sys. 2 (1982), 339-367.

[18] C. LeBrun, "Einstein metrics and Mostow rigidity", Math. Res. Lett. 2 (1995), 1-8.

[19] A. Manning, "Topological entropy for geodesic flows", Ann. Math. 110 (1979), 567-573.

[20] G.A. Margulis, "Applications of ergodic theory to the investigation of manifolds of negative curvature", Funct. Anal. Appl. 3 (1969), 335-336.

[21] G.D. Mostow, Quasiconformal mappings in n-space and the rigidity of hyperbolic space forms, Publ. Math. Inst. Hautes Etud. Sci. 34 (1968), 53-104.

[22] S.J. Patterson, "The limit set of a Fuchsian group", Acta Math. 136 (1976), 241-273.

[23] D. Sullivan, "The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions", Publ. Math. Inst. Hautes Etud. Sci. 50 (1979), 171-202.

[24] Z. Szabo, "The Lichnerowicz conjecture on harmonic manifolds", J. Diff. Geom. 31 (1990), 1-28.

[25] P. Walters, *An Introduction to Ergodic Theory*, Graduate Text in Math. 79, Springer, Berlin, 1982.

حمیدرضا فنائی

دانشگاه صنعتی شریف، دانشکدهٔ علوم ریاضی

پست الکترونیک: fanai@sina.sharif.edu

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شمارهٔ ۳۰(بهار ۱۳۸۲)، صص. ۱۳ تا ۳۴

آشنایی با عملگرهای یکنوا و کاربرد آن در معادلات دیفرانسیل پاره‌ای

روح‌ا... جهانی‌پور-حسین رحمانیان

چکیده

در این مقاله عملگرهای یکنوا از یک فضای باناخ به دوگان آن را معرفی می‌کنیم و از آنها برای بررسی وجود جواب برای معادلات دیفرانسیل پاره‌ای تحت شرایط خاصی استفاده می‌کنیم. در نهایت با ضعیف کردن شرط یکنوایی به شبه یکنوایی و معرفی عملگرهای تغییراتی، نتایج مشابهی را برای معادلات دیفرانسیل پاره‌ای شبه خطی به‌دست می‌آوریم.

۱. مقدمه

در این مقاله تعدادی از نتایج مربوط به نگاشت‌های غیرخطی از یک فضای باناخ X به دوگان آن را به دست می‌آوریم. معمولاً کلمهٔ نگاشت را برای نگاشت‌های غیرخطی و کلمهٔ عملگر را برای نگاشت‌های خطی به‌کار می‌بریم. این مقاله به شش بخش مجزا تقسیم می‌شود. در بخش دوم با قرار دادن فرض‌های یکنوایی و از پایین کرانداری روی توابعی به صورت $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$، وجود جواب برای معادله $f(u) = a$ را به ازای هر $a \in \mathbb{R}^n$ بررسی می‌کنیم و در این باره چند قضیهٔ وجودی را بیان و اثبات می‌کنیم.

در بخش سوم به فضاهای با بعد نامتناهی پرداخته، مفاهیم و نتایج بخش دوم را در مورد توابعی به صورت $T : X \to X^*$ توسیع می‌دهیم که در آن X و X^* هر دو فضاهای باناخ جدایی‌پذیرند. مهمترین قضیهٔ این بخش، قضیه مینتی-برودر است که به تفصیل به آن خواهیم پرداخت. در این قضیه از روشی به نام روش گالرکین استفاده شده است که مسائل با بعد نامتناهی را به‌وسیلهٔ مسائل با بعد متناهی تقریب

می‌زند. این روش به عنوان یک وسیله برای محاسبات عددی و همچنین به عنوان یک ابزار نظری مشهور است.

در بخش چهارم به کاربرد عملگرهای یکنوا در معادلات دیفرانسیل پاره‌ای غیرخطی اشاره می‌کنیم. در آنجا با گذاشتن چند شرط روی توابع ضریب در عملگر دیفرانسیل، یک قضیهٔ وجودی برای مسألهٔ دیریکله $A(u) = f$ بیان می‌کنیم. در بخش پنجم با معرفی عملگرهای شبه یکنوا و تغییراتی، فرض یکنوایی را ضعیف‌تر می‌کنیم که البته فرض تغییراتی ضعیف‌تر از شبه یکنوایی است. سرانجام در بخش آخر به کاربرد آنچه در بخش‌های قبل آورده شده در معادلات دیفرانسیل پاره‌ای می‌پردازیم.

۲. نگاشت‌ها روی فضاهای با بعد متناهی

قضیهٔ مقدار میانی که در نخستین درس حسابان بیان می‌شود، حاکی است که اگر مقادیر یک تابع پیوسته در دو سر یک فاصله، هم علامت نباشند، آنگاه تابع در آن فاصله ریشه دارد. این قضیه هم از دیدگاه نظری و هم در کاربرد ابزار سودمندی در تعیین ریشه‌های توابع پیوسته است. به‌خصوص، روش نصف کردن فاصله به ما کمک می‌کند تا مقدار عددی ریشه را با هر تقریب داده شده و با خطای قابل‌قبول حساب کنیم. به این ترتیب اگر f تابع حقیقی پیوسته‌ای باشد که

$$\lim_{u\to-\infty} f(u) = +\infty \qquad \text{و} \qquad \lim_{u\to+\infty} f(u) = -\infty \tag{$*$}$$

در این صورت برای هر $a \in \mathbb{R}$، معادلهٔ $f(u) = a$ دارای یک جواب $u \in \mathbb{R}$ است. به‌علاوه اگر f یکنوای صعودی باشد، آنگاه برای هر a، مجموعهٔ جواب‌ها تشکیل یک بازهٔ بسته می‌دهد. این صرفاً یک نتیجهٔ وجودی است. اطمینان از یکتایی ریشه، بر یافتن آن به کمک روش های عددی موجود، تأثیر می‌گذارد. یک شرط کافی برای‌اینکه به ازای هر $a \in \mathbb{R}$ جواب معادله $f(u) = a$ یکتا باشد، این است که f اکیداً یکنوا باشد. برای به‌دست آوردن نتیجهٔ مشابه برای نگاشت‌های از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^n$ باید تعریف یکنوای صعودی را تعمیم دهیم. تابع $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ را یکنوا گوییم هرگاه برای هر $u, v \in \mathbb{R}^n$،

$$(f(u) - f(v)).(u - v) \geq 0.$$

اگر نابرابری فوق به ازای $u \neq v$، اکید باشد، آنگاه این تابع را اکیداً یکنوا می‌نامیم. در این حالت معادلهٔ

$$f(u) = a \tag{1}$$

برای $a \in \mathbb{R}^n$ داده شده، حداکثر یک جواب (در صورت وجود) $u \in \mathbb{R}^n$ دارد. زیرا اگر u_1 و u_2 دو جواب متمایز معادله $f(u) = a$ باشد، چون f اکیداً یکنواست داریم:

$$(f(u_1) - f(u_2)).(u_1 - u_2) > 0$$

از طرفی $f(u_1) - f(u_2) = 0$ که این تناقض است. حال فرض کنیم $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ تابعی پیوسته و $a \in \mathbb{R}^n$ داده شده باشد. در این صورت اگر $u \in \mathbb{R}^n$ جوابی از نابرابری تغییراتی

$$\forall v \in \mathbb{R}^n : \qquad (f(v) - a).(v - u) \geq 0 \qquad (2)$$

باشد، u یک جواب معادله (۱) نیز هست. دلیلش این است که اگر f پیوسته و شرط (۲) برقرار باشد، در این صورت برای هر $w \in \mathbb{R}^n$ قرار می‌دهیم $v = u+tw$ که در آن $t > 0$، آنگاه $(f(u+tw)-a).(tw) \geq 0$. بنابراین به ازای هر $w \in \mathbb{R}^n$ به دست می‌آوریم:

$$(f(u + tw) - a).w \geq 0$$

حال اگر $t \to 0$ از پیوستگی f نتیجه می‌شود که

$$\forall w \in \mathbb{R}^n : \qquad (f(v) - a).w \geq 0.$$

با جایگذاری $w = \pm(f(u) - a)$ به دست می‌آوریم $f(u) = a$. از طرفی اگر f یکنوا و رابطهٔ (۱) برقرار باشد، آنگاه داریم:

$$\forall v \in \mathbb{R}^n : \qquad (f(v) - a).(v - u) = (f(v) - f(u)).(v - u) \geq 0,$$

که همان (۲) است.

در حالت $n = 1$ دیدیم که اگر تابع f یکنوای صعودی باشد، مجموعه جواب‌ها یک فاصلهٔ بسته روی خط حقیقی است. نتیجهٔ مشابه در بعد بزرگ‌تر از یک نیز برقرار است، به این صورت که اگر $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ تابعی پیوسته، یکنوا و $a \in \mathbb{R}^n$ داده شده باشد، در این صورت مجموعهٔ K متشکل از جواب‌های معادلهٔ $f(u) = a$، بسته و محدب است زیرا برای هر $v \in \mathbb{R}^n$ ثابت قرار می‌دهیم:

$$S_v = \{u \in \mathbb{R}^n | (f(v) - a).(v - u) \geq 0\}.$$

توجه می‌کنیم که به ازای هر v مجموعهٔ S_v بسته و محدب است زیرا اگر $u_1, u_2 \in S_v$ و $0 \leq t \leq 1$، آنگاه:

$$\begin{aligned}
(f(v) - a).(v-&(tu_1 + (1 - t)u_2)) \\
&=(f(v) - a).t(v - u_1) + (1 - t)(v - u_2)) \\
&=t(f(v) - a).(v - u_1) + (1 - t)(f(v) - a).(v - u_2)) \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

همان‌طور که در بالا دیدیم، مجموعهٔ جواب را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$K = \cap_{v\in R^n} S_v$$

در نتیجه K بسته و محدب است.

تا اینجا نتیجه‌ای دربارهٔ وجود جواب برای معادلهٔ (۱) بیان نکرده‌ایم. اگر بتوانیم معادل مناسبی را برای شرط $(*)$ برای توابع پیوستهٔ $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ به دست آوریم، آنگاه قضیهٔ وجودی در این حالت نیز ثابت خواهد شد. این صورت معادل، چیزی است که آن را شرط از پایین کرانداری می‌نامیم و منظورمان این است که:

$$\lim_{|u|\to\infty}\frac{f(u).u}{|u|}=\infty.$$

قضیهٔ ۱. فرض کنیم $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ تابعی پیوسته و از پایین کراندار باشد. در این صورت برای هر $a\in\mathbb{R}^n$، معادلهٔ (۱) دارای یک جواب $u\in\mathbb{R}^n$ است.

در اثبات این قضیه، از قضیهٔ مهم نقطهٔ ثابت براور استفاده می‌شود.

قضیهٔ ۲. **(قضیهٔ نقطهٔ ثابت براور)** فرض کنیم C، زیرمجموعه فشرده، محدب و ناتهی از $\mathbb{R}^n$ و f یک تابع پیوسته از C به توی C باشد. در این صورت تابع f در مجموعهٔ C یک نقطهٔ ثابت دارد، یعنی $u\in C$ موجود است به طوری که

$$f(u)=u.$$

اثبات در حالت کلی در [۴] آورده شده است. اما در حالت $n=1$، اثبات به آسانی به روش ترسیمی بیان می‌شود. در این حالت، فرض‌های قضیه بیان می‌کند که تابع پیوستهٔ fبازهٔ پیوستهٔ $[a,b]$ را به خودش می‌برد. پس نمودار تابع باید در مربع $[a,b]\times[a,b]$ در صفحهٔ (x,y) واقع باشد. در اینجا فقط سه امکان وجود دارد: یا $f(a)=a$ یا $f(b)=b$ یا نمودار تابع f از سمت چپ خط $x=y$ شروع و در سمت راست آن خط پایان می‌یابد. در این حالت چون تابع f پیوسته است باید نمودار آن خط $x=y$ را در نقطه‌ای قطع کند. هر تقاطعی یک نقطهٔ ثابت به ما می‌دهد.

اثبات قضیهٔ ۱. اثبات را با توجه به این نکته شروع می‌کنیم که کافی است نشان دهیم معادلهٔ $f(u)=0$ دارای یک جواب است. زیرا فرض کنیم $a\in\mathbb{R}^n$ داده شده باشد. تعریف می‌کنیم:

$$f_a(u)=f(u)-a.$$

دقت می‌کنیم که f_aاز پایین کراندار است اگر و فقط اگر f از پایین کراندار باشد، زیرا

$$\frac{f_a(u).u}{|u|}=\frac{f(u).u}{|u|}-\frac{a.u}{|u|}\geq\frac{f(u).u}{|u|}-\frac{|a|.|u|}{|u|}=\frac{f(u).u}{|u|}-|a|$$

بنابراین اگر بتوانیم نشان دهیم که برای هر تابع از پایین کراندار f، معادلهٔ $f(u)=0$ دارای یک جواب است، فوراً نتیجه می‌شود که معادلهٔ $f(u)=a$ به ازای هر $a\in\mathbb{R}^n$ یک جواب دارد. برای این منظور، معادلهٔ $f(u)=0$ را به یک مسألهٔ نقطه ثابت تبدیل می‌کنیم. به عنوان اولین گام، تعریف می‌کنیم:

$$g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$$
$$g(u)=u-f(u)$$

داریم $g(u).u=|u|^2-f(u).u$. چون f از پایین کراندار است، $R>0$ وجود دارد به طوری که اگر $|u|\geq R$، آنگاه $f(u).u\geq|u|\geq R>0$ لذا

$$g(u).u<|u|^2,\quad |u|\geq R \qquad (۳)$$

اکنون تعریف می‌کنیم

$$r(v)=\begin{cases} v & |v|\leq R\\ \frac{Rv}{|v|} & |v|>R\end{cases}$$

و قرار می‌دهیم $h(u)=r(g(u))$. تابع h پیوسته است چون h ترکیبی از توابع پیوستهٔ r و g است. به‌علاوه اگر فرض کنیم $B=\{u\in\mathbb{R}^n|\ |u|<R\}$، آنگاه h گوی فشرده و محدب $\bar{B}$ را به خودش می‌برد. لذا بنا بر قضیهٔ نقطه ثابت براور، h دارای یک نقطهٔ ثابت $u\in\bar{B}$ است. اگر $u\in\partial B$، آنگاه

$$R=|u|=|h(u)|=|r(g(u))|.$$

لذا بنا بر تعریف تابع r، باید داشته باشیم $\frac{R}{|g(u)|}\leq 1$. اما با استفاده از (۳) و اینکه $|u|=R$، تناقض زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$|u|^2=u.u=h(u).u=\frac{R}{|g(u)|}g(u).u<\frac{R}{|g(u)|}|u|^2\leq|u|^2$$

بنابراین

$$\begin{aligned} R>|u|&=|h(u)|\\ &=|r(g(u))|=\begin{cases}|g(u)| & |g(u)|\leq R\\ \frac{R|g(u)|}{|g(u)|} & |g(u)|>R\end{cases}\end{aligned}$$

درنتیجه بنابر تعریف تابع r داریم $r(g(u))=g(u)$، پس

$$u=h(u)=r(g(u))=g(u)=u-f(u).$$

این نتیجه می‌دهد که $f(u)=0$ و اثبات کامل می‌شود. □

به این ترتیب اگر $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ تابعی پیوسته، اکیداً یکنوا و از پایین کراندار باشد، آنگاه به ازای هر $a\in\mathbb{R}^n$، $u\in\mathbb{R}^n$ منحصر به فرد موجود است به طوری که $f(u)=a$.

۳. نگاشت‌های یکنوا روی فضاهای باناخ

در این بخش برخی از ایده‌های بخش قبلی را به فضاهای با بعد نامتناهی گسترش می‌دهیم. نگاشت‌هایی که در این قسمت بررسی می‌کنیم به صورت $T : X \to X^*$ است که در آن X یک فضای باناخ انعکاسی حقیقی و جدایی‌پذیر و X^* دوگان X است، یعنی فضای تابعک‌های خطی و پیوسته روی X با نرم

$$||f|| = \sup_{||x|| \leq ۱} |f(x)|, \qquad f \in X^*$$

یادآوری می‌کنیم که فضای X انعکاسی است، اگر ایزومتری خطی $J : X \to X^{**}$ که با $J(x) = \varphi_x$ تعریف می‌شود که در آن

$$\varphi_x : X^* \to \mathbb{R}, \quad \varphi_x(f) = (f, x), \quad \forall f \in X^*$$

پوشا باشد. نماد ضرب داخلی استاندارد را برای اثر یک عنصر $g \in X^*$ روی $v \in X$ به کار می‌بریم و به جای $g(v)$ می‌نویسیم (g, v). واضح است که با این فرض‌ها هر دوی X و X^* انعکاسی و جدایی‌پذیرند. این بخش را با آوردن یک دنباله از تعاریف، که مفاهیمی از توابع روی فضاهای با بعد متناهی را به نگاشت‌هایی روی فضاهای باناخ انعکاسی تعمیم می‌دهد، شروع می‌کنیم.

تعریف ۱. نگاشت $T : X \to X^*$ را کراندار گوییم هرگاه مجموعه‌های کراندار در X را به مجموعه‌های کراندار در X^* ببرد.

تعریف ۲. نگاشت $T : X \to X^*$ را یکنوا می‌نامیم، اگر برای هر $u, v \in X$،

$$(T(u) - T(v), u - v) \geq ۰.$$

اگر نابرابری فوق به ازای $u \neq v$، اکید باشد، T را اکیداً یکنوا می‌نامیم.

