فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۲ (بهار ۱۳۸۳) صص. ۱ تا ۶

جورج دانتزیگ

حسین تقی‌زاده کاخکی

مقدمه

نام جورج برنارد دانتزیگ به علت ارائهٔ آثار بی‌همتا در زمینهٔ تحقیق در عملیات و بهینه‌سازی بر تارک تاریخ علم و به ویژه تاریخ ریاضیات همواره خواهد درخشید. بی‌تردید واردشدن بخشی از ریاضیات در برنامهٔ دانشگاهی رشته‌هایی چون مدیریت، بازرگانی، حسابداری، اقتصاد و ... مرهون اندیشه‌های بی‌نظیر او است. بنابراین کارهای وی نه تنها در شناخت و تعمیق مرزهای دانش مؤثر بوده‌اند بلکه کمک بسیاری به عمومی کردن ریاضیات نیز نموده‌اند.
در این مقاله نظری کوتاه به زندگی و آثار این ریاضیدان برجسته می‌اندازیم.

جورج برنارد دانتزیگ[۱] فرزند توبیاس دانتزیگ[۲] و آنیا اوریسون[۳] در ۸ نوامبر ۱۹۱۴ در شهر پرتلند ایالت اورگان آمریکا متولد شد. پدر جورج، توبیاس اهل لتونی بود، به فرانسه رفت و به مطالعهٔ ریاضی با هنری پوانکاره پرداخت. در آنجا با آنیا اوریسون که وی نیز در سوربن[۴] ریاضی می‌خواند ازدواج کرد. آنها سپس به آمریکا مهاجرت کردند و در اورگان مستقر شدند. فرزند خود جورج را هم‌نام جورج برنارد شاو، جورج برنارد نام نهادند. پسر دیگر خود را نیز به افتخار هنری پوانکاره، هنری نامیدند. توبیاس دانتزیگ سرانجام از دانشگاه ایندیانا دکتری ریاضی دریافت کرد. آنیا فوق لیسانس زبان فرانسه گرفت و به عنوان متخصص زبان در کتابخانهٔ کنگرهٔ آمریکا در واشنگتن مشغول به کار شد. جورج دوران دبستان و دبیرستان خود را در واشنگتن گذراند. در دبیرستان به هندسه علاقه پیدا کرد. به نقل از خود او در این دوران پدرش هزاران مسألهٔ هندسه به وی می‌داد. این امر به پرورش قدرت تخیل وی کمک شایانی کرد. توبیاس در دههٔ ۱۹۲۰ کتاب معروف خود «عدد، زبان علم» را به رشتهٔ تحریر درآورد. جورج در تهیهٔ بعضی از اشکال این کتاب به پدر خود کمک کرد. این کتاب در سال ۱۹۷۰ تجدید چاپ شد. ترجمهٔ فارسی آن نیز توسط آقای مهندس عباس گرمان در سری انتشارات کتاب‌های جیبی به چاپ رسیده است.

جورج دانتزیگ در سال ۱۹۳۶ لیسانس خود را در ریاضی و فیزیک از دانشگاه مریلند، جایی که در آن زمان پدرش به تدریس اشتغال داشت، دریافت کرد. در تابستان همان سال با

1) George Bernard Dantzig 2) Tobias Dantzig 3) Anja Ourisson 4) Sorbonne

آن شمونر[1] ازدواج کرد. سپس به دانشگاه میشیگان رفت و در سال ۱۹۳۷ به دریافت درجهٔ فوق لیسانس ریاضی نایل آمد. در آنجا با هیلدبرانت[2] ، وایلدر[3] و رینر[4] کار کرد. وی سپس به آمار روی آورد؛ به واشنگتن رفت و از ۱۹۳۷ تا ۱۹۳۹ در وزارت کار[5] بر روی پروژه‌ای به نام «مطالعهٔ نحوه خرید مشتریان در شهر» [6] کار کرد.

در سال ۱۹۳۹ به دنبال علاقه‌ای که به کارهای جرزی نیمان[7] پیدا کرده بود با وی مکاتبه کرد و برای ادامهٔ تحصیل نزد وی به دانشگاه کالیفرنیا در برکلی رفت. داستان معروفی از اولین سال اقامتش در برکلی از وی نقل می‌شود که «روزی دیر به کلاس نیمان می‌رسد، دو مسأله بر روی تخته نوشته شده بود، وی به گمان این که تکلیف درسی هستند، آنها را یادداشت می‌کند. چند روز بعد با عذرخواهی از این که تکالیف را که به نظرش سخت‌تر از معمول بودند دیر انجام داده است به نیمان تحویل می‌دهد. حدود شش هفته بعد صبح یک روز یکشنبه ساعت ۸ دانتزیگ و همسرش با صدای در از خواب بیدار می‌شوند. کسی که پشت در بود نیمان بود که هیجان زده اعلام می‌کند وی مقدمه‌ای بر یکی از مقالات نوشته و از وی می‌خواهد آن را بخواند تا برای چاپ ارسال کند.» علی‌الظاهر دو مسألهٔ روی تخته، مسائل حل نشده‌ای در آمار بوده‌اند.
نکتهٔ اصلی این داستان که اغلب روایت شده این است که اگر دانتزیگ می‌دانست که این دو مسأله حل نشده‌اند ممکن بود سعی در حل آنها نکند. اما این فرض «مثبت» که نه تنها این مسائل قابل‌حل‌اند بلکه به روش‌های متداول نیز حل می‌شوند، باعث شد که وی توجهش را معطوفِ یافتنِ جواب کند، بنابراین گاهی عدم آگاهی می‌تواند به یک کاشف کمک کند.

دانتزیگ در سال ۱۹۴۱ تقریباً دورهٔ دکتریش را به اتمام رسانده بود که به دلیل ورود آمریکا به جنگ جهانی دوم در تحصیلش وقفه ایجاد شد، وی به عنوان سرپرست گروه کنترل آماری شاخهٔ تحلیل جنگی نیروی هوایی[8] به واشنگتن رفت و تا سال ۱۹۴۶ که برای اتمام دورهٔ دکتریش به برکلی بازگشت در آنجا ماند. وی در آنجا بر روی مسائل برنامه‌ریزی تولید، تهیهٔ قطعات و پرواز هواپیماها کار می‌کرد. او نقل می‌کند که این کار مستلزم برنامه‌ریزی برای «صدها هزار نوع مواد مختلف و شاید پنجاه هزار متخصص» بود. پس از بازگشت به برکلی چنانکه بعداً در سال ۱۹۸۶ طی مصاحبه‌ای با «مجلهٔ ریاضیات کالج»[9] ذکر می‌کند هنگامی که درصدد انتخاب موضوعی برای رسالهٔ دکتریش بود نیمان به وی می‌گوید که دو مسأله‌ای که ذکر آن رفت را در پوشه‌ای قرار داده و به او تحویل دهد، او آنها را به عنوان رسالهٔ وی قبول خواهد کرد.

پس از دریافت دکتریش برکلی به او پیشنهاد کار می‌کند ولی او (یا در واقع به گفتهٔ وی همسرش) به‌دلیل اندک بودن حقوق آن را نمی‌پذیرد و در عوض به عنوان مشاور ریاضی وزارت دفاع با هدف مکانیزه کردن روند برنامه‌ریزی به واشنگتن باز می‌گردد.در سال ۱۹۴۷ بعضاً

1) Anne Shmuner 2) Hildebrandt 3) Wilder 4) Rainer 5) Bureau of Labor Statistics 6) Urban Study of Consumer Purchase 7) Jerzey Neyman 8) Combat Analysis Branch of the Air Force's Headquarter's Statistical Control 9) College Mathematics Journal

به دلیل کارهای قبلی‌اش در نیروی هوایی موفق به ابداع روش سیمپلکس برای مسائل برنامه‌ریزی خطی، که عمده شهرت خود را مدیون آن است، می‌شود. وی در مصاحبه‌ای در سال ۲۰۰۱ با ایرو لاستیگ[۱] مهمترین دستاوردهای خود را در سال‌های اولیه سه چیز می‌داند: «نخستین دستاورد من این بود که تشخیص دادم اغلب مسائل برنامه‌ریزی عملی را می‌توان به صورت ریاضی مدل‌سازی کرد؛ دومین کمک من این بود که تشخیص دادم می‌توان قواعد مختلف را حذف کرده و آن را با یک تابع هدف که باید بهینه شود جایگزین کرد و سرانجام سومین کمک من ابداع روش سیمپلکس بود.» وی این نکات را در مقاله‌ای در مورد برنامه‌ریزی خطی که به مناسبت پنجاهمین سالگرد انتشار مجلهٔ تحقیق در عملیات در سال ۲۰۰۲ نوشته است نیز ذکر می‌کند.»

از نخستین مسائلی که با این روش حل شد مسألهٔ رژیم غذایی جورج استیگلر[۲] بود (که بعداً برندهٔ جایزهٔ نوبل شد) با ۹ معادله و ۷۷ مجهول. حل این مسأله با امکانات محاسباتی آن زمان ۱۲۰ روز کاری یک نفر به طول انجامید. در واقع تیمی متشکل از ۱۰ نفر تحت سرپرستی جک لدرمن[۳] در سازمان آمار[۴] در طی ۱۲ روز آن را حل کردند.

مسألهٔ دیگری که با این روش حل شد مسألهٔ معروف به «نجات هوایی برلین»[۵] بود. این مسأله از کمک هوایی رساندن به برلین در زمان مسدود شدن راه‌های زمینی به آن ناشی می‌شد.

در سال ۱۹۵۲ دانتزیگ به مؤسسهٔ تحقیقاتی RAND پیوست تا سیمپلکس را بر روی کامپیوتر پیاده کند. در سال ۱۹۶۰ او به عنوان استاد و سرپرست مرکز تحقیق در عملیات به دانشگاه برکلی رفت. وی سپس در سال ۱۹۶۶ به عنوان استاد تحقیق در عملیات و علوم کامپیوتر به استانفورد رفت و حتی پس از بازنشستگی در ۱۹۸۵ تا سال ۱۹۹۷ به تدریس و تحقیق در آنجا ادامه داد.

دانتزیگ در سمپوزیوم بین‌المللی برنامه‌ریزی در اوت ۱۹۹۷ در لوزان سویس «خاطراتی از سال‌های طلایی در RAND» نقل می‌کند. وی می‌گوید در سال‌های پنجاه (میلادی) بسیاری از ایده‌های برنامه‌ریزی ریاضی در بخش‌های ریاضی، علوم کامپیوتر و اقتصاد مؤسسه RAND به وجود آمد؛ از جمله می‌توان به ابداع برنامه‌ریزی پویا توسط بلمن[۶]، نظریهٔ شبکه‌های جریان توسط فولکرسون[۷]، نظریهٔ بازی‌ها توسط شپلی[۸] و نظریه «پورت فولیو»[۹] توسط مارکویتز[۱۰]، که بعداً به دلیل کارهایش در این زمینه جایزه نوبل در اقتصاد را دریافت نمود، اشاره کرد.

همچنین ولف[۱۱] الگوریتم معروفش برای حل مسائل برنامه‌ریزی درجهٔ دو را ارائه کرد. مان[۱۲] و مارکویتز تحلیل فرآیند[۱۳] را برای صنایع نفت و صنایع فلزی ارائه کردند. اورچارد هیز[۱۴] نیز نخستین کدهای کامپیوتری برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی را نوشت.
در مورد اهمیت روش سیمپلکس خبرنامهٔ گزارش استانفورد[۱۵] در شمارهٔ ۲۵ می ۲۰۰۵ از قول

1) Irv Lustig 2) George Stigler 3) Jack Laderman 4) Bureau of Statistics 5) Berlin Airlift 6) Bellman 7) Fulkerson 8) Shapley 9) Portfolio 10) Markowitz 11) Wolfe 12) A. Manne 13) Process Analysis 14) Orchard-Hayes 15) Stanford Report

پروفسور وانیات[۱] استاد این دانشگاه نقل می‌کند که «در واقع نفوذ سیمپلکس به قدری گسترده است که حدس زده می‌شود بین ۱۰ تا ۲۵ درصد از تمام محاسبات علمی به سیمپلکس اختصاص داده می‌شود. احتمالاً این روش تنها الگوریتمی است که در ٦ دههٔ گذشته بیشترین کاربرد را داشته است.» وی همچنین می‌افزاید «از جنگ جهانی دوم هیچ فردی به اندازهٔ دانتزیگ بر علوم ریاضی و بخصوص کاربرد آن در مسائل عملی تأثیرگذار نبوده است.» در همین شماره جین گلوب[۲] نیز سیمپلکس را یکی از بزرگترین الگوریتم‌های قرن بیستم می‌داند. انستیتو مهندسین برق و الکترونیک (IEEE) نیز الگوریتم سیمپلکس را به عنوان یکی از ده الگوریتم برتر قرن بیستم انتخاب کرده است.

خبرنامه سیام[۳] در نوامبر ۱۹۹۴ به مناسبت هشتادمین سال تولد دانتزیگ از وی به همراه کانترویچ[۴] و فون نویمان[۵] به عنوان بنیان‌گزاران برنامه‌ریزی خطی یاد می‌کند. در واقع بسیاری دانتزیگ را پدر برنامه‌ریزی خطی می‌دانند.

علاوه بر ابداع الگوریتم سیمپلکس، تأثیر جورج دانتزیگ را می‌توان در طیف وسیعی از مسائل برنامه‌ریزی ریاضی و کاربردهای آن از الگوریتم اولیه ــ ثانویه (۱۹۵٦)، قضایای حداکثر جریان ــحداقل برش در شبکه‌ها، روش تجزیهٔ دانتزیگ ــ ولف (۱۹٦۱)، روش کران بالای تعمیم یافته (۱۹٦۷) گرفته تا برنامه‌ریزی در شرایط عدم اطمینان با استفاده از محاسبات موازی (۱۹۸۸) و مسائل برنامه‌ریزی تصادفی (۱۹۹۳) و بسیاری دیگر مشاهده کرد.

بخش مهمی از این مقالات با ویراستاری کتل[٦] در سال ۲۰۰۳ میلادی تحت عنوان «مقالات اصلی جورج دانتزیگ»[۷] توسط انتشارات دانشگاه استانفورد در ۳۷۸ صفحه به چاپ رسیده است. فهرست کامل مقالات دانتزیگ را نیز می‌توان در این کتاب یافت. علاوه بر این، کتاب «برنامه ریزی خطی و تعمیم آن»[۸] که در سال ۱۹٦۳ به چاپ رسید و بعداً چندین بار تجدید چاپ شده، یکی از کتب کلاسیک این رشته است. کتاب دیگر وی با ساعتی[۹] که کمتر شناخته شده، کتاب «شهر فشرده: طرحی برای یک محیط شهری قابل زیست»[۱۰] است. پس از بازنشستگی به همراه تاپا[۱۱] از دانشجویان سابقش کتاب برنامه‌ریزی خطی (۱) ــ مبانی را تألیف کرد. در فهرست مراجع این کتاب نام ۲۰۷ مقاله و گزارش از دانتزیگ، به تنهایی و با همکاری دیگران درج شده است. جلد دوم این کتاب برنامه ریزی خطی (۲) ــ تئوری و تعمیم، نیز در سال ۲۰۰۳ توسط مؤسسهٔ انتشارات اشپرینگر به چاپ رسیده است. اخیراً نیز گویا دانتزیگ بر روی کتابی علمی ــ تخیلی به نام «در تصویر خودش»[۱۲] که در مورد آفتی[۱۳] است که نوع بشر را از میان می‌برد، کار می‌کرده است.

1) Veinoit 2) Gene Golub 3) SIAM NEWS 4) Kantrovich 5) Von Neuman
6) Cottle 7) The Basic George B. Dantzig 8) Linear Programming and Extensions
9) Saati 10) Compact City: A plan for a Livable Urban Environment 11) M. Thapa
12) In His Own Image 13) Plague

تأثیر دانتزیگ بر تحقیق در عملیات و برنامه‌ریزی ریاضی از طریق تربیت بیش از ۵۰ دانشجوی دکتری نیز غیر قابل انکار است. از جمله این دانشجویان می‌توان از کُتل، جانسون[۱]، ون اسلایک[۲] و وتز[۳] نام برد که به افتخار او در سال ۱۹۷۹ جایزه دانتزیگ را بنیان نهادند. این جایزه به طور مشترک توسط انجمن برنامه‌ریزی ریاضی (MPS) و انجمن ریاضی کاربردی و صنعتی آمریکا[۴] به کارهای تحقیقاتی اصیل که تأثیر عمده‌ای بر برنامه‌ریزی ریاضی داشته‌اند اهدا می‌شود، نخستین بار این جایزه در سال ۱۹۸۲ به پاول[۵] و راکفلر[۶] اهداء شد. انجمن تحقیق در عملیات آمریکا[۷] نیز جایزهٔ بهترین رسالهٔ دکتری در زمینهٔ کاربرد برنامه‌ریزی ریاضی را به افتخار وی جایزهٔ رسالهٔ دانتزیگ[۸] نام نهاده است.

وی از ۸ دانشگاه دکترای افتخاری دریافت کرد؛ عضو آکادمی ملی علوم[۹]، آکادمی هنر و علوم آمریکا[۱۰] و آکادمی ملی مهندسی[۱۱] بود؛ جوایز متعددی دریافت کرد از جمله مدال ملی علوم[۱۲]، جایزه هاروی[۱۳] و نخستین جایزهٔ نظری فن نویمان[۱۴]. نقل شده است که کوپمنز[۱۵] که در سال ۱۹۷۵ به طور مشترک با کانترویچ به خاطر کارهای تحقیقاتی‌اش در نظریهٔ تخصیص بهینهٔ منابع، برنده جایزهٔ نوبل در اقتصاد شد از این که دانتزیگ در این جایزه شریک نبوده است به قدری ناراحت می‌شود که حتی به فکر رد کردن آن می‌افتد. دانتزیگ در ۱۳ می امسال ۲۰۰۵، (۲۳ اردیبهشت ۱۳۸۴) پس از یک دورهٔ کوتاه بیماری بر اثر دیابت و ناراحتی قلبی در شهر پالو التو[۱۶] در کالیفرنیا درگذشت. در مصاحبه با ایرو لاستیگ، دانتزیگ در پاسخ به این سؤال که به نظر شما بی‌اعتبارترین انتقاد از بهینه‌سازی چیست، می‌گوید: «این که گفته می‌شود بهینه‌سازی اتلاف وقت است، زیرا واقعاً نمی‌دانیم مقادیر واقعی داده‌ها چه هستند؟» و در پاسخ به این سؤال که مهمترین پتانسیل بهینه‌سازی چیست؟ دانتزیگ می‌گوید: «این است که توانایی تغییر دنیا را دارد.»

مراجع

[1] www.stanford.edu/groups/Sol/dantzig.html

[2] www.groups.dcs. st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Dantzig-George.html

[3] www.umass.edu/wsp/statistics/tales/dantzig.html

[4] www.informs.org/prizes/whoisDantzig.html

1) E. L. Johnson 2) R. M. Van Slyke 3) R. J.- B. Wets 4) SIAM1
5) M. J. D. Powell 6) R.T. Rockafeler 7) INFORMS 8) Dantzig Dissertation Award
9) National Academy of Sciences 10) American Academy of Arts and Sciences
11) National Academy of Engineering 12) National Medal of Science 13) Harvey
14) John Von Neuman Theory Prize 15) T. C. Koopmans 16) Palo Alto

[5] www.siam.org/prizes/dantzig.html

[6] http://Carbon.cudenver.edu/∼hgreenbe/glossary/dantzig.html

[7] www. snopes.com/college/homework/unsolved.asp

[8] http://primal.iems.nure.edu/∼levi/dantzig.html

[9] www.e-optimization.com/directory/trailblazer/dantzig

[10] www.mytimes.com/2005/05/23/national/23dantzig.html? oref=login

[11] www.washingtonpost.com/wp-dyn/Content/article/2005/05/18/AR200505802171.html

[12] http://news-service stanford.edu/news/2005/may25/dantzig obit-052505.html

[13] Sherry.ifl.unizh.ch/context/427591/0

[14] Cottle, R.W. *The Basic George B. Dantzig*, Stanford Univ. Press, 2003.

[15] Dantzig, G.B. and M.N. Thapa, *Linear Programming 1; Introduction*, Springer 1997.

[16] Dantzig, G.B. and M.N. Thapa, *Linear Programming 2*; *Theory and Extensions,* Springer 2003.

[17] Dantzig, G.B. and P. Wolfe, The Decomposition Algorithm for Linear Programming, *Econometrica*, 29, (1961) 767-778.

[18] Dantzig, G.B. and G. Infanger, Multi-Stage Stochastic Linear Programs for Portfolio Optimization, *Annals of Operations Research* 45 (1993), 59-76.

[19] Dantzig, G.B. *Linear programming and Extensions,* Princeton Univ. Press 1963.

[20] Dantzig, G.B., Linear Programming, *Operations Research*, V.50,No. 1 (Jan-Feb 2002) 42-47.

[21] Dantzig, G.B., Planning Under Uncertainty Using Parallel Computing, *Annals of Operations Research*, 14 (1988) 1-16.

[22] Gass, S.I., The Life and Times of the Father of Linear Programming, *ORMS Today*, V.32, No. 4(Aug. 2005) 40-48.

حسین تقی‌زاده کاخکی
دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده علوم ریاضی
پست الکترونیک taghizad@math.um.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۲ (بهار ۱۳۸۳) صص. ۷ تا ۱۸

بازی‌های ترکیبیاتی: بی‌طرفانه ـ پارتیزانی

مانی رضائی

چکیده

بازی‌های ترکیبیاتی را می‌توان بخشی از «بازی‌های قطعی»، در مقابل بازی‌های احتمالی، در نظر گرفت. آن بخش از ریاضیات که به‌نام «نظریهٔ بازی‌ها» شهرت دارد، شامل بازی‌های احتمالی و مباحثی است که در اقتصاد، بیمه، مدیریت، سیاست، علوم نظامی، و ... کاربرد وسیع دارد.

این نوشتار نگاهی اجمالی به موضوع وسیع بازی‌های ترکیبیاتی دارد. مقاله با تعریف مقدماتی از این بازی‌ها و چند نمونهٔ آن‌ها شروع می‌شود و با تعریف مجردی از بازی‌ها و بررسی چند قضیهٔ کوتاه ادامه می‌یابد. شرایط این بازی‌ها و جذابیت آن‌ها باعث می‌شود بازی‌های ترکیبیاتی از بعد آموزشی مورد توجه بیشتری قرار گیرد.

۱. بازی ترکیبیاتی چیست؟

در رویارویی با یک بازی، برای تعیین این که آیا این بازی به‌عنوان بازی ترکیبیاتی قابل رده‌بندی است یا نه، به تعریف روشنی از این بازی‌ها نیاز داریم.

بازی‌های ترکیبیاتی به بازی‌هایی اطلاق می‌شود که (تقریباً همه‌جا) دارای شرایط زیر باشند:

۱ــ بازی بین دو بازیکن که نفر **چپ** و نفر **راست** می‌خوانیم، انجام می‌شود. کسی که نوبت بازی با وی باشد، نفر اول نامیده می‌شود.

۲ــ دارای **وضعیت**‌های مختلفی است که غالباً تعداد آن‌ها متناهی است. **وضعیت شروع** بازی، یکی از وضعیت‌های خاص محسوب می‌شود.

۳— **قواعد** بازی به‌وضوح تعریف شده است به‌طوری که دو مجموعه از حرکت‌های نفر چپ و نفر راست به‌دست می‌آید که دو بازیکن می‌توانند حرکت خود را از آن میان **انتخاب** کنند.

۴— در تمام بازی‌ها، نفر چپ و نفر راست به‌طور **متناوب** حرکت می‌کنند.

۵— عموماً بازیکنی که قادر به حرکت نباشد، **بازنده** است (**شرط پایان بازی**) و هیچ‌گاه شرایط تساوی برقرار نمی‌شود.

٦— قواعد بازی طوری است که بازی به انتها می‌رسد و الزاماً یکی از بازیکنان در انتها قادر به حرکت نخواهد بود. این حالت **وضعیت پایانی** خوانده می‌شود. پس این بازی‌ها، بی‌پایان نخواهند بود.

۷— هر دو بازیکن از جزییات بازی **اطلاع کامل** دارند و کسی فرصتی برای کلک زدن ندارد.

۸— هیچ **حرکت شانسی** یا اجباری بر مبنای تاس، سکه، کارت یا هر نوع احتمال دیگر وجود ندارد.

از میان بازی‌هایی که می‌شناسیم، کدام‌یک بازی ترکیبیاتی است؟ مار و پله و منچ بجز شرط ۸ (و احتمالاً ۱) همهٔ شرایط را دارند. نرد نیز همهٔ شرایط بجز شرط ۸ را دارد. بازی XO شرط ۵ را ندارد و شطرنج نیز شرط ۵ و ٦ را ندارد. بازی‌هایی که با کارت انجام می‌شود نیز عاری از شرایط ۱، ۳، ۵، ۷، و ۸ است و بهتر است بگوییم تقریباً هیچ‌یک از شرط‌های بازی‌های ترکیبیاتی را ندارد!

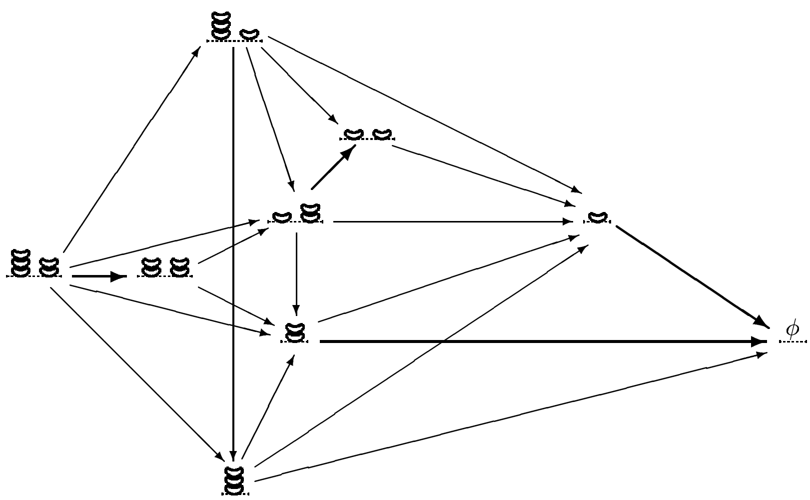
نیم بازیی است که با کپه‌های لوبیا انجام می‌شود. در هر نوبتِ بازی، کسی که نوبت او باشد، با انتخاب یکی از کپه‌ها می‌تواند هر تعداد (و حتی همه) لوبیاها را از آن کپه بردارد. این بازی تمام شرایط را دارد و به‌عنوان یکی از بازی‌های ترکیبیاتی از اهمیت ویژه‌ای نیز برخوردار است. بازی گراندی نیز با کپه‌های لوبیا انجام می‌شود و در هر نوبت می‌توان یکی از کپه‌ها را به دو کپه با تعداد لوبیای نابرابر (و البته ناتهی) تقسیم کرد.

بازی‌های گراندی و نیم، نمونه‌هایی از بازی‌های ترکیبیاتی هستند که در آن‌ها مهره‌ها متمایز نیستند. در این بازی‌ها، وضعیت‌هایی ویژه برای هر یک از بازیکنان در نظر گرفته نمی‌شود، بلکه **نوبت حرکت** در بازی اهمیت دارد و امکان حرکت برای دو طرف یکسان است. چنین بازی‌هایی **بی‌طرفانه** نامیده می‌شوند[۱] در مقابل این بازی‌ها، اگر هر یک از دو طرف مهره‌های مخصوص به خود داشته، یا امکان (محدودیتی) خاصی برای حرکت داشته باشند، مانند بازی با دومینو (که در انتهای این مقاله آمده است) بازی **پارتیزانی** خوانده می‌شود.

۱) در برگردان مرجع [۵] به فارسی، این رده از بازی‌ها، **بازی منصفانه** ترجمه شده‌اند. در فرهنگ معاصر انگلیسی ـ فارسی (ویراستِ دوم)، محمدرضا باطنی، در مقابل کلمهٔ fair، معنی «بی‌طرف» نیز آمده است. لغت بی‌طرفانه به‌معنی «بی‌طرف بودن مهره‌ها در قبال بازیکنان» برای این دسته از بازی‌ها، به عقیدهٔ نگارنده متناسب‌تر به‌نظر می‌رسد. از سوی دیگر، به‌نظر نگارنده در مقابل این بازی‌ها، بازی‌های پارتیزانی (چندان) غیرمنصفانه نیستند!

۲. تحلیل کامل ـ راهبرد پیروزی

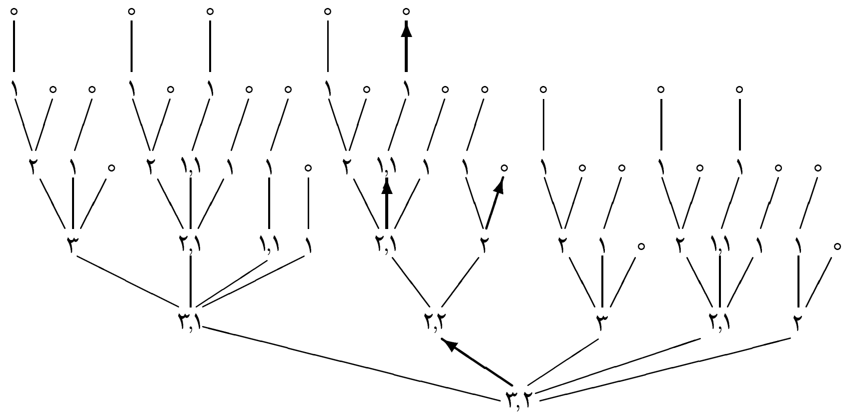
برای بررسی یک بازی می‌توان همهٔ وضعیت‌های آن را در نظر گرفت و امکان تبدیل شدن وضعیت‌های گوناگون به یکدیگر را تحلیل کرد. برای این منظور بازی را می‌توان با یک گراف جهت‌دار نمایش داد: رأس‌ها، وضعیت‌ها هستند و کمان‌ها معرف انتخاب‌های ممکن از یک وضعیت به وضعیت بعدی است. چنان‌چه محدودیت‌هایی برای انتخاب حرکت برای هر یک از دو بازیکن چپ یا راست وجود داشته باشد، کمان‌ها را با سه رنگ رنگ‌آمیزی می‌کنیم. یک رنگ (مثلاً قرمز) انتخاب‌های نفر چپ، و رنگ دیگر (مثلاً آبی) انتخاب‌های نفر راست، و رنگ سوم (مثلاً سبز) انتخاب‌های مشترک را نشان می‌دهد. همچنین می‌توان مسیرهای جهت‌دار در گراف جهت‌دار را با تکرار برخی رأس‌ها (در صورت نیاز) و نمایش بازی به‌صورت یک درخت ریشه‌دار نشان داد. در این حالت، ریشه نشان‌دهندهٔ وضعیت شروع است و کمان‌ها مسیرهای منشعب از ریشه را تعیین می‌کنند. شکل‌های ۱.۱ و ۲.۱ به ترتیب گراف بازی و درخت بازی را به ازای وضعیت $\{۲,۳\}$ در بازی نیم نشان می‌دهند، دو کپه یکی با سه لوبیا و دیگری با دو لوبیا است.



شکل ۱.۱

گرافِ جهت‌دارِ بازیِ نیم در وضعیت $\{۲,۳\}$

همان طور که ذکر شد، بازی نیم نمونه‌ای از بازی‌های بی‌طرفانه است و در هر وضعیت، مجموعهٔ انتخاب‌های هر دو بازیکن یکی است. بنا بر این می‌توان فرض کرد که تمام کمان‌ها در شکل‌های ۱.۱ و ۲.۱ به رنگ سبزند.



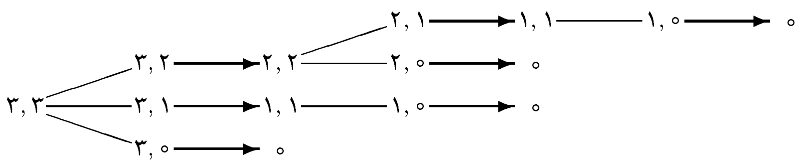
شکل ۲.۱

درختِ جهت‌دارِ بازیِ نیم در وضعیت {۲، ۳}

بررسی کامل یک بازی تا پایان آن را تحلیل کامل می‌نامند. در شکل ۲.۱ تحلیلی کامل از بازی ارائه شده است. برای تعیین راهبرد پیروزی کافی است به توصیف چهار پیکان بپردازیم و شاخه‌های مربوط به آن‌ها را نشان دهیم.

حالتی که در وضعیت {۲، ۳} در بازی نیم وجود دارد و سادگی حرکت‌ها، این سؤال را پیش می‌آورد که آیا در حالت کلی نیز می‌توانیم به‌همین صورت برای بازی نیم تحلیل کامل ارائه دهیم؟ نخست کمی دقیق‌تر بازی با یک کپه و سپس با دو کپه لوبیا را بررسی می‌کنیم.

اگر تنها یک کپه لوبیا داشته باشیم کسی که نوبت بازی با اوست، برنده می‌شود. کافی است وی همهٔ لوبیاها را بردارد و نفر دوم نمی‌تواند بازی کند و بازنده است. اما اگر دو کپه لوبیا باشد، دو حالت کلی را بررسی می‌کنیم: فرض کنید تعداد لوبیاها در دو کپه برابر باشد. کسی که نوبت بازی با اوست بازنده است، زیرا کافی است نفر دوم بعد از هر حرکت نفر اول، حرکتی مشابه وی در کپهٔ دیگر انجام دهد و دوباره نفر اول با دو کپهٔ برابر روبه‌رو خواهد شد و این کار تا جایی ادامه خواهد یافت که نفر اول تمام لوبیاهای یکی از کپه‌ها را بردارد و نفر دوم با برداشتن تمام لوبیاهای کپهٔ دوم، برنده می‌شود. در حالت دیگر، فرض کنید تعداد لوبیاها در دو کپه برابر نباشد. در این حالت نفر اول



شکل ۳.۱

در وضعیت {۳، ۳}، نفر دوم تقابل را در دست دارد، کافی است پیکان‌های سیاه را دنبال کند

برنده است و کافی است در اولین حرکت از کپه‌ای که تعداد لوبیای بیشتری دارد، تعداد اضافه را بردارد تا برای نفر دوم دو کپهٔ برابر باقی بماند.

