فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۴ (بهار ۱۳۸۴) صص. ۱ تا ۲۶

فرایندهای لوی: از احتمال تا ریاضیات مالی و گروه‌های کوانتمی

دیوید اپل باوم[1]

ترجمه: حسن نجومی

مقدمه

نظریهٔ فرایندهای تصادفی، یکی از مهم‌ترین پیشرفت‌های علمی قرن بیستم است. از دیدگاه شهودی، هدف این نظریه الگوسازی «شانس» به کمک «زمان» است. ابزارهای لازم برای دقیق ساختن این هدف در خلال سال‌های دههٔ ۱۹۳۰ توسط ریاضیدان بزرگ روسی، کلموگرف[2]، ابداع شد. او دریافت که نظریهٔ احتمال را می‌توان با استحکام بسیار بر اساس نظریهٔ اندازه بنا نهاد. براین اساس یک فرایند تصادفی، خانواده‌ای $\{X(t) : t \geq 0\}$ از متغیرهای تصادفی است که روی یک فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ تعریف شده‌اند و مقادیرشان در یک فضای اندازه‌پذیر $(E, \mathcal{E})$ واقع است. در اینجا Ω یک مجموعه (فضای نمونه‌ای برآمدهای ممکن)، $\mathcal{F}$ یک σ ـ جبر از زیرمجموعه‌های Ω (پیشامدها)، و P یک اندازهٔ مثبت با اندازهٔ کل واحد روی $(\Omega, \mathcal{F})$ است. مجموعهٔ E را «فضای حالت» می‌نامند. بنا بر تعریف متغیر تصادفی، هر $X(t)$ یک نگاشت $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ ـ اندازه‌پذیر از Ω به E است و باید آن را یک مشاهدهٔ تصادفی E در زمان t تلقی کرد. برای بسیاری از مقاصد نظری و عملی، E فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^d$ (و اغلب با $d = 1$) است؛ هرچند محققین به بررسی حالات کلی‌تری که در آن E یک فضای هیلبرت یا فضای باناخ با بعد نامتناهی، یا یک گروه لی یا خمینهٔ با بعد متناهی نیز تمایل فراوان دارند. در تمام این حالات، $\mathcal{E}$ را می‌توان σ ـ جبر برل روی E، یعنی σ ـ جبر تولید شده توسط مجموعه‌های باز E در نظر گرفت.

1) David Applebaum   2) A. N. Kolomogorov

الگویی که در بالا توضیح دادیم، برای توصیف احتمال‌های مطرح در نظریهٔ کوانتم، بیش از حد کلی است و باید آن را در یک ساختار مناسب ناجابجایی نشاند. فرایندهای تصادفی، نه تنها موجودات ریاضی غنی هستند، بلکه کاربردهای وسیعی در فیزیک، مهندسی، زیست شناسی و اقتصاد نیز دارند. در واقع مشکل بتوان شاخه‌ای کمّی از دانش را یافت که فرایندهای تصادفی در آن به‌نحوی ظاهر نشوند. دربارهٔ مفهوم کلی فرایند تصادفی چیز زیادی نمی‌توان گفت و بخش عمده‌ی نظریه و کاربردهای فرایندهای تصادفی روی ویژگی‌های رده‌های خاصی از این فرایندها که احیاناً دارای ساختار اضافی نیز هستند، متمرکز شده است. احتمالاً خواننده با برخی از انواع فرایندها مانند قدم زدن تصادفی و زنجیرهای مارکف آشنایی دارد. برخی انواع دیگر، مانند نیمه‌مارتینگل‌ها و پخش‌های اندازه‌ای[1] پیچیده‌تر و اسرارآمیزترند. این مقاله، مقدمه‌ای است برای آشنایی با رده‌ای از فرایندهای تصادفی که به افتخار آماردان بزرگ فرانسوی پل لوی[2]، که اولین بار آن‌ها را در دههٔ ۱۹۳۰ مطالعه و بررسی کرد، فرایندهای لوی نام گرفته‌اند. ساختار اساسی این فرایند در «دوران طلایی» نظریهٔ احتمال در دههٔ ۱۹۳۰ ـ ۱۹۴۰ توسط لوی، ریاضیدان روسی خینچین[3]، و ایتو[4] در ژاپن، شناسایی گردید. در سالهای اخیر، به دلیل پیشرفت‌های نظری و هم‌چنین گسترهٔ وسیعی از کاربردهای جدید به ویژه در ارزیابی قراردادهای امتیاز در مدیریت مالی، علاقه به این فرایند افزایش یافته است. علاوه بر تعداد بسیار زیاد مقالات تحقیقی، کتاب‌های متعددی در این زمینه به چاپ رسیده‌اند ([۱۲], [۲], [۱], [۱۱], [۳]) و از سال ۱۹۹۸ گردهمایی‌های بین‌المللی ویژهٔ این فرایند برگزار شده است.