تعریف ۳. نگاشت $T : X \to X^*$ را از پایین کراندار گوییم اگر

$$\lim_{||u||_X \to \infty} \frac{(T(u), u)}{||u||_X} = \infty.$$

چون در اثبات نتایج وجودی قبلی بعد فضا هیچ نقشی نداشت و فقط از ویژگی یکنوایی استفاده کردیم، لذا می‌توانیم دو نتیجهٔ زیر را بدون اثبات بپذیریم.

لم ۱. فرض کنیم $T : X \to X^*$ نگاشتی پیوسته و $g \in X^*$ داده شده باشد. در این صورت اگر $u \in X$ جوابی از نابرابری تغییراتی زیر باشد:

$$\forall v \in X, \qquad (T(v) - g, v - u) \geq ۰$$

آنگاه u در معادلهٔ $T(u) = g$ صدق می‌کند. به علاوه، اگر T یکنوا باشد، آنگاه هر جواب معادله اخیر، یک جواب نابرابری تغییراتی فوق نیز هست.

قضیهٔ ۳. فرض کنیم $T : X \to X^*$ نگاشتی پیوسته و $g \in X^*$ داده شده باشد. در این صورت مجموعهٔ K متشکل از جواب‌های معادلهٔ $T(u) = g$، بسته و محدب است.

اینک قضیهٔ وجودی اساسی برای بعد نامتناهی را بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۴. **(برودر-مینتی)** فرض کنیم X یک فضای باناخ انعکاسی حقیقی و $T : X \to X^*$ نگاشتی کراندار، پیوسته، از پایین کراندار و یکنوا باشد، در این صورت برای هر $g \in X^*$، معادلهٔ $T(u) = g$ در X جواب دارد، یعنی $T(X) = X^*$. به عبارت دیگر T پوشا است.

اثبات. چون X را جدایی‌پذیر فرض کردیم، مجموعهٔ شمارش‌پذیر $\{x_i\}_{i \geq ۱}$موجود است که زیرفضای تولیدشده توسط آن در X چگال است. اکنون فرض کنیم

$$\mathrm{span}\{x_۱, \ldots, x_n\} = X_n \subset X.$$

ایده این است که معادلهٔ $T(u) = g$ را به‌وسیله یک معادله با بعد متناهی به شکل $T_n(u_n) = g_n$ تقریب بزنیم که در آن $u_n \in X_n$، $g_n \in X_n^*$ و $T_n : X_n \to X_n^*$. برای این منظور فرض می‌کنیم $g \in X^*$ داده شده باشد و $g_n \in X_n^*$را چنین تعریف می‌کنیم:

$$g_n = g|_{X_n}.$$

به طور مشابه عملگر $T_n : X_n \to X_n^*$ را به صورت

$$\forall u \in X_n, \quad T_n(u) = T(u)|_{X_n}$$

تعریف می‌کنیم. روش دیگر برای بیان تعریف‌های فوق این است که به ازای هر $u, v \in X_n$،

$$(g - g_n, v) = (T(u) - T_n(u), v) = ۰ \qquad (۴)$$

پیوستگی، کرانداری و از پایین کراندار بودن T_n به طور مستقیم از خواص T به‌دست می‌آید. پس بنا بر قضیهٔ ۱ دنبالهٔ $\{u_n\}_{n \geq ۱}$ در X موجود است به طوری که $u_n \in X_n$ و $T_n(u_n) = g_n$. اکنون با استفاده از (۴) نابرابری زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{(T(u_n), u_n)}{\|u_n\|} &= \frac{(T_n(u_n), u_n)}{\|u_n\|} = \frac{(g_n, u_n)}{\|u_n\|} \\ &= \frac{(g, u_n)}{\|u_n\|} \leq \frac{\|g\| \, \|u_n\|}{\|u_n\|} = \|g\| \end{aligned}$$

چون T از پایین کراندار است باید $\|u_n\|$ کراندار باشد. همچنین چون نگاشت T کراندار است پس باید $\|T(u_n)\|$ کراندار باشد. بنابراین با استفاده از قضیهٔ فشردگی ضعیف ([۶] قضیه ۶.۳۲) و انعکاسی و جدایی‌پذیر بودن X می‌بینیم که $u \in X$، $\tilde{g} \in X^*$ و زیردنباله‌ای از (u_n)موجود است که آن را مجدداً

با u_n نشان می‌دهیم به طوری که در X، $u_n \rightharpoonup u$ و در X^*، $T(u_n) \rightharpoonup \tilde{g}$. منظور ما از نماد $\rightharpoonup$، همگرایی ضعیف است، دنبالهٔ $\{x_n\}_{n\geq ۱}$ در فضای برداری نرم‌دار E را همگرای ضعیف به x گوییم، اگر برای هر $f \in E^*$ داشته باشیم $(f, x_n) \to (f, x)$.

اکنون نشان می‌دهیم $\tilde{g} = g$ و $T(u) = g$. برای این منظور با استفادهٔ دوباره از (۴) برای هر بردار x_iداریم:

$$(\tilde{g} - g, x_i) = \lim_{n\to\infty} (T(u_n) - g, x_i) = ۰.$$

چگال بودن $\operatorname{span}\{x_i\}$ در X نتیجه می‌دهد که $\tilde{g} = g$. از طرفی با استفادهٔ مجدد از (۴) می‌توانیم به دست بیاوریم:

$$\begin{aligned}(T(u_n), u_n) &= (T_n(u_n), u_n)\\ &= (g_n, u_n)\\ &= (g, u_n)\\ &\to (g, u).\end{aligned}$$

اکنون با استفاده از یکنوایی T و رابطهٔ اخیر، به ازای هر $v \in X$ به دست می‌آوریم:

$$۰ \leq (T(u_n) - T(v), u_n - v) \to (T(v) - g, v - u)$$

در نتیجه بنا بر لم ۱ حکم برقرار است. □

۴. کاربردهایی از عملگرهای یکنوا در معادلات دیفرانسیل پاره‌ای غیرخطی

در این قسمت نظریهٔ عملگرهای یکنوا را در مورد معادلات دیفرانسیل پاره‌ای نیم خطی مرتبهٔ دوم در فرم دیورژانس به کار می‌بریم [۶] و [۷]. بنابراین فرض می‌کنیم $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ باز و همبند باشد. یادآوری می‌کنیم که برای $p \geq ۱$ فضای سوبولف $W^{۱,p}(\Omega)$ از توابع $u \in L^p(\Omega)$ تشکیل یافته است که $g_j \in L^p(\Omega)$ موجود است طوری که:

$$\int_\Omega u\partial_j\varphi = -\int_\Omega \varphi g_j \qquad \forall\varphi \in C_۰^\infty(\Omega),\ j = ۱, \ldots, n$$

g_j مشتق ضعیف جزئی jـام نامیده شده و با $\partial_j u$ نشان داده می‌شود. $W^{۱,p}(\Omega)$ با نرم $\|u\|_{۱,p} = (\|u\|_p^p + \sum_{j=۱}^n \|\partial_j u\|_p^p)^{\frac{۱}{p}}$ یک فضای باناخ و به ازای $۱ < p < \infty$ انعکاسی و جدایی‌پذیر است. $W_۰^{۱,p}(\Omega)$ بستار $C_۰^\infty(\Omega)$ در $W^{۱,p}(\Omega)$ است و از توابعی در $W^{۱,p}(\Omega)$ تشکیل

یافته است که روی مرز Ω صفرند [۱]. همچنین برای اندیس n-گانه $\alpha = (\alpha, \ldots, \alpha_n)$ که در آن α_iها اعداد صحیح نامنفی هستند و تابع $u : \Omega \to \mathbb{R}$، منظور از نماد $D^\alpha u(x)$ مشتق ضعیف مرتبهٔ $|\alpha| = \alpha + \ldots + \alpha_n$ است، یعنی $\partial_1^{\alpha_1} \partial_2{}^{\alpha_2} \ldots \partial_n^{\alpha_n} u(x)$. برای توابع به اندازهٔ کافی هموار $u : \Omega \to \mathbb{R}$ قرار می‌دهیم:

$$A(u) = \sum_{|\alpha| \le 1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \mathcal{A}_\alpha(x, \delta_1(u(x)))$$

که در آن

$$\delta_1(u(x)) = \{D^\alpha u(x) \ : \ |\alpha| \le 1\}.$$

می‌خواهیم مسألهٔ دیریکله

$$A(u) = f, \qquad (5)$$

را که در آن $f \in W^{-1,q}(\Omega) = (W_0^{1,p}(\Omega))^*$، $p \in (1, \infty)$ و $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ است بررسی کنیم. فرم دومتغیرهٔ متناظر با A عبارت است از:

$$B(u, v) = \sum_{|\alpha| \le 1} \int_\Omega \mathcal{A}_\alpha(x, \delta_1(u(x))) D^\alpha v(x) dx.$$

تعریف ۴. $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ را یک جواب ضعیف مسألهٔ دیریکله برای معادلهٔ دیفرانسیل پاره‌ای نیم خطی (۵) گوییم هرگاه به ازای هر $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$B(u, v) = (f, v).$$

برای اثبات وجود جواب ضعیف برای مسألهٔ دیریکله، فرض‌های زیر را روی تابع‌های $\mathcal{A}_\alpha$ قرار می‌دهیم.

$H1$: برای هر $|\alpha| \le 1$، تابع $x \longmapsto \mathcal{A}_\alpha(x, \delta_1)$ به ازای هر $\delta_1 = (\xi_\alpha)_{|\alpha| \le 1} \in \mathbb{R}^{n+1}$ ثابت، اندازه‌پذیر است.

$H2$: برای هر $|\alpha| \le 1$، تابع $\delta_1 \mapsto \mathcal{A}_\alpha(x, \delta_1)$ برای تقریباً هر $x \in \Omega$، در $C(\mathbb{R}^{n+1})$ است.

$H3$: برای هر $\delta_1^1 = (\xi_\alpha^1)_{|\alpha| \le 1} \in \mathbb{R}^{n+1}$ ، $\delta_1^2 = (\xi_\alpha^2)_{|\alpha| \le 1} \in \mathbb{R}^{n+1}$ و هر $x \in \Omega$ داریم:

$$\sum_{|\alpha| \le 1} [\mathcal{A}_\alpha(x, \delta_1^1) - \mathcal{A}_\alpha(x, \delta_1^2)](\xi_\alpha^1 - \xi_\alpha^2) \ge 0.$$

$H4$: ثابت $c_0 > 0$ و تابع $h \in L^1(\Omega)$ و $p \in (1, \infty)$ موجود است به طوری که برای هر $x \in \Omega$ و هر $\delta_1 = (\xi_\alpha)_{|\alpha| \le 1} \in \mathbb{R}^{n+1}$ داریم:

$$\sum_{|\alpha| \le 1} \mathcal{A}_\alpha(x, \delta_1) \xi_\alpha \ge c_0 |\delta_1|^p - h(x).$$

$H5$:ثابت $c_1 > 0$ و تابع $g \in L^q(\Omega)$ که در آن $q = \frac{p}{p-1}$ موجود است به طوری که برای $x \in \Omega$ و هر $\delta_1 = (\xi_\alpha)_{|\alpha| \leq 1} \in \mathbb{R}^{n+1}$ داریم:

$$|\mathcal{A}_\alpha(x, \delta_1)| \leq c_1 |\delta_1|^{p-1} + g(x).$$

اکنون قضیهٔ وجودی مربوط به مسألهٔ دیریکله را با فرض‌های فوق ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ ۵. فرض می‌کنیم $\mathcal{A}_\alpha$ در فرض‌های$H1$ تا $H5$ صدق کند، $p \in (1, \infty)$ داده شده باشد و $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. در این صورت برای هر $f \in W^{-1,q}(\Omega)$، یک جواب ضعیف $u \in W_\circ^{1,p}(\Omega)$ از مسألهٔ دیریکله برای معادلات دیفرانسیل پاره‌ای نیم خطی $A(u) = f$ موجود است.

اثبات. اثبات قضیه را به لم‌های زیر تقسیم می‌کنیم.

لم ۲. برای هر $u \in W_\circ^{1,p}(\Omega)$ ثابت، عملگر $v \mapsto B(u, v)$ از $W_\circ^{1,p}(\Omega)$ به $\mathbb{R}$، یک تابعک خطی کراندار است. بنابراین نگاشت

$$T : W_\circ^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,q}(\Omega)$$

موجود است به طوری که به ازای هر $u, v \in W_\circ^{1,p}(\Omega)$ داریم:

$$B(u, v) = (T(u), v),$$

به علاوه T غیرخطی و کراندار است.

اثبات. خطی بودن $v \mapsto B(u, v)$ واضح است. اگر $u, v \in W_\circ^{1,p}(\Omega)$ ، آنگاه با استفاده از $H5$ و نامساوی هُلدر به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
|B(u,v)| &\leq \sum_{|\alpha|\leq 1}\int_\Omega |\mathcal{A}_\alpha(x,\delta_1(u(x)))D^\alpha v(x)|dx\\
&\leq \sum_{|\alpha|\leq 1}\int_\Omega [c_1|\delta_1(u(x))|^{p-1}+g(x)]|D^\alpha v(x)|dx\\
&\leq \sum_{|\alpha|\leq 1} c_1\left\{\int_\Omega |\delta_1(u(x))|^{q(p-1)}dx\right\}^{\frac{1}{q}}\left\{\int_\Omega |D^\alpha v|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}\\
&+\sum_{|\alpha|\leq 1}\left\{\int_\Omega |g|^q dx\right\}^{1/q}\left\{\int_\Omega |D^\alpha v|^p dx\right\}^{1/p}\\
&= c_1\sum_{|\alpha|\leq 1}\left\{\int_\Omega \sum_{|\alpha|\leq 1}|D^\alpha u|^p\right\}^{(p-1)/p}\left\{\int_\Omega |D^\alpha v|^p\right\}^{1/p}\\
&+\|g\|_q\sum_{|\alpha|\leq 1}\left\{\int_\Omega |D^\alpha v|^p\right\}^{1/p}\\
&= c_1\|u\|_{1,p}^{p-1}|||v|||+\|g\|_q|||v|||\\
&\leq c_1c_2\|u\|_{1,p}^{p-1}\|v\|_{1,p}+c_2\|g\|_q\|v\|_{1,p}\\
&\leq C(\|u\|_{1,p}^{p-1}+1)\|v\|_{1,p}
\end{aligned}$$

که در آن $C=\max\{c_1c_2,c_2\|g\|_q\}$، $|\delta_1|^p=\sum_{|\alpha|\leq 1}|D^\alpha u|^p$. همچنین دو نرم $\|u\|_{1,p}=(\int_\Omega\sum_{|\alpha|\leq 1}|D^\alpha u|^p)^{1/p}$ و $|||u|||=\sum_{|\alpha|\leq 1}(\int_\Omega D^\alpha u|^p)^{1/p}$ روی $W_0^{1,p}(\Omega)$ معادلند.

این نامساوی نشان می‌دهد که به ازای هر $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$ نگاشت $v\mapsto B(u,v)$ کراندار است. این امر وجود نگاشت T را ثابت می‌کند. به علاوه همان رابطهٔ بالا نشان می‌دهد که T کراندار است. زیرا

$$\|T(u)\|_{-1,q}=\sup_{\substack{v\in W_0^{1,p}(\Omega)\\ \|v\|_{1,p}=1}}|(T(u),v)|\leq C(\|u\|_{1,p}^{p-1}+1)$$

بنابراین T مجموعه‌های کراندار در $W_0^{1,p}(\Omega)$ را به مجموعه‌های کراندار در $W^{-1,q}(\Omega)$ می‌نگارد. □

لم ۳. عملگر T که در لم قبل تعریف شد، یکنوا و از پایین کراندار است.

اثبات. برای اثبات یکنوایی از فرض $H3$ کمک می‌گیریم و به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}(T(u)-T(v),u-v) &= (T(u),u-v)-(T(v),u-v)\\ &= B(u,u-v)-B(v,u-v)\\ &= \sum_{|\alpha|\leq 1}\int_\Omega [\mathcal{A}_\alpha(x,\delta_1(u))-\mathcal{A}_\alpha(x,\delta_1(v))][D^\alpha u-D^\alpha v]dx\\ &\geq 0\end{aligned}$$

برای اثبات از پایین کرانداری، از فرض $H4$ استفاده می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\frac{(T(u),u)}{\|u\|_{1,p}} &= \frac{B(u,u)}{\|u\|_{1,p}}\\ &= \frac{1}{\|u\|_{1,p}}\sum_{|\alpha|\leq 1}\int_\Omega \mathcal{A}_\alpha(x,\delta_1(u))D^\alpha u dx\\ &\geq \frac{1}{\|u\|_{1,p}}\left[c_0\int_\Omega |\delta_1(u)|^p dx-\int_\Omega h(x)dx\right]\\ &= \frac{1}{\|u\|_{1,p}}\left[c_0\int_\Omega \sum_{|\alpha|\leq 1}|D^\alpha u|^p-\int_\Omega h(x)dx\right]\\ &\geq \frac{1}{\|u\|_{1,p}}\left[c_0\|u\|_{1,p}^p-\|h\|_1\right]\end{aligned}$$

اما برای $p>1$ داریم:

$$\lim_{\|u\|_{1,p}\to\infty}\frac{c_0\|u\|_{1,p}^p-\|h\|_1}{\|u\|_{1,p}}=c_0\lim_{\|u\|_{1,p}\to\infty}\|u\|_{1,p}^{p-1}=\infty$$

لذا

$$\lim_{\|u\|_{1,p}\to\infty}\frac{(T(u),u)}{\|u\|_{1,p}}=\infty. \qquad \square$$

با توجه به آنچه در بالا آورده شد برای تکمیل اثبات قضیهٔ ۵ فقط کافی است ثابت‌کنیم که نگاشت T پیوسته است، زیرا در این صورت نگاشت T تمام خواص لازم در قضیهٔ برودر-مینتی را دارا خواهد شد.