حالتی که برای نفر دوم در بازی با دو کپهٔ برابر ایجاد شد و تعقیب نفر اول با انجام حرکتی مشابه، نمونه‌ای از **تقابل** در بازی نیم است.

در بازی‌های بی‌طرفانه، وضعیت‌ها به دو دستهٔ کلی تقسیم می‌شود:
الف) نفر **اول** برنده است، ب) نفر **بعدی** برنده است.

در وضعیت (الف)	در وضعیت (ب)
همواره حداقل یک انتخاب وجود دارد که به وضعیت (ب) منجر می‌شود.	هر انتخابی به وضعیت (الف) منجر می‌شود.

قرار گرفتن در وضعیت (الف) به‌معنی کسب **تقابل** است. روشی که به کسب وضعیت (الف) منجر شود، **راهبرد پیروزی** نامیده می‌شود. به‌عبارت دیگر، یافتن راهبرد پیروزی برای یک بازی به‌معنی روشی برای تشخیص حالت (الف) و ماندن در این حالت است.

در بازی نیم، اگر تعداد کپه‌ها بیش از دوتا باشد، تقابل چگونه به‌دست می‌آید؟ این موضوع را در یک مثال بررسی می‌کنیم: فرض کنید بازی در وضعیت {۲۹, ۲۲, ۱۴} باشد، یعنی سه کپه به‌ترتیب با ۲۹، ۲۲، و ۱۴ لوبیا داشته باشیم. اگر هر کپه را در دسته‌هایی با تعداد متمایز لوبیا و به تعداد توان‌های ۲ مرتب کنیم، نمایشی از تعداد هر دسته در مبنای ۲ به‌دست می‌آید و این نمایش منحصربفرد است. در وضعیت مذکور داریم:

	یکی	دوتایی	چهارتایی	هشت‌تایی	شانزده‌تایی	در مبنای ۲
کپهٔ با ۲۹ لوبیا						۱۱۱۰۱
کپهٔ با ۲۲ لوبیا						۱۰۱۱۰
کپهٔ با ۱۴ لوبیا						۰۱۱۱۰

اکنون برای به‌دست آوردن تقابل، کافی است به ستون‌های این جدول توجه کنیم. در حالتی که تعداد دسته‌های لوبیا در هر ستون زوج باشد (وضعیت ب)، حذف هر تعداد لوبیا از هر یک از سطرها موجب آن خواهد شد تا زوجیت یک یا چند ستون عوض شود (وضعیت الف) و نفر اول مجدداً این امکان را بیابد تا با حذف تعدادی از لوبیاهای یکی از سطرها، دوباره حریف را با وضعیتی روبه‌رو کند که تعداد دسته‌های هر سطر زوج است. بنا بر این در این وضعیت کسی که نوبت بازی با اوست،

باید با حذف تعدادی از لوبیاهای یک سطر تعداد دسته‌های هر ستون را زوج کند. در این بازی، در ستون اول ۱ دسته لوبیا و در ستون‌های دوم، سوم، و چهارم به‌ترتیب ۲، ۳، ۲، و ۲ دسته لوبیا قرار دارد. بنا بر این، حذف ۱ + ۴ = ۵ لوبیا از کپهٔ ۲۹ تایی یک حرکت **خوب** محسوب می‌شود.

در بازی نیم وضعیت (ب)

وضعیتی است که تعداد دسته‌ها در هر توانی از دو زوج باشد.

برای محاسبه، از جمع XOR بین این سه عدد استفاده می‌کنیم. این جمع را با نماد $\oplus$ نمایش می‌دهیم:

$$۲۹\oplus۲۲\oplus۱۴ = ۵$$

به‌عبارت دیگر، عمل جمع XOR، که به **جمع نیم** نیز شهرت دارد، بدون «دو بر یک» انجام می‌شود:

$$\begin{array}{rcrcl} ۲۹ & = & ۱۱۱۰۱ & & \\ ۲۲ & = & ۱۰۱۱۰ & & \\ ۱۴ & = & \oplus\quad ۱۱۱۰ & & \\ \hline & & ۰۰۱۰۱ & = & ۵ \end{array}$$

در پایان این حرکت، یعنی حذف ۵ لوبیا از کپهٔ ۲۹تایی، تقابل به‌دست آمده و جمع نیم برابر با صفر شده است و به وضعیت (ب) رسیده‌ایم:

$$\text{ارزش نیم در این وضعیت} \longrightarrow ۰ = ۲۴\oplus۲۲\oplus۱۴$$

از این به بعد با هر حرکت نفر دوم (حرکت بد)، جمع نیم مخالف با صفر می‌شود و بازی به وضعیت (الف) تبدیل می‌شود و نفر اول می‌تواند با حرکتی مناسب (حرکت خوب) جمع نیم را صفر کند و به وضعیت (ب) برسد و الی آخر. بنا بر این، از ابتدای بازی با محاسبهٔ جمع نیم، می‌توان برندهٔ بازی را تعیین کرد: اگر جمع برابر با صفر باشد، نفر دوم برنده است و در غیر این صورت، نفر اول برنده خواهد شد. عدد حاصل، ارزش بازی نیز محسوب می‌شود.

۳. برنده کیست: چپ، راست، اولی، دومی؟

این‌که نفر چپ یا راست برندهٔ بازی است، یک وجه مسأله است، ممکن است تعیین برنده به این شکل میسر نباشد و نوبت بازی، برنده را تعیین کند. برای بررسی دقیق‌تر، ارایهٔ تعریفی رسمی‌تر برای بازی‌ها ضرورت دارد. فرض کنید بازی G داده شده است. زوج مرتب

$G = \big\{\{G^{L_1}, G^{L_2}, \ldots\}|\{G^{R_1}, G^{R_2}, \ldots\}\big\}$ یا به‌صورت خلاصه $G = \{G^L|G^R\}$ معرف بازی G است که در آن G^L و G^R به‌ترتیب مجموعهٔ تمام انتخاب‌های ممکن برای نفر چپ و نفر راست است که یک یا هر دو می‌تواند تهی نیز باشند. در حالت‌های خاص (بازی‌های بی‌طرفانه) مجموعهٔ انتخاب‌های دو بازیکن می‌تواند یکی باشد. در **وضعیت پایانی بازی** داریم: $\{\,|\,\} = \{\phi|\phi\}$ که در این حالت هیچ یک از دو بازیکن انتخابی برای حرکت خود ندارد و **بازی صفر** نامیده می‌شود. بدیهی است که در بازی صفر، نفر دوم برنده است زیرا کسی که نوبت بازی با اوست، انتخابی ندارد.

در شکل ۴.۱ چهار تا از ساده‌ترین بازی‌ها نشان داده شده است. کمان‌هایی که جهت آن‌ها به طرف چپ (به‌ترتیب راست) است، انتخاب‌های نفر چپ (به‌ترتیب نفر راست) را نشان می‌دهند.

$* = \{0|0\}$ $\quad$ $1 = \{0|\,\}$ $\quad$ $-1 = \{\,|0\}$ $\quad$ $0 = \{\,|\,\}$

شکل ۴.۱

چهار نمایش برای بازی‌هایی با حداکثر یک حرکت تا پایان

در بازی $1 = \{0|\,\}$، تنها نفر چپ امکان حرکت دارد. بنا بر این، در این حالت، نفر چپ (چه نوبت بازی با او باشد، چه با نفر راست) برنده می‌شود. مشابه این حالت در بازی $-1 = \{\,|0\}$ برای نفر راست برقرار است و وی برنده می‌شود. در بازی $* = \{0|0\}$ نوبت بازی با هر کدام از بازیکنان باشد، برنده است. زیرا کسی که نوبت با اوست یک انتخاب دارد و بعد از حرکت وی وضعیت پایانی بازی پیش روی حریف وی است. بدین ترتیب:

در بازی	0	برد با نفر دوم است؛ (وضعیت ب)
در بازی	1	برد با نفر چپ است؛
در بازی	-1	برد با نفر راست است؛
در بازی	$*$	برد با نفر اول است؛ (وضعیت الف).

با تعمیم این نمادها می‌توان به هر بازی ارزشی نسبت داد:

$G > 0$	(G مثبت است)	اگر راهبرد پیروزی برای نفر چپ باشد؛
$G < 0$	(G منفی است)	اگر راهبرد پیروزی برای نفر راست باشد؛
$G = 0$	(G صفر است)	اگر راهبرد پیروزی برای نفر دوم باشد؛
$G \| 0$	(G خنثی است)	اگر راهبرد پیروزی برای نفر اول باشد.

این موضوع در جدول بعد خلاصه شده است.

در بازی G، اگر		نفر راست شروع کند	
		و نفر چپ راهبرد پیروزی دارد	و نفر راست راهبرد پیروزی دارد
نفر چپ شروع کند	و نفر راست راهبرد پیروزی دارد	بازی صفر $G = 0$ دومی برنده است	بازی منفی $G < 0$ راست برنده است
	و نفر چپ راهبرد پیروزی دارد	بازی مثبت $G > 0$ چپ برنده است	بازی خنثی $G \Vert 0$ اولی برنده است

استفاده از این نمادها به‌صورت ترکیبی نیز با معنی است:

$G \geq 0$ یعنی $G > 0$ یا $G = 0$

$G \leq 0$ یعنی $G < 0$ یا $G = 0$

$G \Vert\!> 0$ یعنی $G > 0$ یا $G \Vert 0$

$G <\!\Vert 0$ یعنی $G < 0$ یا $G \Vert 0$

بنا بر این $G \geq 0$ بدین معنی است که با فرض شروع نفر راست، برای نفر چپ راهبرد پیروزی وجود دارد. در حالتی که نفر چپ بازی را شروع کند، $G \Vert\!> 0$ به‌معنی وجود راهبرد پیروزی برای نفر چپ است. در قضیهٔ بعد نشان داده می‌شود $G \geq 0$ زمانی است که حرکت شروع برای نفر راست برنده نباشد (یعنی شروعی وجود ندارد که به راهبرد پیروزی برای وی منجر شود) و $G \Vert\!> 0$ به‌معنی آن است که حرکت شروع برای نفر چپ به بُرد وی منجر می‌شود.

قضیه ۱.۳. هر بازی G متعلق به یکی از رده‌های معرفی شده است.

اثبات. حکم قضیه معادل با آن است که به ازای هر بازی داریم: $G \geq 0$ یا $G <\!\Vert 0$، و $G \leq 0$ یا $G \Vert\!> 0$. فرض کنید این حکم به ازای همهٔ G^Lها و G^Rها برقرار باشد. در این صورت اگر $G^L \geq 0$، نفر چپ بعد از اولین حرکت نفر راست به وضعیتی می‌رسد که راهبرد پیروزی دارد وگرنه $G^L <\!\Vert 0$ که با حرکت نفر چپ، نفر راست در G راهبرد پیروزی دارد. در این حالت نفر

راست می‌تواند با عقب‌نشینی منتظر باشد تا نفر چپ حرکتی در G^L انجام دهد که وی بتواند با کمک راهبرد پیروزی (شروع نفر راست) در G^L برنده شود. بقیهٔ حالت‌ها نیز به‌طور مشابه نتیجه می‌شود. ☺

با توجه به این که حرکت‌های قانونی برای دو بازیکن الزاماً یکی نیست، می‌توان با عوض کردن نوبت چپ و راست در تمام G، بازیی متمایز به‌دست آورد که **بازی قرینهٔ** G نامیده می‌شود و با $-G$ نمایش داده می‌شود و چنین تعریف می‌شود: $-G = \{-G^R | -G^L\}$
بدیهی است که قرینه کردن، علامت مثبت و منفی بازی‌ها را نیز عوض می‌کند، در حالی که در بازی‌های صفر و خنثی قرینه کردن، بازی را به بازیی از همان نوع تبدیل می‌کند.

یکی دیگر از اعمالی که می‌توان در بازی‌ها انجام داد، جمع بازی‌ها است. فرض کنید نفر چپ و نفر راست همزمان چند بازی پیش رو داشته باشند، بدین ترتیب هر بازیکن می‌تواند از میان بازی‌های روی میز، یکی را انتخاب و در نوبت خود در آن صفحه بازی کند. به‌عنوان مثال وجود دو کپه در بازی نیم به‌علاوهٔ یک کپهٔ دیگر (به‌عنوان یک بازی دیگر) روی هم نمایش دو بازی است. اما می‌توان آن را به‌عنوان یک بازی با سه کپه نیز در نظر گرفت. بازی همزمان در دو بازی G و H **جمع بازی‌ها** نامیده و با $G + H$ نمایش داده می‌شود. تفاضل دو بازی، یعنی $G - H$، را به‌صورت $G + (-H)$ تعریف می‌کنیم.

قضیه ۲.۳. بازی $G - G$ همواره بازی صفر است.

اثبات. حرکت مجاز برای یک بازیکن در G، حرکتی مجاز برای حریف وی در $-G$ است و برعکس. بنا بر این نفر دوم همواره با تقلید از نفر اول می‌تواند در $G - G$ برنده باشد. ☺

قضیه ۳.۳. اگر $G \geq ۰$ و $H \geq ۰$، آنگاه $G + H \geq ۰$.

اثبات. طبق فرض اگر نفر راست بازی را شروع کند، نفر چپ می‌تواند در هر دو بازی G و H برنده شود. زیرا وی می‌تواند با حرکت در بازیی که نفر راست بازی کرده است و ادامهٔ آن برنده شود و بعد از حرکت نفر راست در بازی دیگر، آن بازی را ادامه دهد. بنا بر این نفر چپ در هر دو بازی و در نتیجه در جمع دو بازی برنده می‌شود. ☺

قضیه ۴.۳. اگر H بازی صفر باشد آنگاه $G + H$ دارای ارزشی همانند ارزش G است.

اثبات. با توجه به قضیهٔ قبل، برهانی مشابه تکرار می‌شود. برندهٔ بازی G می‌تواند بازی در $G + H$ را با راهبرد بازی G دنبال کند و همواره در G بازی کند و در حالتی که حریف در H بازی کند، حرکت مناسب را در H انجام دهد. با این روش راهبرد پیروزی در G به $G + H$ کشانده

می‌شود، یعنی ارزش G و $G+H$ همانند است. ☺

قضیه ۵.۳. اگر $H-K$ بازی صفر باشد آنگاه $G+K$ و $G+H$ ارزشی همانند دارند.

اثبات. با توجه به قضیهٔ قبل، ارزش $G+K$ و $(G+K)+(H-K)$ همانند است، اما $G+H=(G+K)+(H-K)$ در نتیجه $G+K$ هم‌ارزش با $G+H$ خواهد شد. ☺

در برهانی که برای قضیهٔ بالا ارایه شد، از خاصیت شرکت‌پذیری و جابه‌جایی استفاده شد (که درستی آن را پذیرفته‌ایم). در مواردی که ارزش بازی‌ها با اعداد نمایش داده می‌شوند، این خاصیت‌ها بدیهی است، اما در غیر این صورت ارایه استدلال برای آن‌ها ضروری است. با توجه به قضیه‌های بیان شده اگر $H-K$ بازی صفر باشد، آنگاه $K-H$ نیز بازی صفر است و نتیجه می‌شود K برابر با H است و می‌نویسیم $K=H$. با این حال ممکن است که بازی‌های K و H هیچ شباهتی به یکدیگر نداشته باشند و حتی تعداد حرکت‌ها تا پایان بازی یا انتخاب‌های دو طرف در دو بازی برابر نباشد.

در بازی‌های بی‌طرفانه، $G^L=G^R$ و گراف متناظر بازی به‌صورت متقارن است و محاسبهٔ بازی برای تعیین برنده ساده‌تر انجام می‌شود. در بیشتر این بازی‌ها، ارزش بازی به‌صورت عددی است و ویژگی‌های اعداد در یافتن راهبرد پیروزی می‌تواند کمک مؤثری باشد. با توجه به تنوع انتخاب برای نفر چپ و راست، بررسی بازی‌های پارتیزانی کمی دشوارتر است.

۴. بازی با دومینو

برای بررسی دقیق‌تر بازی‌های پارتیزانی و کاربرد جمع بازی‌ها، بازی زیر را بررسی می‌کنیم. بازی‌های گوناگونی با دومینو □□ (دو مربع به‌هم چسبیده) طراحی شده‌اند. از آن میان، گ. آندرسون بازی زیر را پیشنهاد کرده است [۱]: در صفحه‌ای مستطیل شکل که به مربع‌های کوچک تقسیم شده است، دو نفر به تناوب بازی می‌کنند (شرط ۱) و در هر نوبت یک دومینو را در صفحه طوری قرار می‌دهند که دقیقاً دو مربع را بپوشاند. دومینو نباید از مستطیل خارج شود و دو دومینو نباید با یکدیگر تلاقی داشته باشند. نفر چپ دومینوها را عمودی و نفر راست به‌صورت افقی قرار می‌دهد (بازی پارتیزانی) و بازنده کسی است که در نوبت خود نتواند دومینویی در صفحه قرار دهد (شرط ۵). بقیهٔ شرط‌های بازی ترکیبیاتی در این بازی برقرار است.

بعد از چند حرکت، صفحهٔ بازی به بخش‌های مجزایی شامل چند مربع تقسیم می‌شود که در واقع، به جمع چند بازی مجزا منجر می‌شود. اکنون به بررسی چند حالت ساده از این بخش‌ها می‌پردازیم.

در ناحیهٔ □ برای هیچ‌یک از بازیکنان حرکتی وجود ندارد، پس این بازی به‌طور صوری $\{\ |\ \}=0$ است و از این ناحیه صرف‌نظر می‌کنیم.

در ناحیهٔ یا تنها یک حرکت برای نفر چپ (تا رسیدن به بازی صفر) وجود دارد، اما برای نفر راست هیچ حرکتی وجود ندارد و ارزش آن $۱ = \{۰|\ \}$ است. عدد منسوب به این بازی نشان‌دهندهٔ یک حرکت برای نفر چپ است. به‌طور مشابه، ناحیهٔ برابر با -۲ است زیرا در این ناحیه حرکتی برای نفر چپ وجود ندارد لیکن برای نفر راست به و تبدیل می‌شود و می‌نویسیم $\{\ |-۱,۰\} = -۲$. در حالت کلی، اگر در یک ناحیه، هیچ حرکتی برای نفر راست موجود نباشد و حداکثر n حرکت پی‌درپی برای نفر چپ موجود باشد، ارزش این ناحیه، n خوانده می‌شود و در صورتی که نقش چپ و راست عوض شود، ارزش آن برابر با $-n$ است.

بررسی ناحیهٔ جالب‌تر است. نفر چپ حرکتی «احمقانه» دارد که این ناحیه را به $= -۱$ تبدیل می‌کند، که تنها یک حرکت برای حریف است. ولی با حرکت دیگر وی $+ = ۰$ ایجاد می‌شود. این در حالی است که نفر راست تنها یک حرکت دارد: . پس بازی‌های ممکن در این ناحیه $\{-۱,۰|۱\}$اند، ارزش این ناحیه را $\frac{۱}{۲}$ قرار می‌دهیم. به‌طور مشابه در بازی ، بازی‌های ممکن $\{-۱|۰,۱\}$ است که ارزش آن برابر با $-\frac{۱}{۲}$ می‌شود.

ارزش چند ناحیهٔ دیگر در بازی دومینو چنین است:

$$= \{\ |\ \} = \{۰|۰\} = *$$

$$= \{\ |\ \} = \{۱|-۱\} = \pm ۱$$

$$= \left\{\ ,\ \middle|\ \right\} = \{۱|۰\} = ۱|۰$$

نماد $\{L|R\}$ تعمیمی از برش ددکیند برای ساخت عددهای حقیقی است که در آن L و R دو مجموعه از عددهای گویا هستند و هیچ عددی در L بزرگ‌تر از عددهای R نیست. بدین ترتیب $\{L|R\}$ عدد (حقیقی) جدیدی را معرفی می‌کند. چنان‌چه شرط مذکور رعایت نشود، به‌طور صریح نمی‌توان عددی حقیقی به $\{L|R\}$ نسبت داد. به‌همین دلیل عدد منسوب به $\{۱|-۱\}$ به‌صورت ± ۱ و عدد منسوب به $\{۱|۰\}$ با $۱|۰$ نمایش داده شده است. با حذف شرط مذکور، نمادی عمومی برای بازی‌ها به‌دست می‌آید و به‌طور صوری می‌توان به این مجموعه علامتی نسبت داد و اعمال جمع و ضرب را روی آن‌ها تعمیم داد (برای اطلاع بیشتر به فصل صفر در [۲] مراجعه کنید.).

مراجع

[1] E.R. Berlekamp, J.H. Conway, and R.K. Guy, *Winning Ways*, Vols 1-2, Academic Press, London, 1982.

[2] J.H. Conway, *On Numbers and Games*, Academic Press, London, 1976.

[3] P.M. Grandy, Mathematics and Games, *Eureka* **2** (1939), 6-8; Reprinted *Eureka* **27** (1964), 9-11.

[4] R.K. Guy (ed.), *Combinatorial Games*, Proc. Sympos. Appl. Math. **43**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.

[5] R.K. Guy, *Fair Games*, COMAP Math. Exploration Seires, Arlington, MA, 1989.

ترجمهٔ فارسی این کتاب نیز منتشر شده است:
ریچارد ک. گای، **بازی منصفانه**. مترجمان: ع. محمودیان، آ. آریاچهر، مؤسسهٔ انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ۱۳۸۰.

مانی رضائی
پست الکترونیک: mani_rezaie@yahoo.com

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۲ (بهار ۱۳۸۳) صص. ۱۹ تا ۳۰

موجکها: راز شنیدن

حامد صلواتی

چکیده

در این مقاله قصد داریم نگاهی به گذشته، حال و آیندهٔ موجکها بیاندازیم. بررسی تاریخچهٔ موجکها از بدو پیدایش تاکنون و استفاده از آنها در علوم گوناگون از جمله اهداف اساسی این مقاله میباشند. همچنین معرفی موجکها از کلیترین دیدگاه ممکن و پیش بینی مسیری که در آینده خواهند پیمود از دیگر موضوعات مورد بحث هستند. خواهیم دید که موجکها جهت مطالعهٔ برخی مسایل بهظاهر نامربوط زیربنای مشترکی ارائه میکنند. در واقع دلیل اصلی موفقیت موجکها از آنجا ناشی میگردد که در تلاقی گذرگاه شاخههای مختلفی از علوم واقع گشتهاند!

بالاخره هر آغازی فقط ادامهای است و کتاب حوادث همیشه از نیمهٔ آن باز میشود.
ویسوواوا شیمبورسکا

۱. مقدمه

در اواخر دههٔ هفتاد میلادی در قرن بیستم زمانی که مورلت، جهت تحلیل دادههای لرزهنگاری، تبدیل موجک را ابداع کرد گمان میبرد که برای نخستین بار به آن دست یافته است. بعدها مشخص شد که اساس این نظریه سابقهای طولانی در آنالیز هارمونیک دارد. نظریهٔ موجکها در سالهای اخیر ایجادگر تحولی نو در زمینههای متعدد مهندسی، ریاضی و فیزیک بوده است. حوزهٔ کاربرد این نظریه وسیع است و مباحثی نظیر پردازش سیگنال، گرافیک کامپیوتر، بینایی ماشین، نظریهٔ مخابرات، نظریهٔ کدگذاری، انگشت نگاری، فیزیک کوانتمی، آنالیز عددی، نظریهٔ فراکتال، تجزیهٔ قاب، حل معادلات دیفرانسیل و ... را در بر میگیرد. در این مقاله ضمن ارائهٔ تعریفی (هرچند تقریبی) برای موجکها چند نمونه از کاربردهای آنها را مورد بررسی قرار میدهیم.

نمایش یک سیگنال توسط طیف یا تبدیل فوریهٔ آن تا به حال مسایل عدیده‌ای از ریاضیات محض و علوم کاربردی را حل کرده است. لیکن در برخی موارد به‌طور دلخواه و طبیعی قادر به ارائهٔ نمایش مطلوبی از سیگنال نبوده است. مثلاً زمانی که به موسیقی گوش فرا می‌دهیم، گوش ما در هر لحظه ترکیب مشخصی از فرکانس‌هایی را که دایماً در حال تغییر هستند می‌شنود. چنین برداشتی از فرکانس‌ها (حداقل به‌فرم ساده آن) به تبدیل فوریهٔ سیگنال مربوط نمی‌شود، بلکه گوش انسان به هنگام شنیدن (حداقل در اولین مرحله از شنیدن) از تبدیل موجک استفاده می‌کند!

نظریهٔ موجک‌ها قدمتی طولانی دارد، ولی از شکل‌گیری این نظریه به‌عنوان ابزاری تحلیلی در علوم کاربردی مختلف چند دهه‌ای بیش نمی‌گذرد. شاید یکی از عوامل شایع شدن موجکها این باشد که از بدو ظهور مورد توجه متخصصین علوم دیگر واقع شدند و در حل مسائل مختلف موثر عمل کردند. اما صحبت پیرامون آیندهٔ موجکها کاری است سهل و ممتنع! به واقع موجکها کمتر از آنچه که انتظار می‌رود قابل پیش بینی‌اند. گاهی رسوخ موجکها در علوم دیگر بسیار اتفاقی بوده است. با این وجود تداوم استفاده از موجکها در شاخه‌هایی که اکنون نیز کاربرد دارند امری غیرقابل انکار است.

۲. مروری بر گذشته

اساس نظریهٔ موجک سابقهٔ طولانی در ریاضیات دارد که تا سالیان اخیر مورد توجه زیادی نبوده است. تبدیل موجک به‌عنوان ابزاری برای پردازش سیگنال در اواخر دههٔ ۷۰ میلادی توسط مورلت پیشنهاد شد. او که یک مهندس ژئو فیزیک بود در صدد برآمد که تبدیلی جهت تحلیل داده‌های لرزه‌نگاری ارائه کند. مورلت ابتدا نام «موجکها با شکل ثابت» را برگزیده بود تا بدین‌وسیله موجکها را از توابع تحلیلی در تبدیل فوریه که از شکل خاصی پیروی نمی‌کردند، متمایز کند. در واقع موجکها از تابع منفردی موسوم به «موجک مادر» پدید می‌آیند. این تابع باید از خواص ویژه‌ای برخوردار باشد. عنوان «موجک مادر» به چند خاصیت مهم این تبدیل اشاره دارد: موجک به معنای موج کوچک است و منظور از کوچکی، پهنای بسیار کم (پایهٔ فشرده) تابع (پنجره) است و لفظ موج نیز حاکی از طبیعت نوسانی تابع می‌باشد. واژهٔ مادر نیز نشان دهندهٔ این واقعیت است که توابع تبدیل در نواحی مختلف، از یک تابع اصلی اشتقاق یافته‌اند.

توفیقی که در این زمینه نصیب مورلت گردید، مورد توجه گراسمن قرار گرفت. پس از آن همکاری گراسمن و مورلت باعث بسط و توسعهٔ بیشتر این نظریه شد. از جمله کارهای بارز گراسمن می‌توان به یافتن تناظری میان موجکها و نمایش‌های انتگرالپذیر مربعی یک گروه و همچنین پی بردن به اهمیت مفهوم «قاب[1]» در این ارتباط اشاره کرد[٦].

در سال ۱۹۸۵ م. میر که ریاضیدان و محقق برجسته‌ای در آنالیز هارمونیک بود موفق به

1) frame

ساخت خانواده‌ای از موجکها با دو خاصیت بسیار مطلوب ریاضی شد. این دو خاصیت عبارت بودند از هموار ی و تعامد. جالب توجه آنکه سالها قبل از آن اشترومبرگ از دانشگاه ترمسو نروژ توانسته بود چنین خانواده‌ای را بسازد. تقریباً یک سال بعد، میر و مورلت با ارائهٔ نظریهٔ «آنالیز چند ریزه‌ساز[1]» به دستاوردهای جدیدی در این زمینه رسیدند.

در سال ۱۹۸۷ م. دابشی مبادرت به ساخت خانواده‌ای از موجکها نمود که علاوه بر برخورداری از خواص همواری و تعامد، خارج از یک محدودهٔ خاص به سمت صفر می‌گرایید[۲]. این موفقیت وی عرصهٔ موجکهای با محمل فشرده را پدید آورد که امروزه بیشترین کاربرد را در بین موجک‌ها دارند.

۳. موجکها چه هستند؟

در این بخش قصد داریم ببینیم که چگونه یک موجک از یک تابع به‌دست می آید و بررسی کنیم که چرا موجکها مورد پسند ما هستند. از آنجا که نظریهٔ موجک همواره در حال گسترش است، تعریف مربوط به آن نیز دایماً تغییر می‌کند. در واقع ارائهٔ تعریف دقیقی برای موجکها غیرممکن می‌باشد. مشابه با بسیاری از شاخه‌های علوم، بحث رو به توسعهٔ موجکها مانند فراکتال نامتناهی‌البعد عظیمی است که بعضاً در مسیرها و جهت‌های مجزا رشد می‌کند، و گهگاه به سمت هستهٔ مرکزی خود در می‌پیچد. رسیدن به تعریفی برای یک موجک معادل است با تقریب‌زدن چنین فراکتالی با یک توپ کروی. شاید یک تعریف ساده، توپی با شعاع کوچک باشد که درون این فراکتال جای می‌گیرد. با این وجود چنین تعریفی تنها مرکز نظریه را در برمی‌گیرد و اغلب پیشرفت‌های جالب توجه و مؤخر و حتی آیندهٔ موجکها را از قلم می‌اندازد. از اینرو تصمیم می‌گیریم که از ارائهٔ یک تعریف دقیق و جامع کمی فاصله بگیریم و به یک بیان نظریهٔ فازی از موجکها قناعت کنیم.

یک موجک را به‌صورت $\Psi_\lambda(x)$ نشان می‌دهیم که در آن x متعلق به یک دامنه X، و Ψ_λ متعلق به یک ردهٔ F از توابع، و λ متعلق به یک مجموعهٔ اندیس Λ می‌باشد. به عنوان مثال می‌توان X را خط حقیقی، F را فضای هیلبرت $L^2(\mathbb{R})$ (فضای تمام توابع حقیقی انتگرالپذیر مربعی)، Λ را مجموعهٔ $\mathbb{Z}^2$ با $\lambda = (i,l)$، و بالاخره $\Psi_\lambda(x)$ را به‌صورت $2^{j/2}\Psi(2^j x - l)$ در نظر گرفت. در این حال به مجموعهٔ $\Psi = \{\Psi_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ یک پایهٔ موجکی گفته می‌شود.

اکنون به سه خاصیت مهم موجکها توجه می‌کنیم:

الف) موجکها اجزای سازندهٔ توابع عام هستند.
فرض کنیم بخواهیم یک تابع عام f از ردهٔ F را به‌صورت یک سری نامتناهی از موجکها بسط دهیم. در این صورت لازم است یک دنباله از ضرایب مانند $c = \{c_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$

1) multiresolution analysis

موجود باشد به‌طوری که

$$f = \sum_{\lambda} c_\lambda \Psi_\lambda. \qquad (۱.۳)$$

مجموع فوق را یک سری موجکی نامیده و فرض می‌کنیم که این سری در نرم F همگرا باشد. در واقع نیاز داریم که این همگرایی از نوع نامشروط باشد (یعنی هر تجدید آرایشی از سری همگرا باشد). اکنون فضای C شامل تمام دنبالهٔ ضرایب c که به‌ازای آن سری (۱.۳) به یک تابع مشخص $f \in F$ همگرا باشد را در نظر می‌گیریم:

$$C = \{c | \sum_{\lambda} c_\lambda \Psi_\lambda \in F\}.$$

به دنبال آن هستیم که چنین فضایی را به‌طور دقیق مشخص کنیم. در واقع می‌خواهیم ببینیم که یک دنبالهٔ ضرایب c به فضای C تعلق دارد یا خیر (بدون آنکه f را تجزیه کنیم). این عمل با داشتن نرم بر C امکانپذیر می‌شود. در حقیقت داریم $c \in C$ اگر و فقط اگر $\|c\|_C < \infty$. نرم‌های C و F باید به‌گونه‌ای معادل یکدیگر باشند تا بتوان ثابت‌های A و B را چنان یافت که

$$A\|c\|_C \le \|f\|_F \le B\|c\|_C.$$

این واقعیت که نرم C تنها به قدرمطلق $|c_\lambda|$ بستگی دارد به همگرایی نامشروط سری (۱.۳) مربوط می‌شود. بنابراین با تغییر علامت جملات دنبالهٔ ضرایب، تغییری در همگرایی پدید نخواهد آمد.

حال فرض می‌کنیم که تابع $f \in F$ در دست باشد. می‌خواهیم ببینیم ضرایب چگونه به‌دست می‌آیند. این ضرایب را می‌توان تابعک‌های خطی برحسب f به‌صورت

$$c_\lambda = < \widetilde{\Psi_\lambda}, f >,$$

در نظر گرفت که در اینجا $< .,. >$ یک عمل دوتایی مناسب است (که برای فضاهای هیلبرت می‌تواند نگاشت ضرب داخلی باشد) و $\widetilde{\Psi_\lambda}$ هانیز موجکهای دوگان هستند. چنانچه F یک فضای هیلبرت باشد، موجکهای دوگان به خود F تعلق دارند، ولی در غیر این‌صورت $\widetilde{\Psi_\lambda}$ ها در دوگان F قرار می‌گیرند. توابع متنوعی با این ویژگی‌ها موجود هستند. شاید مناسب‌ترین آنها یک پایهٔ متعامد یکه باشد که در آن ضرایب یکتا هستند و موجکهای اولیه و دوگان یکی می‌شوند.

ب) موجکها دارای تمرکز زمان ــ فرکانسی هستند.