قبل از آن‌که بخش اصلی این مقاله را آغاز کنیم، بهتر است دلایل اهمیت زیاد فرایندهای لوی را به صورت فهرست وار از نظر بگذرانیم:

- انواعی بسیار مهم و متداول از فرایندهای تصادفی، از جمله حرکت براونی، فرایند پواسن، فرایندهای مانا، و فرایندهای تبعی[5]، نمونه‌هایی از فرایندهای لوی هستند.
- فرایند لوی تعمیم قدم زدن تصادفی به زمان پیوسته است.
- فرایندهای لوی ساده‌ترین ردهٔ فرایندهایی هستند که دارای مسیرهای شامل حرکت پیوسته همراه با جهش‌های تصادفی با اندازهٔ تصادفی و در زمان‌های تصادفی می‌باشند.
- ساختار فرایند لوی، با وجود این که بنیان نسبتاً ساده‌ای دارد، به طور طبیعی قابل تعمیم به رده‌های بسیار وسیع‌تری از فرایندها، مانند نیمه‌مارتینگل‌ها، فرایندهای فلر ــ مارکف، فرایندهای مربوط به فرم‌های دیریشله، و فرایندهای خود ــ متشابه (تعمیمی از فرایندهای لوی اکیداً پایدار) می‌باشد.
- فرایندهای لوی ابزار طبیعی برای مدل‌سازی نوفه هستند و در ساخت انتگرال‌های تصادفی و رانش در معادلات دیفرانسیل تصادفی به‌کار می‌روند.

1) measure–valued diffusions 2) Paul Levy 3) A. N. Khintchine 4) K. Itô
5) subordinators

- فرایندهای لوی دارای ساختار ریاضی محکم و قابل تعمیم از فضاهای اقلیدسی به فضاهای هیلبرت و باناخ، گروه‌های لی، فضاهای متقارن، و گروه‌های کوانتمی (با تعمیم جبری) هستند.

ساختار فرایندهای لوی

در بخش اول این مقاله همه جا فرض بر این است که $E = \mathbb{R}^d$.

تعریف. فرایند لوی $X = \{X(t) : t \geq ۰\}$ یک فرایند تصادفی است با ویژگی‌های زیر:

۱ $-$ X دارای نموهای مستقل و ایستا است،

۲$-$ با احتمال یک $X(۰) = ۰$،

۳$-$ X به‌طور تصادفی پیوسته است؛ به عبارت دیگر برای هر $a > ۰$ و هر $s \geq ۰$: $\lim_{t \to s} P(|X(t) - X(s)| > a) = ۰$.