لم ۴. نگاشت $T:W_0^{1,p}(\Omega)\to$ پیوسته است.

برای اثبات این لم از عملگر نمیتسکی استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ باز همبند باشد. گوییم تابع

$$F:\Omega\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$$
$$F(x,u)=f(x,u)$$

در شرایط کاراتئودوری صدق می‌کند اگر برای تقریباً هر $x \in \Omega$ تابع $u \mapsto f(x,u)$ پیوسته و همچنین برای هر $u \in \mathbb{R}^m$، تابع $x \mapsto f(x,u)$ اندازه‌پذیر باشد. به ازای هر f داده شده که در شرایط کاراتئودوری صدق کند و یک تابع $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ می‌توانیم تابع دیگری را به‌وسیلهٔ ترکیب توابع به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\mathcal{F}(u)(x) = f(x, u(x)).$$

$\mathcal{F}$ را عملگر نمیتسکی می‌نامیم. قضیهٔ اصلی دربارهٔ پیوستگی و کرانداری این عملگر از $L^p(\Omega)$ به $L^q(\Omega)$ که از آن استفاده می‌کنیم این است که اگر $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ باز همبند باشد و f در شرایط کاراتئودوری صدق کند و به‌علاوه $p \in (1,\infty)$ و $g \in L^q(\Omega)$ که در آن $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ داده شده باشند به طوری که

$$|f(x,u)| \leq C|u|^{p-1} + g(x),$$

برای هر $u \in L^p(\Omega)$، در این صورت عملگر نمیتسکی $\mathcal{F}$ یک نگاشت پیوسته و کراندار از $L^p(\Omega)$ به $L^q(\Omega)$ است [۵]. اکنون برای اثبات لم ۴ فقط کافی است فرض‌های $H1$، $H2$ و $H5$ را به کار گیریم تا ببینیم که هر $\mathcal{A}_\alpha$ می‌تواند به عنوان یک عملگر نمیتسکی که در شرایط رشد فوق صدق می‌کند، تلقی شود. به این ترتیب تابع T از $W_0^{1,p}(\Omega)$به $W^{-1,q}(\Omega)$ به عنوان یک نگاشت از $L^p(\Omega)$ به $L^q(\Omega)$پیوسته است.

مثال: عملگر دیفرانسیل پاره‌ای غیرخطی مرتبه دوم را که در آن $p \in (1,\infty)$ در نظر می‌گیریم:

$$A(u) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + |u|^{p-2}u$$

توجه می‌کنیم که در حالت $p = 2$، $A(u)$ به صورت

$$A(u) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + u = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + u = -\Delta u + u$$

در می‌آید که به طور ساده، جمع عملگر لاپلاسین با تابع u است. در اینجا داریم:

$$\mathcal{A}_{(0,0,\dots,0)} = a_0(x,u,u_{x_1},\dots,u_{x_n}) = |u|^{p-2}u,$$
$$\mathcal{A}_{(0,\dots,0,1,0,\dots,0)} = a_i(x,u,u_{x_1},\dots,u_{x_n}) = |u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i}, i = 1,\dots,n$$

اینک می‌خواهیم بررسی کنیم که $\mathcal{A}_\alpha$ها در فرض‌های $H1$ تا $H5$ صدق می‌کنند. $H1$ و $H2$ به وضوح برقرارند. حال برای بررسی برقراری H_3 فرض می‌کنیم $\delta_1^1 = (\xi_0^1, \xi_1^1, \dots, \xi_n^1)$ و

$\delta_1^2 = (\xi_0^2, \xi_1^2, \ldots, \xi_n^2)$. در این صورت

$$\begin{aligned}\sum_{|\alpha|\le 1} & [\mathcal{A}_\alpha(x,\delta_1^1) - \mathcal{A}_\alpha(x,\delta_1^2)](\xi_\alpha^1 - \alpha_\alpha^2) \\ = & \sum_{i=0}^{n}(|\xi_i^1|^{p-2}\xi_i^1 - |\xi_i^2|^{p-2}\xi_i^2)(\xi_i^1 - \xi_i^2) \\ \ge & \; 0\end{aligned}$$

توجه می‌کنیم که نامنفی بودن عبارت فوق به خاطر صعودی بودن تابع حقیقی $f(x) = |x|^{p-2}x$ و فرض $p \in (1, \infty)$ است.

برای بررسی $H4$ فرض می‌کنیم $\delta_1 = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$. در این صورت

$$\sum_{|\alpha|\le 1} \mathcal{A}_\alpha(x,\delta_1)\xi_\alpha = \sum_{i=0}^{n} |\xi_i|^{p-2}\xi_i\xi_i = \sum_{i=0}^{n} |\xi_i|^p = |\delta_1|^p \ge c_0|\delta_1|^p$$

که در آن $c_0 \le 1$ و $h(x) = 0$.

رابطهٔ $H5$ نیز برقرار است، زیرا:

$$\begin{aligned}|\xi_i|^{q(p-1)} &= |\xi_i|^p \le \sum_{i=0}^{n} |\xi_i|^p \\ &\Rightarrow |\xi_i|^{p-1} \le (\sum_{i=0}^{n} |\xi_i|^p)^{\frac{1}{q}} = (\sum_{i=0}^{n} |\xi_i|^p)^{\frac{p-1}{p}} = |\delta_1|^{p-1}\end{aligned}$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم که

$$|\mathcal{A}(x,\delta_1)| = |a_i(x,\delta_1)| = |\xi_i|^{p-1} \le |\delta_1|^{p-1}$$

یعنی $H5$ به ازای $c_1 = 1$ و $g(x) = 0$ برقرار می‌شود. □

نتیجهٔ وجودی زیر فوراً از قضیه ۵ به دست می‌آید.

قضیهٔ ۶. فرض می‌کنیم A عملگر دیفرانسیل پاره‌ای مرتبه دوم غیرخطی تعریف شده در مثال فوق باشد. در این صورت به ازای هر $f \in W^{-1,q}(\Omega)$، $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ موجود است به طوری که $A(u) = f$.

۵. عملگرهای شبه یکنوا

در این قسمت، ردهٔ کلی دیگری از نگاشت‌های غیرخطی را به نام عملگرهای شبه یکنوا مورد بررسی قرار می‌دهیم. دیدیم که فرض یکنوایی $H3$، خود تابع و مشتقات مرتبهٔ اول آن را شامل می‌شود. آنچه که ما

می‌خواهیم در این قسمت ثابت کنیم در حقیقت فقط برقراری فرض یکنوایی روی بالاترین مرتبهٔ مشتقات را نیاز دارد.

تعریف ۵. فرض می‌کنیم X یک فضای باناخ انعکاسی باشد. یک عملگر $T : X \to X^*$ را شبه یکنوا گوییم اگر دو شرط زیر برقرار باشد:

الف) T کراندار باشد؛

ب) اگر در X، $u_j \rightharpoonup \bar{u}$ و

$$\limsup_{j\to\infty}(T(u_j), u_j - \bar{u}) \leq 0,$$

آنگاه به ازای هر $v \in X$ نتیجه شود که

$$\liminf_{j\to\infty}(T(u_j), u_j - v) \geq (T(\bar{u}), \bar{u} - v).$$

با تغییر مختصری در اثبات قضیهٔ برودر ـ مینتی می‌توانیم قضیه زیر را ثابت کنیم.

قضیهٔ ۷. فرض کنیم X یک فضای باناخ انعکاسی حقیقی باشد و نگاشت $T : X \to X^*$، پیوسته، از پایین کراندار و شبه یکنوا باشد. در این صورت برای هر $g \in X^*$، عنصر $u \in X$ موجود است به طوری که $T(u) = g$.

اثبات. با دقت در اثبات قضیهٔ برودر ـ مینتی، متوجه می‌شویم که شرط یکنوایی فقط در آخر اثبات به کار گرفته می‌شود. پس باید در آنجا طوری عمل کنیم که بتوانیم به جای یکنوایی از شرط شبه یکنوایی استفاده کنیم. چون در X، $u_n \rightharpoonup u$ و در g $T(u_n) \rightharpoonup \tilde{g} = g$ و این که $(T(u_n), u_n) \to (g, u)$ و $(T(u_n), u) \to (g, u)$، خواهیم داشت $(T(u_n), u_n - u) \to 0$. به عبارت دیگر

$$\limsup_{n\to\infty}(T(u_n), u_n - u) = 0.$$

پس بنابر شرط یکنوایی به ازای هر $v \in X$ داریم

$$\liminf_{n\to\infty}(T(u_n), u_n - v) \geq (T(u), u - v)$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} 0 \leq \liminf_{n\to\infty}(T(u_n), u_n - v) - (T(u), u - v) \leq & \limsup_{n\to\infty}(T(u_n), u_n - u) \\ & + \lim_{n\to\infty}(T(u_n), u - v) - (T(u), u - v) \end{aligned}$$

یا به عبارت دیگر

$$0 \leq (g, u - v) - (T(u), u - v) = (g - T(u), u - v).$$

فرض کنید $v = u \pm w$ که $w \in X$ دلخواه است، به راحتی نتیجه می‌شود که برای هر $w \in X$، $(g - T(u), w) = \circ$ پس $g - T(u) = \circ$. □

در عمل شرط زیر بررسی شبه یکنوایی را آسانتر می‌کند.

تعریف ۶. فرض می‌کنیم X یک فضای باناخ انعکاسی باشد. عملگر $T : X \to X^*$ را تغییراتی می‌گوییم اگر T کراندار بوده دارای نمایشی به صورت

$$T(u) = \hat{T}(u, u).$$

باشد که در آن نگاشت $\hat{T} : X \times X \to X^*$در فرض‌های زیر صدق می‌کند.

$CV۱$: برای هر $u \in X$ نگاشت $v \mapsto \hat{T}(u, v)$ یک نگاشت کراندار و پیوسته از X به X^* است و همچنین به ازای هر $v \in X$

$$\hat{T}(u, u) - \hat{T}(u, v), u - v) \geq \circ.$$

$CV۲$: برای هر $v \in X$ نگاشت $u \mapsto \hat{T}(u, v)$ یک نگاشت کراندار و پیوسته از X به X^* است.

$CV۳$: اگر در X، $u_j \rightharpoonup \bar{u}$ و $(\hat{T}(u_j, u_j) - \hat{T}(u_j, \bar{u}) \to \circ$، آنگاه برای هر $v \in X$،

$$\hat{T}(u_j, v) \rightharpoonup \hat{T}(\bar{u}, v), \quad X^* \text{ در}$$

$CV۴$: اگر در X، $u_j \rightharpoonup \bar{u}$ و در X^*، $\hat{T}(u_j, v) \to \psi$، آنگاه

$$(\hat{T}(u_j, v), u_j) \to (\psi, \bar{u})$$

در صورت برقراری فرض‌های فوق می‌توان ثابت کرد که اگر T عملگر تغییراتی باشد، آنگاه Tشبه یکنوا است. پس اگر X یک فضای باناخ انعکاسی حقیقی و عملگر $T : X \to X^*$ پیوسته، از پایین کراندار و تغییراتی باشد، در این صورت برای هر $g \in X^*$، معادلهٔ $T(u) = g$ در X جواب دارد.

۶. کاربرد در معادلات دیفرانسیل پاره‌ای

فرض کنیم $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ باز همبند کراندار با مرز هموار باشد. عملگرهای دیفرانسیل مرتبهٔ دوم شبه خطی به شکل زیر را درنظر می‌گیریم:

$$\tilde{A}(u)(x) = -\sum_{i=۱}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, u(x), \nabla u(x)) + a_\circ(x, u(x), \nabla u(x))$$

هدف ما حل مسألهٔ دیریکله $\tilde{\mathcal{A}}(u)(x) = f$ به ازای f مناسب است [۲]، [۶] و [۷]. فرم چند متغیرهٔ

$$\tilde{\mathcal{B}}(u,v) = \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^{n} a_i(x,u(x),\nabla u(x)) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} + a_0(x,u(x),\nabla u(x))v(x) \right] dx$$

را تعریف می‌کنیم. روی توابع ضریب در فرم فوق فرض‌های زیر را قرار می‌دهیم:

$$a_i : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$(x,\eta,\xi) \mapsto a_i(x,\eta,\xi) \qquad i = 0,\cdots,n$$

$HP1$. برای هر $i = 0,\cdots,n$ تابع

$$x \mapsto a_i(x,\eta,\xi)$$

به ازای هر $(\eta,\xi) \in \mathbb{R}^{n+1}$ در $C_b(\bar{\Omega})$است، یعنی روی $\bar{\Omega}$ پیوسته و کراندار است.

$HP2$. برای هر $i = 0,\cdots,n$ تابع

$$(\eta,\xi) \mapsto a_i(x,\eta,\xi)$$

به ازای هر $x \in \Omega$ در $C(\mathbb{R}^{n+1})$ است.

$HP3$. ثابت $c_0 > 0$، تابع $k \in L^q(\Omega)$ و $p \in (1,\infty)$ موجود است به طوری که به ازای هر $x \in \Omega$ و هر $(\eta,\xi) \in \mathbb{R}^{n+1}$ و برای هر $i = 0,\cdots,\eta$ داریم:

$$|a_i(x,\eta,\xi)| \le c_0(|\eta|^{p-1} + |\xi|^{p-1} + k(x)).$$

$HP4$. به ازای هر $\xi,\xi^* \in \mathbb{R}^n$ به طوری که $\xi \neq \xi^*$ و به ازای هر $\eta \in \mathbb{R}$ و $x \in \Omega$ داریم

$$\sum_{i=1}^{n} [a_i(x,\eta,\xi) - a_i(x,\eta,\xi^*)](\xi_i - \xi_i^*) > 0.$$

$HP5$. برای هر $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\lim_{\|v\|_{1,p}\to\infty} \frac{|\bar{\mathcal{B}}(v,v)|}{\|v\|_{1,p}} = \infty.$$

$HP6$. فرض کنیم تابع $|\eta|$ به طور یکنواخت کراندار باشد. برای هر $x \in \Omega$

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i(x,\eta,\xi)\xi_i \frac{1}{|\xi| + |\xi|^{p-1}} = \infty.$$

بنا بر فرض‌های $HP۱$، $HP۲$ و $HP۳$ فرم چندمتغیرهٔ $\bar{\mathcal{B}}(u,v)$ به ازای هر $u,v \in W_{\circ}^{۱,p}(\Omega)$، خوش‌تعریف است. فرض کنیم $f \in W^{-۱,q}(\Omega)$ داده شده باشد. به مانند آنچه در قبل آورده شد، $u \in W_{\circ}^{۱,p}(\Omega)$ را یک جواب ضعیف از مسألهٔ دیریکله گوییم اگر به ازای هر $v \in W_{\circ}^{۱,p}(\Omega)$ داشته باشیم

$$\bar{\mathcal{B}}(u,v) = (f,v).$$

همچنین بنا بر فرض‌های $HP۱$، $HP۲$ و $HP۳$، برای هر $u \in W_{\circ}^{۱,p}(\Omega)$ ثابت، عملگر $w \mapsto \bar{\mathcal{B}}(u,w)$ یک تابعک خطی و کراندار از $W_{\circ}^{۱,p}(\Omega)$ به $\mathbb{R}$ است. بنا بر این نگاشت

$$\bar{T} : W_{\circ}^{۱,p}(\Omega) \to W^{-۱,q}(\Omega)$$
$$u \mapsto \bar{T}(u)$$

موجود است به طوری که به ازای هر $w \in W_{\circ}^{۱,p}(\Omega)$ داریم

$$\tilde{\mathcal{B}}(u,w) = (\bar{T}(u), w)$$

قضیهٔ ۸. فرض کنیم a_i در فرض‌های $HP۱$ تا $HP۶$ صدق کند. در این صورت $\bar{T}$ عملگر تغییراتی است.