تمرکز سیگنال در حوزهٔ زمان بدان معناست که قسمت عمدهٔ انرژی یک موجک در بازه‌ای متناهی محدود می‌شود. به‌طور ایده‌آل مقدار تابع در خارج از این بازه متحد با صفر خواهد

بود (تابع با محمل فشرده). به‌طور کلی ما به‌دنبال میرایی سریع در خارج از مرکز جرم تابع هستیم (مثلاً میرایی با سرعت رشد چندجمله‌ای یا نمایی). منظور از تمرکز فرکانسی آن است که این بار تبدیل فوریه تابع موجک دارای خاصیت تمرکز فوق‌الذکر (در حوزهٔ فرکانس) باشد. به عبارت دیگر (تبدیل فوریه) موجک مزبور به صورت یک فیلتر میان‌گذر شامل یک فرکانس مرکزی و پهنای باند بسیار کم عمل کند. همانطور که می‌دانیم اصل عدم قطعیت هایزنبرگ [1] برای حاصلضرب واریانس‌های زمان و فرکانس، کران پایینی را قائل می‌شود. میرایی به سمت فرکانس‌های بالا متناسب با همواری تابع است. در واقع هرچه تابع هموارتر باشد، میرایی آن سریعتر اتفاق می‌افتد. چنانچه میرایی به‌صورت نمایی باشد، تابع مزبور بینهایت بار دیفرانسیل‌پذیر خواهد بود. اما میرایی به سمت فرکانس‌های پایین متناسب با تعداد گشتاورهای صفر موجک است. یک موجک Ψ_λ با N گشتاور صفر باید در شرایط زیر صدق کند:

$$\int x^p \Psi_\lambda(x)dx = ۰, \quad ۱ \leq p < N$$

مطالعه در خصوص تمرکز فرکانسی برحسب همواری و گشتاورهای صفر به ما اجازه می‌دهد که مفهوم فوق را به فضاهایی نظیر منیفلدها (که تبدیل فوریه برای آنها تعریف نشده است)تعمیم دهیم.

پ) موجکها دارای الگوریتم‌های سریع هستند.

استفاده از موجکها در رایانه‌های شخصی کار نسبتاً ساده‌ای است. اصولاً ما به دنبال الگوریتم‌هایی با پیچیدگی خطی یا خطی ـ لگاریتمی هستیم تا بتوانیم از روی یک تابع f به ضرایب موجکی آن دست یابیم. چنین الگوریتمی را می‌توان از یک تبدیل سریع موجکی [2] به‌دست آورد. تبدیلات سریع موجکی عموماً از آنالیز چند ریزه‌ساز حاصل می‌شوند که ایدهٔ اصلی آن تقریب زدن تابع f در سطوح مختلف تجزیه است [۱].

توجه می‌کنیم که سه خاصیت فوق مستقل از یکدیگر نیستند. مثلاً اگر پایهٔ موجکی متعامد باشد، آنگاه ضرایب را می‌توان به‌راحتی از حاصلضرب داخلی f با تابع پایه به‌دست آورد که این امر الگوریتم تبدیل را بسیار ساده خواهد کرد. از سوی دیگر چنانچه موجکها از وضوح زمان ــ فرکانسی خوبی برخوردار باشند، انتظار می‌رود که تشکیل یک پایهٔ نامشروط بدهند. سؤالی که در اینجا مطرح می‌شود این است که خواص فوق به چه کار می‌آیند و چرا مطلوب ما هستند؟ در پاسخ باید گفت بیشتر داده‌هایی که ما در زندگی روزمره با آنها سروکار داریم دارای طبیعت کاملاً تصادفی نیستند و از یک ساختار همبستهٔ مشخص برخوردارند. مثلاً سیگنال‌های صوتی یا تصویری، سری‌های زمانی،

---

1) Heisenberg uncertainty principle   2) fast wavelet transform

و پاسخ‌های معادلات دیفرانسیل از این گونه‌اند. ساختارهای همبستهٔ برخی از این سیگنال‌ها مشابه یکدیگرند. البته همبستگی در فضا (یا زمان) عموماً به‌فرم موضعی است. مثلاً نقاط مجاور در یک تصویر دارای همبستگی بالایی هستند، ولی نقاطی که از هم دورند کاملاً ناهمبسته هستند. در حوزهٔ فرکانس نیز همبستگی‌هایی وجود دارند که باز به‌فرم موضعی‌اند. در حقیقت طیف مربوط به برخی از سیگنال‌ها دارای ساختار نواری شکل (یعنی به‌صورت یک باند فرکانسی) است. از اینرو چنین داده‌هایی را می‌توان با اجزای سازنده‌ای که از تمرکز (وضوح) زمان ــ فرکانسی خوبی بهره‌مند باشند، تقریب زد. چنین اجزای سازنده‌ای قادر به تعیین ساختار همبستهٔ این داده‌ها خواهند بود. باید دانست که تقریب‌های با کیفیت بالا تنها توسط تعداد اندکی از اجزای سازنده میسر می‌گردند. این موضوع را می‌توان فوراً به خواص موجکها ارتباط داد. فرض کنیم تابع f را بخواهیم با یک تابع f_M که ترکیبی خطی از M موجک است تقریب بزنیم. پرسشی که در اینجا مطرح می‌شود این است که از این مجموعهٔ نامتناهی موجکها کدام M عضو را انتخاب کنیم و به هر کدام چه ضریبی نسبت دهیم؟ در حالت ایده‌آل می‌خواهیم f_M چنان باشد که نرم $f - f_M$ حداقل گردد. شاید در اینجا بهتر باشد که از هم ارزی نرم در F و C استفاده کنیم. از آنجا که نرم در C صرفاً به قدرمطلق ضرایب بستگی دارد، بهترین تقریب در نرم C را به سادگی می‌توان با گزینش M ضریب بزرگتر (از لحاظ قدرمطلق) به‌دست آورد. به‌عبارت دیگر قرار می‌دهیم:

$$f_M = \sum_{\lambda \in \Lambda_M} c_\lambda \Psi_\lambda,$$

که در آن Λ_M شامل اندیس‌های M با ضریب موجکی بزرگتر می‌باشد. از آنجا که مجموعهٔ ضرایب Λ_M به تابع f بستگی دارد، تقریب حاصل علی‌الاصول غیرخطی خواهد بود. یعنی لازم نیست $(f+g)_M$ معادل $f_M + g_M$ باشد ($f_M + g_M$ می‌تواند تا $2M$ جمله داشته باشد). زمانی که M به‌سمت بینهایت میل کند، f_M به f همگرا خواهد شد. اکنون به قصد آگاهی از کم و کیف تقریب f_M و تخمین این‌که f_M تا چه میزانی ساختار همبستگی درونی f را در بر دارد، سرعت همگرایی را به نسبت افزایش تعداد جملات مورد بررسی قرار می‌دهیم. سرعت همگرایی به‌ازای بزرگترین α با رابطهٔ زیر داده می‌شود:

$$\|f - f_M\| = O(M^{-\alpha}). \tag{۲.۳}$$

چنانچه مقدار α بزرگ باشد، آنگاه اطلاعات مفید موجود در یک تابع توسط تنها کسر کوچکی از ضرایب موجکی مشخص خواهد شد و این شاه کلید استفاده از موجکها در عرصهٔ نظریهٔ تقریب است. روش‌های یافتن عدد α برای فضاهای هموار و تقریب‌های غیرخطی به کثرت مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. نتیجهٔ نهایی این بوده است که اگر F یک فضای بیسف[1] با درجهٔ همواری α باشد، آنگاه تساوی (۲.۳) همواره برقرار خواهد بود. در اینجا ما قصد ارائهٔ یک تعریف دقیق ریاضی از فضاهای بیسف را نداریم، لیکن مایلیم نشان دهیم که چرا این فضاها مهم‌اند. فرض کنیم تابعی

1) Besov space

متعلق به ردهٔ C^α (یعنی فضای تمام توابعی که به‌طور پیوسته α مرتبه دیفرانسیل‌پذیرند) باشد و $\alpha-$امین مشتق آن در $L^{2}(\mathbb{R})$ قرار بگیرد، در این‌صورت تابع فوق در رابطه (۲.۳) صدق خواهد کرد. اما برای این دسته از توابع روش‌های تقریب خطی پیشین که مبتنی بر تبدیل فوریه می‌باشند نیز از سرعت همگرایی مشابهی برخوردارند. در اینجا باید به این نکته توجه داشت که توابع C^α مدل‌های چندان خوبی برای سیگنال‌های واقعی نیستند. ولی یک مدل بسیار خوب، به‌ویژه برای سیگنال‌های تصویری می‌تواند تابع تکه‌ای هموار باشد. در واقع تصاویر دارای تعدادی ناپیوستگی (لبه) با نواحی هموار در بین آنها هستند. این دسته از توابع نیز به فضاهای بیسف با اندیس همواریِ بالا (مثلاً $\alpha \geq ۲$) تعلق دارند. بنابراین فضاهای بیسف به‌طور کلی مدلهای مناسب و خوبی برای سیگنال‌های واقعی موجود در طبیعت ارائه می‌کنند. روش‌های خطی مبتنی بر آنالیز فوریه برای توابع تکه‌ای هموار سرعت همگرایی بسیار پایینی دارند ($\alpha = ۱$)، در حالیکه روش‌های غیر خطی مبتنی بر آنالیز موجکی همچنان از همگرایی سریعی برخوردارند ($\alpha \geq ۲$). از این خاصیت می‌توان نتیجه گرفت که موجکها ابزاری مناسب برای فشرده سازی، تخمین و بازسازی توابع در F هستند [۵].

از توابعی که دارای خواص فوق باشند نمونه‌های زیادی موجودند که از بین آنها می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- **توابع انتقال و اتساع یافته:** اینها همان موجکهای کلاسیک محسوب می‌شوند که ذاتاً با آنالیز چند ریزه‌ساز و کدگذاری باند پایینی در ارتباط‌اند. جهت آشنایی بیشتر می‌توان به [۷] مراجعه نمود.
- **بسته‌های موجکی**[1]: تعمیمی از موجکهای کلاسیک هستند که از تمرکز فرکانسی بهتری برخوردارند. برای آشنایی بیشتر می‌توان به مقالهٔ [۹] مراجعه کرد.
- **پایه‌های مثلثاتی موضعی:** ایدهٔ اصلی استفاده از توابع سینوسی و کسینوسی تعریف شده بر تعداد متناهی بازه است که با روشی ساده ولی مؤثر جهت حصول توابع پایه‌ای با نقاط انتهایی منطبق بر یکدیگر ترکیب شده‌اند. برای اطلاعات بیشتر باز هم می‌توان به [۹] مراجعه کرد.
- **موجکهای چندگانه:** به جای استفاده از یک تابع ثابت از تعداد متناهی تابع و انتقال‌ها و اتساعات آنها سود برده می‌شود. از این طریق می‌توان به‌طور همزمان به خواصی دست یافت که برای موجکهای کلاسیک امکان‌پذیر نیستند.
- **موجکهای نسل دوم:** در اینجا ایدهٔ مربوط به انتقال و اتساع به‌کلی کنار گذاشته می‌شود که در نتیجهٔ آن امکان ساخت موجکها بر خمینه‌ها و نمونه‌های غیر مجاز پدید می‌آید. جهت درک بهتر مطلب می‌توان به [۸] مراجعه کرد.

1) wavelet packets

۴. موجک‌ها از دیدگاه کاربردی

همانطور که در مقدمه ذکر شد حیطهٔ کاربرد موجکها وسیع و به‌سرعت در حال افزایش است. لذا پرداختن به ابعاد مختلف آن خارج از حوصلهٔ این مقاله است و ما صرفاً و به‌طور سلیقه‌ای به چند مورد اشاره می‌کنیم.

- **بینایی ماشین:** در اوایل دهه ۸۰ میلادی، در پی ساختن روبوتی که با درک مناسبی از عمق و حرکت بتواند محیط اطراف را شناسایی کند، شخصی به نام دیوید مار اعتقاد داشت که پردازش تصویر در سیستم بینایی انسان دارای یک ساختار پیچیدهٔ چند مرحله‌ای است که در هر مرحله از آن شبکیهٔ چشم تصویری ارائه می‌کند که به‌فرم هندسی ایده‌آلی مقیاس بندی شده است. پس از آن نظریات وی با آشکار سازی تغییرات شدت نور پیوند خورد و او ادعا کرد که تغییرات شدت نور در مقیاس‌های مختلفی از یک تصویر رخ می‌دهند و از این رو آشکار سازی بهینه نیاز به استفاده از عملگرهایی با مقیاس‌های متفاوت دارد. مفروضات وی ایجاب می‌کردند که یک صافی بینایی از دو ویژگی برخوردار باشد. اول آنکه یک عملگر دیفرانسیل باشد، و دیگر آن که قابل تنظیم برای استفاده در هر مقیاس دلخواه باشد. عملگری که مار پیشنهاد کرد نوع خاصی از موجک است که به نام خود وی موجک مار[1] نامیده می‌شود.
- **نویز زدایی:** در علوم مختلفی نظیر ستاره‌شناسی و اسپکتروسکپی ملکولی دانشمندان با معضل تفکیک سیگنال اصلی از داده‌های مغشوش مواجهند. مفید بودن موجکها در حل معضل فوق امری اثبات شده است. در واقع سالهاست که تکنیکی موسوم به روش آستانه‌ای و انقباض موجکی[2] در این راستا مورد مطالعه و تحقیق می‌باشد [۴]. در این روش به هنگام تجزیهٔ سیگنال با استفاده از موجکها از دو نوع صافی استفاده می‌شود: یکی صافی‌های میان گذر، و دیگر صافی‌هایی که جزئیات دقیق‌تر را آشکار می‌کنند. در اینجا روش آستانه‌ای ایجاب می‌کند آن دسته از ضرایبی که از یک حد ویژه موسوم به حد آستانه‌ای کوچکترند، برابر صفر فرض شوند. در این‌صورت برای بازسازی سیگنال تنها ضرایب باقیمانده به کار خواهند رفت و در عین حذف نویز و اغتشاشات، جزئیات اصلی سیگنال حفظ خواهند شد.
- **پردازش صوت:** همان‌طور که اشاره شد گوش انسان هنگام شنیدن از تبدیل موجک استفاده می‌کند[۳]. بنابراین انتظار می‌رود که بسته‌های موجکی در پردازش سیگنال‌های صوتی مؤثر عمل کنند. در واقع ایدهٔ اصلی آن است که یک مولد بسته‌های موجکی منفرد می‌تواند جانشین تعداد زیادی از نوسان کننده‌ها باشد. نمونه‌ای از نت‌های نواخته شده با یک آلت موسیقی را در نظر می‌گیریم. این نمونه را می‌توان به ضرایب بسته‌های موجکی‌اش تجزیه نمود. در این حال احیای مجدد نت‌ها نیاز به ترکیب دوبارهٔ ضرایب توسط یک مولد

1) Marr wavelet 2) wavelet shrinkage and thresholding method

بسته‌های موجکی دارد. البته جهت مصون ماندن از پدیده‌های گذرایی نظیر نویز و میرایی لازم است که تغییرات شدت صوت در آغاز و پایان به‌طور جداگانه کنترل شوند، یا از بسته‌های موجکی بلندتری استفاده شود. توجه می‌کنیم که آلت موسیقی مورد نظر می‌تواند حنجرهٔ یک انسان باشد، که در این‌صورت نت‌های نواخته شده همان صحبت‌های عادی خواهند بود.

یک موسیقی‌دان که براساس بسته‌های موجکی کار می‌کند قادر است برخی از اصوات پیچیده را به‌طور مؤثری ذخیره کند، زیرا اولاً ضرایب بسته‌های موجکی (مانند ضرایب موجکی) برای نمونه‌های دیجیتال از سیگنال‌های هموار، بسیار کوچکند، و به علاوه با حذف ضرایب کمتر از حد آستانه تنها خطای ناچیزی رخ خواهد داد.

پیش بینی کار سختی است، به ویژه در مورد آینده!
ویکتور برژ

۵. رو به‌سوی آینده

در این بخش با سؤالاتی از این قبیل سروکار داریم که در زمان آینده:

- بیشترین پیشرفت‌ها در کدام شاخه از موجکها صورت خواهد گرفت؟
- نظریهٔ موجکها به کدام سمت حرکت خواهد کرد؟
- کدام قضایای نظری مورد نیازند تا موجب تسریع روند پیشرفت نظریه گردند؟
- کدام نوع از توابع موجکی بیشتر به کار گرفته خواهند شد؟
- آیا موجکها به اهداف از پیش تعیین شده خود خواهند رسید؟
- آیا نظریهٔ موجکها را خطری تهدید خواهد کرد؟

و بالاخره این که:

- کدام حوزه‌های کاربردی تاکنون به اندازه کافی توسط موجکها رشد نیافته‌اند؟

اگرچه یافتن پاسخی قاطع برای هر یک از سؤالات فوق به منزلهٔ پیش‌گویی آینده امری محال است، ولی این دلیل نمی‌شود که از یافتن حداقل یک پاسخ احتمالی سرباز بزنیم. در واقع آنچه در این چالش جالب به نظر می‌رسد آن است که می توان آینده را امتداد زمان حال و گذشته فرض کرد تا شاید بدینوسیله خطای پیش بینی ما به حداقل برسد. با این توصیف گزاره‌های زیر چشم اندازی محتمل از آیندهٔ موجکها در اختیار ما قرار می‌دهند:

الف) پیشرفت‌های جدید در نظریهٔ موجکها

- موجکهای کلاسیک جهت محاسبهٔ تفرق در آنتن‌های فرکانس پایین مناسب به نظر می‌رسند، ولی در فرکانس‌های بسیار بالا کارایی خود را از دست می‌دهند. حل این معضل برای دیگر شاخه‌های فنی و مهندسی نیز ضروری به نظر می‌رسد. در واقع

هسته‌های انتگرالی مربوط به نوسان در فرکانس‌های بالا با تابع کسینوس نسبت به موجک‌های کلاسیک بهتر عمل می‌کنند.

- در حل معادلات انتگرالی روش‌های انطباقی کمی مشکل به نظر می‌رسند. جهت ساختن یک ماتریس مربعی مرتبهٔ n کامل در حداکثر $O(n^{2})$ مرحله و سپس استفاده از موجکها در یافتن معکوس این ماتریس در حداکثر $O(n)$ مرحله برخی اشکالات محاسباتی رخ می‌دهد. در این حال می‌توان فوراً با استفاده از پایه‌های موجکی ماتریس را فشرده کرد. چنین هدفی به برآورد کننده‌های خطای دقیق و سریع نیاز دارد.
- موجکها به طرز گسترده‌ای دیگر علوم را تحت تأثیر خود قرار داده‌اند، به‌طوری که بسیاری از متخصصین دیگر رشته‌ها نیز به تبدیلات زمان ـ مقیاس و زمان ـ فرکانس علاقهٔ وافری پیدا کرده‌اند. به‌عنوان یک واقعیت بزرگ، در علم پردازش سیگنال تحول عظیمی رخ داده است و این دگرگونی در حال سرایت به دیگر علوم می‌باشد. با این وجود برخی از ایده‌های مبتکرانه هنوز در راهند و نسل جدید محققین موجکها بزودی بنیانگذار تحولات نوین و بزرگتری خواهند بود.
- موجکها طرز تلقی پیشین ما از وجود پدیده‌های گذرا در سیگنال (نقاط نامنفرد تابع) را تغییر داده‌اند. طیف پدیده‌های گذرا پیچیدگی داده‌ها را به‌طور کامل مشخص می‌کند.
- موجکها را می‌توان جهت تفکیک قسمت‌های همدوس [1] و ناهمدوس شار مایعات به کار برد. در این حالت اطلاعاتی که از موجکها به‌دست می‌آید جهت حل کامل مسأله کفایت نمی‌کند. در حالیکه از آزمایشات انجام شده اعداد رینولد [2] بزرگ و ابعاد کوچک حاصل می‌شوند، از شبیه سازی‌های صورت گرفته اعداد رینولد کوچک ولی ابعاد بزرگ به‌دست می‌آیند.
- تلاش‌های انجام شده جهت ارتقای تکنیک‌های طراحی موجکها در پردازش سیگنال و تصویر در حال به ثمر رسیدن هستند. به‌طور نمونه برخی از بهترین صافی‌های کدگذاری تصویر از صافی‌های اسپلاینی [3] متعامد تشکیل شده‌اند که براساس نظریهٔ موجک ساخته می‌شوند.

ب) قضایای مورد نیاز جهت پیشرفت نظریهٔ موجکها

- جهت تمیز نویز از سیگنال اصلی به مدل‌های نظری مناسب‌تری نیاز است.
- به منظور تحلیل بهتر سیستم‌های چندمقیاسی با روابط غیرخطی میان مقیاس‌ها، لازم است که روش‌های چند مقیاسی غیرخطی مورد مطالعهٔ بیشتری قرار گیرند.

پ) به کدام نوع از موجکها نیاز داریم؟

1) coherent 2) Reynolds numbers 3) spline filters

- بدون شک موجکهای متعامد همگن و با محمل فشرده مطلوب ما هستند که متأسفانه موجود نیستند. در این حال شاید موجکهای چندگانه پاسخگو باشند.
- موجکهای با خواص ویژه نظیر موجکهای ساخته شده بر خمینه‌ها، و موجکهای منطبق با نمونه‌های نامنظم مورد نظر می‌باشند.
- ضرورت دارد که شکاف موجود میان توابع ویژه و موجکها به نوعی پر شود. به نظر می‌آید که ارتباط میان موجکها و اسپلاین‌ها موضوع بحث انگیزی باشد. برخی بر این اعتقادند که اسپلاین‌ها و موجکهای مبتنی بر اسپلاین قادر به پر کردن شکاف میان موجکها و توابع ویژه هستند. در مقابل عده‌ای بر این باورند که میان اسپلاین‌ها و موجکهای غیر مبتنی بر اسپلاین تفاوت عمده‌ای وجود ندارد و هر پاسخ اسپلاینی دقیق دارای یک پاسخ تقریبی موجکی نیز می‌باشد.

ت) مباحثی که به‌اندازهٔ کافی توسط موجکها رشد نیافته‌اند عبارتند از:

- **پیش بینی:** در مسایل مربوط به بازار سهام، زمین لرزه و هواشناسی، لازم است که با استفاده از موجکها به مدلهایی مبتنی بر داده‌های مشاهده شدهٔ قبلی دست یابیم.
- **فیزیک:** با استفاده از موجکها می‌توانیم مقیاس ناظر را تعریف کنیم. روش‌های موجکی در فیزیک اتمی، فیزیک کوانتمی و لیزر کاربرد دارند.
- در محاسبات علمی و به‌ویژه شیمی محاسباتی، لازم است که به دنبال حل مسایلی باشیم که به روش‌های تقریب غیرخطی و چند مقیاسی نیاز دارند.
- **باید شاهد کاربرد بیشتر موجکها و صافی‌ها در نظریه مخابرات باشیم:** مثلاً در چند برابر کننده‌های انتقالی[1] که چند سیگنال مختلف را بر یک کانال تصویر می‌نمایند، موجکها و صافی‌ها ردهٔ وسیعی از تبدیلاتی جدید ارائه می‌کنند که به واسطهٔ آنها تمرکز زمانی[2] و قابلیت انتخاب فرکانسی[3] بهتری ایجاد می‌شود.
- از موجکها می‌توان در فشرده‌سازی تصاویر ویدئویی نیز بهره برد.
- نمونه برداری‌های دو بعدی نامنظم نیاز وافری به ساختارهای موجکی دارند.
- در پردازش مجموعهٔ سیگنال‌های ساکن، نامتغیر نسبت به زمان و غیریکنواخت، موجکها موفق عمل نموده‌اند. این رده از سیگنال‌ها به‌مراتب وسیع‌تر از مجموعه سیگنال‌های متغیر نسبت به زمان است که در پردازش آنها تبدیل فوریه نقش اساسی ایفا می‌کند. این موضوع شبیه قیاس عملگرهای غیرخطی با عملگرهای خطی است (همانطور که می‌دانیم عملگرهای غیرخطی فراوان‌ترند). اگرچه در این حوزهٔ گسترده، موجکها نقش تعیین کننده‌ای داشته‌اند، لیکن نیاز به تحولات دیگری نظیر تبدیلات انطباقی،

---

1) transmultiplexers 2) time localization 3) frequency selectivity

استفاده از عملگرهایی غیر از پیچش [1] در پردازش سیگنال، و توسعهٔ مدل‌های آماری فرایندهای غیرساکن، اجتناب ناپذیر است.

۶. نتیجه‌گیری

با آن که به نظر می‌رسد در مقولهٔ موجکها کارهای اساسی زیادی صورت گرفته است، ولی این نظریه همچنان در مرحلهٔ پالایش به سر می‌برد. از سوی دیگر آیندهٔ موجکها در قلمرو ترسیم ناشدهٔ کاربردها قرار گرفته است و از این بابت هنوز «داستان‌های ناگفتهٔ زیادی وجود دارند».

مراجع

[۱] عطاالله عسکری همت، آشنایی با موجکها، انتشارات آذرخش، تهران، ۱۳۷۹.

[2] I. Daubechies, *Ten lectures on wavelets*, SIAM, Philadelphia, 1992.

[3] I. Daubechies, The wavelet transform, time - frequency localization and signal analysis, *IEEE Transactions on Information Theory*, 36(1990), 96 - 1005.

[4] D. L. Donoho, Denoising by Soft Threshold, *IEEE Transactions on Information Theory*, 41(1990), 613 - 627.

[5] D. L. Donoho and L. M. Johnstone, Asymptotic minimaxity of wavelet estimators with sampled data, *Statistica Sinica*, 9(1999), 1 - 32.

[6] A. Grossmann, J. Morlet and T. Paul, Transforms associated to square integrable group representations, (I) General Result, *J. Math. Phys.*, 27(1985), 2473 - 2479.

[7] C. E. Heil and D. F. Walnut, Continuous and discrete wavelet transforms, *SIAM Review*, 31(1989), 628 - 666.

[8] W. Sweldens, The Lifting scheme: A Construction of second generation wavelets, *SIAM J. Math. Anal.*, 29(1997), 511 -546.

[9] M. V. Wickerhauser, Custom wavelet packet image compression design, *Proceedings of the third international workshop on image and signal processing, UK(Manchester)*, 4 - 7 November 1996.

حامد صلواتی
اصفهان، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد شهر مجلسی
پست الکترونیک hsalute@yahoo.com

1) convolution

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۲ (بهار ۱۳۸۳) صص. ۳۱ تا ۴۴

ارتباط مسأله ۱۶ هیلبرت با انتگرالهای آبلی و چند روش برای بررسی یکنوایی نسبت دو انتگرال آبلی

دانیار الهی و حمیدرضا ظهوری زنگنه

چکیده

در این مقاله به بررسی ارتباط قسمت دوم مسألهٔ ۱۶ هیلبرت با انتگرالهای آبلی، ارتباط صفرهای انتگرالهای آبلی با وجود سیکلهای حدی در میدانهای برداری و اهمیت یکنوایی نسبت دو انتگرال آبلی می‌پردازیم. در ادامه چند روش برای بررسی یکنوایی انتگرالهای آبلی ارائه می کنیم.

کلمات کلیدی: مسألهٔ ۱۶ هیلبرت، انتگرال آبلی، یکنوایی

۱. مقدمه

در سال ۱۹۰۰ میلادی در دومین کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان که در شهر پاریس برگزار شد هیلبرت[1] در سخنرانی خود ۲۳ مسألهٔ حل نشده مربوط به شاخه‌های مختلف ریاضیات را مطرح کرد که قسمت دوم از مسألهٔ شانزدهم از لیست مسائل وی به صورت زیر است:

مسألهٔ ۱. دربارهٔ تعداد و مکان سیکل‌های حدی یک میدان برداری چند جمله‌ای از درجه n در صفحه چه می‌توان گفت؟

در سال ۱۹۲۳ میلادی دولاک[2][۴] ادعا کرد که ثابت کرده است هر میدان برداری چندجمله‌ای

1) Hilbert 2) Dulac

در صفحه تعداد متناهی سیکل حدی دارد. در آغاز سال ۱۹۸۱ میلادی ایلیاشنکو[۱][۷] یک شکاف بزرگ در اثبات دولاک یافت. سرانجام در سال ۱۹۹۱ میلادی ایلیاشنکو[٦] و در سال ۱۹۹۲ میلادی اکال[۲][۵] مستقلاً ثابت کردند که میدانهای برداری در صفحه تعداد متناهی سیکل حدی دارند. یعنی بعد از ۹۲ سال متناهی بودن سیکلهای حدی میدانهای برداری چندجمله‌ای در صفحه اثبات شد اما هنوز تعداد این سیکلهای حدی برای چندجمله‌ایهای درجه دوم به عنوان مسأله‌ای حل نشده باقی مانده است. به خاطر پیشرفت کند در حل مسأله، ریاضیدانان صورتهای ساده‌تر مختلفی از این مسأله را ارائه کرده‌اند که یکی از آنها در سال ۱۹۷۷ میلادی توسط آرنولد[۳][۱] تحت عنوان مسألهٔ ضعیف شده ۱٦ هیلبرت به صورت زیر ارائه شد:

مسأله ۲ (مسأله ضعیف شده ۱٦ هیلبرت). فرض کنید H یک چندجمله‌ای حقیقی از درجهٔ n و P یک چندجمله‌ای حقیقی از درجهٔ m بر حسب x,y باشند در این صورت انتگرال آبلی $I(h)=\int\int_{H\leq h} Pdxdy$ چند صفر دارد؟

در این مقاله به ارتباط انتگرال آبلی ذکر شده در مسألهٔ ۲ و مسألهٔ ۱ می‌پردازیم و همچنین اهمیت یکنوایی نسبت دو انتگرال آبلی و چند روش برای بررسی این یکنوایی ارائه می‌شود.

۲. تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این بخش برخی تعاریف و مفاهیم مقدماتی از سیستمهای دینامیکی را که در طول مقاله به آنها نیاز پیدا خواهیم کرد ارائه می‌کنیم.

دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{dx}{dt}:=\dot{x}=f(x), \qquad x\in\mathbb{R}^n \tag{۱.۲}$$

که در آن $x=x(t)\in\mathbb{R}^n$ یک تابع برداری با متغیر مستقل t به نام زمان است و $f:U\subset\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ یک تابع تعریف شده روی زیر مجموعهٔ باز U و از ردهٔ C^k ($k\geq ۱$) یعنی دارای مشتق مرتبهٔ k ـ ام پیوسته است.

تعریف ۱. تابع هموار $\phi_t(x)=\phi(x,t)$ که به ازای هر $x\in U$ و t در بازه $I_x=(\alpha,\beta)\subset\mathbb{R}$ تعریف شده و در معادلهٔ (۱.۲) صدق کند را **جواب معادلهٔ** (۱.۲) نامیم. میدان برداری f **جریان** $\phi_t:U\longrightarrow\mathbb{R}^n$ را تولید می‌کند که در خواص گروهی زیر صدق می‌کند مشروط بر اینکه دو طرف رابطه تعریف شده باشند.

الف) $\phi_\circ=id$

ب) $\phi_{t+s}=\phi_t o\phi_s$

ج) $\phi_t^{-۱}=\phi_{-t}$

1) Ilyashenko 2) Ecalle 3) Arnold

هر خانوادهٔ تک پارامتری ϕ_t که در خواص گروهی فوق صدق کند را یک دستگاه دینامیکی گوئیم.

تعریف ۲. هرگاه میدان برداری f به طور صریح به زمان بستگی نداشته باشد معادلهٔ $\dot{x} = f(x)$ راخودگردان می‌نامیم.
بیشتر اوقات معادلهٔ بالا به همراه شرط اولیهٔ $x(\circ) = x_\circ \in U$ داده می‌شود که در آن حالت، ما در جستجوی جواب $\phi(t, x_\circ)$ هستیم به طوری که $\phi(\circ, x_\circ) = x_\circ$، یعنی جوابی که در لحظهٔ $t_\circ = \circ$ از نقطهٔ $x_\circ \in \mathbb{R}^n$ می‌گذرد. در این حالت $\phi(., x_\circ) : I_{x_\circ} = (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ را یک منحنی جواب معادلهٔ دیفرانسیل $\dot{x} = f(x)$ گذرا از $x_\circ$ می‌نامیم. چون میدان برداری سیستم خودگردان بالا نسبت به انتقال زمان پایاست جوابهای پایه‌گذاری شده در زمانهای $t_\circ \neq \circ$ همواره می‌توانند به $t_\circ = \circ$ منتقل شوند.

تعریف ۳. **مدار مثبت** $\gamma^+(x_\circ)$،**مدار منفی** $\gamma^-(x_\circ)$ و**مدار** $\gamma(x_\circ)$ از $x_\circ$ به ترتیب به صورت زیرمجموعه‌های زیر از $\mathbb{R}^n$ تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}
\gamma^+(x_\circ) &:= \{\phi(t, x_\circ) | t \in [\circ, \beta_{x_\circ})\} \\
\gamma^-(x_\circ) &:= \{\phi(t, x_\circ) | t \in (\alpha_{x_\circ}, \circ]\} \\
\gamma(x_\circ) &:= \{\phi(t, x_\circ) | t \in (\alpha_{x_\circ}, \beta_{x_\circ})\}
\end{aligned}$$

که در آنها $(\alpha_{x_\circ}, \beta_{x_\circ})$ بازهٔ ماکزیمال وجود جواب نام دارد که بزرگترین بازهٔ ممکن شامل $t_\circ$ است که $\phi(t, x_\circ)$ در آن تعریف می‌شود.

تعریف ۴. نقطهٔ $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ را نقطهٔ تعادل یا جواب تعادلی $\dot{x} = f(x)$ گوئیم هر گاه $f(\bar{x}) = \circ$.
ساده‌ترین مدارها نقاط تعادل هستند.

تعریف ۵. نقطهٔ تعادل $\bar{x}$ از $\dot{x} = f(x)$ را پایدار گوییم اگر برای هر $\varepsilon > \circ$، عدد $\delta > \circ$ وابسته به ε موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $x_\circ$ که $||x_\circ - \bar{x}|| < \delta$ جواب $\phi(t, x_\circ)$ برای هر $t \geq \circ$ در نامساوی $||\phi(t, x_\circ) - \bar{x}|| < \varepsilon$ صدق کند. نقطه تعادل $\bar{x}$ ناپایدار است اگر پایدار نباشد.

تعریف ٦. نقطهٔ تعادل $\bar{x}$ را مجانبی پایدار گوییم اگر پایدار باشد و علاوه بر این عدد $r > \circ$ موجود باشد به طوری که هرگاه $t \longrightarrow \infty$ برای تمام $x_\circ$ هایی که $||x_\circ - \bar{x}|| < r$ آنگاه $||\phi(t, x_\circ) - \bar{x}|| \longrightarrow \circ$.