ویژگی (۱) مهم‌ترین ویژگی در بین سه ویژگی بالا است، به همین دلیل بحث را با توضیح معنای آن آغاز می‌کنیم. این ویژگی درباره خانواده $\{X(t) - X(s) : ۰ \leq s \leq t < \infty\}$ یعنی نموهای فرایند X است. ایستایی این نموها به این معنا است که برای هر $۰ \leq s \leq t < \infty$ و هر مجموعهٔ برل A:

$$P(X(t) - X(s) \in A) = P(X(t-s) - X(۰) \in A)$$

به عبارت دیگر توزیع احتمال متغیر تصادفی $X(t) - X(s)$ تحت انتقال $(s, t) \mapsto (s+h, t+h)$ ناوردا است. استقلال نموها به معنای آن است که برای هر دنبالهٔ متناهی مرتب از زمان‌ها $۰ \leq t_۱ \leq t_۲ \leq \cdots \leq t_n < \infty$، متغیرهای تصادفی $X(t_۱) - X(t_۰)$، $X(t_۲) - X(t_۱)$، ...، $X(t_n) - X(t_{n-۱})$ مستقل آماری هستند. مجدداً تأکید می‌کنیم که (۱) ویژگی اصلی در تعریف فرایند لوی است؛ در واقع تا سال‌های متمادی نام این فرایندها «فرایندهای دارای نموهای مستقل و ایستا» بود. ویژگی (۲) تنها نوعی نرمال سازی تسهیل کننده است، و ویژگی (۳) یک فرض تکنیکی (و مهم) است برای این که بتوانیم تحلیل‌های جدی روی این فرایندها انجام دهیم.

فرمول لوی ـ خینچین

برای درک ساختار عمومی فرایندهای لوی، آنالیز فوریه را به‌کار می‌گیریم. تابع مشخصه $X(t)$، نگاشت $\phi_t : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ است که به صورت

$$\phi_t(u) := \mathbb{E}(e^{iu.X(t)}) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{iu \cdot y} p_t(dy)$$

تعریف می‌شود. در اینجا p_t قانون احتمال $X(t)$ است؛ به عبارت دیگر $p_t = P \circ X(t)^{-۱}$، و $\mathbf{E}$ نشان‌گر امید ریاضی است. تابع ϕ_t پیوسته و مثبت معین است. در واقع بنا بر قضیهٔ مشهوری از

بوخنر[1]، همهٔ نگاشت‌های پیوسته و مثبت معین $\mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ تبدیل‌های فوریهٔ اندازه‌های متناهی روی $\mathbb{R}^d$ هستند.

از ویژگی (۱) تقسیم‌پذیری نامتناهی هر $X(t)$ نتیجه می‌شود؛ به این معنی که برای هر $n \in \mathbb{N}$، یک اندازهٔ احتمال $p_{t,n}$ روی $\mathbb{R}^d$ با تابع مشخصهٔ $\phi_{t,n}$ وجود دارد به طوری که برای هر $u \in \mathbb{R}^d$ رابطهٔ $\phi_t(u) = (\phi_{t,n}(u))^n$ برقرار است. توابع مشخصه اندازه‌های احتمال تقسیم‌پذیر نامتناهی به‌طور کامل توسط لوی و خین چین در دههٔ ۱۹۳۰ توصیف گردیدند. قضیهٔ منسوب به آنها که در زیر آورده شده است، اساس همهٔ مطالبی است که در ادامه خواهد آمد.

قضیه (فرمول لوی ــ خینچین). برای هر فرایند لوی $X = \{X(t) : t \geq ۰\}$، بردار $b \in \mathbb{R}^d$، ماتریس $d \times d$ نامنفی معین a، و اندازه‌ی برل ν روی $\mathbb{R}^d - \{۰\}$ وجود دارند که

$$\int_{\mathbb{R}^d - \{۰\}} \left(\|y\|^۲ \wedge ۱\right) \nu(dy) < \infty$$

و تابع مشخصهٔ $X(t)$ برای هر $t \geq ۰$ و هر $u \in \mathbb{R}^d$ به صورت $\phi_t(u) = \exp(\ t\eta(u)\ )$ است، که در آن

$$\eta(u) = ib.u - \frac{۱}{۲}\, u.au + \int_{\mathbb{R}^d - \{۰\}} \left(e^{iu.y} - ۱ - iu.y\,۱_{\|y\|<۱}(y)\right) \nu(dy).$$

بر عکس، برای هر تابع η به این صورت، یک فرایند لوی وجود دارد که تابع مشخصهٔ آن به صورت $\phi_t(u) = \exp(t\eta(u))$ است.