اثبات. یکی از اهداف ما در اثبات این قضیه مجزا کردن اثرات مشتقات مرتبه بالاتر و پایین‌تر است. به این منظور تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{\mathcal{B}}(u,v,w) = \mathcal{B}_۱(u,v,w) + \mathcal{B}_{\circ}(u,w)$$

که در آن

$$\tilde{\mathcal{B}}_۱(u,v,w) = \sum_{i=۱}^{n} \int_{\Omega} a_i(x,u(x),\nabla v(x)) \frac{\partial w}{\partial x_i}(x)dx,$$
$$\tilde{\mathcal{B}}_{\circ}(u,w) = \int_{\Omega} a_{\circ}(x,u(x),\nabla u(x))w(x)dx.$$

با استفاده از لم ۳ نگاشت‌های $w \mapsto \mathcal{B}_{\circ}(u,w)$ و $w \mapsto \mathcal{B}_۱(u,v,w)$ تابعک‌های خطی و کراندار هستند، لذا نگاشت‌های $T_{\circ} : W_{\circ}^{۱,p}(\Omega) \to W^{-۱,q}(\Omega)$ و $T_۱ : W_{\circ}^{۱,p}(\Omega) \times W_{\circ}^{۱,p}(\Omega) \to W^{-۱,q}(\Omega)$ موجودند به طوری که به ازای هر $u,v,w \in W_{\circ}^{۱,p}(\Omega)$ داریم:

$$(T_{\circ}(u), w) = \mathcal{B}_{\circ}(u,w)$$

و

$$(T_۱(u,v), w) = \mathcal{B}_۱(u,v,w).$$

بنابراین

$$(T_0(u)+T_1(u,v),w)=\bar{\mathcal{B}}_1(u,v,w).$$

اینک تعریف می‌کنیم:

$$\hat{T}(u,v)=T_0(u)+T_1(u,v)$$

یعنی

$$\begin{aligned}\hat{T}:W_0^{1,p}(\Omega)\times W_0^{1,p}(\Omega)&\to W^{-1,q}(\Omega)\\(u,v)&\mapsto\hat{T}(u,v)\end{aligned}$$

T آن نگاشتی است که به ازای هر $w\in W_0^{1,p}(\Omega)$ داریم:

$$\bar{\mathcal{B}}(u,v,w)=(\hat{T}(u,v),w)$$

به علاوه داریم:

$$\bar{T}(u)=\hat{T}(u,u)$$

زیرا

$$(\hat{T}(u,u),w)=\bar{\mathcal{B}}(u,u,w)=\hat{\mathcal{B}}(u,w)=(\bar{T}(u),w).$$

اینک ثابت می‌کنیم تابع $\hat{T}$ شرایط $CV1$ تا $CV4$ را داراست. اما قبل از اثبات این موارد، لم و نتیجه واضح زیر را با استفاده از فرض‌های $HP1$، $HP2$، $HP3$ و نتایجی که از عملگرهای نمیتسکی به دست آوردیم بیان می‌کنیم.

لم ۵. برای هر $i=0,\dots,n$ نگاشت

$$\begin{aligned}a_i:W^{1,p}(\Omega)&\to L^q(\Omega)\\u&\mapsto a_i(x,u(x),\nabla u(x))\end{aligned}$$

پیوسته و کراندار است. به علاوه، برای هر $v\in L^p(\Omega)$ ثابت، نگاشت

$$\begin{aligned}a_i:W^{1,p}(\Omega)&\to L^q(\Omega)\\u&\mapsto a_i(x,v(x),\nabla u(x))\end{aligned}$$

نیز پیوسته و کراندار است، و برای هر $w\in W^{1,p}(\Omega)$ ثابت، نگاشت

$$\begin{aligned}a_i:L^p(\Omega)&\to L^q(\Omega)\\u&\mapsto a_i(x,u(x),\nabla w(x))\end{aligned}$$

پیوسته و کراندار است.

از این لم نتیجه می‌گیریم که حکم‌های زیر همگی برقرارند.

۱. عملگر $\bar{T}$پیوسته و کراندار است.

۲. برای هر $u \in W_\circ^{1,p}(\Omega)$ نگاشت

$$\begin{aligned} \hat{T} : W_\circ^{1,p}(\Omega) &\to W^{-1,q}(\Omega) \\ v &\mapsto \hat{T}(u,v) \end{aligned}$$

پیوسته و کراندار است.

۳. برای هر $u \in W_\circ^{1,p}(\Omega)$ نگاشت

$$\begin{aligned} \hat{T} : W_\circ^{1,p}(\Omega) &\to W^{-1,q}(\Omega) \\ u &\mapsto \hat{T}(u,v) \end{aligned}$$

نیز پیوسته و کراندار است. با توجه به این نتیجه و فرض $HP4$ شرایط $CV1$ و $CV2$ برقرار می‌شود. بنابراین برای نشان دادن این که عملگر $\hat{T}$ تغییراتی است، کافی است شرایط $CV3$ و $CV4$ را ثابت کنیم. برای بررسی شرط $CV3$، فرض می‌کنیم در $W_\circ^{1,p}(\Omega)$، $u_j \rightharpoonup \bar{u}$ و

$$\begin{aligned} (\hat{T}(u_j, u_j) - \hat{T}(u_j, \bar{u}), u_j - \bar{u}) \\ &= \mathcal{B}_1(u_j, u_j, u_j - \bar{u}) - \mathcal{B}_1(u_j, \bar{u}, u_j - \bar{u}) \\ &= \int_\Omega \sum_{i=1}^n [a_i(x, u_j, \nabla u_j) - a_i(x, u_j, \nabla \bar{u})] \frac{\partial}{\partial x_i}(u_j - \bar{u}) dx \\ &\to 0 \end{aligned}$$

اینک باید برای هر $w \in W_\circ^{1,p}(\Omega)$ ثابت کنیم که

$$\begin{aligned} (\hat{T}(u_j, v), w) &= \mathcal{B}_1(u_j, v, w) + \mathcal{B}_\circ(u_j, w) \to \mathcal{B}_1(\bar{u}, v, w) + \mathcal{B}_\circ(\bar{u}, w) \\ &= (\hat{T}(\bar{u}, v), w) \end{aligned}$$

اما بنا بر نشاندن فشرده در $L^p(\Omega)$ داریم $u_j \to \bar{u}$. بنابراین داریم

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1(u_j, v, w) &= \int_\Omega \sum_{i=1}^n a_i(x, u_j(x), \nabla v(x)) \frac{\partial w}{\partial x_i}(x) dx \\ &\to \mathcal{B}_1(\bar{u}, v, w) \end{aligned}$$

با استفاده از نتایج بیان شده دربارهٔ عملگرهای نمیتسکی، کافیست ثابت کنیم که

$$\int_\Omega a_\circ(x, u_j(x), \nabla u_j(x)) w(x) dx \to \int_\Omega a_\circ(x, \bar{u}(x), \nabla \bar{u}(x)) w(x) dx$$

اثبات این موضوع در حالت کلی در هر مرجعی دربارهٔ نظریهٔ اندازه آمده است، لذا از آوردن آن صرف نظر می‌کنیم [۳]. برای بررسی شرط $CV۴$، فرض می‌کنیم در $W_{\circ}^{1,p}(\Omega)$، $u_j \rightharpoonup \bar{u}$ و در $W^{-1,q}(\Omega)$، $\hat{T}(u_j, v) \rightharpoonup \psi$. یعنی به ازای هر $w \in W_{\circ}^{1,p}(\Omega)$ داشته باشیم:

$$(\hat{T}(u_j, v), w) = \mathcal{B}_1(u_j, v, w) + \mathcal{B}_\circ(u_j, w) \to (\psi, w). \qquad (۶)$$

اینک باید نشان دهیم که

$$(\hat{T}(u_j, v), u_j) = \mathcal{B}_1(u_j, v, u_j) + \mathcal{B}_\circ(u_j, u_j) \to (\psi, \bar{u})$$

برای این منظور می‌نویسیم

$$(\hat{T}(u_j, v), u_j) = (\hat{T}(u_j, v), \bar{u}) + (\hat{T}(u_j, v), u_j - \bar{u})$$

بنابراین با توجه به (۶) کافی است ثابت کنیم

$$\lim_{j \to \infty} (\hat{T}(u_j, v), u_j - \bar{u}) = \circ$$

زیرا

$$(\hat{T}(u_j, v), u_j - \bar{u}) = \rightharpoonup (\psi, \circ) = \circ$$

این نشان می‌دهد که عملگر $\bar{T}$، تغییراتی است و اثبات کامل می‌شود.

نتیجهٔ اصلی ما دربارهٔ کاربرد در معادلات دیفرانسیل پاره‌ای از لم زیر به دست می‌آید.

لم ۶. عملگر $\bar{T}$ از پایین کراندار است.

اثبات. برای اثبات از فرض $HP۵$ استفاده می‌کنیم. داریم:

$$\lim_{\|u\|_{1,p} \to \infty} \frac{|(\bar{T}(u), u)|}{\|u\|_{1,p}} = \lim_{\|u\|_{1,p} \to \infty} \frac{|(\tilde{B}(u), u)|}{\|u\|_{1,p}} = \infty$$

بنابراین حکم به دست می‌آید. □

اوج نتایج قبلی، قضیهٔ وجودی زیر دربارهٔ معادلات دیفرانسیل پاره‌ای بیضوی شبه‌خطی است.

قضیهٔ ۹. فرض کنیم a_i در فرض‌های $HP۱$ تا $HP۶$ صدق کند. در این صورت برای هر $f \in W^{-1,q}(\Omega)$ یک جواب ضعیف $u \in W_{\circ}^{1,p}(\Omega)$ از مسألهٔ دیریکله برای معادلهٔ دیفرانسیل پاره‌ای نیم‌خطی $\tilde{A}(u) = f$ وجود دارد.

مراجع

[1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, Inc, 1975

[2] J. Ball, Convexity condition and existence theorems in nonlinear elasiticy, *Arch. Rational Mechan. Anal.*, 63 (1977).

[3] P. R. Halmos, *Measure Theory*, Springer-Verlag, New York, 1974.

[4] S. Kesavan, *Topics in Functional Analysis And Applications*, Wiley Eastern Limited, India, 1989.

[5] M. A. Krasnosel'skii , *Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations*, Pergamon Press, Macmillan Co, New York, 1964.

[6] Renardy and Rogers, *An Introduction to Partial Differential Equations,* Springer-Verlag, 1993.

[7] R. E. Showalter, *Hilbert Space Methods for Partial Differential Equations*, Monographs and Studies in Mathematics, Vol. 1. Pitman, London-San Francisco, Calif.-Melbourne, 1977.

روح‌ا...   جهانی‌پور

دانشگاه کاشان، بخش ریاضی

پست الکترونیک: jahanipu@kashanu.ac.ir

حسین رحمانیان

دانشگاه کاشان، بخش ریاضی

پست الکترونیک: rahmanian@kashanu.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شمارهٔ ۳۰(بهار ۱۳۸۲)، صص. ۳۵ تا ۳۸

برهانی ساده از قضیهٔ رول برای هیأت‌های متناهی

س. بالانتین و ج. رابرتس

ترجمه: علی معدنشکاف

۱. مقدمه

یکی از قضایای اساسی در حساب دیفرانسیل قضیهٔ رول است: ریشه‌های مشتق یک تابع بین ریشه‌های آن تابع قرار دارند. یک نتیجهٔ قضیهٔ رول این است که اگر یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی روی هیأت اعداد حقیقی شکافته شود آنگاه مشتق آن نیز چنین خواهد شد. این شرط ضعیف‌تر را خاصیت رول می‌گوییم.

از این رو می‌توانیم سؤال کنیم که برای چه هیأت‌های دیگری چند جمله‌ای‌ها از خاصیت رول پیروی می کنند؟ این پرسش نخستین بار توسط کاپلانسکی در [۳، صفحه ۳۰] مطرح شد. به وضوح دیده می‌شود که خاصیت رول برای اعداد مختلط برقرار است ولی برای اعداد گویا برقرار نیست. طبیعی است بپرسیم که آیا این خاصیت برای هیأت‌های متناهی نیز برقرار است یا نه. در [۱] و [۲] توماس کراون و جرج زوردس برای تعیین هیأت‌هایی از مشخصهٔ متناهی که برای آنها خاصیت رول برقرار است از دنباله‌های مضربی بهره بردند. به هر حال، برهان آنها کاملاً تکنیکی بود. ما این پرسش را برای هیأت‌های متناهی تنها با استفاده از نتایج اساسی نظریهٔ هیأت‌های متناهی پاسخ خواهیم داد.

۲. مقدمات

برای هر هیأت F، فرض کنید $F^{۲} = \{x^{۲} : x \in F\}$ مجموعهٔ همهٔ مربعات در F باشد. فرض کنید $\mathbf{F}_q$ هیأت متناهی با q عنصر باشد. فرض می‌کنیم F^* مجموعه عناصر ناصفر F باشد. یک هیأت فیثاغورثی نامیده می‌شود اگر هر مجموعی از مربعات یک مربع باشد.

گزارهٔ ۱. یک هیأت متناهی F از مشخصهٔ فرد فیثاغورثی نیست.

برهان گیریم p مشخصهٔ هیأت باشد. فرض کنید به ازای هر عنصر α از $F^{۲}$، $\alpha + ۱$ یک مربع باشد. برای هر عنصر $\beta \in F$، مجموعهٔ $\{\beta, \beta + ۱, \ldots, \beta + p - ۱\}$ یا مشمول در $F^{۲}$ است یا از $F^{۲}$ مجزا است. از این رو تعداد مربعات در F می‌بایست بر p بخش‌پذیر باشد. به هر حال، اگر $|F| = p^n$ آنگاه $|F^{۲}| = (p^n + ۱)/۲$. از آنجا که، $p \nmid (p^n + ۱)/۲$، باید حداقل یک عنصر α از F چنان موجود باشد که α یک مربع باشد ولی $\alpha + ۱$ یک مربع نباشد. پس $\alpha + ۱$ مجموعی از دو مربع است که یک مربع نیست، بنابراین F فیثاغورثی نیست. □

نتیجهٔ ۲. اگر F یک هیأت از مشخصهٔ فرد باشد مجموعهٔ $\mathcal{T} = \{\alpha + ۱ : \alpha \in F^{۲}\}$ شامل حداکثر یک مربع و حداقل یک نامربع است.

برهان. همان‌گونه که در برهان گزارهٔ قبل مشاهده شد، مجموعهٔ $\mathcal{T}$ شامل یک نامربع است. از آنجا که تنها $(p^n - ۱)/۲$ نامربع موجود است، $\mathcal{T}$ که دارای عدد اصلی $(p^n + ۱)/۲$ است می‌بایست شامل یک مربع باشد. □

۳. قضیهٔ اصلی

اکنون آماده‌ایم که قضیهٔ اصلی‌مان را بیان و اثبات کنیم.

قضیهٔ ۳. تنها هیأت‌های متناهی که از خاصیت رول پیروی می‌کنند $\mathbf{F}_{۲}$ و $\mathbf{F}_{۴}$ هستند.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم که برای یک هیأت F از مشخصهٔ فرد باید یک چندجمله‌ای $f(x) \in F[x]$ موجود باشد که در F شکافته شود و مشتقش در F شکافته نشود.

فرض کنیم F هیأتی از مشخصه فرد باشد. خانوادهٔ چندجمله‌ای‌های

$$f(x) = (x - ۲)(x + ۲)(x - ۲a)(x + ۲a)$$

که در آن $a \in F$ را در نظر بگیرید. بنابراین

$$f'(x) = ۴x(x^{۲} - ۲(a^{۲} + ۱)),$$

که در $F[x]$ شکافته می‌شود اگر و تنها اگر مبین $8(a^2+1)$ از عامل دوم آن یک مربع در F باشد. بنابراین $2(a^2+1)$ باید یک مربع باشد. اگر $2 \in F^2$ آنگاه باید به ازای هر $a \in F$ داشته باشیم $a^2+1 \in F^2$، و اگر $2 \notin F^2$ آنگاه باید به ازای هر $a \in F$ داشته باشیم $a^2+1 \notin F^2$. بنا بر نتیجهٔ ۲ هر دو وضعیت غیرممکن می‌باشند. بنابراین باید $a \in F$ای چنان موجود باشد که $f'(x)$ در F شکافته نشود. از این رو هر هیأت متناهی از مشخصه فرد خاصیت رول را ندارد.

حال یک هیأت F از مشخصهٔ ۲ را که حداقل ۸ عضو دارد در نظر می‌گیریم. فرض کنیم

$$f(x) = x(x+1)(x+a)(x+a+1)(x+b)(x+b+1) \quad , \quad a, b \in F$$

یک خانواده از چندجمله‌ای‌ها باشد. پس

$$f'(x) = x^4 + x^2 + (a^2+a)(b^2+b).$$

فرض کنیم برای هر $a, b \in F$، $f'(x)$ شکافته شود. پس چندجمله‌ای $x^2 + x + (a^2+a)(b^2+b)$ نیز برای هر $a, b \in F$ شکافته می‌شود و بنابراین برای هر a و b می‌توانیم $A, B \in F$ را چنان بیابیم که

$$x^2 + x + (a^2+a)(b^2+b) = (x+A)(x+B)$$

باید $A + B = 1$ و $AB = (a^2+a)(b^2+b)$ و بدین ترتیب $A^2 + A = (a^2+a)(b^2+b)$.

بنابراین اگر $f'(x)$ در F به ازای هر $a, b \in F$ شکافته شود نتیجه می‌شود که مجموعهٔ

$$S = \{\gamma^2 + \gamma : \gamma \in F\}$$

تحت ضرب بسته است. فرض کنید $\alpha \in S^*$. چون F^* یک گروه متناهی است عدد صحیح mای موجود است که برای آن $\alpha^m = 1$. بنابراین ۱ به S متعلق است و معکوس هر عنصر ناصفر S در S است. چون $\mathrm{char}(F) = 2$ ، S تحت جمع تشکیل یک گروه می‌دهد. بنابراین S یک زیرهیأت F است. به علاوه، اگر F دارای 2^n عنصر باشد و $n \geq 3$، آنگاه S دارای 2^{n-1}عنصر خواهد بود زیرا دقیقاً زمانی که $\beta = \alpha$ یا $\alpha = \beta + 1$ باشد، $\alpha^2 + \alpha = \beta^2 + \beta$ خواهد بود. این ایجاب می‌کند که $n - 1|n$ که یک تناقض است. بنابراین S تحت ضرب بسته نیست و باید $a, b \in F$ موجود باشند که به ازای آنها $f'(x)$ شکافته نشود و بنابراین F دارای خاصیت رول نخواهد بود.