تعریف ۷. یک نقطهٔ تعادل $\bar{x}$ از معادله $\dot{x} = f(x)$ را یک نقطهٔ هذلولوی گوییم هرگاه قسمت حقیقی تمامی مقادیر ویژهٔ ماتریس ژاکوبی $Df(\bar{x})$ ناصفر باشند. اگر نقطهٔ تعادل هذلولوی نباشد آن را غیر هذلولوی یا استثنایی نامیم.

تعریف ۸. معادله‌های

$$\dot{x} = f(x, \lambda) \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda \in \mathbb{R}^l \tag{۲.۲}$$

$$\dot{y} = g(y, \mu) \qquad y \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R}^m \tag{۳.۲}$$

را در نظر بگیرید. فرض کنید $g(y_\circ, \mu_\circ) = f(x_\circ, \lambda_\circ) = \circ$ و U یک همسایگی از $(x_\circ, \lambda_\circ)$ و V یک همسایگی از $y_\circ$ باشد. معادله‌های (۲.۲) و (۳.۲) را دارای ساختار کیفی یکسان یا به طور توپولوژیکی معادل گوییم هرگاه همیومورفیسم $h : U \longrightarrow V$ موجود باشد به‌طوری‌که $h(x_\circ, \lambda_\circ) = y_\circ$ و h مدارهای ایجاد شده توسط (۲.۲) را بر مدارهای ایجاد شده توسط (۳.۲) با حفظ جهت ببرد و بالعکس.

تعریف ۹. در معادلهٔ $\dot{x} = f(x, \alpha)$ که $x \in \mathbb{R}^n$ و $\alpha \in \mathbb{R}^m$، هرگاه با تغییر کوچک پارامتر α ساختار کیفی جریان تغییر کند گوییم معادلهٔ دیفرانسیل دارای ساختار ناپایدار است و مقداری از پارامتر که در آن جریان دارای ساختار مداری ناپایدار است را مقدار انشعاب گوییم و گویند که معادله در نقطهٔ انشعاب قرار دارد.

تعریف ۱۰. جواب $\phi(t, x_\circ)$ از $\dot{x} = f(x)$ را جواب تناوبی با دورهٔ تناوب T $(T > \circ)$ گوئیم هرگاه به ازای هر $t \in \mathbb{R}$ $\quad \phi(t + T, x_\circ) = \phi(t, x_\circ)$ و به ازای هر $\circ < t < T$؛ $\phi(t, x_\circ) \neq x_\circ$. مدار $\gamma(x_\circ) = \{\phi(t, x_\circ), t \in I\}$ از یک جواب تناوبی $\phi(t, x_\circ)$ با دوره تناوب T رامدار تناوبی، سیکل یا مدار بسته با دورهٔ تناوب T گویند.

تعریف ۱۱. نقطهٔ y یک نقطهٔ ω—حدی مدار $\gamma(x_\circ)$ است هرگاه دنبالهٔ t_j موجود باشد به‌طوری‌که هرگاه $j \longrightarrow \infty$ ، $t_j \longrightarrow \beta_{x_\circ}$ و $\phi(t_j, x_\circ) \longrightarrow y$. به طور مشابه y یک نقطهٔ α—حدی مدار $\gamma(x_\circ)$ است هرگاه دنبالهٔ t_j موجود باشد به‌طوری‌که هرگاه $j \longrightarrow \infty$، $t_j \longrightarrow \alpha_{x_\circ}$ و $\phi(t_j, x_\circ) \longrightarrow y$.

مجموعهٔ نقاط ω ــ حدی مدار $\gamma(x_\circ)$ را با $\omega(x_\circ)$ و مجموعهٔ نقاط α ــ حدی مدار $\gamma(x_\circ)$ را با $\alpha(x_\circ)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۲. یک مدار تناوبی ایزوله از یک دستگاه دینامیکی پیوسته نسبت به زمان که بجز نقاط روی خود، مجموعه نقاط α—حدی یا ω—حدی مدارهایی است که نقطهٔ شروع آنها در نزدیکی آن قرار دارد، یک سیکل حدی نامیده می‌شود.

تعریف ۱۳. مداری که مجموعه‌های α—حدی و ω—حدی آن یک نقطهٔ تعادل باشد، یک‌مدار هموکلینیک نامیده می‌شود.

تعریف ۱۴. یک مدار که مجموعهٔ α—حدی آن یک نقطهٔ تعادل و مجموعه ω—حدی آن نقطهٔ تعادل دیگری باشد را یک مدار هتروکلینیک گوییم.

تعریف ۱۵. انشعابی را که در اثر تغییر پارامتر مدار هموکلینیک شکسته شود انشعاب هموکلینیک گوییم.

تعریف ۱۶. انتگرال تک ـ فرمی‌های چند جمله‌ای $w(x) = p(x,y)dx + q(x,y)dy$ روی خانواده منحنی‌های بستهٔ Γ_h تعریف شده توسط منحنی‌های جبری حقیقی $H(x,y) = h$ را **انتگرال آبلی** نامیم و آن را به صورت $I_h = \int_{\Gamma_h} p(x,y)dx + q(x,y)dy$ نمایش میدهیم.

تعریف نگاشت پوانکاره. دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱.۲) را در نظر بگیرید. فرض کنید $\phi(t,.)$ جریان تولید شده توسط این معادله دارای یک جواب تناوبی $\phi(t,x_\circ)$ با دورهٔ تناوب T گذرا از $x_\circ$ باشد، یعنی $\phi(t,x_\circ) = \phi(t+T,x_\circ)$. حال فرض کنید $\sum_\circ$ یک زیرمنیفلد $(n-1)$ بعدی از $\mathbb{R}^n$ باشد که میدان برداری f را در نقطهٔ $x_\circ$ بطور مورب قطع کند. به عبارت دیگر $\circ \neq < f(x_\circ), n(x_\circ) >$ که در آن $n(x_\circ)$ بردار نرمال یکه در نقطه $x_\circ \in \sum_\circ$ و "$<.>$" ضرب داخلی دو بردار را نشان دهد. چون f از ردهٔ C^r است، $\phi(t,x)$ نیز از ردهٔ C^r است. بنابراین می‌توان یک مجموعهٔ باز $V \subset \sum_\circ$ یافت به‌طوری‌که مدارهای شروع شده در V در یک زمان نزدیک به T به $\sum_\circ$ بازگردند نگاشتی که نقاط V را به اولین بازگشت این نقاط در $\sum_\circ$ می‌نگارد نگاشت پوانکاره و به $\sum_\circ$، برش پوانکاره گویند. به عبارت دقیق‌تر $P : V \longrightarrow \sum_\circ$ با ضابطهٔ $x \longmapsto \phi(\tau(x),x)$ که در آن $\tau(x)$ زمان اولین بازگشت نقطهٔ x به $\sum_\circ$ است تعریف می شود. طبق این تعریف $\tau(x_\circ) = T$ و $P(x_\circ) = x_\circ$. بنابراین یک نقطهٔ ثابت از P متناظر با یک مدار تناوبی از $\dot{x} = f(x)$ است.

تعریف دستگاههای هامیلتونی. تابع حقیقی مقدار $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ از ردهٔ C^1 که روی هیچ زیرمجموعه بازی از $\mathbb{R}^2$ ثابت نیست را یک انتگرال اول معادلهٔ دیفرانسیل $\dot{x} = f(x)$، $x \in \mathbb{R}^2$ می‌نامیم هرگاه تابع H در طول هر جواب ثابت باشد، یعنی برای هر جواب $x(t)$ با مقدار اولیهٔ $x(\circ) = x_\circ$، ترکیب توابع H و x برای هر t که در آن جواب تعریف شده باشد در رابطهٔ $H(x(t)) = H(x_\circ)$ صدق کند. دستگاه معادلات دیفرانسیل دو بعدی در صفحه به صورت

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases} \qquad (۳.۲)$$

یک دستگاه هامیلتونی باتابع هامیلتونی H نامیده می‌شود. مدارهای یک دستگاه هامیلتونی روی سطوح تراز، ثابت$=H$ قرار دارند. اگر مدار Γ از یک سیستم هامیلتونی روی سطوح تراز $H = h$ قرار داشته باشد مقدار ثابت h را انرژی مدار Γ گویند.

۳. انتگرال آبلی

فرض کنید$X(x,y,\varepsilon) \longrightarrow (x,y)$ یک میدان برداری وابسته به پارامتر حقیقی و کوچک ε در صفحه، متناظر با معادلهٔ دیفرانسیل زیر باشد:

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y) + \varepsilon p(x,y) + O(\varepsilon^2) \\ \dot{y} = Q(x,y) + \varepsilon q(x,y) + O(\varepsilon^2) \end{cases} \qquad (۱.۳)$$

حال اگر Γ یک مدار تناوبی وابسته به میدان برداری $X_0(x,y) = X(x,y,0)$ باشد، گوئیم یک خانوادهٔ موضعی و پیوسته از مدارهای تناوبی از Γ منشعب می‌شوند، هرگاه عدد $\varepsilon_0 > 0$ و یک خانواده پیوسته از منحنیهای بسته $\Gamma_\varepsilon \longleftarrow \varepsilon$ موجود باشند که برای $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ تعریف شده، $\Gamma_0 = \Gamma$ و Γ_ε یک مدار تناوبی از $X(.,\varepsilon)$ باشد.

فرض کنید که نمای فاز دستگاه مختل نشده وابسته به X_0 دارای یک طوق تناوبی باشد. برای Γ و $\varepsilon_0 > 0$ داده شده همواره می‌توان مختصات را طوری تنظیم کرد که یک بازهٔ باز J واقع بر خط افقی $Y = Y_0 = 0$، جریان وابسته به X را به ازای $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ و Γ را در نقطه (ζ, y_0) قطع کند. در این صورت زیربازهٔ $\sum_0$ از J تعریف شده با $\sum_0 = \{(x,0) \in J : x > 0\}$ و عدد $\varepsilon_1 > 0$ با شرط $\varepsilon_0 > \varepsilon_1 > 0$ وجود دارند به‌طوری‌که نگاشت پوانکاره $h(\zeta,\varepsilon) \longleftarrow (\zeta,\varepsilon)$ روی $\sum_0 \times (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$ تعریف شده باشد. تابع جابجایی $d(\zeta,\varepsilon) \longleftarrow (\zeta,\varepsilon)$ را با $d(\zeta,\varepsilon) := h(\zeta,\varepsilon) - \zeta$ را تعریف می‌کنیم.

اگر $X_0^\perp$ میدان برداری متعامد با مؤلفه‌های $(-Q,P)$ و $H(\zeta,\varepsilon)$ بردار $(d(\zeta,\varepsilon),0)$ را نشان دهند در این صورت تابع جابجایی یکه شده F را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(\zeta,\varepsilon) := X_0^\perp(\zeta,y_0).H(\zeta,\varepsilon) = -Q(\zeta,y_0).d(\zeta,\varepsilon)$$

البته $F(\zeta,0) \equiv 0$ و به ازای $\varepsilon \neq 0$ ، $F(\zeta,\varepsilon)$ دقیقاً زمانی برابر صفر است که مدار $X(x,y,\varepsilon)$ گذرا از (ζ,y_0) تناوبی باشد.

قضیهٔ ۱. [۲] معادلهٔ دیفرانسیل (۲.۳) را در نظر بگیرید و فرض کنید $X_0 = X(x,y,0)$ میدان برداری نظیر آن به ازای $\varepsilon = 0$ یک میدان برداری هامیلتونی باشد. هرگاه ϕ_t^ε جریان معادله (۲.۳) را نشان دهد آن گاه:

i) اگر X_0دارای یک طوق تناوبی با برش پوانکاره $\sum = \{(x,y) : y = y_0\}$ باشد داریم:

$$F_\varepsilon(\zeta,0) = \int_0^{T(\zeta,0)} (Pq - Qp)(\gamma(t))dt, \qquad (۲.۳)$$

که در آن $\gamma(t) := \phi_t^0(\zeta,y_0)$ خم انتگرال متناظر با مسیر تناوبی Γ گذرا از (ζ,y_0) است .

ii) اگر به ازای یک ζ_0 ؛ $F_\varepsilon(\zeta_0,0) = 0$ داریم:

$$F_{\zeta\varepsilon}(\zeta_0,0) = \int_0^{T(\zeta_0,0)} (Pq - Qp)(\gamma(t))dt = -\int_\Omega div(p,q)(x,y)dxdy,$$

که Ω ناحیهٔ محصور به Γ است و اگر $F_\varepsilon(\zeta, \circ) \equiv \circ$ آنگاه

$$F_{\zeta\varepsilon}(\zeta_\circ, \circ) = -Q(\zeta_\circ, y_\circ) \int_\circ^{T(\zeta_\circ, \circ)} div(p,q)(\gamma(t))dt.$$

iii) اگر $F_\varepsilon(\zeta_\circ, \circ) = \circ$ و $F_{\zeta\varepsilon}(\zeta_\circ, \circ) \neq \circ$ آنگاه به ازای ε های ناصفر و به اندازهٔ کافی کوچک، خانوادهٔ پیوسته Γ_ε از سیکلهای حدی هذلولوی وجود دارد به‌طوری‌که $\Gamma_\circ = \Gamma$ و به علاوه Γ_ε جاذب است اگر $\frac{\varepsilon F_{\zeta\varepsilon}(\zeta_\circ, \circ)}{Q(\zeta_\circ, \circ)} < \circ$ و Γ_ε دافع است اگر $\circ < \frac{\varepsilon F_{\zeta\varepsilon}(\zeta_\circ, \circ)}{Q(\zeta_\circ, \circ)}$. □

لازم به ذکر است که تابع F_ε همان تابع ملنیکف است که معمولاً با M نمایش داده می‌شود. بنابراین با توجه به تعریف انتگرال آبلی و با توجه به قضیهٔ بالا تابع ملنیکف سیستمهای هامیلتونی با اختلالات چند جمله‌ای یک انتگرال آبلی است .

همانطور که در مقدمه گفته شد صورتهای مختلفی از قسمت دوم مسالهٔ ۱۶ هیلبرت ارائه شده است که یکی از آنها به مسالهٔ ضعیف شدهٔ ۱۶ هیلبرت معروف است و هدف از آن یافتن صفرهای یک انتگرال آبلی است. با توجه به توضیح بالا از این لحاظ مسالهٔ ۱۶ هیلبرت ارتباط نزدیکی با صفرهای انتگرالهای آبلی پیدا می‌کند. یکی از قضایای مهم که در مورد این ارتباط نزدیک می‌توان به آن اشاره کرد قضیهٔ پونتریاگین ـ آندرنف ـ پوانکاره است که صورت آن بدین شکل است:

قضیهٔ ۲.۳. (پونتریاگن ـ آندرنف ـ پوانکاره)[۹]: فرض کنید $H(x, y)$ یک چند جمله‌ای حقیقی از درجهٔ n و $P(x, y)$ و $Q(x, y)$ چندجمله‌ای‌های حقیقی از درجهٔ m باشند. دستگاه هامیلتونی مختل شدهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{x} = \partial_y H + \varepsilon\, P(x, y, \lambda), \\ \dot{y} = -\partial_x H + \varepsilon\, Q(x, y, \lambda) \end{cases} \tag{۳.۳}$$

که در آن سطح‌های تراز $H(x, y) = h$ به ازای $\varepsilon = \circ$ یک خانوادهٔ پیوسته از مدارهای بسته Γ_h برای $h \in (h_۱, h_۲)$ دارد و $I(h) = \int_{\Gamma(h)} P(x, y)dy + Q(x, y)dx$ انتگرال آبلی متناظر با منحنی‌های بسته Γ_h به ازای $h \in (h_۱, h_۲)$ تابع هامیلتونی H باشد.

i) اگر $I(h^*) = \circ$ و $I'(h^*) \neq \circ$ آنگاه یک سیکل حدی هذلولوی L_{h^*} از دستگاه فوق وجود دارد به طوری که $L_{h^*} \to \Gamma_{h^*}$ هر گاه $\varepsilon \to \circ$. بر عکس اگر سیکل حدی هذلولوی L_{h^*} از همان دستگاه موجود باشد به گونه‌ای که $L_{h^*} \to \Gamma_{h^*}$ وقتی که $\varepsilon \to \circ$، آنگاه $I(h^*) = \circ$.

ii) اگر $I(h^*) = I'(h^*) = \ldots = I^{(k-۱)}(h^*) = \circ$ و $I^{(k)}(h^*) \neq \circ$ آنگاه دستگاه فوق حداقل k سیکل حدی برای ε به اندازه کافی کوچک در همسایگی Γ_{h^*} دارد.

iii) تعداد کل صفرهای منفرد انتگرال آبلی فوق با شمارش تکرار یک کران بالا برای تعداد سیکلهای حدی سیستم فوق است که از مدارهای تناوبی یک طوق تناوبی از دستگاه هامیلتونی (۳.۲) منشعب می‌شوند.□

مثال ۱. هنگام بررسی سیستمِ[1]

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \mu_1 + \mu_2 y + x^2 + xy \end{cases}$$

با مجموعه‌ای از انشعابات از جمله انشعاب هموکلینیک مواجه می‌شویم. دراین بررسی امکان وجود یک مدار تناوبی یکتا مطرح می‌شود. برای این کار ابتدا سیستم را با تغییر مقیاس $(\varepsilon > 0) \quad x = \varepsilon^2 x, y = \varepsilon^3 y, \mu_1 = -\varepsilon^4, \mu_2 = \varepsilon^2$ می‌توان به شکل زیر تبدیل کرد

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -1 + x^2 + \varepsilon(y + xy) \end{cases}$$

سیستم فوق به ازای $\varepsilon = 0$ یک سیستم هامیلتونی با تابع هامیلتونی $H(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + x - \frac{x^3}{3}$ است. لذا Γ_h توسط سطوح تراز $H = h$ تعریف می‌شود و به‌ازای $h \in (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ تشکیل یک طوق تناوبی را می‌دهد. حال از قسمت (i) قضیه (۱.۳) و رابطهٔ $\dot{x} = y$ نتیجه می‌شود که

$$M(h) = \int_0^{T(\zeta_0, 0)} y(y + xy)dt = \int_{\Gamma_h} xydx + \int_{\Gamma_h} ydx \qquad (۴.۳)$$

می‌توان نشان داد که یک $h \in (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ موجود است به طوری که $M(h) = 0$ و $M'(h) \neq 0$. لذا طبق قضیه (۲.۳) در این بازه سیستم (۴.۳) دارای حداقل یک سیکل حدی است. □

با توجه به اهمیت صفرهای انتگرال آبلی، یکی از مهمترین مسائل، نحوه تعیین تعداد آنهاست. برای این منظور به بررسی یکنوائی نسبت دو انتگرال آبلی می‌پردازند. برای درک بهتر ارتباط این دو موضوع انتگرال آبلی

$$I(h) = \int_{\Gamma_h} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad (۵.۳)$$

که در آن Γ_h یک مؤلفهٔ فشرده از $H(x,y) = h$ و P و Q و H به ترتیب چندجمله‌ای‌هایی از درجات n و n و $n+1$ هستند را در نظر بگیرید. با تغییر مقیاس انتگرال آبلی (۵.۳) را می‌توان به صورت زیر در آورد [۸]:

$$I(h) = \sum_{k=1}^{m} a_k I_k(h)$$

۱) این سیستم را باگدانف ـ تاکنز (Bogdanov-Takens) می‌نامند.

که در آن به ازای $k=1,2,\dots m$، a_k ثابت، $I_k(h)=\int_{\Gamma_h} f_k(x)g(y)dx$ و $I_1(h),\dots I_m(h)$ به طور خطی مستقل هستند. این حالت را حالت هم بعد m می‌نامیم. در حالت هم بعد ۲ اگر $I_1(h)$ یا $I_2(h)$ مثلاً $I_1(h)$ مخالف صفر باشد، آنگاه

$$I(h)=I_1(h)(a_1+a_2\frac{I_2(h)}{I_1(h)})$$

که در آن $\frac{I_1(h)}{I_2(h)}$ را با $u(h)$ نمایش می‌دهیم. چون $I_1(h)\neq 0$، صفر بودن $I(h)$ معادل صفر بودن $a_1+a_2u(h)$ و یا $u(h)=\frac{-a_1}{a_2}$ است. حال اگر $u(h)$ یکنوا باشد، خط افقی $u(h)=\frac{-a_1}{a_2}$ می‌تواند نمودار $u(h)$ را تنها در یک نقطه قطع کند. لذا یکنویی $u(h)$، یکتایی صفرهای $a_1+a_2u(h)$ و به‌تبع آن یکتایی صفرهای $I(h)$ را نتیجه می‌دهد. به طور مشابه در حالت هم بعد ۳ اگر یکی از $I_1(h)$، $I_2(h)$ یا $I_3(h)$ مثلا $I_1(h)$ مخالف صفر باشد آنگاه

$$I(h)=I_1(h)(a_1+a_2u(h)+a_3v(h))$$

که در آن $u(h)=\frac{I_2(h)}{I_1(h)}$ و $v(h)=\frac{I_3(h)}{I_1(h)}$. تعداد صفرهای $I(h)$ برابر تعداد نقاط برخورد خط $\{(u,v)|v=a_1+a_2u\}$ و خم $\{(u,v)|v=-a_3v(h(u))\}$ در صفحه uv است که در آن $h=h(u)$ تابع معکوس $u=u(h)$ است. از بحث فوق اهمیت یکنوایی نسبت انتگرالهای آبلی در بررسی صفرهای $I(h)$ مشخص می‌شود. تا به حال چندین روش برای بررسی یکنوایی نسبت انتگرالهای آبلی برای سیستم‌های هامیلتونی خاص ارائه شده است که در اینجا توضیح مختصری از سه روش از میان روش‌های موجود، ارائه می‌دهیم.

۱) بااستفاده از معادلات پیکارد ـ فوکس:
فرض کنید $\xi(s)=\frac{I_1(s)}{I_2(s)}$ نسبت دو انتگرال آبلی باشد. برای بررسی یکنوایی $\xi(s)$ و یا محاسبهٔ $d\xi/ds$ به dI_1/ds و dI_2/ds نیاز است که در یک دستگاه معادلات پیکارد ـ فوکس صدق می‌کنند. با استفاده از این معادلات نشان می‌دهیم که ξ در یک معادلهٔ ریکاتی صدق می‌کند. لذا یکنوایی جوابهای این معادله، یکنوایی $\xi(s)$ را نتیجه می‌دهد. با یک مثال آن را توضیح می‌دهیم.

مثال ۲. خانوادهٔ $\Gamma:\quad y^2=x^3-3x+s$ از خمهای آفین درجه سوم حقیقی را در نظر بگیرید و فرض کنید γ_s یک مؤلفهٔ همبند فشرده از Γ برای $s\in(-2,2)$ باشد. ثابت می‌کنیم $\xi(s)=\frac{\int_{\gamma_s} xydx}{\int_{\gamma_s} ydx}$ به طور اکید روی $[-2,2]$ یکنوا است.
برای بررسی این موضوع قرار می‌دهیم:

$$b=\frac{xdx}{y},\qquad a=\frac{dx}{y},\qquad \alpha=ydx,\quad \beta=xydx,$$

$$A=\int_{\gamma_s}\alpha,\quad B=\int_{\gamma_s}\beta,\qquad A=\int_{\gamma_s}a,\quad B=\int_{\gamma_s}b$$

دراین صورت داریم:

$$\mathbf{A}=\frac{۳s}{۵}A-\frac{۶}{۵}B\ ,\qquad \mathbf{B}=-\frac{۶}{۷}A+\frac{۳s}{۷}B \tag{۶.۳}$$

حال با مشتقگیری از معادله (۱۰) نسبت به s و کمی ساده‌سازی، معادله پیکارد ــ فوکس زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}=\frac{۱}{۶(s^۲-۴)}\begin{pmatrix}۵s & ۱۴\\ ۱۰ & ۷s\end{pmatrix}$$

با توجه به اینکه $\xi=\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}$، با مشتقگیری از ξ نسبت به s معادلهٔ ریکاتی زیر را بدست می‌آوریم:

$$\frac{d\xi}{ds}=\frac{\frac{d\mathbf{B}}{ds}.\mathbf{A}-\frac{d\mathbf{A}}{ds}.\mathbf{B}}{\mathbf{A^2}}=\frac{۵+s\xi-۷\xi^۲}{۳(s^۲-۴)} \tag{۷.۳}$$

با کمی محاسبه می‌توان نشان داد که $\xi(-۲)=-۱$، $\xi(۲)=-۵/۷$ و برد تابع ξ در بازه $[-۲,۲]$، بازه $[-۱,-۵/۷]$ است[۱۰]. حال اگر ξ بر $[-۲,۲]$ یکنوا نباشد با توجه به پیوسته بودنش دارای اکسترمم در بازه $(-۲,۲)$ است. با مشتق گیری از معادلهٔ(۱۱) داریم:

$$۶s\frac{d\xi}{ds}+۳(s^۲-۴)\frac{d^۲\xi}{ds^۲}=s\frac{d\xi}{ds}+\xi-۱۴\xi\frac{d\xi}{ds} \tag{۸.۳}$$

فرض کنید اکسترمم ξ روی $[-۲,۲]$ در $s_۰\in(-۲,۲)$ واقع شود. از جایگذاری $s_۰$ در معادلهٔ (۳.۲) داریم $\xi=\frac{d^۲\xi}{d^۲s}(s_۰^۲-۴)$ چون $\xi\in(-۱,-\frac{۵}{۷})$ پس $\frac{d^۲\xi}{ds^۲}(s_۰)>۰$. بنابراین هر نقطهٔ اکسترمم ξ یک نقطه می‌نیمم است. اما چون $\xi(s_۰)<-۱=\xi(-۲)$. پس یک $s_۱\in(-۲,s_۰)$ موجود است که ماکسیمم موضعی ξ است. و این در تناقض با می‌نیمم بودن هر نقطهٔ اکسترمم است پس ξ اکسترمم ندارد، یعنی یکنوا است.□

۲)**با استفاده از فرمول گرین:** در این روش انتگرالهای آبلی به صورت انتگرال‌های دوگانه نوشته شده و با استفاده از فرمول گرین به محاسبه انتگرال‌ها و بررسی یکنوایی نسبت آنها پرداخته می‌شود. به عنوان مثال مرجع [۳] از این روش برای بررسی نسبت انتگرالهای آبلی $\frac{\int_{\Gamma_h}x^qy^۲dxdy}{\int_{\Gamma_h}x^qydxdy}$ در سیستم

$$\begin{cases}\dot x=x^q(Bxy+\delta(\alpha x+xy^۲))\\ \dot y=x^y(-\eta+\eta x^۲-y^۲)\end{cases}$$

استفاده کرده است که در آن q ثابتی وابسته به B است.

۳) این روش برای سیستمهای هامیلتونی با تابع هامیلتونی $H(x,y)=\Phi(x)+\Psi(y)$ به کار

می‌رود که در آن $\Phi \in C^2[\alpha, A]$ و $\Psi \in C^2[\beta, B]$. فرض کنید Γ_h مؤلفه‌های همبند و فشرده سطح تراز $\{(x,y)|H(x,y) = h \quad h_1 < h < h_2\}$ باشد. همچنین فرض می‌کنیم که $a \in (\alpha, A)$ و $b \in (\beta, B)$ موجود باشند که در شرایط زیر صدق کنند:

$$(H_1) \qquad \begin{cases} i)\Phi'(x)(x-a) > 0 \quad (< 0) & \text{به ازای } x \in (\alpha, A)\backslash\{a\} \\ ii)\Psi'(y)(y-b) > 0 \quad (< 0) & \text{به ازای } y \in (\beta, B)\backslash\{b\} \end{cases}$$

با توجه به فرم تابع هامیلتونی وهمچنین فرض (H_1) نمودار Γ_h دارای پائین‌ترین نقطه، بالاترین نقطه، راست‌ترین نقطه و چپ‌ترین نقطه خواهد بود که در اینجا برای نمونه آنها را به ترتیب با $(a, \beta(h))$ و $(a, B(h))$ و $(A(h), b)$ $(\alpha(h), b)$ نمایش می‌دهیم. (شکل ۱) را ببینید که در آن

$$\alpha \leq \alpha(h) \leq x \leq A(h) \leq A \qquad \beta \leq \beta(h) \leq y \leq B(h) \leq B.$$

با توجه به شکل تابع هامیلتونی و فرض H_1 به ازای $x \in (\alpha(h), a)$ یک نگاشت ۱−۱ مانند $x \longmapsto \tilde{x} \in (a, A(h))$ موجود است که $\Phi(x) = \Phi(\tilde{x})$ و به ازای $y \in (\beta(h), b)$ یک نگاشت ۱−۱ مانند $y \longmapsto \tilde{y} \in (b, B(h))$ موجود است که $\Psi(y) = \Psi(\tilde{y})$. حال اگر $I_1(h) := \int_{\Gamma_h} f_1(x)g(y)dx$ و $I_2(h) := \int_{\Gamma_h} f_2(x)g(y)dx$ انتگرال‌های آبلی باشند که در آنها $f_1, f_2 \in C^1(\alpha, A)$ و $g \in C^2(\beta, B)$ و قرار دهیم $u(h) := \frac{I_2(h)}{I_1(h)}$، آنگاه دو تابع محک زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\zeta(x) := \frac{f_2(x)\Phi'(\tilde{x}) - f_2(\tilde{x})\Phi'(x)}{f_1(x)\Phi'(\tilde{x}) - f_1(\tilde{x})\Phi'(x)} \quad , \quad \eta(y) := \frac{(g(\tilde{y}) - g(y))\Psi'(\tilde{y})\Psi'(y)}{g'(\tilde{y})\Psi'(y) - g'(y)\Psi'(\tilde{y})}$$

که در آن $x \in (\alpha(h), a)$ و $y \in (\beta(h), b)$. حال برای آنکه مخرج‌های توابع محک، صفر نشوند نیاز به دو فرض دیگر داریم :

$H_2)$ $\quad f_1(x)f_1(\tilde{x}) > 0,$ $\quad$ به ازای $x \in (\alpha, a)$

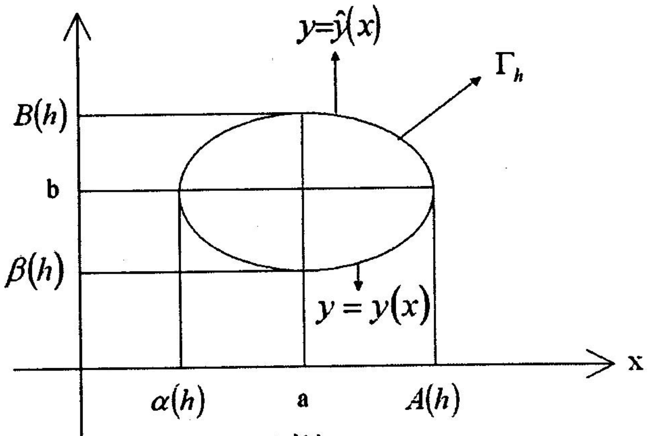
$H_3)$ $\quad g'(y)g'(\tilde{y}) > 0,$ $\quad$ به ازای $y \in (\beta, b)$

حال برای H داده شده در بالا تحت برقراری مفروضات (H_1)، (H_2) و(H_3) برای $h_1 < h < h_2$ و $x \in (\alpha, a)$ و $y \in (\beta, b)$ داریم :

۱) هرگاه $\zeta'(x)\eta'(y) > 0$ آنگاه $u'(h) > 0$،

۲) هرگاه $\zeta'(x)\eta'(y) < 0$ آنگاه $u'(h) < 0$.

در [۸] نشان داده شده که اگر $g(y) = y$ و $\Psi''(y) > 0$ و شرایط $(H_1)_i$ و(H_2) برقرار باشند،



شکل ۱

آنگاه از $\zeta'(x) > 0 \ (< 0)$ نتیجه می‌شود که $u'(h) < 0 \ (> 0)$.

مثال ۳. در مثال ۱ مشاهده شد که سیستم (۸) حداقل یک مدار تناوبی Γ_h در $h \in (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ دارد. حال با توجه به مطالب گفته شده به ازای $h \in (\frac{-2}{3}, \frac{2}{3})$ یکنوائی نسبت $u(h) := \frac{-\int_{\Gamma_h} xydx}{\int_{\Gamma_h} ydx}$، یکتائی مدار تناوبی سیستم (۸) را نتیجه می‌دهد. اما با استفاده از نمادهای روش (۳) داریم :

$$g(y) = y, \quad \Psi(y) = y^2/2, \quad \Phi(x) = x - x^3, \quad f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = -x$$

با توجه به نمای فاز سیستم $x < -1 < \tilde{x} < 1$ و برای $x \neq -1, x < 1$ داریم $\Phi'(x)(x+1) > 0$. بنابراین شرطهای $(H_1)_i, (H_2)$ برقرارند و $\zeta(x) = \frac{1+x\tilde{x}}{x+\tilde{x}}$. حال با توجه به اینکه $\frac{d\tilde{x}}{dx} = \frac{\Phi'(x)}{\Phi'(\tilde{x})} < 0$ به ازای $x < -1 < \tilde{x} < 1$ داریم

$$\zeta'(x) = \frac{1}{(x+\tilde{x})^2}[(1-\tilde{x}^2) + (1-x^2)\frac{d\tilde{x}}{dx}] < 0.$$

بنابراین به ازای $h \in (\frac{-2}{3}, \frac{2}{3})$، $u'(h) < 0$، در نتیجه نسبت دو انتگرال آبلی یکنوا است. یعنی $I(h)$ در $(\frac{-2}{3}, \frac{2}{3})$ فقط صفر دارد.□

اگر تابع هامیلتونی به شکل $H(x,y) = \phi(x)y^2 + \Phi(x)$ باشد که در آن $\phi, \Phi \in C^1$، و ϕ دارای علامت ثابت و Γ_h یک مؤلفهٔ فشرده و همبند از $H(x,y) = h$ باشد، برای بررسی نسبت $w(h) := \frac{\int_{\Gamma_h} f_2(x)ydx}{\int_{\Gamma_h} f_1(x)ydx}$ که در آن f_1 و f_2 پیوسته هستند فرض کنید $\Phi(x)$ در (H_1) و $f_1(x)$ در

(H_2) صدق کنند. تابع محک ζ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\zeta(x) := \frac{f_2(x)\sqrt{\phi(\tilde{x})}\Phi'(\tilde{x}) - f_2(\tilde{x})\sqrt{\phi(x)}\Phi'(x)}{f_1(x)\sqrt{\phi(\tilde{x})}\Phi'(\tilde{x}) - f_1(\tilde{x})\sqrt{\phi(x)}\Phi'(x)}$$

آنگاه صعودی (نزولی) بودن $\zeta(x)$ برای $a < x < \alpha$، نزولی (صعودی) بودن $w(h)$ برای $h_1 < h < h_2$ را نتیجه می‌دهد[۸].