یکی از اهداف ما ارائهٔ تفسیری آماری برای فرمول لوی ـ خینچین است. نگاشت $\eta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ را نمای مشخصهٔ فرایند X می‌نامند. این نگاشت به‌طور شرطی مثبت معین است به این معنی که برای هر $n \in \mathbb{N}$، هر $u_۱, \dots, u_n \in \mathbb{R}^d$ و هر $c_۱, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ با شرط $\sum_{i=۱}^n c_i = ۰$ داریم $\sum_{i,j=۱}^n c_i \overline{c_j}\ \eta(u_i - u_j) \geq ۰$. بنابر قضیه‌ای از شونبرگ[2]، هر نگاشت $\eta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ پیوسته، هرمیتی ($\eta(u) = \overline{\eta(-u)}$ برای هر $u \in \mathbb{R}^d$) و به‌طورشرطی مثبت با ویژگی $\eta(۰) = ۰$، شکلی مطابق آنچه در فرمول لوی ــ خینچین آمد، دارد. سه‌تایی مرتب (b, a, ν) را سه‌تایی لوی یا سه‌تایی مشخصهٔ فرایند X می‌نامند. سه‌تایی مشخصه، قانون احتمال p_t را کاملاً مشخص می‌کند. اندازهٔ ν ظاهر شده در فرمول لوی ـ خینچین اندازه‌ی لوی فرایند X نامیده می‌شود.

مثال‌هایی از فرایندهای لوی

۱ــ حرکت براونی و فرایندهای گاوسی: حرکت براونی $B_a = (B_a(t) : t \geq ۰)$ را می‌توان فرایندی لوی با سه‌تایی مشخصهٔ $(۰, a, ۰)$ تعریف کرد. این فرایند دارای تابع میانگین صفر و

1) Bochner 2) Schoenberg

تابع کوواریانس

$$E\left(B_a^i(s), B_a^j(t)\right) = a_{ij}(s \wedge t)$$

است که در آن $B_a^i(s)$ مؤلفهٔ i ــ ام بردار $B_a(s)$ و a_{ij} درایهٔ (i,j) ــ ام ماتریس a است. در صورتی که ماتریس a مثبت معین باشد، برای هر t، بردار $B_a(t)$ دارای توزیع نرمال d متغیره با تابع چگالی احتمال

$$f_{a,t}(x) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}\sqrt{\det(a)}} \ \exp\left(-\frac{1}{2t}\left(x.\, a^{-1}x\right)\right)$$