اکنون نشان خواهیم داد که $\mathbf{F}_2$ و $\mathbf{F}_4$ در خاصیت رول صدق می‌کنند. اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای در $\mathbf{F}_2[x]$ باشد که روی $\mathbf{F}_2$ شکافته می‌شود آنگاه $f(x) = x^a(x+1)^b$، که a و b اعداد صحیح نامنفی می‌باشند. از آنجا که مشتق $f(x) = (h(x))^2k(x)$، $f'(x) = (h(x)^2k'(x)$ می‌باشد. کافی است حالتی را در نظر بگیریم که $f(x)$ بدون مربع است، به عبارت دیگر $a, b \leq 1$. چهار امکان وجود دارد.

a	b	$f'(x)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

در هر حالت، $f'(x)$ روی $\mathbf{F}_۲$ شکافته می‌شود، بنابراین $\mathbf{F}_۲$ خاصیت رول را دارد.

اگر $\mathbf{F}_۴$ یک هیأت متناهی با ۴ عنصر باشد آنگاه $F_۴ = \{۰, ۱, \alpha, \alpha + ۱\}$ که $\alpha^۲ = \alpha + ۱$. اگر یک چندجمله‌ای $f(x)$ در $F_۴$ شکافته شود، می‌تواند به صورت

$$f(x) = x^b(x+۱)^c(x+\alpha)^d(x+\alpha+۱)^e$$

نوشته شود که b، c، d و e اعداد صحیح نامنفی هستند. همانند حالت $\mathbf{F}_۲$، چون مشتق $f(x) = (h(x))^۲k(x)$، $f'(x) = (h(x))^۲k'(x)$ می‌باشد کافی است حالتی را در نظر بگیریم که $b, c, d, e \leq ۱$. اگر یکی از b، c، d، e برابر ۰ باشند آنگاه $f(x) = Ax^۳ + Bx^۲ + Cx + D$ که $A, B, C, D \in \mathbf{F}_۴$ و $f'(x) = Ax^۲ + C$. از آنجا که هر عنصر در $\mathbf{F}_۴$ یک مربع است $f'(x)$ در $\mathbf{F}_۴$ شکافته می‌شود. اگر $b = c = d = e = ۱$ آنگاه $f(x) = x^۴ + x$ و $f'(x) = ۱$ در $\mathbf{F}_۴$ شکافته می‌شود.

چون $f'(x)$ در هر حالت شکافته می‌شود $\mathbf{F}_۴$ خاصیت رول دارد. $\square$

مراجع

[1] T. Craven and G. Csordas, Multiplier sequences for fields, *Illinois J. Math.* 21 (1977) 801-817.

[2] T. Craven, A weak version of Rolle's theorem, *Proc. Amer. Math. Soc.* 125 (1997) 3147-3153.

[3] I. Kaplansky, *Fields and Rings,* 2nd. ed., University of Chicago Press, Chicago, 1972.

ترجمه: علی معدنشکاف

دانشگاه سمنان، دانشکدهٔ تربیت دبیر مهدی‌شهر، گروه ریاضی

پست الکترونیک: amadanshekaf@semnan.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شمارهٔ ۳۰(بهار۱۳۸۲)، صص. ۳۹ تا ۵۴

جمع و شمارش: حساب افرازها

اسکات الگرن و کِن آنو

ترجمه: پرویز حسن‌پور فرد

در نخستین نگاه افرازها چیزی مانند بازی بچه‌ها به‌نظر می‌رسند:

$$۴ = ۳ + ۱ = ۲ + ۲ = ۲ + ۱ + ۱ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱$$

بنابراین، پنج افراز برای عدد ۴ وجود دارد.
اما (همانطورکه در نظریهٔ اعداد اتفاق می‌افتد) کار به ظاهر سادهٔ شمارش راه‌های شکستن یک عدد به چند قسمت، سریعاً منجر به مسائلی پیچیده و در عین حال زیبا می‌گردد.

افرازها نقش مهمی در زمینه‌های گوناگون ریاضیات مانند ترکیبیات، تئوری لی، تئوری نمایش و فیزیک ریاضی و تئوری توابع خاص ایفا می‌کنند.

ولی ما در اینجا به نقش آنها در نظریهٔ اعداد می‌پردازیم. (که برای آن [A] یک مرجع استاندارد است.)

ابتدا اویلر بود که ...

یک افراز عدد طبیعی n دنباله‌ای ناصعودی از اعداد است که مجموعشان برابر n باشد (برحسب قرارداد، می‌پذیریم $p(\circ) = ۱$). تعداد افرازهای عدد n را با $p(n)$ نمایش می‌دهند.

هشتاد سال قبل پرسی الکساندر مک ماهون[1] سرگرد توپخانهٔ سلطنتی انگلستان که یک حسابگر

1) Percey Alecsander Mac Mahon

زبردست نیز بود مقادیر $p(n)$ را برای تمام nها تا ۲۰۰ محاسبه نمود. او

$$p(۲۰۰) = ۳,۹۷۲,۹۹۹,۰۲۹,۳۸۸$$

را پیدا کرد. او همهٔ افرازها را یکی یکی نشمرد:

$$۲۰۰ = ۱۹۹ + ۱ = ۱۹۸ + ۲ = ۱۹۸ + ۱ + ۱ = ۱۹۷ + ۳ = \cdots$$

بلکه به جای آن تساوی کلاسیک سری‌های توانی منسوب به اویلر را به‌کار برد.

برای توسیع فرمول بازگشتی اویلر با رابطهٔ مقدماتی زیر شروع می‌کنیم:

اگر $|x| < ۱$، آنگاه $\frac{۱}{۱-x} = ۱ + x + x^۲ + x^۳ + x^۴ + \cdots$

به کمک این رابطه، اویلر دریافت که وقتی حاصلضرب نامتناهی زیر را بسط دهیم:

$$\prod_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{۱ - x^n} = (۱ + x + x^۲ + \cdots) \times (۱ + x^۲ + x^۴ + \cdots) \times (۱ + x^۳ + x^۶ + \cdots) \cdots$$

ضریب x^n برابر $p(n)$ می‌باشد. (فکر کنید که اولین عامل در شمارش تعداد یک‌ها در یک افراز است و دومین عامل در شمارش تعداد ۲ها و غیره) به عبارت دیگر رابطهٔ زیر را داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{n=۰}^{\infty} p(n)x^n &= \prod_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{۱ - x^n} \\ &= ۱ + x + ۲x^۲ + ۳x^۳ + ۵x^۴ + \cdots\end{aligned}$$

به علاوه اویلر مشاهده کرد که عکس این حاصلضرب نامتناهی در تساوی زیبای زیر صدق می‌کند (که به قضیه مخمسی اویلر شناخته می‌شود):

$$\prod_{n=۱}^{\infty}(۱ - x^n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-۱)^k x^{\frac{۳k^۲+k}{۲}} = ۱ - x - x^۲ + x^۵ + x^۷ - x^{۱۲} - \cdots$$

این دو تساوی نشان می‌دهند که

$$(\sum_{n=۰}^{\infty} p(n)x^n) \times (۱ - x - x^۲ + x^۵ + x^۷ - x^{۱۲} - \cdots) = ۱$$

و این به نوبهٔ خود نتیجه می‌دهد که برای اعداد صحیح مثبت n داریم:

$$p(n) = p(n - ۱) + p(n - ۲) - p(n - ۵) - p(n - ۷) + p(n - ۱۲) + \cdots$$

این فرمول بازگشتی، مک ماهون را قادر ساخت تا حجم عظیم محاسبات خود را انجام دهد.

فرمول مجانبی هاردی-رامانوجان-رادماخر[1]

طبیعی است که دربارهٔ اندازهٔ $p(n)$ سؤال کنیم. جواب این سؤال یک فرمول مجانبی جالب است که توسط هاردی و رامانوجان در ۱۹۱۷ کشف شده و دو دههٔ بعد توسط هانس رادماخر کامل گردیده است. این فرمول آنقدر دقیق است که در واقع می‌توان آن را برای محاسبهٔ همهٔ مقادیر $p(n)$ به کار برد. هاردی آن را «یکی از فرمول‌های نادر که هم مجانبی و هم دقیق است» نامید. اهمیت این فرمول بیشتر شد زیرا موجب پیدایش روش دایره‌ای[2] گردید که خود به صورت یکی از قدرتمندترین ابزارهای نظریهٔ تحلیلی اعداد تکوین یافت.

در اینجا نتیجهٔ رادماخر را معرفی می‌کنیم.

وی توابع صریح $T_q(n)$ را چنان تعریف کرد که برای هر n داشته باشیم:

$$p(n) = \sum_{q=۱}^{\infty} T_q(n).$$

توابع $T_q(n)$ پیچیده‌تر از آن هستند که در اینجا آورده شوند اما متذکر می‌شویم که $T_۱(n)$ به تنهایی فرمول زیر را ایجاد می‌کند:

$$p(n) \sim \frac{۱}{۴n\sqrt{۳}} e^{\pi\sqrt{\frac{۲n}{۳}}}$$

(هاردی و رامانوجان در کارهایشان توابعی که اندکی متفاوت با $T_q(n)$ بودند به کار بردند درنتیجه سری $\sum_{q=۱}^{\infty} T_q(n)$ واگرا ولی مفید بود.) به‌علاوه رادماخر خطای برش سری بعد از Q جمله را به‌طور دقیق محاسبه نمود. به‌خصوص اعداد صریح ثابت A و B وجود دارند به طوری که

$$\left| p(n) - \sum_{q=۱}^{A\sqrt{n}} T_q(n) \right| < \frac{B}{n^{\frac{۱}{۴}}}$$

چون $p(n)$ یک عدد صحیح است، این رابطه مقدار $p(n)$ را برای nهای بزرگ به طور دقیق معین می‌کند. نرخ همگرایی سری رادماخر قابل توجه است. برای مثال اولین هشت جمله تقریب زیر را می‌دهد:

$$p(۲۰۰) \approx ۳,۹۷۲,۹۹۹,۰۲۹,۳۸۸,۰۰۴$$

(با مقدار محاسبه شده توسط مک ماهون مقایسه کنید).

برای اجرای روش دایره‌ای احتیاج به مطالعهٔ جزئیات رفتار تحلیلی تابع مولد $p(n)$ داریم. به خاطر می‌آوریم که

$$F(x) := \sum_{n=۰}^{\infty} p(n)x^n = \frac{۱}{(۱-x)(۱-x^۲)(۱-x^۳)\cdots}$$

1) Hardy-Ramanujan-Radmacher 2) circle-method

که این یک تابع تحلیلی روی قلمرو $|x| < 1$ است. به طور طبیعی از قضیه کشی شروع می‌کنیم که نتیجه می‌دهد:

$$p(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{F(x)}{x^{n+1}}dx,$$

که C یک مرز سادهٔ بسته در جهت خلاف عقربه‌های ساعت حول مبدأ است. امیدواریم مرز C را طوری با نقاط تکین تابع $F(x)$ مربوط کنیم که حداکثر اطلاعات در مورد انتگرال به‌دست آید. اما برای چند لحظه فرض کنیم که این نقاط تکین در هر ریشهٔ واحد اتفاق می‌افتند و یک حصار غیرقابل نفوذ روی دایرهٔ واحد تکین تشکیل می‌دهند. با این حال، می‌توان نشان داد که اندازهٔ $F(x)$ نزدیک هر ریشه اولیهٔ qام واحد به سرعت با افزایش q کاهش می‌یابد، و این به سود ماست. به‌علاوه رفتار $F(x)$ در نزدیکی هر ریشهٔ واحد به دقت توصیف می‌شود.

ملاحظه می‌کنیم با انتخاب مناسب C می‌توان سهم‌ها را در شکل انتگرالی ریشه‌های qام واحد به دقت محاسبه کرد. مهمترین سهم از آن تابع $T_q(n)$ است. با یک بررسی دقیق از خطاهای ایجاد شده، فرمول کامل به‌دست می‌آید.

روش دایره‌ای اهمیت خارق‌العاده‌ای در طی هشتاد سال اخیر داشته است و نقش اساسی در نظریهٔ اعداد جمعی و (برای مثال در مسائلی از نوع Waring)، آنالیز و حتی در محاسبهٔ آنتروپی حفره‌های سیاه ایفا کرده است.

همنهشتی رامونا‌جان

بعد از لحظه‌ای تعمق در تعریف ترکیبیاتی توابع افرازی، دلیل خاصی بر این باور وجود ندارد که این توابع دارای خواص حسابی جالبی باشند. (فرمول تحلیلی قسمت قبل نیز مطمئناً چیزی را در این ایده عوض نمی‌کند). برای مثال دلیلی بر این‌که $p(n)$ ترجیحاً زوج است تا فرد وجود ندارد. بنابراین یک ظن طبیعی می‌تواند این باشد که مقادیر $p(n)$ به طور یکسان به پیمانه ۲ توزیع شده‌اند. یک محاسبهٔ سریع از اولین ۱۰۰۰۰ مقدار این گمان را تأیید می‌کند. از این مقدار تعداد دقیقاً ۴۹۹۶ تا زوج و ۵۰۰۴ تا فرد هستند این الگو با جایگزینی ۳ به جای ۲ تعمیم پیدا می‌کند. از اولین ۱۰۰۰۰ تعداد، ۳۳۱۳، ۳۳۲۵ و ۳۳۶۲ (یعنی برای هر یک از حالات، تقریباً $\frac{1}{3}$) به‌ترتیب همنهشت با ۰، ۱ و ۲ به پیمانه ۳ می‌باشند. اما وقتی ۳ را با ۵ عوض کنیم چیزی کاملاً متفاوت اتفاق می‌افتد: در می‌یابیم که ۳۶۱۱ تا (خیلی بیشتر از $\frac{1}{5}$ مورد انتظار) از ۱۰۰۰۰ مقدار اولیهٔ $p(n)$ بر ۵ قابل‌قسمت هستند. چه توصیفی برای این انحراف وجود دارد؟

جواب برای رامونا‌جان وقتی که جدول مقادیر $p(n)$ مک ماهون را دید روشن بوده است. بنابراین رامونا‌جان باید چیزی به صورت زیر مشاهده کرده باشد:

۱	۱	۲	۳	۵
۷	۱۱	۱۵	۲۲	۳۰
۴۲	۵۶	۷۷	۱۰۱	۱۳۵
۱۷۶	۲۳۱	۲۹۷	۳۸۵	۴۹۰
۶۲۷	۷۹۲	۱۰۰۲	۱۲۵۵	۱۵۷۵
۱۹۵۸	۲۴۳۶	۳۰۱۰	۳۷۱۸	۴۵۶۵

نکتهٔ جالب توجه این است که هر درایهٔ ستون آخر مضربی از ۵ است. وجود این پدیده انحراف بالا را توضیح می‌دهد و این نخستین کشف بسیار عمیق رامونا‌جان در حساب $p(n)$ بود. توضیح خود وی چنین است:

«من تعدادی از خواص حسابی $p(n)$ را اثبات نموده‌ام، بخصوص

$$p(۵n+۴) \equiv ۰ (\mathrm{mod} ۵),$$

$$p(۷n+۵) \equiv ۰ (\mathrm{mod} ۷).$$

من تاکنون روش دیگری پیدا نموده‌ام که مرا قادر می‌سازد همهٔ این خواص و خواص دیگری را اثبات کنم که جالبترین آنها $p(۱۱n+۶) \equiv ۰ (\mathrm{mod} ۱۱)$ است خواص متناظر دیگری وجود دارد که در آنها پیمانه‌ها توانهایی از ۵، ۷ یا ۱۱ می‌باشند. آشکار شده است که هیچ همنهشتی با پیمانه اعداد اول به غیر از این اعداد به این سادگی وجود ندارد.»

رامونا‌جان این همنهشتی‌ها را در یک سلسله مقاله اثبات نموده است. (اثبات‌های به پیمانه ۵ و ۷ کاملاً مبتکرانه‌اند ولی خیلی سخت نیستند، در حالی که اثبات همنهشتی به پیمانه ۱۱ بسیار سخت است). در همان مقاله او شمایی از اثبات توسیع این همنهشتی‌ها را ترسیم نمود. برای مثال داریم

$$p(۲۵n+۲۴) \equiv ۰ (\mathrm{mod} ۲۵),$$

$$p(۴۹n+۴۷) \equiv ۰ (\mathrm{mod} ۴۹).$$

رامونا‌جان متوجه الگوهای دیگری در نخستین ۲۰۰ مقدار شد:

$$p(۹۹) \equiv ۰ (\mathrm{mod} ۱۲۵). p(۱۱۶) \equiv ۰ (\mathrm{mod} ۱۲۱)$$

از چنین شواهد اندک او حدس زیر را ساخت:

اگر $۲۴\lambda \equiv ۱ (\mathrm{mod}\ \delta),\ \delta = ۵^a ۷^b ۱۱^c$

آنگاه

$$p(\delta n+\lambda)\equiv \circ (\mathrm{mod}\ \delta)$$

وقتی که $\delta = ۱۲۵$، به عنوان مثال داریم $\lambda = ۹۹$. بنابراین حدس رامونا‌جان این است که

$$p(۱۲۵n+۹۹)\equiv \circ (\mathrm{mod} ۱۲۵)$$

توجه داریم که حدس کلی به سادگی از حالتی که پیمانه‌ها توانهایی از ۵، ۷ یا ۱۱ هستند نتیجه می‌شود.