مراجع

[1] Arnold, V. I. [1977]. Loss of stability of self-oscillations close to resonance and versal deformations of equivariant vector fields, *Funct. Anal. Appl.*, **11**, 85-92.

[2] Chicone, C. and Jacobs, M. [1991]. Bifurcation of limit cycles from quadratic isochronoes, *Differential equations*, **91**, 268-326.

[3] Chow, S. N. , Li, C. and Wang, D. [1989]. Uniqueness of periodic orbits in some vector fields with codimension two singularities. *J. Differential equations*, **77**, 231-253.

[4] Dulac, H. [1923]. Sur les cycles limite, *Bull.Soc.Math.France*, **51**, 45-188.

[5] Ecalle, J. [1992]. Introduction aux functions analysables et preure constractive de la conjecture de Dulac, *Harmann publ. paris.*

[6] Ilyashenko, Y. [1992]. Finiteness for limit cycles, *Transl.Math.Monographs* **94**, 85-95.

[7] Ilyashenko, Y. [1982]. Singular points and limit cycles of differential equations in the real and complex plane, *preprint. Pushchino: Sci. Res. Comput. Cent., Acad. Sci. USSR*, **39**.

[8] Li, C. and Zhang, Z. F. [1996]. A criterion for determinig the monotonicity of the ratio of two abelian integrals, *Differential equations*, **124**, 407-424.

[9] Li, J. [2003]. Hilbert's 16Th problem and bifurcation of planar polynomial vector fields, *Bifurcation and Chaos*, **13**, 47-106.

[10] Sanders, J. A. and Cushman, R. [1985]. *Abelian integrals and global Hopf bifurcations*, in Lecture notes in Math, **1125**, 87-98, Springer-Verlag, NewYork/Berlin.

دانیار الهی
دانشگاه صنعتی اصفهان، دانشکده علوم ریاضی
پست الکترونیک danyarelahi@yahoo.com
حمیدرضا ظهوری زنگنه
دانشگاه صنعتی اصفهان، دانشکده علوم ریاضی
پست الکترونیک hamidz@cc.iut.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۲ (بهار ۱۳۸۳) صص. ۴۵ تا ۷۸

معرفی و نقد کتاب

ارسلان شادمان

گسترش ریاضیات ۱۹۵۰ تا ۲۰۰۰[1] (بخش دوم)

به کوشش ژان پل پیه

بخش اول این معرفی در شمارهٔ پیش چاپ شد [ش ۱۳۸۲]. در آن علاوه بر مقدمه، که از تکرار آن در اینجا خودداری می‌شود، بخش‌های الف) ظاهر کتاب، ب) عکس‌ها، ج) دیباچه، سرآغاز و نیمی از بخش د) دیباچه، سیری در کتاب، تا پایان معرفی مقالهٔ ۲۲ گنجانده شد. قسمت دوم که اینجا درج می‌شود، بقیهٔ بخش د، از مقالهٔ ۲۳ تا آخر (مقالهٔ ٣٦) و بخش‌های هـ) دیباچهٔ بخش دوم: جلوه‌هایی از تحول ریاضیات در پنجاه سال اخیر، و) دیباچه، بخش سوم: ریاضیات و جامعه، ز) مصاحبه‌ها، ح) فهرست برندگان جوایز فیلدز و رولف نوانلینا، ط) مقالات مروری، ی) کتابنامهٔ تاریخ ریاضیات معاصر، ک) فهرست نام‌ها ل) جمع‌بندی و نتیجه‌گیری را در بر می‌گیرد وبا فهرست مراجع به پایان می‌رسد.

۲۳. مقالهٔ رُژه تِمام: گسترش معادلات ناویر ــ استوکس در نیمهٔ دوم قرن بیستم.

بگذارید نخست نظر کمیتهٔ علمی را نقل کنم: «چندین معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات پاره‌ای غیرخطی به نظریه‌های مخصوص به خود منجر می‌شوند. رژه تمام[2] به تشریح معادلات ناویرــاستوکس[3] می‌پردازد و مطالعهٔ او از آثار ژان لُره[4] در ۱۹۳۳ تا کارهای جدید در زمینهٔ جاذب‌ها[5] و توربولانس[6] را در بر می‌گیرد. تحلیل او متکی است بر تعریف، وجود، یکتایی و نظم جواب‌های ضعیف[7] در قالب فضاهای سوبولف[8]. هر چند در بعد ۲ نظریه کامل است، برای بعد ۳ مسائل متعددی هنوز حل نشده باقی مانده‌اند.»

---

1) Development of Mathematics 1950-2000, Edited by Jean-Paul PIER, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin 2000, ISBN 3-7643-6280-4 2) Roger Temam 3) Navier-Stokes equations 4) Jean Leray 5) attractors 6) turbulence 7) weak solutions 8) Sobolev spaces

موضوع این مقاله بحث گسترده‌ای از مکانیک سیالات و مباحث ریاضی مربوط به آن را در بر می‌گیرد. فهرست مراجع مقاله حدود ۲۴ صفحه است یعنی بالغ بر ۸۰۰ مرجع را در بر می‌گیرد که برخی از آنها برای مطالعه در زمینه‌های مشابه است. مقدمهٔ ۲ صفحه‌ای مقاله جالب و گویاست و جنبهٔ فنی ندارد، اما بخش اول مقاله با توضیحات فنی راجع‌به معادلهٔ ناویر ــ استوکس شروع می‌شود. هرچند مؤلف موفق شده است با چند نماد و فرمول، موضوع را شرح دهد، اما نقل آنها برای خوانندگان این گزارش شاید جالب نباشد. بخش اول به معادلات ناویر ــ استوکس در حالت سیالات و شارهای فشردنی[1] و بخش دوم به مسائل و معادلات دیگر اختصاص دارد. در هر دو بخش، سعی شده است به شرح و بسط انگیزه‌ها و تاریخچه و افق‌ها و مسائل باز توجه شود و از این رو پس از گذشتن از سد نمادهای اولیه که آن قدر هم سخت نیست، تازه مقاله خواندنی‌تر و فرهنگ و اندیشه‌ای‌تر می‌شود. قسمتی از بحث برای رشتهٔ آنالیز غیرخطی و معادلات با مشتقات پاره‌ای کلاسیک است و قسمتی کاملاً جدید و به مقالات و کتاب‌های در دست انتشار (در زمان انشای مقاله) ارجاع می‌دهد. خواندن مقاله به دانشجویان ارشد ریاضی، فیزیک و شیمی، مهندسی مکانیک توصیه می‌شود که سندیت نویسنده، استاد مشترک دانشگاه پاریس جنوبی در اورسی و دانشگاه ایندیانا و یکی از نام‌آوران آنالیز غیرخطی، و قلم توانای او را خواهند ستود.

توصیه می‌کنم این مقاله به یک گروه چند نفری مرکب از افراد وارد در زمینه‌های مکانیک سیالات، شیمی ــ فیزیک و معادلات با مشتقات پاره‌ای به ویژه با تخصص در ناویر ــ استوکس و آمار و احتمالات جهت ترجمه سفارش شود. دریغ است مبحثی این چنین در جامعهٔ ما غریب بماند، هرچند نمی‌توان در آن یک شبه ره صد ساله پیمود و تعداد مقالات امتیازآور را با شتاب افزود.

اکنون فرازهایی از مقدمهٔ مقاله را برگردانده و می‌آورم: «نظریهٔ معادلات ناویر ــ استوکس NSE یکی از موضوع‌های مرکزی در فیزیک ریاضی معاصر است. این معادلات، الگویی با مقبولیت خوب برای تشریح پدیده‌های بسیار متداول فراهم می‌کنند و تلاش‌های عدیده‌ای به‌وسیلهٔ مهندسین مکانیک سیالات، هواشناس‌ها، ریاضیدانان و غیره در این زمینه به عمل آمده است. با این حال، مسائل چندی از آن هنوز در مرز دانش هستند. از نظر فیزیکی، برخی از مسائل که فرمول‌بندی آنها بسیار ساده است، هنوز حل نشده‌اند، مانند مسألهٔ تعیین ویژگی‌های دمایی[2] شارهای توربولانت[3] یا مسألهٔ تشریح نیروهای دخیل در نقاط مرزی بر یک شار توربولانت (مثلاً در هواپیما یا لوله‌های انتقال گاز و مایعات). از نظر ریاضی، NSE نمونه‌ای از پدیده‌های غیرخطی و معادلات غیرخطی است که خود در عنفوان کودکی است: NSE و معادلات اویلر وابسته به آنها با چهار مسألهٔ اصلی در معادلات غیرخطی مواجه است: خوش‌طرح‌بودن[4]، نوسانات، ناپیوستگی‌ها، و دینامیک غیرخطی.

نظریهٔ ریاضی NSE بیشتر جنبهٔ تکنیک دارد و با وجود آن که هنوز به کمال نرسیده است بسیار وسیع و گسترده است. بنابراین روشن نبود که مقاله‌ای راجع به این موضوع باید چه چیزهایی را دربرمی‌گرفت: آیا باید نتایج تشریح می‌شد (البته بدون فهرستی فراگیر از نتایج)، یا سیر تحول فنون

1) incompressible 2) thermal properties 3) turbulent flows 4) well-posedness

و افکار، یا روابطی که با توربولانس و فیزیک دارند، به رشتهٔ تحریر درمی‌آمد. ممکن نبود به شکل رضایت‌بخشی همهٔ این موضوع‌ها در مقالهٔ حاضر گنجانده شود. مسلماً مطالب مهمی را از قلم انداخته‌ام، و به موضوع‌های مهمی هم فضای کافی اختصاص نداده‌ام. انتخاب‌هایی به عمل آورده‌ام و بدون شک دیگران در این زمینه انتخاب‌های دیگری به عمل می‌آوردند. فهرست وسیعی از مراجع در پایان مقاله به جبران این نقیصه می‌پردازد. علی‌رغم اختصاری که در این یادداشت‌ها به خرج داده‌ام، امیدوارم برای برخی از خوانندگان سودمند باشند؛ خود من هنگام نوشتن آنها نکات جدیدی یاد گرفتم و مطالبی را که می‌دانستم تصحیح یا تقویت کردم.

عنوان معادلات ناویر ــ استوکس در این مقاله هم حالت نافشردنی و هم حالت معادلات شارفشردنی را در بر می‌گیرد، هرچند عده‌ای از صاحب‌نظران نام NSE را فقط برای معادلات شار نافشردنی به‌کار می‌برند. هر دو موضوع در این مقاله مورد توجه‌اند اما تکیه بیشتر روی شارهای نافشردنی است زیرا نظریهٔ ریاضی آن پیشرفته‌تر است.

نظریهٔ ریاضی NSE با کار پیشتازانهٔ ژان لره در سه مقالهٔ سال‌های ۱۹۳۳ و ۱۹۳۴ [جمعاً ۲۱۶ صفحه در دو مجلهٔ ریاضی محض و کاربردی فرانسه و Acta Math اسکاندیناوی، م.] آغاز شد. به همین مناسبت بود که لره مفهوم فرمولبندی ضعیف معادلات با مشتقات پاره‌ای را سال‌ها پیش از نظریهٔ توزیع لوران شوارتس (در ۱۹۵۰ و ۱۹۵۱) مطرح کرد و اندکی هم قبل از آن که س. ل. سوبولف (در ۱۹۳۶) به ارائهٔ سامان‌مند فضاهایش (که فضاهای سوبولف نامیده می‌شود) بپردازد. ژان لره پایهٔ نظریهٔ ریاضی معادلات ناویر ــ استوکس نافشردنی را آن‌گونه که امروز می‌شناسیم بنا نهاد و ابزارها و افکار متعددی را مطرح کرد که از آن زمان به بعد به کار می‌روند. در واقع با وجود همهٔ تلاش‌های انجام شده، باید گفت که پیشرفت‌های پس از او در این زمینه نسبتاً کند بوده‌اند. تشریحی زیبا از ایفای نقش ژان لره در نظریهٔ معادلات با مشتقات پاره‌ای (و از جمله NSE) به قلم پیتر لاکس در مجموعهٔ آثار ژان لره (۱۹۹۸) آمده است. . . .»

در بقیهٔ مقدمه، به کارهای دیگر دهه‌های ۱۹۳۰ تا ۱۹۵۰ اشاره می‌شود، سپس تنظیم مقاله تشریح می‌شود که بسیار جالب است، نهایتاً با سپاسگزاری به ویژه از دو گروه یکی آن که در مطالب مربوط به NSE فشردنی و دیگر آن که در تنظیم کتابنامه (به استناد بانک اطلاعاتی AMS) نویسنده را یاری داده‌اند، مقدمه پایان می‌یابد.

۲۴. مقالهٔ پیر دُلبو: خمینه‌ها و فضاهای تحلیلی مختلط

این مقاله و مقالهٔ بعدی، در زمینهٔ آنالیز و هندسهٔ مختلط چند متغیره، بیشترین علاقهٔ تحصیلی مرا به خود اختصاص می‌دهند. این یکی با ۸۷ صفحه طولانی‌ترین و بعدی (با ۶۰ صفحه) نیز جزء مقالات طولانی کتاب است. اکنون فقط دربارهٔ همین مقاله صحبت می‌کنم، اما مدام تلاش خواهم کرد که گزارش گردشگریم به یک گزارش تخصصی تبدیل نشود.

مقالهٔ دُلبو (بخوانید دُلْبُ)[1] مرکب است از بخش ۰ (مقدمه) و ۱۵ بخش مبسوط: بخش ۱

1) Pierre Dolbeault

(تعاریف)؛ بخش ۲ (خمینه‌ها و فضاهای اشتاین[1]: فشردگی و با پایانی)؛ بخش ۳ (همانستگیِ d''[2])؛ بخش ۴ (توابع چندی زیرهمساز[3]، شبه تحدب[4]، مسأله لوی[5]، جریان‌های مثبت[6])؛ بخش ۵ (q‌ـ تحدب[7])؛ بخش ٦ (نظریهٔ هیلبرتیِ $\bar{\partial}$، مسألهٔ نویمان[8] برای $\bar{\partial}$)؛ بخش ۷ (نمایش‌های انتگرالی، جواب مسأله $\bar{\partial}$، توابع ردهٔ نوانلینا[9])؛ بخش ۸ (روش‌های هندسهٔ دیفرانسیل مختلط، قضیهٔ پوچی[10]، اصل اوکاـ گراورت)؛ بخش ۹ (یکریختی دامنه‌های کراندار $\mathbb{C}^n$ و توسیع آنها به مرز)؛ بخش ۱۰ (خمینه‌های CR، یعنی کوشی ـ ریمان[11])؛ بخش ۱۱ (فضای چرخه‌ها[12])؛ بخش ۱۲ (نظریهٔ دگردیسی‌ها)؛ بخش ۱۳ (مسائل توسیع از نوع هارتوگس[13]، قضیهٔ ساختار مجموعه‌های تحلیلی[14]. مسأله مرز مجموعه‌های تحلیلی؛ پوش تمامریختی[15] مجموعه‌های فشرده. مسائل توسیع (یا درونیابی) اوکاـ کارتان[16])؛ بخش ۱۴ (تبدیل آبل‌ـ رادُن[17])؛ بخش ۱۵ (نظریهٔ مانده‌ها[18] در چند متغیر و کاربرد آنها).

هر یک از بخش‌های ۱ تا ۱۵ زیربخش‌هایی دارد که در آنها تعاریف به شکل دقیق، صورت قضایا به طور کامل بیان شده، تاریخچهٔ مطالب هم ذکر شده و غالباً برای یک موضوع خاص به مراجع مفصل‌تر ارجاع داده شده است. بخش ۰ برای کسی جالب است که آگاهی از نظریه داشته باشد و بخواهد سیر تاریخی نتایج مهم را به قلم یکی از استادان توانمند این زمینه بخواند. در واقع دُلبو در (EMS) دایرةالمعارف علوم ریاضی (که بالغ بر ۵ مجلد آن به چند متغیر مختلط اختصاص دارد) و هم‌چنین در شماره‌هایی از LNM که ویژهٔ انتشار مقالات سمینار آنالیز (للنگ[19] ـ دلبو ـ اسکودا[20]) دانشگاه پاریس ٦ بوده است، مقالاتی دارد. او هنوز هم فعال است و از جمله در ۱۹۹۷ مقالهٔ تحقیقی ٦۲ صفحه‌ای با همکاری هنکین[21] راجع به زنجیرهای تمامریخت در فضای تصویری n بعدی نوشته است.

باید بگویم که دلبو در نوشتن هم سختگیر است و بدون شک انتظار مقالهٔ توصیفی از او توقعی بی‌رحمانه است. لوران شوارتس در مقدمهٔ کتاب درس‌های آنالیز که نخست جزوهٔ درسی پلی‌تکنیک پاریس بود، می‌گوید: « ریاضیات بدون اشک برای مهندس وجود ندارد». اما اگر انصاف داشته باشیم، ملاحظه می‌کنیم که دلبو به توقع بی‌رحمانهٔ خوانندگان جواب مثبت داده و در این کار موفق بوده است. خوانندهٔ مبتدی بهتر است مقدمه را اول نخواند، بلکه برود سراغ بخش‌ها و آنجا هم در هر بخش نخست مقدمات را بخواند، چون تعریف و نمادگذاری و صورت قضایا برای او قابل درک خواهند بود و در عین حال دقت آنها قابل اعتماد است. مثلاً بخش ۱ از تعریف خمینهٔ تحلیلی

1) K. Stein 2) d''-cohomology 3) plurisubharmonic 4) pseudoconvexity 5) P. Levi 6) Positive currents 7) q-convexity 8) Neumann 9) R. Nevanlinna 10) annahilating theorem 11) Cauchy-Riemann manifolds 12) cycles 13) Hartogs 14) analytic sets 15) envelop of holomorphy 16) Oka-Cartan 17) Abel-Rodon 18) theory of residus 19) P. Lelong 20) H. Skoda 21) G.Henkin

مختلط[1] شروع می‌شود، در حالی که طبعاً مفهوم تابع تحلیلی و بهتر بگویم نگاشت تمامریخت[2] بین دامنه‌های $U \subset \mathbb{C}^n$، هم‌چنین مفهوم خمینهٔ دیفرانسیل‌پذیر C^∞ و C^ω و خمینهٔ سوپذیر[3] دانسته فرض می‌شود، در مفهوم بافه‌ها[4]، پس از اشاره به رستهٔ مجموعه‌ها و زیررسته‌های آن، مفهوم پیش‌بافه و ریخت‌های آن، نهایتاً مفهوم بافه با دیدگاه متداول ژان لره بنیانگذار نظریه، شبیه کتاب نظریهٔ بافه‌های رژه گودمان[5] (بدون ارجاع به کتاب) بیان می‌شود و پس از آن فضاهای حلقوی[6] (دیدگاه هانری کارتان از نظریهٔ بافه‌ها) و سپس بافه‌های تحلیلی سازگار[7] به زعم سمینار هانری کارتان در آغاز نیمهٔ دوم قرن بیان می‌شود. قضایای اوکا[8] و کارتان به ترتیب در سازگاری بافهٔ توابع تحلیلی و سازگاریِ بافهٔ ایدآل‌های توابع تحلیلی وابسته به زیرمجموعه‌های تحلیلی یک مجموعهٔ باز $\mathbb{C}^n$ بیان می‌شود تا مقدمه‌ای باشد برای تعریف فضاهای تحلیلی[9]. فضاهای تحلیلی دربرگیرندهٔ خمینه‌های تحلیلی و مجموعه‌های تحلیلی[10] به عنوان حالت خاص است. بنابراین هم نقاط تکین را در بر می‌گیرد و هم خارج از نقاط تکین موضعاً یک خمینهٔ تحلیلی است. در پایان، سیر تاریخی تکوین مفهوم فضای تحلیلی آمده است، یعنی به کار آغازی بنکه[11] و شتاین[12] در ۱۹۵۱ راجع به مفهوم فضاهایی که بر مبنای مدل مرکب از پوشش‌های تحلیلی با انشعاب تا تعریف هانری کارتان در ۱۹۵۲ از فضای تحلیلیِ نرمال و برهان گراورت[13] و رمرت[14] در ۱۹۵۸ برای تطابق دو مفهوم و نهایتاً مفهوم فضای تحلیلی خلاصه شده[15] با دید کارتان و ژان پیر سر و با الهام از آلکساندر گروتندیک برای هندسه جبری اشاره شده است.

به این ترتیب بخش ۱ نه تنها برای دانشجویان ارشد ریاضی محض قابل درک است بلکه گمان می‌کنم در پایان درس هندسهٔ خمینه‌ها برای دانشجو یاد گرفتن این ۴ صفحه ضروری است. بگذارید چند سطر هم راجع به بخش ۲ بنویسم. دامنه‌های $\mathbb{C}^n$ برای $n > ۱$ با دامنه‌های $\mathbb{C}$ تفاوت‌های جدی دارند. مثلاً در $\mathbb{C}$ به ازای هر دامنهٔ U تابعی تمامریخت هست که در U تعریف شده و قابل توسیع به هیچ دامنهٔ اکیداً بزرگتر نیست. این پدیده در $\mathbb{C}^n$ برای $n > ۱$ صحیح نیست، مثلاً دامنهٔ U در $\mathbb{C}^۲$ که با ضابطهٔ

$$۱ < z_۱\bar{z}_۱ + z_۲\bar{z}_۲ < ۲$$

تعریف شود در این خاصیت صدق نمی‌کند. دامنه‌ای را که در خاصیت موردنظر صدق کند، دامنهٔ تمامریختی نامند. تشخیص دامنه‌های تمامریختی یکی از مسائل اولیهٔ توابع چند متغیر بوده و راه‌حل‌های جالبی برای آن کشف شده است. ویژگی مورد بحث هنگامی که خوب جمع و جور شود با تحدب تمامریخت[16] قابل بیان است و آن هم با ویژگی‌های هم‌ارز دیگر که عمدتاً در نیمهٔ

---

1) complex analytic manifold 2) holomorphic mapping 3) orientable 4) Sheaf
5) Roger Godeman 6) ringed space 7) coherent analytic sheaf 8) Oka
9) analytic space 10) analytic set 11) Behnke 12) Stein 13) Grauert
14) Remmert 15) reduced 16) holomorphi convexity

اول قرن بیستم کشف شده‌اند. با بیان سادهٔ چند اصل موضوع که تحدب مختلط یکی از آنها است، خمینه‌های شتاین[1] تعریف می‌شود. سپس فضاهای شتاین[2] به شیوهٔ مشابه بیان شده، و تا ۱۹۷۷ شکل‌های ساده‌تری هم برای تعریف آنها پیدا شده است. یکی از کارهای جدید راجع به محدودیتِ بُعد در نشاندن است:

قضیهٔ رمرت: یک خمینهٔ تحلیلی مختلط X خمینهٔ شتاین است اگر و تنها اگر با یک زیرفضای تحلیلی هموار $\mathbb{C}^N$ برای N به اندازهٔ کافی بزرگ یکریخت باشد.

در سال‌های اخیر (۱۹۹۲ و ۱۹۹۷) ارتباط N با $n=\dim_{\mathbb{C}} X$ دقیقاً پیدا شده است: الیاشبرگ[3]، گروموف[4] و شورمان[5]: می‌توان قرار داد $N = n + [\frac{n}{2}] + 1$ و این کمترین Nی است که در حالت کلی معتبر باشد.

در بخش‌های دیگر هم نکات قابل نقل هست، اما در جمع دانشجویان مطالعهٔ مقاله در یک سمینار هفتگی برای یک سال تحصیلی توسط عده‌ای از علاقه‌مندان ارشد و دکتری توصیه می‌شود. استخراج مقاله‌ای فرهنگ و اندیشه‌ای از آن کاری جدی و جالب خواهد بود، امّا به همین شکل بیش از حد فنی و طولانی است و برای فرهنگ و اندیشه چاپ ترجمهٔ آن توصیه نمی‌شود. مراجع آن به نسبت نتایج ارائه شده اندک است، ۸ صفحه، حتی برای کارهایی که به عنوان کار بنیادی و آغازی در مقدمه و بخش‌ها مطرح شده‌اند، الزامی ندیده است مرجع را بیاورد. مثلاً از ژان لره فقط یک مقالهٔ ۱۰۰ صفحه‌ای ۱۹۵۹ آمده و کارهای تأسیس نظریهٔ بافه‌ها نیامده است. بنابراین، هرچند توقع مقالهٔ بدون اشک را برآورده است، اما خوانندهٔ مقاله و مخاطب او کسی است که باید پختگی را قبلاً به‌دست آورده باشد. اشارهٔ من به آن که مقاله برای خواندن و ارائه در سمینار مناسب است، برای همین است که مبتدیان با راهنمایی افراد با سابقه‌تر مقاله را بخوانند. در عوض، می‌توان گفت که به عنوان خروجی این سمینار، سواد عمومی و تخصصی شرکت کنندگان بالا خواهد رفت، خواه دانشجویان هندسهٔ جبری یا هندسهٔ خمینه‌ها، علاقه‌مندان به جنبه‌های مختلف مانستگی و همانستگی و البته آنالیز و هندسهٔ مختلط.

در پایان به نظر می‌رسد که از ترس تخصصی شدن، بیش از حد در گزارش امساک کردم. بگذارید آن را با نظرِ کمیتهٔ علمی کتاب خاتمه دهم: «تعمیم نظریهٔ توابع یک متغیر مختلط به چند متغیر، سرچشمهٔ نتایجی عمیق است. در ۱۹۵۱ خمینه‌های ک. شتاین، رویه‌های ریمان باز را تعمیم می‌دهند. در ۱۹۵۸ ژان لره دستور انتگرال کوشی را تعمیم می‌دهد تا یک مسألهٔ شرایط آغازی را حل کند. در ۱۹۵۹ نظریهٔ مانده‌های چند متغیره را که هانری پوانکاره آغاز کرده بود، از سر می‌گیرد. پیر دلبو جنبه‌های جبری، هندسی و تحلیلی نظریه را تا بسط‌های جدید آن پیگیری می‌کند.»

۲۵. مقالهٔ کریستیِر شیزِلْمان: توابع چند زیرهمساز و نظریهٔ پتانسیل.

از نادر مقالات کتاب است که با یک چکیده پیش از مقدمه شروع می‌شود: «نظریهٔ توابع چند

1) Stein manifolds 2) Stein spaces 3) Y. Eliashberg 4) M. Gromov 5) J. Schürman

زیرهمساز و نظریهٔ پتانسیل وابسته به آن را از طلوع آنها در ۱۹۴۲ تا ۱۹۹۷ مرور می‌کنیم.» چکیده به زبان‌های انگلیسی و سوئدی است. این مقاله به وضوح فرهنگ و اندیشه‌ای است و هرچند با مقالهٔ قبلی این وجه مشترک را دارد که هر دو با علائق تحصیلی من می‌خوانند، اما بی‌تعارف با این مقاله خیلی راحت‌ترم. باوجود آن که مقاله طولانی است (۴۵ صفحه متن به علاوهٔ ۱۵ صفحه فهرست مراجع)، نحوهٔ نگارش و ارائهٔ آن یکی از نمونه‌های بارز یک مقالهٔ مروری خوب و جالب برای ترجمه و چاپ در فرهنگ و اندیشه است. به همین شکل هم، خود مقاله به همهٔ ریاضیدانان کشور، به‌ویژه کسانی که به آنالیز حقیقی و مختلط و کاربردهای آن در هندسهٔ جبری مختلط علاقه‌مندند، توصیه می‌شود.

در اینجا یک بحث حاشیه‌ای را پیش می‌کشم که اواخر تیرماه ۱۳۸۳ در سمینار هندسه و توپولوژی توسط یکی از استادان برجسته مطرح شد. ایشان در رشتهٔ خود سرآمدند و مقاله‌ای مروری نوشته بودند تا در فرهنگ و اندیشه چاپ شود. ردّ این مقاله توسط داوران، این سؤال را برای استاد و همکار جوان او طرح کرده بود: اگر مقالهٔ چنین استادی ردّ شود پس مقالهٔ چه کسی پذیرفته می‌شود؟ مقایسهٔ دو مقالهٔ دلبو و شیزلمان جواب مسأله را به وجه قانع‌کننده‌ای (برای من) روشن می‌کند: اگر دلبو و شیزلمان متن‌های عالمانهٔ خود را به فرهنگ و اندیشه بسپارند، یک انتخاب کاملاً موجه آن خواهد بود که مقالهٔ دلبو ردّ و مقالهٔ شیزلمان پذیرفته شود. آیا کسی در استادی و تسلط دلبو در مطالب فوق و یا در غنای علمی مقاله شک دارد؟ مسلماً خیر و حتی اگر هم مرجعی برای مقایسهٔ علمی دو نویسنده باشد، شاید دلبو را کاملاً بالاتر از شیزلمان قرار دهد. لااقل سن و سابقهٔ او و مشارکتش در رهبری و ادارهٔ مباحث مربوط به هندسهٔ مختلط جای تردید نیست. اما در قبول یا رد یک مقاله برای مجله شخصیت نویسنده به تنهایی مطرح نیست، آنچه مطرح است نفس مقاله است و به‌ویژه این فکر که متن موردنظر چه تأثیری در خوانندگان مجله (مخاطبین بالقوهٔ مقاله) می‌گذارد.

برای آن که زیبایی قلم و در واقع تلاش نویسنده را برای ارائهٔ مطلوب یک مطلب کاملاً فنی به شیوه‌ای عامه‌پسند، ببینید بخش‌هایی از مقدمه و متن را می‌آورم:

(از مقدمه): «این مقاله مروری است بر گسترش نظریهٔ توابع چند زیرهمساز از ابداع آن در ۱۹۴۲ تا ۱۹۹۷. هدف ما آن است که به ارائهٔ افکاری بپردازیم که در این دوره ظاهر شدند. آرزوی ما آن است که متن برای همهٔ ریاضیدانان دانشگاهی قابل درک باشد. این خواسته هم پیامدهایی راجع به انتخاب مباحث و هم‌چنین شیوهٔ ارائهٔ مطلب خواهد داشت.

نگاهی هم به نظریهٔ توابع چند زیرهمساز فرین خواهیم انداخت، یعنی تقریباً به گفتهٔ دیگر به جواب‌های چند زیرهمساز برای معادلهٔ مونژ—آمپر. این توابع در مسائلی که مشابه مسائل نظریهٔ پتانسیل کلاسیک هستند ظاهر می‌شوند و از این رو این رشته را گاهی نظریهٔ پلوری پتانسیل می‌نامند. در این رشته از ریاضیات ویژگی‌های حیاتی توابع چند زیرهمساز بررسی می‌شوند. با وجود این، مطالعهٔ توابع چند زیرهمساز منحصر به این رشته نیست و ما مدعی آن نیستیم که همهٔ زمینه‌های کاربرد توابع چند زیرهمساز را پوشش داده باشیم. در زمینهٔ نظریهٔ پلوری پتانسیل، آثار

متعددی در دسترس‌اند که جنبهٔ مروری دارند: از قبیل مقالهٔ مروری بدفورد[1] (۱۹۹۳)، کتاب‌های کلیمک[2] (۱۹۹۱) و چغرل[3] (۱۹۸۸). هم‌چنین در مقالهٔ تحقیقی کولوژیه[4] (۱۹۹۸) مروری بر نتایج مربوط به معادلهٔ مونژ ـ آمپر آمده است. خوانندهٔ علاقه‌مند را به متن‌های نامبرده برای مطالعهٔ برخی از موضوع‌های مطرح شده در مقالهٔ حاضر ارجاع می‌دهیم.

در حال حاضر بسیاری از زمینه‌های مطرح شده در این مقاله، موضوع پژوهش است. این به آن معنی است که تعیین جایگاه تاریخی برخی از مباحث کار ساده‌ای نیست. این حکم به ویژه در مورد بخش‌های ۱۲ تا ۱۶ صدق می‌کند»

(از متن بخش ۱): پیش از آن که به تاریخچهٔ مطلب بپردازیم، تعاریف اصلی را برای آسودگی خاطر خوانندگان می‌آوریم. توابع چند زیرهمساز از جهات متعددی شبیه توابع محدب‌اند. در واقع ارتباط آنها با توابع زیرهمساز شبیه ارتباط توابع محدب چند متغیر حقیقی با توابع محدب یک متغیر حقیقی است. به ویژه تعریف توابع چند زیرهمساز نیازمند بینهایت نامساوی است، همان‌گونه که توابع محدب نیازمند آنند، هم‌چنین به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل فوق معیّن وابسته‌اند. برعکس، یک تابع چند زیرهمساز الزاماً پیوسته نیست، حتی موضعاً کراندار هم نیست، بنابراین مسائل مربوط به نظم موضعی این توابع مستلزم مطالعهٔ دقیقتری در مسائلِ نظیر آن برای توابع محدب است، زیرا تابع محدب در هر مجموعهٔ باز حوزهٔ تعریفش تابعی است پیوسته.

از دیدگاه معادلات دیفرانسیل، می‌توان گفت که نظریهٔ چند متغیر مختلط حول سه معادلهٔ مهم بسط داده می‌شود: اول معادلهٔ کوشی ـ ریمان

$$\bar\partial f = d'' f = u$$

... دوم معادلهٔ $2 i d' d'' u = f$ ...، سوم معادلهٔ مونژ ـ آمپر $(dd^c u)^n = f$. البته توضیحاتی راجع‌به d' و d'' و dd^c لازم است که آنها را با روشنی تمام ارائه می‌کند. یک تابع f تعریف شده روی یک مجموعهٔ باز Ω در $\mathbb{C}^n$ را چند زیرهمساز می‌گوییم هرگاه مقادیر آن حقیقی یا $-\infty$ باشند، تابع، نیمپیوستهٔ بالایی باشد یعنی $\{z \in \Omega | f(z) < c\}$ برای هر $c \in \mathbb{R}$ باز باشد و بالاخره در نامساوی میانگین برای هر قرص $\{a + tb | t \in \mathbb{C}, |t| \leq 1\}$ که کلاً در Ω قرار گیرد صدق کند. منظور از نامساوی میانگین این است:

$$f(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + e^{i\theta} b) d\theta.$$

یک ویژگی سازگاری ضمن ترکیب با نگاشت‌های تمامریخت نشان می‌دهد که توابع چند زیرهمساز را می‌توان روی خمینه‌های تحلیلی مختلط هم تعریف کرد.