است. حالت خاص $d = 1$ حرکت براونی استاندارد را به دست می‌دهد. حرکت براونی دارای تاریخچه‌ای جذاب و شنیدنی است. این فرایند به نام گیاه‌شناس اسکاتلندی، رابرت براون، که اولین بار در سال‌های دهۀ ۱۸۲۰ حرکات نامنظم گرده‌های گلها را در آب مشاهده و مطالعه کرد، نام‌گذاری شده است. در انتهای قرن نوزدهم این پدیده با استفاده از نظریهٔ جنبشی مولکولی و بر اساس برخورد مولکول‌های گاز کامل توضیح داده شد. در واقع در سال ۱۹۰۵ اینشتین، با وجود بی‌اطلاعی از تاریخچه و کارهای قبلی انجام شده در مورد این پدیده، وجود آن را بر اساس ملاحظات کاملاً نظری پیش بینی کرده بود. پنج سال قبل از آن هم بشیلیه[1] آن را برای مدل‌سازی بازار بورس به‌کار برده بود؛ پدیدهٔ نظیر برخوردهای مولکولی در بازارهای مالی، تصمیم‌های متعدد اجرا شده توسط سرمایه‌گذاران است؛ همین تصمیمات است که بهای محصولات مالی را تعیین می‌کنند. در سال‌های دهۀ ۱۹۲۰ نوربرت وینر[2] صورت‌بندی ریاضی حرکت براونی را به‌عنوان خانواده‌ای از توابع در $C = C_0([0,\infty), \mathbb{R})$، یعنی فضای توابع پیوستهٔ حقیقی ــ مقدار روی $[0,\infty)$ که در نقطهٔ صفر برابر صفر تعریف می‌شوند، ارائه کرد. در انجام این کار، او فضای با بعد نامتناهی C را به یک اندازهٔ گاوسی، که امروزه به نام او اندازهٔ وینر نامیده می‌شود، مجهز ساخت. نتیجهٔ مهم این روش ساخت، پیوستگی توابع مسیری $t \mapsto B_a(t)(\omega)$ برای هر $\omega \in C$ است. در دهۀ ۱۹۳۰ وینر همراه با پالی[3] و زیگموند[4] نشان دادند که مسیرهای حرکت براونی با احتمال یک در هیچ نقطه مشتق‌پذیر نیستند.

حرکت براونی همراه با رانش (drift) فرایند لوی $C_{a,b} = (C_{a,b}(t) : t \geq 0)$ با سه‌تایی مشخصه‌ی $(b, a, 0)$ است. هر $C_{a,b}(t)$ یک متغیر تصادفی گاوسی با بردار میانگین bt و ماتریس کوواریانس ta است. در واقع $C_{a,b}(t) = bt + B_a(t)$. یک فرایند لوی با احتمال یک دارای مسیرهای پیوسته، و یا گاوسی است اگر و تنها اگر یک حرکت براونی همراه با رانش باشد.

۲ــ فرایند پواسن: یک فرایند پواسن $N_\lambda = \{N_\lambda(t) : t \geq 0\}$ با پارامتر λ، فرایند لوی با سه‌تایی مشخصهٔ $(0, 0, \lambda\delta_1)$ است که δ_1 تابع دلتای دیراک متمرکز در ۱ است. فرایند N_λ

1) L. Bachelier 2) Norbert Wiener 3) Paley 4) Zygmund

مقادیر صحیح نامنفی را اختیار می‌کند و هر $N_\lambda(t)$ دارای توزیع پواسن است:

$$P\ (\ N_\lambda(t) = n\ ) = \frac{e^{-\lambda t}\ (\lambda t)^n}{n!}.$$

مسیرهای N_λ در هر بازهٔ زمانی متناهی تکه‌ای ثابت و دارای پرش‌های با اندازهٔ واحد در لحظات تصادفی $\tau_n = \inf\{t \geq 0 : N_\lambda(t) = n\}$ هستند.

۳ـ فرایند پواسن مرکب: فرض کنید $(Y_n : n \in \mathbb{N})$، دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل با تابع توزیع یکسان q، و N_λ یک فرایند پواسن مستقل باشد. فرایند پواسن مرکب، یک فرایند لوی به شکل

$$Z_\lambda(t) = \sum_{j=1}^{N_\lambda(t)} Y_j$$

است. نمای مشخصهٔ این فرایند به صورت

$$\eta(u) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{iu.y} - 1\right) \lambda\ q(dy)$$

است. فرایند پواسن مرکب یک بعدی $(d = 1)$ را می‌توان به عنوان الگویی برای مبالغ واریز شده به صندوق یک فروشگاه به کار برد؛ در اینجا $N_\lambda(t)$ تعداد مشتریان ایستاده در صف صندوق در لحظهٔ t و Y_j مبلغی است که مشتری j ـ ام می‌پردازد.