این امر قابل ملاحظه است که رامونا‌جان قادر بوده است حدس کلی را براساس چنان شواهد اندکی بیان کند. بنابراین جای تعجب نیست که این حدس کاملاً درست نباشد. (در دههٔ ۱۹۳۰، گوپتا[1] و چولا[2] یک مثال نقیض کشف کردند: $p(۲۴۳)\not\equiv \circ (\mathrm{mod} ۷^۳)$. اعتبار بیشتر رامونا‌جان در این است که با یک تغییر شکل جزئی، حدس او تحقق پیدا می‌کند. به‌ویژه، در حال حاضر می‌دانیم که

اگر $۲۴\lambda \equiv ۱(\mathrm{mod}\delta)$ و $\delta = ۵^a ۷^b ۱۱^c$

آنگاه $p(\delta n+\lambda)\equiv \circ (\mathrm{mod} ۵^a ۷^{[\frac{b}{۲}]+۱} ۱۱^c).$

تعیین اینکه برهان‌های این حدس را، هنگامی‌که پیمانه‌ها توانی از ۵ یا ۷ باشند، چه کسی کشف کرده، یک مبارزهٔ تاریخی جالب است. نوعاً برهان به جی.ان. واتسن[3] نسبت داده می‌شود. اما اخیراً ماهیت سهم [R] رامونا‌جان تا حد زیادی روشن شده است. به‌علاوه یک خلاصهٔ کامل برای توان‌های ۵ و یک شمای سردستی‌تر برای توان‌های ۷ (آنقدر سردستی که هنوز خطای او را در بیان حدس نشان نداده است) توسط رامونا‌جان در یک دست نوشتهٔ طولانی که آن را سه سال قبل از مرگش نوشته، ارائه شده است. مطابق مرسوم، رامونا‌جان در هیچکدام از حالات جزئیات کامل برای همهٔ ادعاهایش ارائه نمی‌کند. ظاهراً این دست نوشته از ۱۹۲۸ تا ۱۹۶۵ (زمان مرگ واتسن) در اختیار واتسن بوده است. البته یک نسخه از دست نوشته به خط واتسن (نسخهٔ اصلی شناخته‌شده نیست) در کتابخانهٔ انستیتوی ریاضی آکسفورد موجود است. به هر حال واضح است که استحقاق رامونا‌جان برای آنکه کاشف این حالات شناخته شود، بیش از آن چیزی است که معمولاً شناخته شده است. از طرفی حالت توان‌های ۱۱ به مراتب دشوارترند. نخستین اثبات منتشر شده از حدس رامونا‌جان در این حالت توسط اتکین[4] در سال ۱۹۶۷ ارائه شده است.

رتبهٔ دایسون[5]

فیزیکدان برجسته فریمن دایسون[6] در سال ۱۹۴۴ هنگامی‌که دانشجوی کالج بود، با کشف پدیده‌ای ساده و بسیار دلپذیر که هنگام توضیح روابط زیر ظاهر می‌شد یک موضوع مهم در نظریهٔ افراز حسابی را

1) Chowla 2) Gupta 3) G. N. Watson 4) A.O.L.Atkin 5) Dysons Rank and Crank
6) Freeman Dyson

بنیان نهاد:

$$p(۵n+۴) \equiv ۰ (\mathrm{mod} ۵)$$

$$p(۷n+۵) \equiv ۰ (\mathrm{mod} ۷)$$

دایسون رتبهٔ یک افراز حسابی را بزرگترین جمعوند منهای تعداد جمعوندها تعریف کرد. برای مثال افرازهای ۴ و رتبه آنها به صورت زیر است:

رتبه	افراز
$۴ - ۱ \equiv ۳(\mathrm{mod} ۵)$	۴
$۳ - ۱ \equiv ۱(\mathrm{mod} ۵)$	$۳ + ۱$
$۲ - ۲ \equiv ۰(\mathrm{mod} ۵)$	$۲ + ۲$
$۲ - ۳ \equiv ۴(\mathrm{mod} ۵)$	$۲ + ۱ + ۱$
$۱ - ۴ \equiv ۲(\mathrm{mod} ۵)$	$۱ + ۱ + ۱ + ۱$

توجه داشته باشید که رتبه‌های این افرازها هر عضو کلاس باقیمانده‌ها به پیمانه ۵ را دقیقاً یک بار نمایش می‌دهند. پس از محاسبهٔ مثال‌های بیشتر، دایسون مشاهده کرد که بدون استثناء، اعدادی به صورت $۵n+۴$(به ترتیب $۷n+۵$) دارای خاصیت توزیع به طور مساوی رتبه به پیمانهٔ ۵ (به ترتیب پیمانهٔ ۷) هستند. به طور دقیقتر، اگر $۰ \leq m < M$ اعداد صحیح باشند و $R(N,m,M)$ تعداد افرازهای N را با رتبه همنهشت با $m(\mathrm{mod} M)$ نمایش دهد، آنگاه دایسون حدس زد که

$$R(۵n+۴, m, ۵) = \frac{۱}{۵}.p(۵n+۴) \quad \text{برای} \quad ۰ \leq m \leq ۴$$

$$R(۷n+۵, m, ۷) = \frac{۱}{۷}.p(۷n+۵) \quad \text{برای} \quad ۰ \leq m \leq ۶$$

درستی این حدس یک توضیح ترکیباتی ساده و خوش طرح برای همنهشتی راموناجان فراهم می‌آورد. فکر دایسون ده سال بعد توسط اتکین[۱] و و سوینرتن-دیر[۲] در یک مقاله بسیار عالی که بحث‌های ترکیباتی کلاسیک را با نظریه توابع پیمانه‌ای می‌آمیخت، تأیید شد.

متأسفانه به نظر نمی‌رسد که رتبهٔ دایسون برای اعداد اول غیر از ۵ و ۷ دارای چنان خواص ساده‌ای باشد. با این وجود او یک آمارهٔ طبیعی دیگر حدس زد، هم رتبه، که همنهشتی $p(۱۱n+۶) \equiv ۰(\mathrm{mod} ۱۱)$ را شرح می‌دهد.

در اواخر دههٔ ۱۹۸۰ جرج ای اندروز[۳] و فرانک گاروان[۴] چنین هم رتبه‌ای را پیدا کردند [G],[A-G].

1) Atkin 2) Swinnerton-Dyer 3) Georg. E. Andrews 4) Frank Garvan

کارهای بعدی گاروان، کیم[1] و دنیس استانتن[2] [G-k-S] برای پیمانه‌های ۵، ۷، ۱۱ و ۲۵ تفاسیری ترکیبیاتی ارائه دادند که ریشه در تئوری نمایش پیمانه‌ای گروه‌های متقارن دارند.

مثال‌های اتکین

به دیدگاه شهودی راموناجان باز می‌گردیم که می‌گوید هیچ خاصیت حسابی ساده‌ای برای $p(n)$ هنگامی که پیمانه شامل اعداد اول بزرگ‌تر از ۱۱ باشد، وجود ندارد. به نظر می‌رسد که ادعای راموناجان درست بوده است، هیچ همنهشتی جدیدی به سادگی همنهشت‌های اصلی هنوز پیدا نشده است. (هرچند اثبات نشده است که چنین همنهشت‌هایی موجود نیست). اما دههٔ ۶۰ شاهد کشف مثال‌های وسوسه‌انگیز بیشتری بود. (بخصوص توسط اتکین، نیومن[3] و اُبرایان[4]). برای مثال اتکین دسته‌های نامتناهی خوش طرحی از همنهشتی‌ها به پیمانهٔ ۵، ۷ و ۱۳ یافت که با همنهشتی‌های قبلی کاملاً متفاوت بود. مثال ساده‌ای از این همنهشتی‌ها به صورت زیر است:

$$p(11^3.13n+237)\equiv 0 \pmod{13}$$

اتکین همچنین مثال‌های بیشتری با پیمانه‌های ۱۷، ۱۹، ۲۳، ۲۹ ارائه داد.

هرچند ارائهٔ این مثال‌ها چندان سازمان یافته نبود. اتکین این نتایج را از طریق مطالعهٔ دقیق توابع پیمانه‌ای به‌دست آورد. به‌دلیل اینکه توابع پیمانه‌ای اساس برهان‌های همنهشتی هستند که تاکنون دیده‌ایم، یک توصیف مختصر از آنها را ارائه می‌دهیم. فرض کنید $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ مجموعهٔ ماتریس‌های 2×2 با درایه‌های صحیح باشد که دترمینان آنها مساوی ۱ است. آنگاه، اگر N یک عدد صحیح باشد زیرگروه همنهشتی $\Gamma_0(N)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Gamma_0(N)=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : c\equiv 0 \pmod{N}\right\}.$$

یک عضو $\gamma=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ روی نیم‌صفحهٔ بالایی اعداد مختلط از طریق تبدیل خطی کسری $\gamma z=\frac{az+b}{cz+d}$ عمل می‌کند. بنابر تعریف، یک تابع پیمانه‌ای روی $\Gamma_0(N)$ یک تابع f روی $\mathbb{H}$ است که در رابطهٔ $f(\gamma z)=f(z)$ برای هر $\gamma\in\Gamma_0(N)$ صدق می‌کند و به‌علاوه مرومورفیک[5] روی $\mathbb{H}$ و نقاط بازگشت است. وقتی N کوچک است، میدان این توابع نسبتاً ساده است. بنابراین اگر توابعی در چنین میدانی داده شوند انتظار می‌رود که روابط غیربدیهی بین آنها پیدا شود. اگر پای توابع مناسبی در میان

1) Dongsu Kim 2) Dennis Stanton 3) Newman 4) O’Brien 5) meromorphic

باشد، آنگاه چنین روابطی ممکن است اطلاعاتی راجع به $p(n)$ بدهند. برای مثال‌های اتکین وقتی که $l = ۵, ۷$ یا ۱۳، میدان‌های توابع مربوط دارای یک مولد یکتا هستند و این برای یک خانوادهٔ نامتناهی از همنهشتی‌ها منطقی است. اما همچنان که l بزرگ می‌شود، مسائل به سرعت پیچیده می‌شوند. کارهای اتکین از جهت دیگری نیز مهم هستند و آن مشخص کردن استفادهٔ اولیه ازکامپیوترهای پیچیده در ریاضیات است. همچنانکه خود وی می‌گوید «غالباً کشف نتایج در این موضوع خیلی سخت‌تر از اثبات آنهاست و یک تحقیق آگاهانه روی ماشین ممکن است شخص را قادر سازد تا آنچه را که اتفاق می‌افتد به‌طور دقیق دریابد».

یک مسأله از اردیش[1]

حتی بعد از این همه کشفیات زیبا که در بالا توصیف شد، خواص اساسی $p(n)$ باید خیلی اسرارآمیز به‌نظر برسند. البته هیچ چیزی راجع‌به پیمانه‌های l بزرگ‌تر از ۳۱ نگفته‌ایم چه رسد به پیمانهٔ عام اعداد اول.

در این زمینه به حدسی از اردیش اشاره می‌کنیم.

اگر n یک عدد اول باشد، آنگاه عدد صحیح l موجود است به‌طوری که $p(n) \equiv ۰ (\mathrm{mod} l)$

اگر روی این حدس لحظه‌ای تفکر کنیم، از ضعف آن تعجب خواهیم کرد؛ زیرا این حدس تنها بیان می‌کند که هر عدد اول حداقل یک مقدار از تابع افراز را عاد می‌کند. از طرف دیگر (تا همین اواخر) نتایج موجود حتی از این هم ضعیف‌تر بوده‌اند. بهترین آنها قضیه‌ای از شینزل[2] و ویرسینگ[3] بوده که وجود یک ثابت c را به اثبات رسانده‌اند به‌طوری که برای اعداد بزرگ X، تعداد اعداد اول $l < X$ که به ازای آن حدس اردیش درست باشد بزرگ‌تر یا مساوی $c \log \log X$ است.

پیشرفت‌های اخیر

در چند سال اخیر اطلاعات ما از $p(n)$ به مقدار زیادی افزایش یافته است. همه این پیشرفت‌ها از یک منبع نشأت گرفته‌اند: این حقیقت که مقادیر توابع افراز کاملاً وابسته به حساب فرم‌های پیمانه‌ای هستند. فرم‌های پیمانه‌ای از نظر تاریخی نقش گسترده‌ای در نظریهٔ اعداد ایفا می‌کنند. البته اهمیت آنها با نقش مرکزی‌ای که در اثبات آخرین قضیهٔ فرما دارند تأیید شده است. مسألهٔ اصلی در اثبات وایلز[4] آن است که نشان دهد منحنی‌های بیضوی پیمانه‌ای هستند. به عبارت دیگر بخشی از حساب آنها به‌وسیله فرمهای پیمانه‌ای معینی که مربوط به آنها است تحکیم می‌شود. اخیراً مشخص شده است که توابع افراز از شبکهٔ فرم‌های پیمانه‌ای خارج نمی‌شوند و حساب آنها نیز کاملاً به خانوادهٔ معینی از فرم‌های پیمانه‌ای مربوط است. این ارتباط کاربرد روش‌های پیچیده دلاین[5]، سره[6] و شیمورا[7] را در مطالعه $p(n)$ امکان‌پذیر می‌کند.

1) Erdösh 2) Schinzel 3) Wirsing 4) Wiles 5) Deligne 6) Serre 7) Shimyra

این نظریه‌ها (که جزء قویترین نظریه‌های نیم قرن اخیراند) پیامدهای مهمی برای $p(n)$ دارند؛ به‌خصوص اگر به طور مناسب به‌کار برده شوند. آنها بیان می‌کنند که $p(n)$ همنهشتی‌های خطی برای هر $l \geq ۵$ را برآورده می‌کند. در قسمت بعد با جزئیات بیشتری بحث می‌کنیم که چگونه فرم‌های پیمانه‌ای در تصویر وارد می‌شوند. نخست نشان می‌دهیم که آنها ما را قادر می‌سازند تا چه چیزهایی را اثبات کنیم.

نویسندهٔ دوم (با الهام از بعضی فرمول‌های راموناجان) نخستین کسی بود که به این ارتباط توجه نمود، به عنوان نتیجهٔ [O] وی رابطهٔ زیر را اثبات نمود.

برای هر عدد $l \geq ۵$، تعدادی نامتناهی از همنهشتی‌های به صورت

$$p(An+B) \equiv \circ (\mathrm{mod} l)$$

موجود است.

(می‌بینم که نه تنها تصاعد حسابی $An+B$ در رابطهٔ همنهشتی فوق صدق کند، بلکه هر یک از تعداد نامتناهی از زیرتصاعدهای آن در رابطه صدق می‌کنند؛ هنگامی که از تعداد نامتناهی همنهشتی صحبت می‌کنیم این زیرتصاعد را به حساب نمی‌آوریم).

نویسندهٔ اول [Ahl] این نتیجه را با نشان دادن اینکه عدد اول l را می‌توان با هر توانی از l^k جانشین کرد، تعمیم داد. از این رو می‌توان نشان داد که می‌توان l را با هر پیمانه M که نسبت به ۶ اول باشد جانشین کرد. یک نتیجهٔ فوری از نتایج فوق به صورت زیر است:

اگر $l \geq ۵$ اول باشد، آنگاه یک بخش مثبت از اعداد طبیعی n دارای خاصیت زیر است:

$$p(n) \equiv \circ (\mathrm{mod} l).$$

این یک اثبات جالب از حدس اردیش که در بالا آمده فراهم می‌سازد. مدتی بعد، دو نویسنده [Ahl-O]نشان دادند که همنهشتی برای $p(n)$ از آنچه که این قضایا بیان می‌کنند گسترده‌تر است. برای توضیح این موضوع اجازه دهید به نتیجهٔ اصلی راموناجان برگردیم:

$$p(۵n+۴) \equiv \circ (\mathrm{mod} ۵),$$

$$p(۷n+۵) \equiv \circ (\mathrm{mod} ۷),$$

$$p(۱۱n+۶) \equiv \circ (\mathrm{mod} ۱۱).$$

همانطور که حدس‌های راموناجان نشان می‌دهند این نتایج می‌توانند یکجا نوشته شوند. یعنی λ_l معکوس ۲۴ به پیمانهٔ l باشد (به عبارت دیگر $۲۴\lambda_l \equiv ۱ (\mathrm{mod} l)$). در این صورت حدس های فوق شکل زیر را به خود می‌گیرند:

اگر $l = ۵, ۷$ یا ۱۱ آنگاه $p(ln+\lambda_l) \equiv \circ (\mathrm{mod} l)$.

حال برای هر $l \geq ۵$ و هر توان k نتایج فوق وجود تعدادی نامتناهی تصاعد $An + B$ به طوری که $p(An + B) \equiv ۰(\mathrm{mod} l^k)$ را تضمین می‌کند. یک ویژگی مهم روش به‌کار رفته برای اثبات قضایای فوق این است که در هر حالت تصاعد $(An + B)$ را که تولید می‌کند یک زیرتصاعد از $ln + \lambda_l$ است (به عبارت دیگر $l|A$ و $(B \equiv \lambda_l(\mathrm{mod} l)$). به عنوان مثال یکی از ساده‌ترین همنهشتی‌های تضمین شده توسط این قضیه به صورت زیر است:

$$p(۵۹^۴.۱۳n + ۱۱۱۲۴۷) \equiv ۰(\mathrm{mod}۱۳);$$

در این حالت داریم:

$$۱۱۱۲۴۷ = \frac{۱}{۲۴}(\mathrm{mod}۱۳)$$

آنچه مؤلفان اخیراً نشان داده‌اند این است که همنهشتی‌ها تنها به یک تصاعد به پیمانهٔ l محدود نمی‌شوند. در حقیقت می‌دانیم اگر $l \geq ۵$ اول باشد و k هر توانی باشد آنگاه تعدادی نامتناهی همنهشتی $p(An + B) \equiv ۰(\mathrm{mod} l^k)$ در هر $(l + ۱)/۲$ تصاعد به پیمانهٔ l وجود دارد. به عبارت دیگر، برای هر عدد اول، کمی بیشتر از نصف تصاعدها شامل همنهشتی‌ها هستند. به عنوان مثال وقتی $l = ۱۱$، تصاعدهای مربوطه عبارت‌اند از

$$۱۱n + ۱, ۱۱n + ۲, ۱۱n + ۳$$

$$۱۱n + ۵, ۱۱n + ۶, ۱۱n + ۸$$

از میان اینها فقط $۱۱n + ۶$ متعلق به رامانوجان، توسط تئوری قبلی قابل تشخیص بود. آخرین نتیجه یک چهارچوب تئوریک فراهم می‌سازد که هر همنهشت شناخته شده برای تابع افراز را شرح می‌دهد.