مثالی اساسی از توابع چند زیرهمساز $c \log |h|$ است هنگامی که h تابع تمامریخت و $c > 0$ عدد ثابت مثبتی است. اما دستهٔ توابع چند زیر همساز خیلی وسیع‌تر از دستهٔ توابع به شکل $c \log |h|$ است

1) Bedford 2) Klimek 3) Cegrel 4) Kolodzie

و از این رو به تعبیر للنگ، توابع چند زیر همساز (اشیاء ظریف آنالیز مختلط) نام گرفته‌اند. اگر f از ردهٔ C^{2} باشد، چند زیرهمسازبودن با صورت لوی مربوط است:

$$L_f(z;b) = \sum \frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} b_j \bar{b}_k \geq 0, \quad b \in \mathbb{C}^n, z \in \Omega.$$

در بخش ۳ (تاریخچهٔ طلوع توابع چند زیرهمساز) مباحث بسیار زیبایی از کار فریدریک هارتوگس[1] (۱۹۰۶)، فریدریک ریس (۱۹۲۴ تا ۱۹۳۹) و کتاب قدیمی رادو[2] (۱۹۳۷) و به‌ویژه بحث مبسوط اصالتِ ابداع واقعی توابع چند زیرهمساز مستقلاً توسط اوکا و لُلُنگ (۱۹۴۲) را در ۴ صفحهٔ کم‌نظیر ارائه می‌کند. اگر فقط ۸ صفحهٔ اول مقالهٔ شیزلمان را در نظر بگیریم، شاهکاری آموزنده از یک بحث تاریخی ریاضی معاصر را در اختیار قرار می‌دهد. البته خود للنگ مقالهٔ مبسوطی در مجلهٔ تاریخ ریاضی به سال ۱۹۹۵ منتشر کرده است که ایده‌های اصلی ناظر به ابداع این توابع و جریان‌های مثبت را از ۱۹۴۲ تا ۱۹۶۲ تشریح می‌کند. با اکتفا به همین مختصر، نام سایر بخش‌ها را ذکر می‌کنم:

بخش ۴ دامنه‌های تمامریختی و دامنه‌های شبه محدب
بخش ۵ انتگرال‌گیری روی چندگوناهای شبه محدب
بخش ٦ تخمین‌های وزندار برای عملگر کوشی ـ ریمان
بخش ۷ مجموعه‌های کوچک: مجموعه‌های قطبی و مجموعه‌های ناچیز
بخش ۸ مشابهت با تحدب
بخش ۹ اعداد للنگ
بخش ۱۰ رشد توابع تام در بینهایت
بخش ۱۱ وجود مخروط مماس
بخش ۱۲ عملگر مونژ ـ آمپر
بخش ۱۳ تابع فرین سراسری
بخش ۱۴ تابع فرین نسبی
بخش ۱۵ توابع گرین[3]
بخش ١٦ توابع چند زیرهمساز به عنوان پوش پایینی

توجه شود که در همهٔ بخش‌ها، حالت مقالهٔ توصیفی با ذکر تاریخچهٔ افکار قابل مشاهده و تحسین است.

در فهرست مراجع دو نوآوری نسبت به فهرست‌های متداول دیده می‌شود: یکی آن که نام‌خانوادگی و نام نویسنده تماماً ذکر شده است، دیگر آن که در حد امکان تاریخ تولد و احیاناً تاریخ وفات نویسندگان هم آمده است. نکته‌ای هم باید افزود که در مراجع، بیشترین تعداد به للنگ (بالغ بر ۲۱ عنوان) اختصاص دارد، و ۹ عنوان به خود نویسندهٔ مقاله که دومین از حیث تعداد است.

1) Hartogs 2) T. Rado 3) Green functions

محتوا و ارائهٔ بخش‌ها به گونه‌ای است که می‌تواند سرنخی برای پژوهش در اختیار دانشجویان دکتری قرار دهد. این هم یکی دیگر از جنبه‌هایی است که توجه کافی به این مقاله را، خواه ترجمه بشود و یا به همین شکل مورد استفاده قرار گیرد، توجیه می‌کند.

۲۶. مقالهٔ پل ـ آندره میِرْ: فرآیندهای تصادفی از ۱۹۵۰ تا این ایام.

مقالهٔ پل آندره میر[1]، یکی از اعضای معروف آکادمی علوم پاریس، که صاحب چندین اثر از جمله کتاب (احتمالات و پتانسیل ۱۹٦٦) و مقالاتی در سمینار احتمالات است (LN51، LN511، LN721، LN1059)، یکی از مقالات موفق این کتاب است که سعی کرده است بدون فرمول (فقط ۲ فرمول در کل مقالهٔ ۳٦ صفحه‌ای) به تشریح افکار و ایده‌های اصلی در این زمینهٔ مهم بپردازد. مقاله با این مقدمه شروع می‌شود: نگارش **تاریخ ریاضیات** در زمینهٔ حساب احتمالات از همان ابتدا کاری عبث است، تقریباً به همان بیهودگی که کسی بخواهد تاریخ فیزیک را از دیدگاه ریاضی‌دانانی بنویسد که فیزیک تجربی را نادیده می‌گیرند. این جمله را نباید فراموش کرد: حساب احتمالات پیش از هر چیز محاسبهٔ احتمالات است، که البته هرچند در جهت خوشایند و ارضای مقاصد احتمال‌دانان خواهد بود، اما به این هم اکتفا نمی‌کند بلکه برای مقاصد گروه وسیعی از کاربران متخصص در زمینه‌هایی متنوع از قبیل آمار، ژنتیک، بیماری‌های واگیردار، بیمه و مباحث مربوطه، اقتصاد و غیره نیز به‌کار می‌رود. پیشرفت‌هایی که ظرف پنجاه سال اخیر در این زمینه حاصل شده است، پاسخی است به نقش فزایندهٔ احتمالات در تفکر علمی به طور کلی، که با روش‌های عدیدهٔ محاسبه توجیه می‌شوند. این روش‌ها از جمله اجازه می‌دهند قانون فرایند تصادفی به عنوان یک کل، به جای قوانین متغیرهای تصادفی منزوی، بررسی شود.

بنابراین از ابتدا باید هشدار دهم که "تاریخ" حاضر، به قلم یک ریاضیدان، نه تنها کارهای انجام شده به وسیلهٔ غیرریاضیدانان و منتشر شده در مجلات تخصصی دیگر را نادیده می‌گیرد، بلکه کارهای ریاضیدانانی را هم که با روش‌های کلاسیک به مطالعهٔ مسائل کلاسیک پرداخته‌اند، از قبیل حاصلجمع متغیرهای مستقل، بیشینه‌ها و کمینه‌ها، تغییرات دوجانبه، قضایای حد مرکزی، نادیده می‌گیرد. زیرا هر روز در عمل می‌بینیم که الزاماً باید نتایج قدیمی را بهبود بخشید، همان‌گونه که روز به روز موتورهای احتراقی خودروها را به شکل مطلوب‌تردر می‌آوریم.

ظرف پنجاه سال، انشعاب‌های مهمی از احتمالات سرچشمه گرفته است. توصیف خلاصه‌ای که اینجا ارائه می‌شود منحصر است به فرآیندهای تصادفی که به معنای بس محدود، به عنوان تحولات تصادفی تحت سلطهٔ زمان (زمان پیوسته یا زمان گسسته) منظور می‌شوند. به‌علاوه مجبور خواهم بود بررسی رده‌هایی از فرایندهای ویژه را مسکوت بگذارم (زیرا صلاحیت آن را ندارم).

به مباحثی از احتمالات پرداخته‌ام که خودم با آنها تماس داشته‌ام و گسترش آنها را هم **آن‌گونه که به نظرم رسیده است** ارائه می‌کنم، نهایتاً سعی کرده‌ام برای کنترل نکاتی از دیدگاهم، پژوهش

1) Paul-André Meyer

کتابشناسانه‌ای به آن بیفزایم. از جمله اگر گفتم مقاله‌ای یا نویسنده‌ای «مهم» است، یعنی برای اطرافیان من (یا خودم)، هیجان‌آفرین بوده و یا سرچشمهٔ آثار دیگری شده و یا ذهن مرا در مواردی روشن ساخته است. به ویژه احساس ناراحتی شدیدی دارم از این که نمی‌توانم کارهای منتشر شده در شرق را ارائه کنم (ژاپن را از این لحاظ جزء غرب می‌دانم). در واقع نه‌تنها ارتباط بین دو بلوک سیاسی به کندی صورت می‌گرفت، بلکه احتمال‌دانان دو بلوک به علت دیوارهای ذهنی و زبانی فیمابین، با روحیه‌ای کار کرده‌اند که روح کار آنها را اندکی متفاوت ساخته است. حتی در غرب شاهد جمعیت بسیار کوچکی هستیم که هر یک سنّت، سلیقه و تعصب خاص خود را دارد. مثلاً حفظ تعادل بین احتمالات محض و کاربسته، در کشورهای انگلو ـ ساکسون که مکتب‌های آمار توانمندی را دارند، با فرانسه و ژاپن کاملاً متفاوت بوده است. بنابراین متن مقالهٔ حاضر به عنوان آراء شخصی تلقی می‌شوند و نباید آنها را داوری‌هایی ارزشمند به حساب آورد.»

البته این رسم دانشمندان است که مخلصانه تواضع می‌ورزند. مقاله بخش‌هایی دارد که عنوان دارند اما شماره ندارند. ۱ـ احتمالات حوالی سال ۱۹۵۰، که خود دو زیربخش دارد: بسط‌های اولیه، فرایندهای تصادفی؛ ۲ـ زمینه‌های اصلی از ۱۹۵۰ تا ۱۹۶۵ با دو زیربخش: فرایند مارکوف، بسط احتمالات شوروی؛ ۳ـ زمینه‌های عمدهٔ سال‌های ۱۹۵۰ تا ۱۹۶۵ با چند زیربخش: نظریهٔ کلاسیک پتانسیل و احتمالات، نظریهٔ مارتینگل‌ها، فرایند مارکوف و پتانسیل، فرایندهای مارکوف ویژه، روابط بین فرایندهای مارکوف و مارتینگل‌ها؛ ۴ـ دورهٔ ۱۹۶۵ تا ۱۹۸۰ بازیربخش‌های: انتگرال تصادفی، فرایند مارکوف، نظریهٔ عمومی فرایندها، نامساوی‌های مارتینگل و آنالیز، مسألهٔ مارتینگل، مکانیک تصادفی، رابطه با فیزیک؛ ۵ـ سال‌های بعد از ۱۹۸۰ با زیربخش‌های: حساب مالیاون[1]، هندسهٔ دیفرانسیل تصادفی، توزیع و صدای سفید[2]، احتمالات تعویض ناپذیر.

در پایان بیان می‌کند که چه قسمت‌های عمده‌ای را از قلم انداخته است و اظهار امیدواری می‌کند که خواننده از این داستان لذت برده باشد و از او می‌خواهد که آن را با دیدهٔ اغماض بنگرد. فهرست مراجع را برحسب سال تنظیم کرده است از ۱۹۰۰ تا ۱۹۹۴ و با استفاده از اختصاراتی در مورد نشریات ادواری و سمینارها، حذف شمارهٔ صفحات مراجع، قریب ۳۰ مرجع را در هر صفحه گنجانده است و با این وصف ۱۲ صفحه مرجع دارد.

برای آن که طیف وسیع‌تری از خوانندگان از این مقاله استفاده کنند، توصیهٔ من آن است که پیش از شروع دورهٔ کارگاه تحولات تصادفی که قرار است با همکاری ریاضیدانان ایران و فرانسه طی سال‌های آینده برگزار شود، ترجمهٔ مقاله به فارسی و انگلیسی تهیه و توزیع شود. نوعاً ترجمهٔ فارسی آن برای فرهنگ و اندیشه بسیار سودمند خواهد بود. سطر به سطر آن آموزنده است، به ویژه برای من مطالب رهگشایی برای آیندهٔ نزدیک مطالعه‌ام فراهم کرد.

۲۷. مقالهٔ مارک یور[3]: حرکت براونی: گسترش‌هایی در سال‌های ۱۹۵۰ تا ۱۹۹۵

1) Malliavin 2) bruit blanc 3) Marc Yor

آزادی سبک و آیین نگارش موجب شده است که هر نویسنده‌ای به شکلی مقالهٔ خود را بیاراید. گردشگری در این مجموعه مقالات متنوع، شاید این را ایجاب کند که بازار جاذب توریستی از حالت یکنواختی درآید. مقالهٔ یور فرض می‌کند که خواننده کاملاً می‌داند جریان حرکت براونی و مسائل آن از چه نوعی است. با نقل نخستین جمله از کتاب نایت[۱] ۱۹۸۱، که ناظر به دودلی‌های نویسندهٔ بالقوه‌ای در زمینهٔ ریاضیات حرکت براونی است، شروع می‌کند. سپس اشاره می‌کند به سلسله جبال عظیمی از نتایج به دست آمده در طول ۱۵ سال بعد و به نقل قول دیگری از همان کتاب و نقل قولی قدیمی‌تر از پل لوی (۱۹۷۰) اشاره می‌کند که خود از پاسکال راجع به طبیعت سخن گفته است. همهٔ اینها برای آن است که پیچیدگی حرکت براونی و در عین حال نتایج جالب به دست آمده، با هیجانی خاص برای خواننده بازگو شود. نویسنده، پژوهشگر در این زمینه را به جغرافی‌دانی تشبیه می‌کند که روی ستاره‌ای (ستارهٔ براونی) مطالعه می‌کند و با گذشت زمان به تدریج از ابزارهای قویتر و کارآمدتری برای بررسی‌هایش استفاده می‌کند.

در دههٔ ۱۹۴۰ تا ۱۹۵۰، جغرافی‌دان خیالی ما کورمال کورمال، به وجود بعضی قله‌ها و چاله‌ها پی می‌برد. سپس در کمتر از ۵ سطر، نویسنده به کارهای درخشان پل لوی[۲] روی قانون arc sinus و حرکت براونی در سال های ۱۹۳۹ و ۱۹۴۰ و کشف باشِلیه[۳] روی قانون مزدوج $\{S_t = \sup_{s\le t} B_s, I_t = \inf_{s\le t} B_s, B_t\}$ اشاره می‌کند. سپس به مقالات اساسی ایتو[۴] (سال‌های ۱۹۴۴ تا ۱۹۵۱) روی حساب تصادفی که موجب انقلابی در حرکت براونی شد، نیز اشاره می‌کند. اما نمی‌گوید B_s چیست!

تقریباً با همین سبک و اندکی توضیح با همان زبان استعاری به نحوهٔ گسترش نظریه در دهه‌های ۱۹۵۰ تا ۱۹۶۰، و دیگر دهه‌ها تا ۱۹۸۰ ادامه می‌دهد. برای ۱۹۸۰ تا ۱۹۸۵ و ۱۹۸۵ تا ۱۹۹۰ جداگانه و برای ۱۹۹۰ تا ۱۹۹۵ هم شرح مختصری می‌دهد و سپس در آخرین بخش به شکل زیر نتیجه‌گیری می‌کند:

«(آ) امروز هم، در نیمهٔ دوم دههٔ ۱۹۹۰، پژوهش روی حرکت براونی هم‌چنان درحال تشدید است که ناشی از انگیزه‌های مختلفی است (از جمله، ریاضیات بازرگانی را، که در مقاله از آن سخن نگفتم، نباید دست کم گرفت).

(ب) در بسیاری از مسائل خیلی پیچیده، از قبیل مسائلی در هندسهٔ خم‌های براونی[۵]، غالباً به شیوهٔ پل لِوی، اندازه‌های تصادفی مناسبی (زمان‌های موضعی[۶]) ساخته می‌شوند که بر مجموعه‌های استثنایی حمل می‌شوند و همین اندازه‌ها اجازه می‌دهند که این مجموعه‌ها توصیف گردند؛ فرایندهای زمان موضعی[۷] به نوبهٔ خود در ساختن مسیروار «فوق حرکت‌های براونی[۸]» و «مارهای براونی[۹]» که توسط ژ.ف. لوگال[۱۰] و شاگردانش دینکین[۱۱] کوزنتسوف[۱۲] و دیگران مطالعه شده‌اند کاربرد دارند.

1) Knight 2) Paul Lévy 3) Bachelier 4) Ito 5) Brownian paths 6) local times 7) local time processes 8) Brownian super motions 9) serpent Brownien 10) J.F. LeGal 11) Dynkin 12) Kuznetsov

پ) غالب این نتایج اساساً متکی است بر ویژگی استقلال نموهای حرکت براونی، و سپس تعمیم‌های مهمی از این ویژگی به ردهٔ وسیعی از فرایندهای لوی نیز سریعاً به‌دست آمده است (فرایند لوی[1] یعنی فرایندی با نموهای مستقل و همگن در طول زمان). نویسنده به کتاب جالبی در زمینهٔ فرایندهای لوی چاپ ۱۹۹۶ اشاره می‌کند و می‌گوید این کتاب به ارائهٔ تحقیقات ظریفی در مورد فرآیندهای لوی پرداخته است.

(ت) البته مسخره است که کسی فکر کند من توانسته باشم در ده صفحه به شکل معقولی کتابشناسی و تحقیقات براونی را ارائه کنم. از میان حوزه‌های وسیعی که در مقاله مطرح نشد، این موارد را نام می‌برم:

- رابطهٔ تنگاتنگ با نظریهٔ پتانسیل (که توسط پل آندره میر در همین کتاب مطرح شده است). کتاب رائو[2] (۱۹۷۷) و کتاب جامع دوب[3] (۱۹۸۴) دیده شود؛
- انشعاب‌های بزرگ[4] ··· (چند مرجع را نام برد)
- ساختن فرایندهای بزرگ با مقدار در فضاهای بینهایت بعدی (مانند فرایندهای پیشگویی نایت[5]) ... (چند مثال دیگر ...)
- افرازهای تصادفی[6]

سرانجام آخرین سطرهای مقاله به اهمیت آیندهٔ نظریه بها می‌دهند:

> « همهٔ گسترش‌هایی که در این مقالهٔ مختصر نام بردیم (و نام نبردیم) نشان می‌دهند که تا چه حد زندگی روی ستارهٔ براونی ادامه خواهد یافت و با چه جدّیتی به توسعهٔ خود در آینده ادامه خواهد داد.»

در این مقاله، مراجع به شیوه‌ای متمایز از بقیه تنظیم شده است: بر حسب مؤلف، بر حسب موضوع و بر حسب کتاب‌های عمومی/ روش‌ها. ترتیب بخش مؤلف نه الفبایی است و نه تاریخی، ترتیب بر حسب موضوع شامل بخش‌های زیر است:

- هندسهٔ خم براونی
- وجود نقاط چندگانه[7]
- مؤلفه‌های همبند
- نماهای بحرانی[8]
- ارتباط با آنالیز
- بررسی‌های مجانبی[9]
- سوسیس وینر[10]

---

1) Lévy Process 2) Rao 3) Doob 4) great deviations 5) Knight
6) stochastic partitions 7) Multiple points 8) critical exponents 9) asymptotic studies
10) Wiener's sauciss

- اندازهٔ هاوسدورف[1]
- اندازهٔ پلیمر[2]

ترتیب کتاب‌های عمومی / روش‌ها نیز نه الفبایی است و نه تاریخی. اما در بین آنها مقالهٔ جالبی از ژان پیر کاهان[3] دیده می‌شود که به تاریخ ۱۹۹۸ است.

مقاله به این شکل برای ترجمه توصیه نمی‌شود، اما احتمالاً مقالهٔ کاهان قابل بررسی است و باید بی‌درنگ در مورد آن تصمیم گرفت.

۲۸. مقالهٔ ژان ـ فرانسوا لوگال[4]: فرایندهای شاخه‌ای[5]، درخت‌ها[6] و زَبَرفرایندها[7].

برخلاف مقالهٔ یور، مقالهٔ لوگال به شکل کاملاً استاندارد ارائه شده و به‌علاوه سعی خود را به عمل آورده تا مقاله برای خواننده از حیث محتوایی قابل درک باشد. تحول جمعیتی از موجودات که در طول زمان قادرند نظیر خود را به‌وجود آورند، چگونه است؟ مدلِ ریاضی که می‌خواهد این تحول را توصیف کند، فرایند شاخه‌ای نام دارد. اگر زمان مورد نظر گسسته فرض شود، یکی از فرایندهای متناظر با آن فرایند گالتون ـ واتسون[8] است. فرایندهای شاخه‌ای مارکوفی[9] هم یکی از فرایندهای ناظر به زمان پیوسته است. تعمیمی از آن، فرایند بلمان ـ هریس[10] است. تعمیمی از این یکی هم فرایند کرامپ ـ مود ـ جیگرز[11] است. بسته به آن که مقدار فرایندها در چه فضایی باشد و یا موجودات مورد بحث در چه فضایی جای خود را تغییر دهند و چه مدت به زندگی ادامه دهند و آیا به محل زندگی آنها توجه می‌شود یا نه، فرایندهای شاخه‌ای متعددی مطرح خواهد شد. در مقاله، زبرفرایند[12] به آنهایی می‌گویند که مقدارشان در فضای اندازه‌ها باشد. شجره‌شناسی[13] فرایندهای شاخه‌ای در مطالعهٔ این فرایندها اخیراً مورد استفاده قرار گرفته است. احتمالات روی درخت‌ها آخرین بخش مقاله است.

این موضوع، آشکارا کاربردهای متعددی دارد، به‌ویژه در بیولوژی و ژنتیک، ولی منحصر به این‌ها نیست. انشای مقاله کاملاً دوست داشتنی و قابل درک است. ترجمهٔ آن مفید است و ارتباط چند رشتهٔ دیگر ریاضی را با آمار و احتمالات به‌خوبی نشان می‌دهد، مخصوصاً کارهای جدید نویسنده با مارهای براونی[14]، یا کار دینکین در ارتباط با معادلات با مشتقات جزئی، قابل توجه است. مراجع به خوبی معرفی شده و به ترتیب الفبایی تنظیم گردیده است. نظر کمیتهٔ علمی کتاب هم کمابیش در همین سطور مستتر است.

۲۹. مقالهٔ ایو گیوار[15]: قدم زدن تصادفی روی گروه‌ها.
موضوع مورد بحث در این مقاله از مسائل متنوعی سرچشمه می‌گیرد که در رشته‌های مختلفی ازقبیل

1) Hausdorff measure 2) polimer's measure 3) J.P. Kahane 4) Jean-François Le Gall 5) branching processes 6) trees 7) superprocesses 8) Galton-Watson process 9) Markovian branching processes 10) Bellman-Harris 11) Crump-Mode-Jagers 12) superprocess 13) geneology 14) Brownian snakes 15) Yves Guivarćh

حساب احتمالات، نظریهٔ گروه‌ها، آنالیز همساز، نظریهٔ ارگودیک و فیزیک آماری مطرح می‌شوند. در مقاله، چند مسأله و مثال کلاسیک که منبع الهام این موضوع‌اند، بیان می‌شود که در چارچوب احتمالات قرار دارند. نتایج جالبِ به‌دست آمده و چند مسألهٔ حل نشده نیز مطرح می‌شوند. گسترش نظریه تا زمان نگارش مقاله به اختصار می‌آید.

همهٔ کسانی که یک درس آمار و احتمال مقدماتی را دیده باشند مثال اول مقاله را که با دقت و ذکر جزئیات مطرح شده درک می‌کنند. کلمات بازی، ورق و بُر زدن که متداول است، ربطی به «قمار» ندارد، حتی اگر واژه‌های برد و باخت هم مطرح شود. گروه تبدیلات r شئ را Σ بنامید. یک بر زدن یعنی یک عضو $\sigma \in \Sigma$. یک زیرمجموعهٔ Σ مانند $A \subset \Sigma$ را در نظر بگیرید و آن را سلیقهٔ بر زدن بازیگر بنامید. یک احتمال p روی A در نظر بگیرید یعنی به ازای هر $\alpha \in A$، $p(\alpha) \geq ۰$ و به علاوه $\sum_{\alpha \in A} p(\alpha) = ۱$. فرض کنید $\sigma = \alpha_n \ldots \alpha_۱$ بر زدنی باشد که پس از بر زدن‌های $\alpha_۱$ و ... و α_n عضو A حاصل شده است. جایگاه احتمالی ورق i، $۱ \leq i \leq r$، پس از بر زدنِ (nام)، α_n، می‌شود $\mu^i(n) = \sum p^n(\sigma)\delta_{\sigma(i)}$ که δ نماد دیراک است و $p^n(\sigma) = \sum_{\sigma=\alpha_n \ldots \alpha_۱} p(\alpha_n) \cdots p(\alpha_n)$. حال فرض کنید n به سمت بینهایت برود. مسألهٔ بر زدن این است که ثابت شود حد $\mu^i(n)$ توزیع یکنواخت است، یعنی $\frac{۱}{r}$ برای هر جایگاه. نویسنده تعبیر دیگری از این مسأله می‌آورد که نشان می‌دهد می‌توان به جای مجموعهٔ $\{۱, \ldots, r\}$ به گروه Σ توجه کرد و به جای $\mu^i(m)$ که مربوط به ورق i است، به کل بازی، یعنی به اندازه‌های

$$\mu_n = \sum_{\sigma \in \Sigma} p^n(\sigma)\delta_\sigma$$

توجه نمود. حال اگر توزیع یکنواخت روی گروه Σ با اندازهٔ $m = \frac{۱}{r!}\sum \delta_\sigma$ نمایش داده شود، مسأله آن خواهد بود که $m = \lim_{n\to\infty} \mu_n$. این مسأله را به روش‌های مختلف ریاضیدانانی مانند هانری پوانکاره و ژاک هادامار، حل کرده‌اند. روش هادامار بر استفاده از نمایش گروه‌های متناهی مبتنی است و روش‌های دیگر بر تکرار ماتریس‌های مثبت. امروز با ژرف‌نگری بیشتری، کاربرد آنالیز فوریهٔ تعویض‌ناپذیر در احتمالات مطرح می‌شود. بدین ترتیب «قاعدهٔ ارگودیک» را به شکل بارزی آشکار می‌سازد و اعتبار آن را در مکانیک آماری نشان می‌دهد. پس بیهوده نیست که مورد توجه ریاضیدانان برجسته‌ای قرار می‌گیرد.

نکاتی که اهمیت فوق‌العاده دارند از این قرارند: حالت نهایی یعنی حالت تعادل، مستقل از وضعیت اولیه است؛ حالت تعادل مستقل از سلیقهٔ بازیگر یعنی انتخاب A است؛ توزیع حدی یعنی m «آنتروپی بیشینه» دارد؛ به ازای یک اندازهٔ احتمال ν روی مجموعهٔ متناهی E، آنتروپی عبارت است از

$$h(\nu) = \sum_{e \in E} -\nu(e) \log \nu(e) \leq \log |E|$$

نامساوی به تساوی تبدیل می‌شود اگر و تنها اگر توزیع یکنواخت باشد. اشتباه چاپی کتاب در این

فرمول را خواننده فوراً درمی‌یابد و خود تصحیح می‌کند، اشتباهاً Σ به‌جای E زیر نماد $\sum$ قرار گرفته است!

این چند سطر را با نقل آزاد و نه ترجمه از مقدمه و مثال اول از بخش یکم مقاله آوردم تا خواننده بداند اندکی هم نکات فنی می‌تواند در یک مقالهٔ فرهنگ و اندیشه‌ای بیاید، به شرط آن که تکیه روی فرهنگ و اندیشه و سیر تاریخی و توجیه مطالب باشد نه فقط قضیه، برهان، تعریف، و غیره.

مثال دوم به قدم زدن تصادفی مقدماتی روی $\mathbb{Z}^d$ و تعبیر آن با شبکه‌های برق می‌پردازد: گذرایی و بازگشت.

این بار بازیِ شیر یا خط استعارهٔ مسأله است و مسألهٔ گردشگر مَنهاتان برای بُعد $d = ۲$ با بعد $d \geq ۳$ متفاوت است. اجازه می‌دهید این مسأله را به جای مانهاتان در اینجا مسألهٔ «میدان مادر» بنامم؟ در شهری بزرگ یکی از میدان‌ها را میدان مادر نام نهاده‌اند. گردشگری ناوارد (در واقع غریب) در این شهر فقط میدان مادر را که منزلش آنجاست می‌شناسد. او نمی‌تواند آرام بگیرد و شروع می‌کند به قدم زدن. در هر چهارراه، انتخاب جهت حرکت، تصادفی است. رسیدن از یک چهارراه به چهارراه بعدی را یک «قدم» می‌نامیم. تعداد چهارراه‌ها و تعداد قدم‌ها هم نامحدود فرض می‌شود. آیا این گردشگر به نقطهٔ اولیه برمی‌گردد؟ فضای حاصلضرب و اندازهٔ حاصلضرب به شکل مناسب تعریف و بررسی می‌شود.

اینجا هم دانشمند مشهوری مانند پولیا دست به کار شده و حالت بحرانی بعد ۲ را مشخص کرده است. تعبیر شبکهٔ برقی آن معادلهٔ لاپلاس گسسته را دخالت می‌دهد.

برای $d > ۲$ قدم زدن تصادفی گذراست یعنی به بینهایت می‌رود ولی برای $d \leq ۲$ بازگشت او به نقطهٔ اولیه بارها و بارها اتفاق می‌افتد.

مثال سوم به طول پلیمرها و مثال چهارم به توزیع یکسان روی کره و تعبیرهای آن از دید حساب، مثال پنجم به توابع همساز مثبت برای قدم زدن تصادفی روی گروه آزاد با دو مولد، مشابهت با دستور پواسون در مورد قرص یکه، نهایتاً مثال ششم به معادلهٔ شرودینگر گسسته در یک محیط تصادفی روی $\mathbb{Z}$ اختصاص دارد.

به این شکل بیش از ۷ صفحه صرف مثال‌های مقدماتی می شود که هم بسیار جالب انتخاب شده‌اند و هم به شیوه‌ای دوست داشتنی قابل درک‌اند.

در بخش دوم قدم زدن‌های تصادفی روی گروه‌ها، در چارچوبی کلی مطرح می‌شود که از مثال‌های قبل الهام گرفته اما مجرد است. جالب است که شما روش هیلبرتیِ کارتان ــ دنی[1] را که در نظریهٔ پتانسیل و آنالیز مطرح است، در رابطهٔ نزدیک با نظریه‌های برق می‌بینید.

سپس مجدداً مثال‌های بخش قبلی مطرح و از این دیدگاه توجیه می‌شوند که می‌تواند از دیدگاه «احتمال» یا از دیدگاه «برق» باشد.

1) Cartan-Deny

در بخش سوم چند مسألهٔ بنیادی و در بخش چهارم نتایج متعددی مطرح می‌شود. از جمله آنچه واروپولوس[1] آنالیز و هندسه روی گروه‌ها می‌نامد اینجا مطرح است. صورت دقیق چند قضیه هم اینجا دیده می‌شود. هم‌چنین گروه میانگین‌پذیر[2]. در بخش آخر یادداشت‌های تاریخی مبسوطی می‌آورد.

این مقاله یکی از جالبترین مقالات کتاب برای من است. طیف وسیعی از دانشجویان ارشد و دانشجویان کارشناسی پیشرفته باید این مقاله را بخوانند. البته چون زبان مقاله فرانسه است، ترجمهٔ آن برای فرهنگ و اندیشه مؤکداً توصیه می‌شود.

۳۰. مقالهٔ ک. دیوید اِلْوُرثی[3]:جلوه‌های هندسی آنالیز تصادفی.

سرامد مقالات کتاب در زمینهٔ آنالیز تصادفی و ارتباط آن با خمینه‌های دیفرانسیل، همین مقالهٔ مبسوط، عالمانه و در عین حال خواندنی و دوست داشتنی است. در ۴۰ صفحه متن و فهرست مراجع که برحسب کتاب‌ها، همایش‌ها و مقالات تنظیم گردیده است، شما هم تاریخچه‌های دقیقی از موضوع را می‌خوانید و هم با لُب مطلب آشنا می‌شوید. مثال‌هایی که در این مباحث مطرح گردیده‌اند نیز روشن و جالب‌اند. اجازه دهید با جملاتی از مقدمه و نقل‌قول‌های اندکی از اینجا و آنجای متن، شما را بیشتر در جریان مقاله بگذارم:

«مجلهٔ ریاضی ناگویا[4] نخست در ۱۹۵۰ منتشر گردید و در شمارهٔ یکم آن بود که مقالهٔ ایتو[5] با عنوان «معادلات دیفرانسیل تصادفی در خمینه‌های دیفرانسیل‌پذیر» درج شد. اندکی بعد، مقالهٔ دیگر او با عنوان «حرکت براونی در یک گروه لی[6]» نیز در همین سال و در گزارش آکادمی ژاپن[7] منتشر گردید. همان‌گونه که خودِ ایتو توضیح داده است، فرایندهای با مقدار در خمینه‌های دیفرانسیل پذیر و از جمله در گروه‌های لی، قبلاً نیز مطرح شده بودند، مثلاً توسط ف. پِرّن[8] در ۱۹۲۸. اما ایتو توانست نظریهٔ انتگرال‌های تصادفی را که خود در دههٔ ۱۹۴۰ شرح داده بود، در مورد دینامیک فرایندهای انتشار[9] به کار بَرد. با این حال، در حقیقت خطابهٔ ایتو در کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان به سال ۱۹۶۲ در استکهلم بود که نشان داد می‌توان هندسهٔ دیفرانسیل و آنالیز تصادفی را در هم آمیخت. عملی ساختن این امکانات، درواقع به اواخر دههٔ ۱۹۶۰ و اوایل دههٔ ۱۹۷۰ موکول گردید.