۴ـ فرایندهای هم‌بافته[1]: یک رده از فرایندهای لوی را می‌توان به صورت $X(t) = C_{a,b}(t) + Z_\lambda(t)$، با دو جمعوند مستقل تعریف کرد. چنین فرایندی را می‌توان آمیخته یا هم‌بافته نامید زیرا مسیرهای آن به صورت حرکتی پیوسته درآمیخته با پرش‌های تصادفی به اندازهٔ $\|Y_n\|$ در زمانهای تصادفی τ_n هستند. (که در آن Y_nها متغیرهای تصادفی در تعریف فرایند پواسن مرکب‌اند). نمای مشخصهٔ X عبارت است از

$$\eta(u) = ib.u - \frac{1}{2}u.au + \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{iu.y} - 1\right) \lambda\ q(dy),$$

که بسیار شبیه به شکل نمای مشخصه برای فرایند لوی در حالت کلی است. در واقع در دههٔ ۱۹۲۰ رابطهٔ اخیر به‌عنوان کلی‌ترین صورت نمای مشخصه توسط دوفینتی[2] ریاضیدان ایتالیایی پیشنهاد شد. آنچه از نظر او پنهان ماند این بود که برای تعمیم به حالت کلی، اندازه‌ی متناهی λq را می‌توان با یک اندازه‌ی لوی σ ـ متناهی ν جایگزین کرد. اما اگر این کار را انجام دهیم، ممکن است تابع $\left(e^{iu.y} - 1\right)$، ν ـ انتگرال‌پذیر نباشد. بنابراین برای تعمیم به حالت کلی، باید توجیهی منطقی برای انتگرال فوق بیابیم. همان طور که در بخش بعدی خواهیم دید، از دیدگاه آماری ν ـ انتگرال پذیر نبودن انتگرالده معادل با همگرا نبودن

1) Interlacing Processes 2) B. de Finetti

تعدادی شمارش‌پذیر از «پرشهای کوچک» است. اگرچه رابطه‌ی اخیر به عنوان کلی‌ترین صورت نمای مشخصه صحیح نیست، کلی‌ترین شکل η را می‌توان به‌صورت حد نقطه به نقطهٔ جملاتی مشابه با آن، یعنی $\eta(u) = \lim_{n\to\infty}\eta_n(u)$ به‌دست آورد که در آن

$$\eta_n(u) = i\left(b - \int_{\frac{۱}{n}<\|y\|<۱} y\,\nu(dy)\right).u - \frac{۱}{۲}u.au + \int_{\|y\|\geq\frac{۱}{n}}\left(e^{iu.y} - ۱\right)\lambda_q(dy)$$

و قبل از محاسبهٔ حد باید انتگرال‌های موجود در آن را با هم ترکیب کرد. در بخش آینده دلایل شهودی این مطلب را خواهیم دید.

با ملاحظهٔ مثال‌های فوق، خواننده ممکن است چنین تصور کند که فرایند لوی چیزی بیش از تداخل و آمیختگی اندازه‌های گاوسی و پواسن نیست. از یک منظر چنین تصوری صحیح است، اما بیان دقیق‌تر این است که اندازه‌های گاوسی و پواسن منجر به نقاط سرحدی مخروط محدب متشکل از همه‌ی نماهای مشخصهٔ فرایندهای لوی می‌شوند. همان‌طور که خواهیم دید، در درون این مخروط فرایندهای بسیار جالبی قرار دارند.