شکل‌های پیمانه‌ای (فرم‌های پیمانه‌ای)

سعی می‌کنیم به‌طور مختصر نشان دهیم که چگونه می‌توان نظریهٔ توابع پیمانه‌ای را برای مطالعه $p(n)$ به کار برد و نتایج بخش قبل را به‌دست آورد. توابع مولد زیر در قلب این موضوع جای دارند

$$\sum_{n=۰}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{۱ - x^n}$$

و به علاوه تابع اتای ددکیند[1]:

$$\eta(z) = x^{\frac{۱}{۲۴}} \prod_{n=۱}^{\infty}(۱ - x^n) \qquad (x := e^{۲\pi i z} \quad \text{در اینجا})$$

1) Dedekind's eta function

از ترکیب دو رابطهٔ فوق داریم

$$\frac{۱}{\eta(۲۴z)} = \sum_{n=-۱}^{\infty} p(\frac{n+۱}{۲۴})x^n = x^{-۱} + x^{۲۳} + \dots$$

با بیانی غیر دقیق، یک فرم پیمانه‌ای به وزن k در زیرگروه $\Gamma_{\circ}(N)$ یک تابع f روی نیم صفحهٔ بالایی $\mathbb{H}$ است که خاصیت تبدیلی به شکل زیر را برآورده می‌کند:

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z) \quad , \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_{\circ}(N) \quad \text{برای هر}$$

به علاوه لازم است f روی $\mathbb{H}$ و نقاط بازگشتی[1]، مروموفیک[2] باشد؛ اگر f روی $\mathbb{H}$ هولومورفیک[3] هم باشد و در نقاط بازگشتی صفر شود آنگاه f را یک فرم بازگشتی می‌نامیم. k را یک عدد صحیح و یا نصف یک عدد صحیح در نظر می‌گیریم (در حالت دوم دقت بیشتری باید رعایت شود)؛ توجه کنید که توابع پیمانه‌ای که در بالا معرفی شدند فقط فرم‌های پیمانه‌ای به وزن صفر هستند. هر فرم پیمانه‌ای $f(z)$ دارای یک بسط فوریه بر حسب توان‌های $x = e^{۲\pi iz}$ است. اگر f یک فرم بازگشتی[4] باشد آنگاه این بسط به صورت زیر درمی‌آید:

$$f(z) = \sum_{n=۱}^{\infty} a_f(n)x^n$$

هنگامی که وزن k از فرم بازگشتی یک عدد صحیح باشد، آنگاه قضیهٔ دلاین-سره[5] برای مطالعهٔ ضرایب فوریه a_f در دسترس است. به‌خصوص خانواده‌ای متعارف از عملگرها (معروف به عملگرهای هک[6]) که روی فضای فرم‌های پیمانه‌ای عمل می‌کنند. اگر fیک فرم ویژهٔ متعامد شده[7] برای این خانواده باشد، آنگاه سره حدس زد و دلاین اثبات کرد که نمایش $\rho_f : \mathrm{Gal}(\frac{\bar{\mathbb{Q}}}{\mathbb{Q}}) \to \mathrm{GL}_۲(K)$ وجود دارد (برای میدان Kای) به قسمی که برای هر تعداد متناهی اعداد اول Q داریم

$$\mathrm{Trace}(\rho_f(\mathrm{Frob}_Q)) = a_f(Q)$$

در اینجا $\mathrm{Frob}Q$ یک عضو فروبینیوس را در اعداد اول Q نشان می‌دهد. این نتیجه بسیار قوی است و به ما اجازه می‌دهد ضرایب فوریه فرم‌های پیمانه‌ای را با استفاده از ساختار گروه‌های گالوا مطالعه کنیم.

اگر وزن k از فرم بازگشتی نصف عدد صحیح باشد، نتایج سره و دلاین قابل کاربرد نخواهد بود ولی بر طبق نتایج شیمورا میان فرم‌های بازگشتی به وزن نصف عدد صحیح و فرم‌های مشخصی به وزن‌های

1) Cusps 2) meromorphic 3) Holomorphic 4) Cusp forme 5) Deligne and Serre
6) Hecke 7) Normalized

صحیح، تناظر وجود دارد. تناظر شیمورا کاملاً واضح است و به بهترین صورت ممکن با عملگر هک روی فضاهای مربوط جابه‌جا می‌شود.
در بالا دیدیم که بسط

$$\frac{۱}{\eta(۲۴z)} = \sum_{n=-۱}^{\infty} p(\frac{n+۱}{۲۴})x^n = x^{-۱} + x^{۲۳} + \cdots$$

شامل همهٔ مقادیر تابع افراز است. حال $\frac{۱}{\eta(۲۴z)}$ یک فرم پیمانه‌ای روی $\Gamma_۰(۵۷۶)$ است. اما دارای دو نقص اساسی است. دارای وزن $-\frac{۱}{۲}$ است و دارای یک قطب در هر نقطهٔ بازگشت می‌باشد. بنابراین به‌نظر می‌رسد که هیچیک از تئوری‌های بالا را نمی‌توان به کار برد. اما با شروع از این بسط می‌توان فرم بازگشتی، به وزن نصف عدد صحیح، ساخت که اطلاعات زیادی دربارهٔ پیمانهٔ توان‌های اعداد اول $p(n)$ را حفظ کند. از این فرم بازگشتی تئوری سره‌ـدلاین پس از پالایش توسط تناظر شیمورا، نتایج بخش قبل را تولید می‌کند.

توابع L و حساب

چون فرم‌های پیمانه‌ای نقش بسیار اساسی در همنهشتی‌های افراز ایفا می‌کنند، طبیعی است که به وجود رابطهٔ عمیق‌تری بین افرازها و اشیاء پیمانه‌ای گمان ببریم. همانطور که مشخص شد این گمان کاملاً درست است.

برای روشن شدن ارتباط، مسأله دیوفانتی کلاسیک زیر را در نظر بگیرید (که مورد توجه دانشمندان یونانی و اسلامی بوده است).

«چه اعداد صحیحی مساحت مثلث‌های قائم‌الزاویه با طول اضلاع قائم گویا هستند؟»

چنین اعداد D به عنوان اعداد همنهشتی شناخته می‌شوند. یک بحث ساده نشان می‌دهد که D یک همنهشتی است، درست وقتی که تعداد نامتناهی نقاط گویای (x, y) روی منحنی بیضوی زیر هستند:

$$E_D : y^۲ = x^۳ - D^۲x.$$

چگونه می‌توان مشخص کرد که چنین منحنی دارای تعداد نامتناهی نقطه است؟ حدس بیرچ[۱] و سینرتن‌ـدیر[۲]، یکی از حدس‌های اساسی و برجستهٔ نظریهٔ اعداد (حدس یک میلیون دلاری مؤسسه مسائل ریاضی)، راه حل را فراهم می‌کند.

فرض کنیم $L(E_D, s)$ نمایشگر L ـتابع هس‌ـویل[۳] متناظر با E_D باشد. این تابع، تابعی تحلیلی است که تعریفش بستگی به رفتار E_D به پیمانه عدد اول p دارد. برای مسألهٔ اعداد همنهشتی این حدس

1) Birch 2) Swinnerton-Dyer 3) Hasse-Weil

ایجاب می‌کند که

$$D \text{ همنهشت باشد } \Longleftrightarrow L(E_D, 1) = 0$$

به علاوه حدس این یک فرمول دقیق ارائه می‌دهد که نشان‌دهندهٔ رفتار تحلیلی $L(E_D, s)$ در $s = 1$ است. برای مثال، اگر $L(E_D, 1) \neq 0$، آنگاه حدس بیان می‌کند که

$$L(E_D, 1) = \Omega_D . \# \text{III}(E_D)$$

دراینجا Ω_D یک عدد متعالی (غیر جبری) است و $\text{III}(E_D)$ گروه تیت‌ـشفرویچ[1] در E_D است. گروه تیت‌ـشفرویچ یک گروه کوهمولوژی گالوای معین است که محدوده‌ای را مشخص می‌کند که در آن اصل موضعی‌ـجهانی[2] برای E_D صادق نیست. در اوایل ۱۹۸۰، جرالد تانل[3] با استفاده از کارهای شیمورا و والدزپرگر[4] ([K] را برای توصیف بهتر مطالعه کنید) دو فرم پیمانه‌ای به وزن $\frac{3}{2}$ ساخت که ضرایبش ریشه‌های $L(E_D, 1)$ را «درونیابی» می‌کنند. همراه با بریچ و حدس سینرتن‌ـدیر این فرم پیمانه‌ای یک حل کامل برای مسألهٔ اعداد همنهشتی فراهم می‌آورد.

اخیراً لی گاوا[5] نویسندهٔ دوم [G-O] نشان داده‌اند که اگر $13 \leq l \leq 31$ اول باشد، آنگاه وزنه‌های نیم‌صحیح فرمهای پیمانه‌ای مشخصی که ضرایب آن $p(n)$ به پیمانه l را درونیابی می‌کنند مشابه فرم‌های پیمانه‌ای تانل عمل می‌کنند. به‌خصوص آنها نشان دادند که زیرمایه‌های پیمانه‌ای $M_{D,l}$ وجود دارند (آنها را می‌توان مشابه منحنی‌های بیضوی درنظر گرفت) که $L-$تابع $L(M_{D,l}, s)$ آنها دارای این خاصیت است که ریشه دوم $L(M_{D,l}, \frac{l-3}{2})$ به طریقی مشخص به ضرایب این فرم‌های پیمانه‌ای مربوط هستند. صحیح بودن حدس بلوخ‌ـکاتو[6] (یک تعمیم گسترده از حدس سینرتن‌ـدیر) ایجاب می‌کند که:

$$L(M_{D,l}, \frac{l-3}{2}) = \Omega_{D,l} . \# \text{III}(M_{D,l})$$

با پذیرفتن حدس بلوخ‌ـکاتو، می‌توان نشان داد که برای nهای زیادی

$$p(n) \equiv 0 \pmod{l} \Longrightarrow \# \text{III}(M_{D,l} \equiv 0 \pmod{l}$$

که D بستگی به n دارد. این دو شرط احتمالاً معادل هستند و بنابراین مشابه این است که تقسیم‌پذیری $p(n)$ غالباً حضور یک عضو از مرتبهٔ l را در گروه‌های تیت‌ـشفرویچ ایجاب می‌کند. بنابراین به نظر می‌رسد که حدس‌هایی مانند حدس راموناجان مرتبط با موجودات کاملاً مجردی از نظریهٔ جدید اعدادند، و این امر شاید مایهٔ شگفتی باشد.

1) Tate-Shafarevich 2) Local-Global 3) Jerrold Tunnell 4) Waldspurger 5) Li Guo
6) Bloch-Kato

آینده؟

آغاز تئوری توابع افرازی به میزان زیادی دست‌کم گرفته شده است. به هر حال چه چیزی می‌تواند ساده‌تر از جمع و شمارش باشد؟ برخلاف آغاز این تئوری، تاریخ نظریهٔ توابع افراز شامل ارتباط آن با قسمت‌های مرکزی و مهمی از نظریهٔ اعداد، از کارهای اویلر گرفته تا تولید روش دایره در نظریه جدید فرم‌های پیمانه‌ای و Lـتابع می‌باشد. جالبتر آن است که ببینیم چه ارتباط‌های دیگری در آینده کشف خواهد شد.

مراجع

[Ahl] S. AHLGREN, The partition function modulo composite integers *M*, *Math. Ann.* 318(2000), 795-803.

[Ahl-O] S. AHLGREN and K. ONO, Congruence properties for the partition function, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A,* to appear.

[A] G. E. ANDREWS, *The Theory of Partitions,* Cambridge Univ. Press, 1998.

[A-G] G.E. ANDREWS and F. GARVAN, Dyson's crank of a partition, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S)*18(1988). 167-171.

[R] B.C. BERNDT and K. ONO, Ramanujan's unpublished manuscript on the partition and tau functions with commentary, *The Andrews Festschrift* (D. Foata and G. N. Han, eds.) Springer-Verlage, 2001, pp. 39-110.

[G] F. GARVAN, New combinatorial interpretations of Ramanujan's partition congruences mod 5, 7 and 11, *Trans. Amer. Math, Soc.* 305(1990),47-77.

[G-K-S] F. GARVAN, D. KIM and D. STANTON, Cranks and *t-cores, Invent. Math.* 101(1990), 1-17.

[G-O] L.GUO and K. ONO, The partition function and the arithmetic of certain modular L-functions *Internat. Math. Res. Notices* 21 (1999), 1179-1197.

[K] N. KOBLITZ, *Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms,* Springer-Verlag, 1993.

[O] K.ONO, Distribution of the partition function modulo m, *Ann. of Math.* 151 (2000), 293-307.

ترجمه: پرویز حسن‌پور فرد
دانشگاه بیرجند، گروه ریاضی
پست الکترونیک: phassanpour@birjand.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شمارهٔ ۳۰(بهار ۱۳۸۲)، صص. ۵۵ تا ۶۰

تفکر مستقل

روبن هرش

مترجمین: فریدون رهبرنیا و محمد صال مصلحیان

روبن هرش (متولد ۱۹۲۷) ریاضیدان و فیلسوف امریکایی است که در دههٔ ۱۹۸۰ مکتب انسانگرایی را در فلسفهٔ ریاضیات مطرح کرد. انسان‌گرایی ریاضیات را یک پدیدهٔ اجتماعی‐تاریخی‐فرهنگی می‌داند که براساس احتیاجات علوم و زندگی شکل می‌گیرد، اشیاء ریاضی را شبیه پول، کارت دعوت و ... موجودی در شعور جمعی و احکام ریاضی را شبیه قانون، مذهب و ... مؤلفه‌ای از آگاهی اجتماعی ما تلقی می‌نماید و معتقد است که بدون انسان‌ها، ریاضیاتی وجود ندارد. داستان واقعی و جذاب زیر از نظر فلسفهٔ آموزش ریاضی حاوی نکات بدیع و ارزشمندی در راستای دیدگاه انسانگرایی هرش است. نام دو قهرمان این گفتگو، ایمره و لودویگ، اشاره به نام ایمره لاکاتوش و لودویگ ویتگنشتاین دارد. این دو فیلسوف، با تصور صورت‌گرایانه از ریاضیات مخالف‌اند. اوّلی به ساز و کار کشف در ریاضیات و نقشی که نوعی «ابطال» در پیشرفت ریاضیات دارد توجه دارد، و از این نظر ریاضیات غیرصوری را شبیه علوم تجربی می‌داند. دومی نیز، به‌خصوص در فلسفهٔ اخیر خود، ریاضیات را نوعی «بازی زبانی» و بنابراین مرتبط با زندگی اجتماعی انسان می‌شمرد.

لیزا از من خواسته بود تا با دوقلوهایی که متقاضی ورود به سال هفتم بودند مصاحبه‌ای انجام دهم. مؤسسهٔ Santa Fe Preparatory School تمایلی به جذب دانش‌آموزانی که پیش معلم سرخانه درس خوانده‌اند، آن هم بدون اطمینان یافتن از میزان آمادگی آنها برای محیط جدید، ندارد.

لودویگ و ایمره ۹۹٫۵ درصد از کل نمرهٔ حساب را کسب کرده بودند اما نوعی پاسخ مضحک نیز در جوابهایشان وجود داشت. به نظر می‌رسید که آن دو قربانی تربیتی سخت می‌باشند. هر دو کت و

کراوات پوشیده بودند و رفتارشان نیز بسیار محترمانه بود.

روبن: چرا می‌خواهید به این مؤسسه بیایید؟

لودویگ: مادرمان فکر می‌کند که وقتش رسیده یاد بگیریم چگونه با دیگران برخورد داشته باشیم.

ایمره: فکر می‌کنیم اینجا از مدارس عمومی بهتر باشد.

روبن: نظر خودت در این باره چیست؟

ایمره: خوب است.

لودویگ: مطمئناً خوب است.

روبن: بسیار خوب، آیا ریاضی را دوست دارید؟

ایمره: درس خوبی است.

لودویگ: امتحان ساده‌ای بود.

روبن: بعداً می‌فهمید که هر چه بالاتر بروید، ریاضیات سخت‌تر می‌شود. (بچه‌ها عکس‌العملی نشان ندادند)

روبن: شما هر دو در امتحان به یک سؤال جواب اشتباه داده‌اید. آیا این سؤال را به یاد دارید؟ ۲، ۴، ۸، ۱۶،؟

لودویگ: بله یادم است، سؤال ساده‌ای بود.

روبن: جواب تو ۱۶بود.