برای غیرمتخصصین در رشتهٔ احتمالات نخست یادآوری می‌کنیم که منظور از فرایند تصادفی با فضای حالتِ M (اینجا، M یک خمینهٔ هموار است) خانواده‌ای از راه‌های $t \mapsto z_t(\omega)$ در M است که به کمک $\omega \in \Omega$ پارامتری شده‌اند جایی که $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ یک فضای احتمال است $z_t : \Omega \to M$ برای هر t یک نگاشت اندازه‌پذیر. بنابر الگوی کولموگورف برای نظریهٔ احتمال، «احتمال آن‌که رفتار فرایند مورد بحث به طریقهٔ خاصی باشد»، به کمک اندازهٔ راه‌های

1) Varopoulos 2) amenable 3) K. David Elworthy 4) Nagoya Math. J. 5) Itô
6) Lie groups 7) Proc. of the Japan Academy 8) F. Perrin 9) diffusion

$t \mapsto z_t(\omega)$ که به آن طریقه رفتار می‌کنند، مدل‌سازی می‌شود (که البته اندازهٔ مورد نظر از روی $\mathbb{P}$ ساخته می‌شود). ردهٔ مهمی از فرایندها ناشی از سامانه‌های پویای[1] معمولی‌اند که اغتشاش تصادفی در آنها دخیل است: به‌ویژه اغتشاش‌هایی که در فرایندهای پخش (امواج) به نام «نویز ـ سفید»[2] خوانده می‌شوند. واقعیتِ مهمی که از نظر ریاضی راجع به فرایندهای پخش (و به طور کلی‌تر در نیمه مارتینگل‌ها)[3] وجود دارد، و آنالیز تصادفی را الزامی و در عین حال پر بار می‌سازد، آن است که در حالتِ کلی راه‌های[4] مورد مطالعه نه تنها دیفرانسیل‌پذیر نیستند بلکه حتی با تغییرات کراندار موضعی[5] هم نیستند. به ویژه نمی‌توان ار نظریهٔ معادلات دیفرانسیل معمولی برای تشریح دینامیک آنها بهره گرفت: به همین دلیل بود که حساب ایتو گسترش یافت.»

این شروع مقدمه بود که در ادامهٔ آن با ذکر مراجع انگیزه‌ها و مسائل دیگر را مطرح می‌کند و به کارهای مهم از ۱۹۸۰ تا ۱۹۹۵ اشاره می‌کند و با سپاسگزاری ویژه از مارک یور[6] و ژان پیر کاهان[7] به خاطر کمک علمی مقدمه را به آخر می‌رساند.

بخش ۱ مقاله با عنوان «حرکت‌های براونی و معادلات دیفرانسیل تصادفی» به زیربخش‌های A، B، C و D تقسیم شده است: در زیربخش A نخست از اندازهٔ وینر[8] در $\mathbb{R}^m$ و اندازهٔ گاوسی[9] که تعمیم معقولی از اندازهٔ لبگ[10] برای فضای بینهایت بعدی است صحبت می‌کند و .... در زیربخش B به جای $\mathbb{R}^m$ از خمینه‌های C^∞ مانند M استفاده می‌کند و معادلهٔ حرارت[11] $\frac{\partial f_t}{\partial t} = -\frac{1}{2}\Delta f_t$ را که Δ عملگر لاپلاس ـ بلترامی[12] است در نظر می‌گیرد و یک نیمگروه $\{P_t : t \geq 0\}$ روی توابع کراندار اندازه‌پذیر $f : M \to \mathbb{R}$ را تعریف می‌کند که نیمگروهِ حرارت می‌نامد و یا معادل آن یک حرکت براونی روی M را به منزلهٔ فرایند مارکوف[13] با راه‌های پیوسته و مولّد لاپلاس ـ بلترامی در نظر می‌گیرد (به آن فرایند پخش[14] گفته می‌شود). وقتی M خمینهٔ کاملی نباشد ممکن است حرکت براونی روی آن موجود نباشد. مفاهیم مختلفی را در این رابطه روشن می‌کند و به ویژه به اهمیت این موضوع اشاره می‌کند که رشد حجم[15] مهم‌تر است از خمیدگی[16] در مبحث خمینه‌های ریمانی کامل، زیرا هرچند با خمیدگیِ ریچی[17] کنترل می‌شود، اما در مورد مترهای ناهموار هم می‌توان از آن استفاده کرد.

پرداختن به بقیهٔ قسمت‌ها از جنبهٔ فنی بیشتری برخوردار و از حوصلهٔ این مختصر خارج است. معرفی علمی و نقد مقاله هم در تخصص من نیست. با این وجود نه تنها اهمیت موضوع را درک می‌کنم بلکه توصیه می‌کنم در رشته‌های آنالیز، آمار و احتمالات و هم‌چنین هندسه مورد مطالعهٔ دانشجویان کارشناسی ارشد قرار گیرد. مسلماً در کارگاه خاص آنالیز تصادفی، خود مقاله به زبان انگلیسی مورد مطالعه و احیاناً ارائه قرار خواهد گرفت، یا بهتر است قرار بگیرد. بخش‌های دیگر مقاله عبارت‌اند از:

1) dynamical system 2) white noise 3) semi-martingales 4) paths 5) locally with bounded variations 6) Marc Yor 7) Jean Pierre Kahane 8) Wiener measure 9) Gaussian 10) Lebesgue 11) heat 12) Laplace-Beltrami 13) Markov process 14) diffusion process 15) volume growth 16) curvature 17) Ricci curvature

۲ ــ شارهای جواب[1] برای معادلات دیفرانسیل تصادفی (با زیربخش‌های A تا E)؛

۳ ــ معادلهٔ حرارت برای فرم‌ها و قضایای ایندکس[2] (با زیربخش‌های A تا C)؛

۴ ــ حساب مالیاون[3] (با زیربخش‌های A تا E)؛

۵ ــ مجانب‌ها و انحراف‌های کلان[4] (با زیربخش‌های A تا F)؛

[اینجا یک اشتباه چاپی کوچک دیدم: در ارجاع به مقالهٔ معروف «آیا می‌توان شکل دُهل را شنید» نوشتهٔ مارک کَج[5] به جای ۱۹٦٦ نوشته شده است ۱۹۱٦، ولی در فهرست مراجع صحیح است]؛

٦ ــ نگاشت‌های همساز[6] Γ‌ــمارتینگل‌ها[17]، مارتینگل‌های تمامریخت[8]، ملاقات‌های دوگانهٔ موفق[9] (با زیربخش‌های A تا E). [واژهٔ ملاقاتِ دوگانه را برای coupling در اینجا از آن رو برگزیدم که برای دو حرکت براونی که در زمان مناسبی همدیگر را قطع کنند، یا ملاقات کنند، به کار می‌رود. واژه موقت است و متخصصین ممکن است جایگزین بهتری داشته باشند. واژهٔ موفق که نویسنده انتخاب کرده است از آن جهت است که معمولاً ویژگیِ ملاقات دوگانه و هم‌چنین ویژگی لیوویل[10] (هر تابع همساز کراندار روی M الزاماً یک تابع ثابت است) منجر به عدم وجود برخی توابع f می‌شوند. پس اگر وجود مطرح و تضمین شود، «موفقیت» حاصل شده است؛

۷ــ آنالیز روی فضاهای راهی[11] (با زیربخش‌های A تا F).

[نقل جملاتی از زیربخش A در این بخش را سودمند می‌یابم: «همان‌گونه که در مقدمه گفته شد، آنالیز تصادفی به‌ویژه ابزاری برازنده در آنالیز بی‌نهایت بعدی است. درواقع، همان‌گونه که در بخش ۴ دیدیم، این دو مبحث تنگاتنگ به هم مربوط‌اند. یکی از نخستین مقالات در زمینهٔ معادلات دیفرانسیل تصادفی در ۱۹٦۹ توسط دالِتسکی[12] و شنَیدرمان[13] نوشته شد که در ۱۹۷۴ توسط اِلورثی مورد بحث قرار گرفت: خمینه‌ها در آنجا گروه‌های لیِ بی‌نهایت بعدی بودند و هدف مقاله، ساختن اندازه‌هایی روی این گروه‌ها بود که نسبت به انتقال بر حسب یک زیرگروه چگال شبه ناوردا[14] باشند. به این ترتیب قضیهٔ کامرون[15] ــ مارتین[16] راجع به اندازه‌های گاوسی[17] روی فضاهای باناخ که در زیربخش A بحث کردیم، تعمیم می‌یابد. این مطلب از دو نظر مهم است یکی آن که اندازه‌های بی‌نهایت بعدی فهمیده شود و دیگر آن که بالقوه کاربرد در نظریهٔ نمایش[18] دارد.

نظریهٔ پتانسیل در فضاهای هیلبرت را در اواخر دههٔ ۱۹٦۰ با استفاده از حرکت‌های براونی بی‌نهایت بعدی (که آن زمان خیلی باب بود)، گراس[19] بسط داد، وی به نظریهٔ صورت‌های همساز که ناورداهای توپولوژیک فراهم می‌کنند، پرداخت. مبانی این نظریه را شاگردان او، و نیز

---

1) solution flows 2) index theorems 3) Malliavin's calculus 4) large deviations
5) Mark Kac 6) harmonic maps 7) F. martingals 8) holomorphic 9) successful coupling
10) Liouville property 11) path spaces 12) Daletskii 13) Shnaiderman 14) quasi-invariant
15) Cameron 16) Martin 17) Gaussian measure 18) represent theory 19) Gross

ایلز[1] و الورثی از اواخر دهۀ ۶۰ تا اواسط دهۀ ۱۹۷۰ بررسی کردند].

۳۱. مقالۀ جئوفری ر. گِریمت[2]: پرکولاسیون[3]

یکی از مباحث جالب در آمار و احتمالات، پرکولاسیون است که کلاً در نیمۀ دوم قرن بیستم پا به عرصۀ حیات گذاشته، دوران کودکی را سپری کرده و به حد بلوغ رسیده است. اما هم‌چنان مسائل مبارزطلبی دربردارد. تاریخچۀ این نظریه را آقای گریمت در بخش ۱ مقاله (۶ صفحه) چنان شرح می‌دهد که هر تازه‌وارد و حتی ناواردی هم می‌فهمد و هم از آن لذت می‌برد. نظریۀ پرکولاسیون در شاخه‌های وسیعی مانند فیزیک آماری و واگیرشناسی کاربرد دارد. با توضیحات مقاله، خوب درمی‌یابیم که اگر الکترون یا مادۀ رنگی در شبکه‌ای مرکب از رأس‌ها و یال‌ها بخواهد پخش شود و گذشتن آن از یک رأس به رأس مجاور با یک احتمال توأم باشد، محاسبۀ احتمال آن که از نقطه‌ای به نقطۀ دیگری از شبکه برسد، حائز اهمیت است. همین مدل برای شیوع بیماری یا معالجۀ آن نیز در شبکه‌ای از افراد که برخی مبتلا و برخی مستعد ابتلا هستند، کارآمد است. برای آن که یکی از مسائل حل نشده را دریابیم به توضیح مختصری می‌پردازیم تا اندکی چارچوب پرکولاسیون روشن شود:

در فضای $\mathbb{R}^d$، نقاط شبکۀ صحیح $\mathbb{Z}^d$ را به عنوان رأس‌ها[4] و مجموعۀ $\mathbb{E}^d$ را به عنوان یال‌ها[5] مرکب از زوج‌های (x,y) چنان بگیرید که $x \in \mathbb{Z}^d$ و $y \in \mathbb{Z}^d$ و $y - x = e_j$ که e_j یکی از بردارهای پایۀ متعارف $\mathbb{R}^d$ است. در ساده‌ترین و ابتدایی‌ترین شکل خود، پرکولاسیون ناظر به شبکۀ $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$ است. اتفاق دوحالتیِ شیر یا خط، یا بودن یا نبودن، یا ریاضی‌تر بگوییم ۱ یا ۰ را به یک یال وابسته می‌کنیم و بر حسب مورد، یال را باز[6] یا بسته[7] می‌نامیم. فرض کنید احتمالِ بازبودنْ p باشد $(0 \le p \le 1)$. نظریه‌ای که به گراف‌هایی از این شبکه می‌پردازد بخشی از نظریۀ پرکولاسیون است. بخشی دیگر مربوط به پرکولاسیون جهتدار[8] است که اساساً با جهت‌دادن به هر یال به دست می‌آید. آیا در شبکۀ جهت‌دار موردنظر، یک راه نامتناهی[9] وجود دارد؟ بسته به بعد d، بسته به شکل شبکه، مثلثی، مربعی و غیره، مسائل مختلف جواب‌های مختلف دارند، گاهی ساده و گاهی هم مشکل یا حل نشده. تلفیقی از هندسه و احتمالات به شکل جالب اما مشکلی جلوه می‌کند. یکی از مسائل اصلی نظریۀ پرکولاسیون این است: احتمال آن که مبدأ (نقطۀ مفروضی از شبکه) متعلق به یک راه نامتناهی با یال‌های باز باشد چند است؟ آن را $\theta(p)$ می‌نامیم. محاسبۀ دقیق $\theta(p)$ و ویژگی‌های دقیق آن ناشناخته است، اما pهای زیربحرانی[10] $\{p|\theta(p) = 0\}$ و زَبَربحرانی[11] $\{p|\theta(p) > 0\}$ به وسیلۀ $p = p_c$ بحرانی[12] از هم جدا می‌شوند. برای $d = 2$ و $d \ge 19$ ثابت شده است که θ در نقطۀ p_c پیوسته است، اما برای ابعاد بینابینی مسألۀ باز است!

1) Eells 2) Geoffrey R. Grimmett 3) Percolation 4) vertices 5) edges 6) open 7) closed 8) oriented (or directed) 9) infinite path 10) subcritical 11) supercritical 12) critical

در بخش ۲ به نظریهٔ ریاضی پرکولاسیون می‌پردازد. مثلاً اثبات درستی نابرابری‌های $0 < p_c < 1$ را به تفصیل می‌آورد (۲ صفحه)، در حجم اندکی (۱ صفحه) به حالت زیربحرانی و در حجم وسیعتری (۴ صفحه) به حالت زبربحرانی می‌پردازد و ۲ صفحه هم به حالت بحرانی و نزدیک بحرانی اختصاص می‌دهد. در تمام این مباحث، به مراجع گوناگون این نتایج هم ارجاع می‌دهد. در بخش ۳ به نظریهٔ پرکولاسیونِ نخستین گذر[1] (که آن را برادر ناتنی پرکولاسیون می‌نامد) می‌پردازد. در بخش ۴ به مدل بیماری‌های واگیردار [2] توجه می‌کند و آن را بسیار جالب تشریح می‌کند. در بخش ۵ به نورپردازی در لابیرنت‌های بازتابنده[3] می‌پردازد یعنی اساساً با تشبیه به آینه‌ها و انعکاس نور در آنها توجه می‌کند. از شبکه‌های دوگان[4] که قبلاً در مقدمه مطرح کرده بود بهره می‌گیرد و .... سرانجام در بخش ٦ به آهن‌ربایی[5] و مدل‌های تصادفی آن توجه می‌کند. مقاله با سپاسگزاری و مراجع (۷۴ عنوان) پایان می‌پذیرد.

به نظرم این مقاله را باید برای یکی از نشریات ترویجی نشریهٔ اندیشهٔ آماری یا فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی ترجمه کرد. خواننده احتمالاً با مقالهٔ [و ۱۳۸۱] به قلم محمدقاسم وحیدی اصل که در همایش ماهانهٔ انجمن ریاضی ارائه نمودند آشناست و دیده است که جداول گزارش همایش مطالبی راجع به پرکولاسیون را دربر دارد.

در اینجا نقل نظر کمیته را دربارهٔ پرکولاسیون و مقالهٔ گرمیت سودمند می‌یابیم: «باز هم صحبت از هندسه است که ج. ر. گریمت با پرکولاسیون مطرح می‌کند، اما اینجا بحث بر سر ویژگی‌های هندسی اشیاء تصادفی است. یکی از موضوع‌های مهم که در فیزیک مطرح است، در ارتباط با ابَررسانایی[6]، حالت‌های انتقال[7] و پدیده‌های بحرانی است، که صورتبندی ریاضی آنها به ۱۹۵۴ برمی‌گردد نه زودتر. در مسائل مربوط به پرکولاسیون، یک احتمال بحرانی[8] به چشم می‌خورد که بررسی صورت اشیاء تصادفی در همسایگی این اندازهٔ بحرانی به نتایج و پنداره‌هایی رسیده است که به ویژه مربوط به نماهای بحرانی[9]اند».

۳۲. مقالهٔ سیلوَن سورَن[10]: نظریهٔ بازی ۱۹۵۰ تا ۲۰۰۰

بگذارید نخست نظر کمیته را نقل کنم:« نظریهٔ بازی‌ها که مورد بحث س. سورن است، جدّیتی کمتر از نظریه‌های مطرح شدهٔ دیگر ندارد. منشأ آن که به تسرملو[11] برمی‌گردد، کاملاً منطقی است. جنبهٔ احتمالی آن را امیل بورل[12] مطرح کرد. تاریخ تولد نظریهٔ جدید کتاب فون نویمان[13] و مورگنشترن[14] با عنوان نظریهٔ بازی و رفتار اقتصادی (۱۹۴۴) است. استراتژی اقتصادی[15] (یا سیاستگذاری) زیربنای اغلب مطالعات در نظریهٔ بازی است و در جهت عکس، مفاهیمی که در

---

1) first-passage percolation 2) epidemic model 3) lumination of reflecting labyrinths
4) dual percolation 5) ferromagnetism 6) superconductirty 7) transition phases
8) critical probability 9) critical exponents 10) Sylvain Sorin 11) zermelo
12) Émile Borel 13) von Neumann 14) Morgenstern 15) economic strategy

نظریهٔ بازی مطرح می‌شوند، از جمله مفهوم تعادل[1] که در گام اول مورد توجه است، در اقتصاد جنبهٔ اساسی دارند. به همین دلیل بود که برنامهٔ نَش[2] (۱۹۵۳) جایزهٔ نوبل در اقتصاد را برای او به ارمغان آورد». نظریهٔ بازی واقعاً بازیچه نیست، که درک آن سهل است، ولی با خواندن این مقاله درمی‌یابیم که سیاستگذاران در زمینه‌های گوناگون، الزاماً باید اطلاعات وسیعی از نظریهٔ بازی در نتیجه از جنبه‌های مختلف ریاضیات، کسب کنند وگرنه در دنیای رقابتی امروز، بازی را به حریف واگذار می‌کنند. آیا سیاستگذاران، از ستادهای مختلف برنامه‌ریزی که دست‌اندرکار آموزش و پژوهش ریاضی هستند گرفته، تا سیاستگذاران جبهه‌های مبارزه (در خط مقدم جبههٔ مبارزه با بی‌سوادی، با استکبار یا با هر حریف دیگر) چه قدر از نظریهٔ بازی اطلاع دارند؟ بگذارید معرفی خود مؤلف را در آغاز مقاله اینجا منعکس کنم (ترجمه و اقتباس): «درواقع نظریهٔ بازی با موقعیت‌هایی سر و کار دارد که چند بازیگر با هم در تعامل هستند. هر شرکت کننده‌ای چند متغیر را کنترل می‌کند و نتیجهٔ حاصل از انتخاب‌های به عمل آمده توسط همهٔ بازیکنان به همهٔ بازیکنان وابسته است، و بر انتخاب‌های بعدی همهٔ آنان تأثیر می‌گذارد. تصمیم‌گیرندگان (بازیکنان) مستقلاً عمل می‌کنند و مستقلاً نتیجهٔ بازی را تا زمان تصمیم‌گیری ارزیابی می‌کنند و این کار را بر حسب تشخیص خود طبق تعریفی که از تابع سود دارند انجام می‌دهند. این بخشی از بازی است که بازی خردورزانه[3] می‌نامیم. موقعیت‌های دیگری هم هست که در آنها هم نظریهٔ بازی مطرح است ولی آنجا خردورزی[4] تعبیر دیگری دارد، مانند رفتار جانوری[5]، تحول هنجارها[6]، انتخاب تحت شرایط عدم قطعیت[7] یا قواعدی که به وسیلهٔ اوتوماتون‌های[8] متناهی[9] انتخاب می‌شوند.

در این مقاله برخی از جنبه‌های ریاضی این روش‌شناسی[10] کلی را بررسی می‌کنیم. ابزارهای اصلی این زمینه و برخی از نتایج مهم به دست آمده را شرح می‌دهیم. مباحثی که انتخاب کرده‌ایم جنبهٔ نمونه دارند و به هیچوجه نمی‌توانند فراگیر باشند. برای مبانی معرفتیِ نظریهٔ بازی، کتابی از بینمور[11] (۱۹۹۰) و برای مقالات مروری راجع به نظریهٔ بازی با جهتگیری در زمینهٔ اقتصاد به مقاله‌ای از آونمان[12] (۱۹۸۷) و سرانجام برای مرورهای وسیعتر که شامل جنبه‌های مطرح نشده در مقاله هم هست به کتابِ سه جلدی: کتاب راهنما[13] در نظریهٔ بازی با کاربرد در اقتصاد (۱۹۹۲، ۱۹۹۴ و ۲۰۰۰) نوشتهٔ آونمان و هارت[14] ارجاع می‌دهد.

مؤلف مقاله را به ۴ بخش تقسیم کرده است. بخش ۱: معرفی مقاله، مشتمل است بر مقدمه (تقریباً آنچه در بالا به شکل ترجمه و اقتباس نقل شد)، تاریخچه قبل از ۱۹۴۴، رده‌بندی؛ بخش ۲، بازی‌های استراتژیک[15] مشتمل بر صورت هنجار[16] (بازی‌های دو نفره با حاصلجمع صفر[17]،

---

1) equilirium 2) Nash program 3) rational game 4) rationality 5) animal behavior 6) evolution of norms 7) uncertainty 8) automaton 9) finite automata 10) methodology 11) Binmore 12) Aunmann 13) Handbook 14) Hart 15) strategic games 16) normal form 17) zero-sum

تعادل، تعادل‌های وابسته[۱]، بازی‌های با آگاهی ناتمام[۲])، صورت توسیعی[۳] (بازی‌های بی‌انتهای حاصلجمع صفر با آگاهی تمام[۴]، آگاهی کلی[۵]، زیربازی‌ها[۶] و تظریف[۷])، بازی‌های تحرکی[۸] (بازی‌های پویا[۹]، زَبَربازی‌ها[۱۰]، بازی‌های تصادفی[۱۱]، بازی‌های تکراری با اطلاع ناتمام)؛ بخش ۳: بازی‌های هم‌پیمانی، مشتمل است بر بازی‌های TU (حالت متناهی، بازی‌های بزرگ[۱۲] یعنی بازی‌های با بینهایت بازیکن)، بازی‌های NTU، سایر رهیافت‌ها (یارگیری[۱۳]، سازگاری[۱۴] و رهیافت اصل موضوعی[۱۵]، چانه زدن[۱۶])؛ بخش ۴: مباحث دیگر (برنامهٔ نش، دانش رد و بدلی یا تعاملی[۱۷]، آگاهی، خردورزی و خردورزی کراندار[۱۸]، کاربردها).

تاریخچهٔ ارائه شده در بخش ۲.۱ (یعنی پیش از ۱۹۴۴) به کار تسرملو(۱۹۱۳) و بورِل (۱۹۲۱) و غیره اشاره می‌کند، که خود جالب است، اما در ۳.۱ آغاز واقعی نظریه را که با کتاب فون نویمان و مورگنشترن (نظریهٔ بازی‌ها و رفتار اقتصادی) با توصیف محتوای کتاب در یک صفحه که بسیار جالب و آموزنده نوشته شده است اعلام می‌کند. اینجاست که TU[۱۹] و NTU[۲۰] مشخص می‌شوند. در بخش‌های آخر، شما حتی راجع به فرایندهای یادگیری و آموزشی[۲۱]، هم چنین بازی‌های توپولوژیک[۲۲] مطالب جالب و خواندنی می‌بینید.

اشتباه چاپی کوچکی (مربوط به تِک پردازی) در صفحهٔ ۱۰۲۴ دیدم: به جای $I = \{1, \dots, n\}$ نوشته شده است $I = \{1, dots, n\}$ که واقعاً ناچیز و در واقع به همین شکل هم قابل درک است.

در فهرست مراجع نخست چند کتاب مطرح شده است مشتمل بر کتاب فون ــ نویمان و مورگنشترن ۱۹۴۴، مجلّدات ۲۴، ۲۸، ۳۹، ۴۰ و ۵۲ از مجموعهٔ Annals of Math. Studies پرینستون در سال‌های ۱۹۵۰ تا ۱۹۶۴ و سه مجلد کتاب راهنما که در متن اشاره کردیم، سپس مراجع به معنی واقعی به ترتیب الفبایی در ۱۲ صفحه آمده است.
ترجمهٔ مقاله برای فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی توصیه می‌شود.

۳۳. مقالهٔ لوسیَن لوکَم[۲۳]: آمار ریاضی[۲۴] پس از ۱۹۵۰.

نخست نظر کمیته را نقل می‌کنم: «آنچه موجب برقراری ارتباط بین نظریهٔ احتمالات و قواعد تصمیم‌گیری می‌شود آمار ریاضی است. تحول آن از ۱۹۵۰ به بعد را یکی از دست‌اندرکاران،

1) correlated equilibria 2) incomplete information games 3) extensive form 4) infinite zero-sum games with perfect information 5) general information 6) subgames 7) refinement 8) mutimove games 9) dynamic games 10) supergames 11) stochastic games 12) large games 13) matching 14) consistency 15) axiomatic approach 16) bargaining 17) interactive knowledge 18) bounded rationality 19) transferable utility 20) non transferable utility 21) learning processes 22) topological games 23) Lucien Le Cam 24) Mathematical statistics

ل. لوکام، «طبق ترجیحات شخصی» به رشتهٔ تحریر درآورده است. یکی از جذابیت‌های این موضوع آن است که استعمال قواعدی کاملاً طبیعی به تناقض‌هایی می‌انجامد، و درنتیجه قواعدی جدید به دست می‌آید و به همین ترتیب ادامه می‌یابد. روش‌های آمار هم از کلیهٔ ساز و برگ‌های احتمالات استفاده می‌کند و هم موجب غنای بیشتر آن می‌شود. با شمردنِ عناوین و زمینه‌های مطرح در آمار، وفور آنها آشکار می‌شود: آزمایش[1] و تصمیم[2]، آمار گاوسی[3] و شگفتی‌های آن، آمار بیزی[4] و بحث راجع به آن، بیشینهٔ محتمل نماها[5]، آزمون‌ها[6] و برآوردگرها[7]، دوری آزمایش‌ها، روش‌های مجانبی[8]، استحکام[9]، فرایندهای مشاهده‌ای[10]، بعد متریک[11]، انحراف‌های کلان[12]، تحلیل چند متغیره[13]، تحلیل دنباله‌ای[14].»

مؤلف در مقدمه که بخش ۱ مقاله است با نکاتی از دههٔ ۱۹۴۰ شروع می‌کند و معتقد است که به دو دلیل آمار در این برهه از زمان فوق‌العاده شکوفا شد: یکی به دلیل جنگ جهانی دوم و دیگر به دلیل نبوغ نویسندهٔ کتاب «توابع تصمیم آماری[15]»، آبراهام والد[16]، که در ۱۹۵۰ سال انتشار همین کتاب در یک حادثهٔ هوایی وفات یافت. سپس ساختار ریاضی ارائه شده توسط والد را می‌آورد تا هم به تثبیت واژه‌ها برای بقیهٔ متن پرداخته باشد و هم خاطرهٔ والد را گرامی بدارد. پس از توضیحاتی راجع به تابع مخاطره[17] به نظریهٔ لوکم اشاره می‌کند که طبق آن یک فضا برای همگرایی ساده کامل است. اصطلاحات مقدمه نشان می‌دهد که نظریهٔ اندازه، احتمالات و آنالیز و آنالیز تابعی از ابزارهای ابتدایی درک مسائل مطرح شده‌اند. از جمله اشاره می‌کند که «نتیجهٔ وابسته به راه حل بیز[18] نتیجهٔ مستقیم قضیهٔ هان ـ باناخ[19] است».

در بخش دوم به نتیجه‌ای از شتاین[20] (۱۹۵۶) می‌پردازد و در ضمن به تعمیم جدید آن (۱۹۹۶) توسط اِوانس[21] و ستارک[22] اشاره می‌کند.

در بخش سوم به مکتبِ بیز می‌پردازد و در آخر آن ارجاع می‌دهد به یک کتاب از ژ. اُ. برژِه[23] (۱۹۸۵) تا خلاف آن هم ملاحظه شود.

در بخش چهارم به بیشینهٔ محتمل نماها می‌پردازد.

در بخش پنجم به نقد فریدمان[24] بر راه‌حل‌های بیز اشاره می‌کند. دو قضیه در داخل این بخش دیده می‌شود که یکی وجود مجموعه‌ای با اندازهٔ صفر و دیگری وجود مجموعه‌ای لاغر[25] را با شرایطی خاص تضمین می‌کند.

---

1) experience 2) decision 3) Gaussian 4) Baysian 5) likelyhood 6) tests 7) estimators 8) asymptotic 9) robustness 10) empirical processes 11) metric dimension 12) large deviation 13) multivariate analysis 14) sequential analysis 15) Statistical Decision Functions 16) Abraham Wald 17) risk 18) Bayes solution 19) Hahn-Banach theorem 20) Stein 21) Evans 22) Stark 23) J. O. Berger 24) Freedman 25) maigre

در بخش ششم به رتبه[1]ها و در بخش هفتم به دوری بین آزمایش‌ها می‌پردازد.

در بخش هشتم آزمایش‌های گاوسی را با تفصیل بیشتری شرح می‌دهد.

در بخش نهم شرایط LAN یعنی شرایط هنجاری موضعیِ مجانبی[2] را بررسی می‌کند.

در بخش دهم مطالعات هایک[3] و فانزاگل[4] را منعکس می‌کند، از جمله قضیه‌ای که وجود کران‌های پایین را برای مخاطرهٔ مجانبی بیان می‌کند ولی بی‌درنگ اشاره می‌کند به آن که قضیهٔ کامل‌تری به نام قضیهٔ لوکم‌ـ هایک به دست آمده است. قضیهٔ دیگر این بخش وجود اندازهٔ احتمال را تحت شرایطی تضمین می‌کند. در پایان به بحث جالبی می‌رسد: «قدرت رایانه‌های جدید اجازه می‌دهد روی نمونه‌های متناهی ملاحظه شود که رفتار برآوردگرها خوب است. بنابراین نگرانی برای انجام محاسبات جبری و تحلیلی از بین می‌رود. ...»

در بخش یازدهم روش‌های مستحکم[5] را در کمتر از یک صفحه بیان می‌کند.

در بخش دوازدهم فرایندهای مشاهده‌ای[6] را به بحث می‌گذارد. در اینجا توابع دیفرانسیل‌پذیر به معانی مختلف و از جمله به معنای فرشه[7] و به نتایج مختلف از قبیل قضیه‌های حد مرکزی[8]، کولموگوروف[9]، دادلی[10] ... اشاره می‌کند و به کتاب «احتمالات در فضاهای باناخ» تألیف لودوو تالاگران[11] ارجاع می‌دهد. در یک جملهٔ زیبا روش کار آماردان‌ها را با تحسین چنین بیان می‌کند: «همان‌گونه که شایسته است، آماردان‌ها موقعیت را مغتنم شمردند و نظریهٔ برآوردگرهای با کمینهٔ تضاد[12] را بازسازی کردند». به مراجعی از جمله مقالهٔ بیرژه و ماسار[13] اشاره می‌کند که در مجموعه مقالات «بزرگداشت لوسین لوکم»[14] (۱۹۹۷) چاپ شده است.

در بخش سیزدهم به بُعد متریک[15] می‌پردازد. جایگزین آنتروپی کولموگوروف را با یک بعد متریک مناسب، که خود او از نام‌آوران نتایج مربوطه است، بیان می‌کند.

بخش‌های کوتاه چهاردهم (انحراف‌های بزرگ) و ۱۵ (بسط‌های مجانبی) با اشاره مختصری به مراجع کلاً نصف صفحه را گرفته‌اند. ارجاع به یک کتاب (۱۹۹۴) نوشتهٔ گوش[16] با عنوان «مجانب‌های مرتبه بالاتر» جالب است.

در بخش‌های شانزدهم (مارتینگل‌ها)، هفدهم (تحلیل چندمتغیره) و هجدهم (تحلیل دنباله‌ای) نیز اختصار در همین حد است. بخش آخر (نتیجه‌گیری) جالب است. به ویژه اشاره می‌کند به آنچه که در بحث نیاورده است و مراجعی برای آنها معرفی می‌کند. مراجع مشتمل بر ۱۳۸ عنوان است. علاوه بر مراجعِ آمار و احتمال، که اکثراً در مجلات تخصصی و گزارش همایش‌های این دو رشته به چشم می‌خورد، ارجاع به کتاب چاپ ۱۸۰۹ گاوس با عنوان: اجسام سنگین که در مقاطع مخروطی

1) rank 2) locally asymptotically normal 3) Hàjek 4) Pfanzagl 5) robust methods 6) empiric processes 7) Fréchet 8) central limit theorems 9) Kolmogorov 10) Dudley 11) Ledoux-Talagrand 12) theory of estimators with mimimum contrast 13) Birgé-Massart 14) Festschriff for Lucien Le Cam 15) metric dimension 16) Goosh

حول خورشید در حرکت‌اند، و در ۱۹۶۳ در نیویورک تجدید چاپ شده است، توجّهم را جلب کرد. مقاله دعوت خوبی برای آشنایی با سیر تحول آمار ریاضی است و نه تنها برای رشتهٔ آمار بلکه برای رشته‌های دیگر ریاضی به ویژه آنالیز حقیقی بسیار سودمند است.

ترجمهٔ آن برای نشریهٔ اندیشهٔ آماری یا نشریهٔ فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی مناسب است. نکتهٔ کوچکی هم ناظر به زبان مقاله است که هرچند نشانی مؤلف دانشگاه برکلی در کالیفرنیا است، اما مقاله را به زبان فرانسه نوشته است.

۳۴. مقالهٔ برنار پْرَن[1]: آمار و ژنتیک[2]، دو علمی که دائماً همدیگر را تقویت کرده‌اند.

این مقاله اطلاعاتی مفید راجع به ژنتیک هم پیش از پیدایش DNA در ۱۹۴۴ و ساختار مارپیچی دوگانهٔ آن در ۱۹۵۳ و هم بیشتر دربارهٔ آنچه از این تاریخ به بعد حاصل شده و مسائلی که امروز مطرح است، در اختیار می‌گذارد. ارتباط دوجانبهٔ آمار و ژنتیک (که قبل از تاریخ‌های فوق فنتیک[3] نامیده می‌شد)، نه به شکل یک مرور تاریخی بلکه بیشتر به شیوهٔ یک مرور تحلیلی ارائه شده است و بنابراین به جنبه‌های کمی و کیفی، هر دو توجه شده است. بخش‌های مقاله (۹ بخش) و یک پیوست (مفاهیم و واژه‌هایی از ژنتیک که مورد نیازند) کمک می‌کنند تا ریاضیدانان دور از ماجرا (مثل من) با این زمینه آشنا شوند. بخش ۹ نتیجه‌گیری همراه با پیوست، سه صفحهٔ آخر مقاله را به خود اختصاص داده است. مراجع فهرست ندارد، اما به شیوهٔ برخی مقالات علمی خارج از حیطهٔ ریاضی، در پانوشت‌ها مشخصات مراجع و توضیحات دیگر آمده است.

مطمئن نیستم اصطلاحات مناسبی برای عناوین بخش‌ها انتخاب کنم لذا از بحث بیشتر خودداری می‌کنم.

خوب می‌شد اگر مقاله را به دست دو نفر استاد ژنتیک و آمار می‌سپردیم تا با مشارکت ترجمهٔ فارسی آن را برای نشریهٔ اندیشهٔ آماری یا فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی تهیه کنند. مسلماً رشتهٔ بین رشته‌ای «بیومَت» (زیست ــ ریاضی) در کنار بیوفیزیک و بیوشیمی یا بهتر بگویم بیوتکنولوژی از ریاضیات، به ویژه آمار و احتمالات و نظریهٔ اطلاع همان قدر استفاده می‌کند که از مبانی علوم زیستی و ژنتیک.

۳۵. مقالهٔ ولادیمیر م. تیخومیروف[4]: ریاضیات مسکو از ۱۹۵۰ تا ۱۹۷۵.

مقالهٔ ۱۴ صفحه‌ای تیخومیروف از آنهاست که در اولویت نخست برای ترجمه و نشر در فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی قرار دارد.

فرازهایی از بخش ۱ (مقدمه) سبک و بینش نویسنده را نشان می‌دهد: «اواخر دههٔ ۱۹۴۰ و اوایل دههٔ ۱۹۵۰ دورهٔ اندوهناکی در تاریخ اتحاد شوروی است. کشور را دیوار آهنین از دنیا جدا کرده و وحشت بر آن حاکم بود. کسانی که در آن شرایط نبوده و آنجا زندگی نکرده باشند نمی‌توانند

1) Bernard Prum 2) genetics 3) phénétiqus 4) Vladimir M. Tikhomirov

به سادگی تصور کنند آن وضعیت به چه شباهت داشت.

کسی نمی‌توانست بُعد فاجعه را برای زندگی فردی اشخاص و کل ملت تصور کند، اگر مرگ حاکم خودکامه در ۵ مارس ۱۹۵۳ فرا نمی‌رسید. این مرگ آزادی و آزادسازی را به دنبال داشت و این نعمت غیرمترقبه برکات فراوانی در پی داشت که یکی از آنها به ویژه نصیب ریاضیات شد.

در این زمان مراکز علمی متعددی که حول استعداد خلاقیت ریاضی متمرکز بودند در مسکو قرار داشتند. دوتای آنها در رأس فهرست قرار دارند: گروه ریاضی ـ مکانیک دانشگاه دولتی مسکو (mech-math) و انستیتوی ریاضی استکلوف[1] (استکلوا[2]). اما این تمام ماجرا نیست. در آخرین سال‌های رژیم استالین و چند سالی هم پس از آن، امپراتوری علمی که برای تهیهٔ بمب به منظور جنگ آینده تعبیه شده بود، به حوزه هایی تقسیم گردیده بود. یکی از آنها برای طراحی بمب اتمی، دیگری برای موشک‌هایی جهت حمل محمولهٔ اتمی، سومی برای بسط هواپیماهای جت، چهارمی برای زیردریایی‌های اتمی و غیره.

در تمام این زمینه‌ها ریاضیات مورد نیاز بود. واحدهای پژوهشی و مهندسی گوناگونی عهده‌دار حمایت ریاضی از این پروژه‌ها بودند. در گروه‌های ریاضی و سایر انستیتوها، مراکزی ویژهٔ اطلاعات و کامپیوتر تأسیس شده بود و آنها را به گروه‌های «بسته» تبدیل کرده بود. یکی از این گروه‌ها، گروه ریاضی کاربردی «استکلوا» خارج از شهر بود. به این ترتیب یک انستیتوی ریاضی کاربردی جداگانه‌ای به ریاست م. و. کِلدیش[3] ساخته شد. باید گفت که اکثر ریاضیدانان برجستهٔ آن زمان در پژوهش‌های محرمانه‌ای درگیر بودند.»

بعد نام عده‌ای از مراکز، نام رئیس گروه و نام ریاضیدانان مشهور آنجا را می‌آورد. از جمله آلکساندروف[4]، سوبولف[5]، گلفاند[6]، تیخونوف[7]، لاورانتیف[8] و غیره و آخر سر اضافه می‌کند:

«با این همه باید گفت که جو حاکم بر این انستیتوهای «بسته»، آزادانه (لیبرال) بود و موقعیت علم و اهل علم توأم با احترام بود، که در نتیجه پژوهشگران توانستند به تولید آثار خود در زمینه‌های مورد علاقه ادامه دهند.»

در بخش ۲ به ریاضیدانان سالمندتر در دهه‌های ۵۰ و ۶۰ می‌پردازد. در این بخش علاوه بر نام افراد، به تحلیل علوم روس و تأثیر آن بر این نسل می‌پردازد. در این جا درس‌های گروه (mech-math) را که به کرسی‌هایی تقسیم شده است با نام سرپرستان کرسی‌ها می‌بینیم، هم‌چنین سمینارهای مختلف و مهم را.

بخش سوم مقاله به کولموگوروف[9] و گلفاند اختصاص دارد. زندگینامهٔ کولموگوروف را با آب و تابی از تولدش (۱۹۰۳) تا مهربانی‌های خاله‌اش که او را به فرزندی پذیرفت (مادرش بر سرِ زا رفت) و ... تا آن که شاگرد لوزین[10] شد، می‌آورد. راجع به گلفاند ماجرای زندگی مفصل‌تر و شیرین‌تر

1) Steklov Mathematical Institute 2) Steklovka 3) M. V. Keldysh 4) Alexandrov 5) Sobolev 6) Gelfand 7) Tikhonov 8) Lavrentiev 9) Kolmogorov 10) Lusin

هم شرح داده می‌شود. از آنجا که گلفاند شاگرد کولموگوروف شد، این بخش به دو نفر با هم اختصاص یافته است. داستان کشف گلفاند در کودکی هنگامی که توانست پدر و مادرش را مجبور کند برایش «کتاب ریاضی» بخرند، شنیدنی است که موجب شد او دریابد ریاضیات وحدت دارد. این را از دستور مک لورن برای بسط سینوس فهمید در همین بخش بحث‌های پیشرفته‌تر از جمله نظریهٔ توزیع و بسیاری نظریه‌های دیگر، که محصول هنر و پشتکار این دو بود مطرح می‌شوند.

بخش ۴. کارنامهٔ ریاضیدانان انستیتو استکلوف

بخش ۵. نسل جدید. این بخش که طولانی‌ترین بخش است، شرح ماجراهای جالبی از زندگی ریاضیدانان مشهور معاصر را دربردارد. از جمله پیاتتسکی ـ شاپیرو[1]، مانین[2]، آرنولد[3]، سینایی[4]، نوویکوف[5] و . . .

در آخرین پاراگراف از این بخش به مهاجرت خیل عظیم ریاضیدانان در اوایل دههٔ ۱۹۷۰ اشاره می‌کند که پس از آن به‌تدریج زندگی ریاضیات مسکو به زندگی ریاضیات کل جهان پیوست و دیگر نمی‌توان به عنوان ریاضیات مسکو به‌تنهایی اکتفا کرد.

واقعاً مقاله خواندنی است، تاریخچه و داستان است و پیشنیازی نمی‌خواهد. برای ترجمه و نشر در فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی یا در مجلهٔ تاریخ علم توصیه می‌شود.

۳۶. مقالهٔ ژان دیُدونّه[6]: مکتب ریاضیات فرانسهٔ قرن بیستم.

انشای این مقاله هم، ظاهراً با همان انگیزهٔ مقالهٔ قبلی، از دیُدونه درخواست شده است، با این هدف که برای خوانندگان کتاب، دو قطب عمدهٔ ریاضیات را در دورهٔ مورد بحث معرفی کند. شیوه‌ای که دو نویسنده پیش گرفته‌اند کاملاً متفاوت است.

دیُدونه نخست طی یادداشت‌های مقدماتی توضیحاتی دربارهٔ قرن می‌دهد بدین معنی که تقسیم تاریخ به قرون هیچ ارتباطی با جریان فعالیت‌های علمی ندارد، مثلاً ریاضیدانانی بوده‌اند که هم پیش از ۱۹۰۰ و هم چند سال بعد از آن فعال و منشأ اثر بوده‌اند از قبیل پوانکاره[7]، پَنلُوِه[8]، پیکار[9]، امیل بورِل[10]، الی کارتان[11]، هادامار[12]. سپس توضیحی دربارهٔ مکتب می‌دهد بدین معنی که مشخص می کند چه کسانی را جزء مکتب ریاضی فرانسه به شمار می‌آورد، مورد نظر وی ریاضیدانانی است که هرچند فرانسوی نیستند یا ملیت فرانسه را بعداً گرفته‌اند، امّا فعالیت ریاضی خود را عمدتاً آنجا انجام داده‌اند، به نظر نویسنده اینان را نباید از ریاضیدانان فرانسوی جدا دانست، مانند ژرژ دُرام[13]، آرمان بورل[14]، گروتندیک[15]، دلینی[16]، تیتس[17]، بورگن[18]، ماندلبروت[19]، کراسنر[20]. نکتهٔ سوم این که چگونه کارها را باید تقسیم کرد؟ بر حسب نویسنده یا بر حسب موضوع؟

---

1) Piatetsky-Shapiro 2) Manin 3) Arnold 4) Sinai 5) Novikov 6) Jean Dieudonné
7) Poincaré 8) Painlevé 9) Picard 10) E. Borel 11) E. Cartan 12) Hadamard
13) G. De Rham 14) A. Borel 15) Grothendieck 16) Deligne 17) Tits 18) Bourgain
19) Mandelbrojt 20) Krasner

او تصمیم خود را اعلام می‌کند که «انتخاب من بر حسب موضوع است تا روشن‌تر دیده شود سهم افراد مختلف چه بوده است». فقط به کارهای عمده‌ای اشاره می‌شود که ریاضیدانان مکتب فرانسه (با توضیح فوق) در قرن بیستم نقشی مهم داشته‌اند و در متن روی نام افرادی تکیه می‌کند که مربوط به قرن بیستم‌اند. مثلاً کوشی[1] و لاگرانژ[2] موزد تکیه نیستند اما نام پوانکاره[3]، الی کارتان[4]، هانری کارتان[5] و ژاک دیکسمیه[6] و ... با حروف ایتالیک نوشته شده است.

مباحثی که مطرح می‌کند عبارتند از:

۱ـ توپولوژی جبری و توپولوژی دیفرانسیل

۲ـ جبر مانستگی، رسته‌ها و تابعگون‌ها

۳ـ آنالیز مختلط و هندسهٔ تحلیلی

۴ـ آنالیز حقیقی، انتگرال و حساب احتمالات

۵ـ آنالیز تابعی و نظریه‌های طیفی

۶ـ معادلات دیفرانسیل

۷ـ معادلات با مشتقات جزئی، برگبندی‌ها، عملگرهای شبه دیفرانسیل، نظریهٔ پتانسیل

۸ـ آنالیز همساز جابجایی

۹ـ گروه‌های لی، نمایش خطی آنها و فضاهای همگن. رابطه با گروه‌های متناهی و با جبر ناجابجایی

۱۰ـ هندسهٔ دیفرانسیل

۱۱ـ هندسهٔ جبری و جبر جابجایی

۱۲ـ نظریهٔ اعداد و هندسهٔ دیوفانتوسی

۱۳ـ صورتهای کالبدی[7] و صورت‌های خودریخت[8]

۱۴ـ منطق و ترکیبیات (با کمترین سهم)

در هر یک از این مباحث، توضیحاتی می‌دهد و سهم دیگران را نیز بیان می‌کند. لازم نیست نام‌های فرانسوی و غیرفرانسوی را که در طول این مقالهٔ ۳۰ صفحه‌ای مطرح شده‌اند اینجا بیاورم. در صفحات این مقاله برخلاف بسیاری از مقالات دیگر تعداد عکس‌هازیاد است. دلم می‌خواست انتخاب عکس‌ها منحصر به انتخاب‌هایی از آلبوم پلی تکنیک زوریخ نبود تا در کنار عکس افرادی مانند ژان پیر سر[9]، آلَن کُن[10]، یوکوز[11]، چهرهٔ نامدارانی چون ژان لره[12] و آلکساندر گروتندیک[13] را هم می‌دیدم.

1) Cauchy 2) Lagrange 3) Poincaré 4) Elie Cartan 5) Henri Cartan 6) Jacqups Dixmier 7) modular forms 8) automorphic forms 9) Jean-Pierre Serre 10) Alain Connes 11) J. C. Yoccoz 12) Jean Leray 13) Alexander Grothendieek

مقاله برای ترجمه فوق‌العاده جالب است و توصیه می‌شود.

ه) دیباچه، بخش دوم:

جلوه‌هایی از تحول ریاضیات در پنجاه سال اخیر

در اینجا بالغ بر ۱۰ صفحه به تحلیل کمی و کیفی ریاضیات در دورهٔ مورد بحث اختصاص یافته است. در زیربخش ۱.۲ به تنوع این گسترش توجه شده است، که از حیث کمی رشدنمایی داشته است. این مطلب را هم تعداد مقالات مرور شده در متماتیکال ریویوز، با کمتر از ۴۵۰۰ عنوان در ۱۹۴۸ و با بیش از ۴۵۰۰۰ عنوان در ۱۹۸۸ و بالغ بر ۸۰/۰۰۰ در ۱۹۹۷، نشان می‌دهد و هم تعداد ریاضیدانان. مدل‌سازی این رشد جالب است و اشاره به یک نوع نمایش این مدل‌سازی در صفحهٔ هذلولوی شده است اما مرجع آن روشن نیست. به رشدنمایی در همهٔ علوم به شکل مشابه توجه می‌شود. اما در ریاضی عامل مهم دیگر توجه به آموزش ریاضی است: در سال ۲۰۰۰ بالغ بر یک میلیارد دانش‌آموز و ۱۰ میلیون معلم درگیر هستند. از حیث کیفی پیشوند «غیر» یا «نا» به گونه‌ای بیانگر تغییر بینش در ریاضیات است: آنالیز غیرخطی، هندسهٔ ناجابجایی، توابع دیفرانسیل‌ناپذیر، آنالیز نااستانده. حال آن که گرایش به پیشوندهای «تقریباً، شبه، ...» در نیمهٔ اول قرن می‌خواست همهٔ یافته‌های نو را به کهنه بچسباند. واژه‌های احساسی با موفقیت به کار گرفته شده‌اند: نظریهٔ فاجعه، گروه‌های غیرعادی، کره‌های خارجی، جاذب‌های عجیب، هندسهٔ شکننده، آشوب که هم در ریاضی و هم خارج از ریاضی طنین افکنند. ریاضیات گسسته، برنامه‌های مختلف، پیچیدگی و غیره نیز به همین قیاس است. توپولوژی پس از گذشت از منازل مختلف به جایگاه ابتدایی تحلیل مکان یعنی ابداع اولیهٔ آن توسط پوانکاره بازگشته است. از نظر گسترش جامع ریاضی بحثی را شروع می‌کند که دو بخش عمدهٔ آن عبارتند از: سال‌های ۱۹۵۰ تا ۱۹۷۰ از دید پاریس، و سال‌های ۱۹۵۰ تا ۱۹۷۰ از دید مسکو.

هرچند اشاره به مقالات دیدونه و تیخومیروف است، اما نظر کمیتهٔ علمی خود تحلیلی است مستقل و جالب. در بخش «پاریس» بیشترین بحث را به شرح بورباکی و تحلیل آن می‌پردازد. به‌ویژه به نگارش‌های متعددی که در ۱۹۹۸ راجع به بورباکی در سطح جهان انجام شده است، اشاره می‌کند. با تکیه بر گرایش به ریاضیات کاربردی در سال‌های بعد از ۱۹۷۰، به نقل‌قول از رژه گودمان[1] این بحث شروع می‌شود. با نقل‌قولی از لوران شوارتس که نظریهٔ انتگرال بورباکی مهمترین عامل مؤثر در بسط نظریهٔ توزیع او بوده است و هم‌چنین با اشاره به ریاضیدانان بزرگی که خارج از دیدگاه بورباکی کارهای عمده‌ای در فرانسه کرده بودند مانند دانژوا[2]، پل لوی[3]، ماندلبروت، لره و لیشنروویچ[4] خاتمه می‌دهد. ریاضیات مسکو را بیشتر با تقلید از مقالهٔ تیخومیروف می‌نویسد. نقل‌قولی جالب از گلفاند را در کنگرهٔ ۱۹۵۴ آمستردام می‌آورد که ضمن تکیه بر آنالیز تابعی

---

1) Roger Godement   2) Arnauld Denjoy   3) Paul Lévy   4) Lichnerowicz

نشان می‌دهد اهمیت ارتباط بین ریاضی و فیزیک در مسکو چقدر قوی‌تر از غرب بوده است. در پایان به این جمله می‌رسیم که به زعم تیخومیروف: « تحول معاصر ریاضیات که از ریاضیات بورباکی فاصله می‌گیرد، از جنبه‌های گوناگون به گرایش‌های ریاضیات مسکو در سال‌های ۱۹۵۰ می‌پیوندد. ریاضیدانان روسی هر کجا استقرار یابند خون تازه در آنجا می‌دمند.

در زیربخش ۲.۲ به تعامل‌های گوناگون می‌پردازد. ساختارها و تعامل‌ها، ریاضیات و فیزیک، ریاضیات و انفورماتیک، تنوع و چندگانگی تعامل‌ها.

و) دیباچه،

بخش سوم: ریاضیات و جامعه

نخستین بار در کنگرهٔ ریاضیدانان اروپا به سال ۱۹۹۲ در پاریس زمینهٔ بحث ریاضیات و جامعه مطرح شد. کل این قسمت بدون کاهش، و شاید با افزودن اضافاتی مفید، برای جامعهٔ فعلی ما در اولویت توجه قرار دارد. در طول این بخش توجه منحصر به اروپا نیست و بیشتر به فعالیت‌های مختلفی که در ایالات متحد امریکا صورت گرفته است پرداخته می‌شود. هدف‌های کاربردی ریاضی را باید هدف‌هایی درازمدت در نظر گرفت: از قضیهٔ ماندهٔ چینی تا کاربرد در رمزنگاری فاصلهٔ زمانی مدیدی طول کشیده است. توجه به آموزش ریاضی، به تاریخ ریاضی و ارتباط‌های آنها با کل جامعه امروز موردنظر همهٔ سیاست‌گذاران است. حال آن‌که چندی پیش عده‌ای این بخش‌ها را «فرار از ریاضیات جدی» تلقی می‌کردند. متأسفانه هنوز هم در جامعهٔ ریاضی ایران اساتیدی هستند که برای کاستن بادهای غبغب زحمت گرفتن یک رژیم معقول تغذیهٔ فکری را به خود نمی‌دهند. اما این بخش از کتاب نشان می‌دهد که در عرف بین‌المللی زمان تفرعن و تبختر در حال سپری شدن است.

ز) مصاحبه‌ها

در این کتاب با سه نفر از ریاضیدانان مشهور و خوش ذوق مصاحبه به عمل آمده است. مصاحبه‌کننده رِمی لانژون[1] است. برخی سؤال‌ها مشترک است. طول مصاحبه‌ها متفاوت است. ۱۰ صفحه به مصاحبه با آدریَن دُوادی[2]، ۱۰ صفحه با میخائیل گروموف[3]، و ۱۰ صفحه هم با فریدریک هیرزبروخ[4]، که به ترتیب در دانشگاه پاریس ــ اورسی، انستیتوی تحقیقاتی عالی علمی و انستیتوی پلانک استادند، اختصاص دارد. نوع سؤال‌ها و جواب‌ها و در موارد مشترک مقایسهٔ جواب‌ها جای بحث دارد. ولی در کل این مصاحبه‌ها بار فرهنگی و آموزشی فراوانی برای ریاضیدانان جهان و به‌ویژه ایران خواهند داشت. توصیه می‌شود ترجمهٔ آنها در مجلهٔ فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی یا حتی مجلات با خوانندهٔ بیشتر درج شود.

---

1) Rémi Langevin 2) Adrien Douady 3) Mickhael Gromov 4) Friedrich Hirzebruch

ح) فهرست برندگان مدال فیلدز[1] و جایزهٔ رولف نوانلینا[2]

نام برندگان این مدال‌ها از بدو تأسیس تا ۱۹۹۸ نوشته شده است، که ۴۲ نفر برندهٔ فیلدز و ۵ نفر برندهٔ رولف نوانلینا هستند.

ط) مقالات مروری

مقالات مروری جالبی که در طول دورهٔ مورد بحث انتشار یافته‌اند در سه مورد فهرست شده‌اند:

مورد اول: گزارش کنگره‌های بین‌المللی ریاضی. مقالات عمومی سخنرانان مدعو که در هر گزارش زیر عنوان خاصی درج شده‌اند، از قبیل Stated addresses در هاروارد ۱۹۵۰، one hour lectures در آمستردام و غیره با ذکر صفحهٔ جلد در مجموعهٔ گزارش، نام مؤلف و عنوان مقاله آمده است. به‌ندرت مقالاتی هم ذکر شده‌اند که اصل مقاله دریافت و چاپ نشده است. آخرین قسمت plenary lectures در برلین مربوط به ۱۹۹۸ است، که طبعاً عنوان مقالهٔ کامران وفا «فیزیک هندسی» را نیز می‌توان در آن ملاحظه کرد. این مورد در ۱۰ صفحه فهرست شده است.
مورد دوم: مقالات مدعو در مجلهٔ بولتن انجمن ریاضی امریکا، که از سال ۱۹۵۱ تا ۱۹۷۸ زیر عنوان Invited addresses و از ۱۹۷۹ به بعد زیر عنوان Research-Expository Papers (N.S.) فهرست شده‌اند. حدود ۳۰ صفحه به این فهرست اختصاص دارد.
مورد سوم: مقالات مروری در مجلهٔ روسی Uspehi Mathematičeskih Nauk، که از ۱۹۶۰ به انگلیسی هم ترجمه شده‌اند و در Russian Mathematical Surveys منتشر می‌گردند. حدود ۵۸ صفحه به این فهرست اختصاص دارد.

جمعاً در این ۱۰۰ صفحه گنجینهٔ با ارزشی از منابع علمی سطح بالا هم به عنوان آموزش مستقیم و هم به عنوان منبع الهام و سرمشق دیده می‌شود.

ی) کتابنامهٔ تاریخ ریاضیات معاصر

این فهرست که از صفحهٔ ۱۳۳۱ تا ۱۳۳۷ کتاب را گرفته است، بسیار مغتنم است و کتاب‌ها و مقالاتی که مطرح شده‌اند گاه در مجلات ترویجی ـ فرهنگی نظیر Notices گاه در مجموعهٔ آثار ریاضیدانان به نام و گاه در یک کتاب مستقل مطرح شده‌اند.

این فهرست هم برای تهیه و گردآوری در برخی پژوهشکده‌ها نظیر پژوهشکدهٔ تاریخ علم، احیاناً کتابخانهٔ انجمن ریاضی، هم برای موضوع‌های مقالهٔ تاریخی در سمینارهای تاریخ ریاضی و هم‌چنین به صورت منتخب برای نشریهٔ فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی سودمند است.

ک) فهرست نام‌ها

در ۳۴ صفحه نام‌ها چیده شده‌اند، و در مقابل هر نام شمارهٔ صفحات مربوط به آن آمده است.

---

1) Fields medalists 2) Rolf Nevanlinna Prize Winners

نام‌های متواتر را می‌توان با نگاهی سطحی تشخیص داد اما کار مشکل‌تر آن است که تلفظ صحیح نام بیش از ۲۵۰۰ نفر و املای فارسی آنها را بدانیم، توصیه می‌کنم آن را در یک نام نامهٔ ریاضیدانان جهان به فارسی تهیه و منتشر کنیم.

ل) جمعبندی و نتیجه‌گیری

نگاهی به کتاب نشان می‌دهد که نیمی از مقالات از نظر تعداد عناوین و صفحات به زبان فرانسه و نیمی به زبان انگلیسی است. ممکن است این پدیده کاملاً اتفاقی باشد. اما تقارن‌های دیگر هم در کتاب دیده می‌شود. به ویژه توجهاتی که در مقدمهٔ این معرفی گفتم دال بر آن که کمیتهٔ علمی تلاشی مجدانه به عمل آورده‌اند تا یک منبع غنی و سودمند برای شناخت تحول ریاضیات در قرن بیستم ارائه کنند. کتاب از جلد اول آن بسیار آگاهانه‌تر تهیه شده و اختلاف حجم مقالات هم بسیار کمتر شده است.

اما خواندن مقالات نشان می‌دهد که همهٔ مقالات را نباید به شکل یکسان از دید فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی نگاه کرد. از این رو، چون حجم معرفی و نقد از حد معقول می‌گذشت، راهنمای گردش کمیتهٔ علمی را در مورد خود عملی کردم و به خواندن همه یا قسمتی از مقالات پرداختم. با این دید که گزارشگری سطحی در حد یک جهانگرد غیرمتخصص هستم، به خود اجازه دادم یادداشت‌هایم را در صفحات دیگری تنظیم کنم. عنوان آن را گشت و گذاری در گسترش ریاضیات قرن بیستم نام نهاده‌ام که شاید پس از جرح و تعدیل، برای چاپ در فرهنگ و اندیشه تقدیم کنم. به توصیهٔ کمیتهٔ علمی هر خواننده خود می‌تواند گشت و گذار خاص خود را داشته باشد و اگر دوست داشت آن را گزارش کند. مطمئن هستم اگر حوصلهٔ نگارش آن را داشته باشند، همکاران دیگر و به ویژه دانشجویان دورهٔ تحصیلات تکمیلی، گزارش‌های مناسب‌تری را برای خود تدارک خواهند دید. تحویل آنها را هم به فرهنگ و اندیشه توصیه می‌کنم، زیرا اختلاف برداشت‌ها هم از نظر عمق نگاه و هم از نظر زاویهٔ دید، موجب غنای بیشتر فرهنگ و اندیشه در جامعهٔ ما خواهد شد.

مراجع

Cartan, H., Cours de calcul différentiel, 5-ieme éd., Hermann, Paris, 1997.

Pier, J.P. (ed), *Development of mathematics* 1900-1950, Birkhäuser, Basel 1994.

Pier, J.P. (ed), *Development of mathematics* 1950-2000, Birkhäuser, Basel 2000.

بورباکی، ن.، توپولوژی عمومی (کتابچهٔ خلاصه با یادداشت‌های تاریخی)، انتشارات دانشگاه تهران ۲۴۹۱، تهران، ۱۳۸۰ (ترجمهٔ ارسلان شادمان).

بورباکی، ن.، فضاهای برداری توپولوژیک (کتابچهٔ خلاصه با یادداشت‌های تاریخی) انتشارات دانشگاه تهران، شماره ۲۵۱۱، تهران ۱۳۸۰ (ترجمهٔ ارسلان شادمان).

بورباکی، ن.، خمینه‌های دیفرانسیل و تحلیلی جلد یکم بندهای یک تا هفت انتشارات دانشگاه تهران، شماره ۲۵۸۲، تهران ۱۳۸۱ (ترجمهٔ ارسلان شادمان).

بهزاد، م.، مروری بر نظریهٔ گراف‌ها، گزارش همایش ماهانهٔ انجمن ریاضی ایران، جلد ۱ (۱۳۸۱)، ۱ تا ۲۱.

رودین، و.، آنالیز حقیقی و مختلط، نشر مبتکران، تهران، ۱۳۸۰ (ترجمهٔ علی‌اکبر عالم‌زاده).

رید، م.، هندسهٔ جبری مقدماتی، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۷۶ (ترجمهٔ رحیم زارع نهندی).

شادمان، ا.، قرینه‌سازی جبری به عنوان یک مسألهٔ جهانی قسمت اول، رشد آموزش ریاضی، جلد ۱۱، ۳۸ تا ۴۳.

شادمان، ا.، قرینه‌سازی جبری به عنوان یک مسألهٔ جهانی قسمت دوم، رشد آموزش ریاضی، جلد ۱۲، ۴۹ تا ۵۳.

شادمان، ا.، معرفی و نقد کتاب گسترش ریاضیات ۱۹۰۰ تا ۱۹۵۰، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، شماره ۲۶ (بهار ۱۳۸۰)، ۵۳ تا ۶۶.

شادمان، ا.، معرفی و نقد کتاب گسترش ریاضیات ۱۹۰۰ تا ۱۹۵۰ (قسمت دوم)، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، شماره ۲۷ (بهار ۱۳۸۰)، ۷۱ تا ۸۳.

شادمان، ا.، معرفی و نقد کتاب گسترش ریاضیات ۱۹۵۰ تا ۲۰۰۰ (قسمت یکم)، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، شماره ۳۱ (پاییز ۱۳۸۲)، ۴۱ تا ۷۵.

کارتان، هـ.، حساب دیفرانسیل، انتشارات دانشگاه تهران شماره ۱۹۷۶ چاپ دوم تهران، ۱۳۷۶ (ترجمهٔ ارسلان شادمان).

کارتان، هـ.، تحلیل مختصر آثار هانری کارتان، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، شماره ۲۳ (پاییز ۱۳۷۸)، ۱ تا ۲۱ (ترجمهٔ ارسلان شادمان).

وحیدی اصل، م.ق.، مروری بر فرایندهای زیرجمعی، قضیهٔ ارگودیک و چند کاربرد، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، شماره ۲۷ (پاییز ۱۳۸۰)، ۴۹ تا ۶۹، همچنین گزارش همایش ماهانهٔ انجمن ریاضی.

ارسلان شادمان
دانشگاه تهران، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر
پست الکترونیک chademan@khayam.ut.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۲ (بهار ۱۳۸۳) ص. ۷۹

مسأله

این قسمت از فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی به طرح و حلِ مسائلی در حدِ دروسِ دوره‌های کارشناسی و کارشناسی ارشدِ ریاضیات اختصاص دارد. از کسانی که مایل به ارسال مسأله یا حل مسائلِ مطرح شده می‌باشند، تقاضا می‌شود آنها را به نشانی ذیل ارسال فرمایند تا به نامِ خودشان در مجله درج شود. مسائلِ ارسال‌شده باید همراه با حل کامل (و مأخذ) باشد.

نشانی: مشهد، دانشگاه فردوسی، صندوق پستی ۱۱۵۹–۹۱۷۷۵، گروه ریاضی، محمد صال‌مصلحیان

مسألهٔ ٦٠: فرض کنید $\{P_n\}$ دنباله‌ای از چندجمله‌ای‌ها است که روی $\mathbb{R}$ به تابع f همگرای یکنواخت است. ثابت کنید f نیز چندجمله‌ای است.

مسألهٔ ٦١: فرض کنید n یک عدد طبیعی باشد. تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادلهٔ سیالهٔ $x + 2y + 3z = n$ را بیابید.

مسألهٔ ٦٢: ثابت کنید به ازای هر مجموعهٔ شمارای I، یک خانوادهٔ ناشمارا $\{U_s : s \in S\}$ از زیرمجموعه‌های نامتناهی I وجود دارد که اشتراک هر دو عضو این خانواده، متناهی است.

مسألهٔ ٦٣: به ازای چه مقادیری از $a > 0$، سری $\sum_{n=1}^{\infty} a^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$ همگراست؟

مسألهٔ ٦٤: فرض کنید تابع $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ پیوسته باشد و برای هر $t, s \in [0, 1]$، $tf(s) + sf(t) \leq 2$، نشان دهید $\int_0^1 f(x)dx \leq \frac{\pi}{2}$.

مسألهٔ ٦٥: آیا می‌توان دو ماتریس مربعی A و B یافت به طوری که $AB - BA$ ماتریس همانی باشد؟

مسألهٔ ٦٦: دومین مرکز گروه $S_3 \times D$ را محاسبه کنید که در آن D گروه دو وجهی و S_3 گروه جایگشت‌های یک مجموعهٔ سه حرفی است.

مسألهٔ ٦٧: فرض کنید A یک ماتریس مربعی با درایه‌های مختلط باشد و $A^* = [\bar{a}_{ji}]$. نشان دهید اگر $A^2 = A$ و $AA^*A = A$ آنگاه $A = A^*$.

مسألهٔ ٦٨: فرض کنید A، B، C، D، E و F ماتریس‌هایی با درایه‌های مختلط باشند، $R = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$، $S = \begin{bmatrix} A & B \\ E & F \end{bmatrix}$، $\mathrm{detC} = \mathrm{detE}$ و $\mathrm{detD} = \mathrm{detF}$. آیا می‌توان شرایط لازم و کافی پیدا کرد که $\mathrm{detR} = \mathrm{detS}$؟

مسألهٔ ٦٩: فرض کنید S یک نیم گروه آبلی باشد و $p, q : S \to [-\infty, \infty)$ دو تابع باشند. ثابت کنید یک تابع جمعی $A : S \to [-\infty, \infty)$ با خاصیت $p \leq A \leq q$ وجود دارد اگر و فقط اگر به ازای هر دو عدد طبیعی m و n و هر $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n \in S$ که $x_1 + \cdots + x_m = y_1 + \cdots + y_n$ داشته باشیم

$$p(x_1) + \cdots + p(x_m) \leq q(y_1) + \cdots + q(y_n).$$