ایمره: اشتباه است. ولی جواب من درست است.

روبن: تو جواب داده‌ای ۲.

ایمره: بله و جواب درست هم همین است.

روبن: نه، هر دو اشتباه کردید. جواب ۳۲ است.

ایمره: از کجا می‌دانید؟

روبن: از کجا می‌دانم؟ من در اینجا معلم ریاضی هستم.

لودویگ: خوب، پس جواب درست ۱۶ است.

روبن: نه، من برایتان توضیح می‌دهم. با ۲ شروع کنید و هر بار عدد را دو برابر کنید. ۴ دوبرابر ۲ است. ۸ دوبرابر ۴ است. ۱۶ دوبرابر ۸ است. بنابراین عدد بعدی ۳۲ است، چون دوبرابر ۱۶ است.

لودویگ: بسیار خوب، من فهمیدم که شما چطور به جواب رسیدید.

روبن: خوب، حال اگر ما بخواهیم یک مرحله جلوتر برویم، عدد بعدی چیست؟

لودویگ: ۳۲ است.

ایمره: نه، جواب همان ۲ است.

(از جوابش متعجب شدم. یک لحظه خواستم فریاد بزنم. ولی این کار را نکردم. نفس عمیقی کشیدم و به زحمت لبخندی زدم)

روبن: بسیار خوب، لودویگ. چرا فکر می‌کنی جواب ۳۲ نیست؟
لودویگ: چون ۳۲ یک عدد بزرگ است و می‌توانید در همین جا متوقف شوید.
ایمره: حواست کجاست؟ مگر نمی‌دانی که همینطور نمی‌توانی توقف کنی، وقتی به آخر رسیدی باید دوباره شروع کنی.
روبن: بسیار خوب. شما هر کدام دلیل خود را دارید. ولی لودویگ تو فکر می‌کنی هر عددی که در آخر به تو بدهند، آن قدر بزرگ است که دیگر لازم نیست از آن جلوتر بروی. اینطور نیست؟
لودویگ: نمی‌دانم، مگر چه اشکالی دارد؟
روبن: و تو ایمره، نظر تو این است که در یک دنباله، وقتی به عدد آخر رسیدی به این معنی است که باید برگردی و دوباره شروع کنی. درست می‌گویم؟
ایمره: خوب معلوم است، شما که نمی‌توانید برای همیشه یک جا بایستید. می‌توانید؟
روبن: چه اشکالی دارد که ما این کار را ادامه دهیم، یعنی هر بار عدد را دو برابر کنیم.
لودویگ: درست است، اگر بخواهیم می‌توانیم این کار را بکنیم.
ایمره: مطمئناً هیچ اشکالی ندارد.
روبن: متشکرم. پس اعتراض نمی‌کنید اگر بگویم عدد بعدی ۶۴ است.
لودویگ: چرا نه.
روبن: بگذارید سؤال را طور دیگری از شما بپرسم، آیا به نظر شما همیشه می‌توانید دو برابر کردن را تا جایی که دوست دارید ادامه دهید.
ایمره: آیا چنین چیزی ممکن است؟ چه طور؟
لودویگ: بالاخره بعد از مدتی خسته می‌شوید و این کار را رها می‌کنید.
روبن: خوب، درست است، ولی منظور من وجود یک اصل می‌باشد.
لودویگ: چه اصلی؟
ایمره: بله، آن اصل را به ما هم یاد بدهید.
روبن: این اصل که همیشه می‌توان یک مرحله جلوتر رفت و کار را ادامه داد.
لودویگ: منظورتان این است که چون می‌توانیم، باید حتماً این کار را ادامه دهیم.
روبن: آیا موضوع را به شوخی گرفته‌ای؟
ایمره: نه، آقای هرش. او قصد شوخی ندارد.
روبن: خوب. می‌خواهم مستقل فکر کنی، اما سعی نکن این کار را به مسخره بگیری.
(جوابی داده نشد)
روبن: دوبرابر کردن را فراموش کنید. آیا می‌توانید بشمارید؟
ایمره: البته که می‌توانیم، ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, . . .
روبن: خوب، می‌بینی که در شمردن انتهایی وجود ندارد. اینطور نیست؟ می‌شود شمردن را همیشه

ادامه داد و یکی به عدد قبلی اضافه کرد.

لودویگ: خوب منظورتان از «همیشه» چیست؟

روبن: منظور من مهم نیست. مهم این است که همیشه می‌توانید یکی به عدد قبلی اضافه کنید.

ایمره: آیا این اتفاق همیشه می‌افتد؟

روبن: انگار دوباره داری زرنگ می‌شوی.

(جوابی داده نشد)

روبن: ببینید، هرکسی می‌داند که می‌توان به عدد قبلی یکی اضافه کرد. این یک نکتهٔ واضح است. تعجب می‌کنم که چطور قبلاً این نکته را یاد نگرفته‌اید؟

لودویگ: ما قبلاً در این مورد صحبتی نداشته‌ایم. اما می‌توانیم امشب از مادرمان بپرسیم.

ایمره: نه، او می‌گوید خودتان تصمیم بگیرید، چون به شما مربوط است.

روبن: این که خوب است. باید یاد بگیرید که خودتان فکر کنید و هر چه را می‌شنوید باور نکنید و کاملاً مستقل و منتقد باشید.

لودویگ: بسیار خوب همین کار را می‌کنیم.

روبن: شما نماد اعشاری و ارزش مکانی را یاد گرفته‌اید. این موضوع را از آزمون ورودی‌تان فهمیدم.

(جواب داده نشد)

روبن: اینطور نیست؟ حتماً می‌دانید که اگر یک صفر به آخر عددی اضافه کنید مثل آن است که آن را در ۱۰ ضرب کرده‌اید و می‌دانید چطور عمل جمع را انجام دهید و در نتیجه می‌توانید ۱ را به هر عددی اضافه کنید.

ایمره: بله می‌دانیم کار ساده‌ای است.

روبن: خوب پس می‌بینی که همیشه می‌توان این کار را ادامه داد، یعنی می‌توانی ۱ را به هر عددی اضافه کنی یا حتی آن عدد را در ۱۰ ضرب کنی.

لودویگ: اگر شما این طور می‌گویید، درست است.

روبن: نه، نه چون من می‌گویم! خودت دراین‌باره فکر کن. خواهی فهمید که همین طور است.

ایمره: اگر نظر من را می‌خواهید، می‌گویم باز هم باید دوباره شروع کرد.

لودویگ: نه، نمی‌توانی چنین کاری را انجام دهی بالاخره خسته می‌شوی، یا می‌میری، یا کاغذت تمام می‌شود.

روبن: بله لودویگ، چیزی که تو می‌گویی درست است ولی مطلب اصلی را متوجه نشده‌ای. خسته شدن، مردن یا تمام شدن کاغذ ربطی به ریاضیات ندارد بلکه به زیست‌شناسی، جامعه‌شناسی و یا هر چه اسمش را بگذاری مربوط است. ما در اینجا با ریاضیات سر و کار داریم.

لودویگ: آیا منظورتان این است که این کار را می‌توانید ادامه دهید چون ریاضی این را می‌گویید؟

روبن: بله درست است! بالاخره مطلب را فهمیدی.

ایمره: این مطلب کجا نوشته شده است؟ آیا در کتاب‌ها هست؟

روبن: نه، در هیچ کتابی نیست و لازم هم نیست در کتاب‌ها باشد. چون همه این موضوع را می‌دانند. ولی چون شما در مدارس معمولی نبوده‌اید، حالا آن را دریافته‌اید.

لودویگ: اگر از معلم ریاضی دیگری بپرسیم، چطور؟ آیا او هم همین مطلب را می‌گوید؟

روبن: قطعاً، تمام معلم‌های ریاضی دنیا همین را می‌گویند.

ایمره: از کجا می‌دانید؟

روبن: چون در غیر این صورت به آنها اجازه داده نمی‌شد ریاضی تدریس کنند.

(جوابی داده نشد)

روبن: خوب، بیایید به بحث اول برگردیم، عدد بعدی چیست؟ ... ,۶۴ ,۳۲ ,۱۶ ,۸ ,۴ ,۲

(جوابی داده نشد)

روبن: اگر می‌خواهید وارد این مؤسسه شوید بهتر است جواب بدهید.

لودویگ: شاید من مدرسهٔ عمومی را بیشتر دوست داشته باشم.

ایمره: نمی‌دانم. این شرایط سخت‌تر از آن چیزی است که فکرش را می‌کردم.

روبن: بگویید. شما که می‌دانید جواب ۱۲۸ است.

لودویگ: اما این آن چیزی است که شما دوست دارید بگوییم.

ایمره: بله، درست است. ما باید چیزی را که شما می‌خواهید، بدانیم و بگوییم.

روبن: نه شما هنوز متوجه نشده‌اید. این آن چیزی که من می‌خواهم نیست بلکه جواب واقعی همین است. شما خودتان هم می‌دانید که جواب درست ۱۲۸ است.

ایمره: جواب درست همان است که شما می‌خواهید.

روبن: مسلماً من از شما می‌خواهم جواب درست بدهید. من یک معلم هستم.

(جوابی داده نشد)

روبن: بسیار خوب، ما به مادرتان درمورد پذیرش شما در مؤسسه خبر می‌دهیم.

(من واقعاً از این که شانس مصاحبه با این دوقلوها را داشتم خوشحال بودم، مطمئناً هیچ یک از آنها را در کلاسم نخواهم پذیرفت. در مدارس عمومی از آنها همان چیزی را می‌خواهند که به آنها گفته‌اند. اما در این مؤسسه، نکتهٔ قابل توجه برای ما تفکر مستقل می‌باشد.)

مرجع

Reuben Hersh, Independent Thinking, The College Math. J., 34 (2003), No. 2, 112-115.

مترجمین: فریدون رهبرنیا
دانشگاه فردوسی مشهد، گروه ریاضی
پست الکترونیک: rahbar@math.um.ac.ir
محمد صال مصلحیان
دانشگاه فردوسی مشهد، گروه ریاضی
پست الکترونیک: msalm@math.um.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شمارهٔ ۳۰(بهار۱۳۸۲)، صص. ۶۱ تا ۶۳

مسأله

این قسمت از فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی به طرح و سپس حلِ مسائلی در حدِ دروسِ دوره‌های کارشناسی و کارشناسی ارشدِ ریاضیات اختصاص دارد. از کسانی که مایل به ارسال مسائل یا حل مسائلِ مطرح شده می‌باشند، تقاضا می‌شود مسائل خود را به نشانی تهران، مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضی، پژوهشکدهٔ ریاضیات، صندوق پستی ۵۷۴۶ـ۱۹۳۹۵، محمدرضا پورنکی ارسال فرمایند. مسائلِ ارسال‌شده باید همراه با حل کامل مسأله باشد و در مجله به نامِ شخصِ فرستنده درج خواهد شد.

حل مسالهٔ ۵۲: فرض کنید $x, y \in G$ و $g \in N$ دلخواه باشند. چون $\langle g \rangle$ زیرگروهی از N است پس طبق فرض $\langle g \rangle \trianglelefteq G$ و لذا $x^{-1}gx = g^l$ و $y^{-1}gy = g^s$ برای یک $l, s \in \mathbb{Z}$. در نتیجه

$$\begin{aligned}[x,y]g &= xyx^{-1}y^{-1}g \\ &= xyx^{-1}y^{-1}gyy^{-1} \\ &= xyx^{-1}g^s y^{-1} \\ &= xyx^{-1}g^s xx^{-1}y^{-1} \\ &= xy(x^{-1}gx)^s x^{-1}y^{-1} \\ &= xyg^{ls}x^{-1}y^{-1}\end{aligned} \qquad \begin{aligned}g[x,y] &= gxyx^{-1}y^{-1} \\ &= xx^{-1}gxyx^{-1}y^{-1} \\ &= xg^l yx^{-1}y^{-1} \\ &= xyy^{-1}g^l yx^{-1}y^{-1} \\ &= xy(y^{-1}gy)^l x^{-1}y^{-1} \\ &= xyg^{sl}x^{-1}y^{-1}\end{aligned}$$

پس $[x,y]g = g[x,y]$ و لذا $[x,y] \in C_G(N) \leq N$. پس $G' \leq N$، یعنی G/N آبلی است. $\square$

حل مسالهٔ ۵۳: فرض کنید λ_1، $\cdots$، λ_n تمام مقادیر ویژهٔ A باشد. پس $trA^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$، $trA^3 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^3$ و $trA^4 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^4$. چون $trA^4 - 2trA^3 + trA^2 = 0$، لذا

$0 = \sum_{i=1}^n(\lambda_i^4 - 2\lambda_i^3 + \lambda_i^2)$، یا $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2(\lambda_i - 1)^2 = 0$. چون λ_iها حقیقی هستند، پس یا صفراند و یا یک. چون $l = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = trA^2$، پس l عددی صحیح است و l تا از λ_iها برابر یک و بقیهٔ آنها صفراند.

پس $trA^k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k = l$ □

حل مسألهٔ ۵۴: چون p فرد است $a^{2^n} + 1 \overset{p}{\equiv} 0 \Rightarrow a^{2^n} \overset{p}{\equiv} -1 \Longrightarrow ord_p a^{2^n} = 2$.
چون $ord_p a^{2^n} = \frac{ord_p a}{(ord_p a, 2^n)}$، پس $ord_p a = 2(ord_p a, 2^n)$. از طرفی $(ord_p a, 2^n)|2^n$، پس $2(ord_p a, 2^n)|2^{n+1}$ و لذا $ord_p a|2^{n+1}$که نتیجه می‌دهد $ord_p a = 2^l$ برای یک $0 \le l \le n+1$.
اگر $0 \le l \le n$ آنگاه $2^l = 2^{l+1}$ که تناقض است پس $l = n+1$، لذا $ord_p a = 2^{n+1}$. امّا $ord_p a|\phi(p)$، پس $2^{n+1}|p-1$ که نتیجه می‌دهد $p \overset{2^{n+1}}{\equiv} 1$. □

حل مسألهٔ ۵۵. فرض کنید Kو K' دو میدان باشند که مشخصه‌ای مخالف ۲ و ۳ دارند و $f : K \to K'$ را یک همریختی بین گروه جمعی K و K' در نظر بگیرید با این ویژگی که $f(1) = 1$ و برای هر $x \in K$، $f(x^3) = f(x)^3$. ثابت کنید f همریختی میدانی است.

فرض کنید $x \in K$ دلخواه باشد.

$$
\begin{aligned}
& f((1+x)^3) = f(1+x)^3 \Rightarrow f(1 + x^3 + 3x^2 + 3x) = (f(1) + f(x))^3 \\
& \Rightarrow f(1) + f(x^3) + f(3x^2) + f(3x) = f(1)^3 + f(x)^3 + 3f(1)f(x)^2 + 3f(1)^2 f(x) \\
& \Rightarrow 1 + f(x)^3 + 3f(x^2) + 3f(x) = 1 + f(x)^3 + 3f(x)^2 + 3f(x) \\
& \Rightarrow 3f(x^2) = 3f(x)^2. \\
& \overset{char(K') \neq 3}{\Longrightarrow} f(x^2) = f(x)^2.
\end{aligned}
$$

حال $x, y \in K$ را دلخواه بگیرید.

$$
\begin{aligned}
(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \Rightarrow\ & f((x+y)^2) = f(x^2 + y^2 + 2xy) \\
\Rightarrow\ & f(x+y)^2 = f(x^2) + f(y^2) + f(2xy) \\
\Rightarrow\ & (f(x) + f(y))^2 = f(x)^2 + f(y)^2 + 2f(xy) \\
\Rightarrow\ & (f(x)^2 + f(y)^2 + 2f(x)f(y) = f(x)^2 + f(y)^2 + 2f(xy) \\
\overset{char(K') \neq 2}{\Longrightarrow}\ & f(xy) = f(x)f(y).
\end{aligned}
$$

پس f همریختی میدانی است. □

تشکر: از آقای دکتر علی‌رضا جمالی (دانشگاه تربیت معلم تهران) به خاطر ارسال مسائل متشکریم.

مسائل جدید

۵۶. فرض کنید a و b دو عدد طبیعی باشند با این ویژگی که $(a,b) = ۱$ ب.م.م.
ثابت کنید $\text{ord}_{ab}(a+b) =$ ک.م.م$[\text{ord}_b a, \text{ord}_a b]$. (منظور از $ord_n m$، مرتبهٔ m به هنگ n می‌باشد.)

۵۷. فرض کنید R و R' دو حلقه باشند که تمام اعضایشان خودتوان هستند و $f : R \to R'$ را تابعی یک به یک و پوشا در نظر بگیرید با این ویژگی که برای هر $x, y \in R$، $f(xy) = f(x)f(y)$. ثابت کنید $R \cong R'$.

۵۸. اگر A یک ماتریس ۲×۳ و B یک ماتریس ۳×۲ با درایه‌های مختلط باشند با این ویژگی که

$$AB = \begin{pmatrix} ۸ & ۲ & -۲ \\ ۲ & ۵ & ۴ \\ -۲ & ۴ & ۵ \end{pmatrix},$$

ماتریس BA را مشخص کنید. (راهنمایی: $(AB)^۲$ را محاسبه کنید.)

۵۹. فرض کنید G یک گروه باشد و H زیرگروهی از آن با این ویژگی که برای هر $x \in G \setminus H$ و هر $y \in G$، عضو $u \in H$ موجود است که $y^{-۱}xy = u^{-۱}xu$. ثابت کنید H در G نرمال است و G/H آبلی می‌باشد.