۵ ــ فرایندهای لوی پایدار: توزیع‌های احتمال پایدار، در قالب حدود ضعیف مجموع متغیرهای تصادفی .i.i.d (مستقل هم توزیع) در قضیهٔ حد مرکزی ظاهر می‌شوند. توزیع نرمال، پایدار است و مربوط به حالتی است که متغیرهای .i.i.d دارای میانگین و واریانس متناهی هستند. متغیرهای تصادفی پایدار آنهایی هستند که قانون احتمال آنها پایدار است. مشخصهٔ این قوانین پایدار آن است که برای هر دو نسخه‌ی مستقل $X_۱$ و $X_۲$ از متغیر X بااین توزیع احتمال، و اعداد حقیقی $c_۱ > ۰$ و $c_۲ > ۰$، عدد $c > ۰$ و بردار $d \in \mathbb{R}^d$ وجود دارند به طوری که $cX + d$ و $c_۱X_۱ + c_۲X_۲$ دارای قانون احتمال یکسان هستند. یک فرایند لوی در صورتی پایدار تلقی می‌شود که برای هر $t \geq ۰$، قانون احتمال $X(t)$ به این معنی پایدار باشد. سه‌تایی مشخصه‌ی فرایند لوی پایدار یا به صورت $(b, a, ۰)$ (حرکت براونی همراه با رانش) و یا به صورت $(b, ۰, \nu)$، است که در آن $\nu(dx) = \frac{C}{|x|^{d+\alpha}}dx$ با شرط $C > ۰$ و $۰ < \alpha < ۲$. عدد α اندیس پایداری نامیده می‌شود. بجز در حالت خاص حرکت براونی با رانش، متغیرهای تصادفی با توزیع‌های لوی پایدار دارای واریانس نامتناهی هستند، و وقتی که $۰ < \alpha \leq ۱$، میانگین آنها نیز نامتناهی است. حالت خاص جالب یک بعدی $(d = ۱)$ که در آن $\alpha = ۱$، توزیع کوشی با تابع چگالی احتمال $f_t(x) = \dfrac{۱}{\pi(x^۲ + t^۲)}$ است.

با انجام کمی محاسبه می‌توان نمای مشخصه را به شکل مفیدتری تبدیل کرد. این عمل به ویژه هنگامی که X ناوردای گردشی است (یعنی $P(\,X(t) \in OA\,) = P(\,X(t) \in A\,)$ به ازای هر مجموعهٔ برل A ، هر $t \geq ۰$ و هر $O \in O(d)$) منجر به شکل سادهٔ $\eta(u) = -\sigma^\alpha|u|^\alpha$، به ازای یک $\sigma > ۰$ می‌شود. فرایندهای پایدار ناوردای گردشی ردهٔ مهمی از فرایندهای خود ــ متشابه را تشکیل می‌دهند؛ یعنی، فرایند پایدار ناوردای گردشی X این ویژگی را دارد که برای هر $c > ۰$ و هر $t \geq ۰$،

متغیرهای $X(ct)$ و $c^{1/\alpha}X(t)$ دارای توزیع‌های احتمال متناهی ـ بعد یکسان هستند. این خود یکی از دلایل اهمیت فرایندهای پایدار ناوردای گردشی است. دلیل دیگر اهمیت این فرایندها این است که به طور کلی توزیع‌های احتمال پایدار دارای «دم‌های سنگین» هستند به این معنی که وقتی $y \to \infty$ احتمال $P(X > y)$ به‌طور مجانبی شبیه $y^{-\alpha}$ رفتار می‌کند این برخلاف توزیع گاوسی است که در آن دم‌های توزیع با دور شدن از میانگین به صورت نمایی به صفر میل می‌کنند. در مدل‌سازی بسیاری از پدیده‌ها، مانند عبور و مرور اطلاعات روی شبکه‌ی اینترنت، چنین رفتارهایی یافت می‌شود.

۶ ـ فرایندهای نسبیتی: سال ۱۹۰۵ برای اینشتین سال پرکاری بود. علاوه بر کاری که در مورد حرکت براونی انجام داد و در بالا به آن اشاره شد، پدیده‌ی فتو الکتریک را از دیدگاه مکانیک کوانتمی توصیف کرد (که به خاطر آن جایزه‌ی نوبل به او اعطا شد) و نظریهٔ نسبیت خاص را نیز ارائه داد. بنابر این نظریه، هر ذرهٔ متحرک با جرم لختی m و تکانهٔ p دارای انرژی $E(p) = \sqrt{m^2c^4 + c^2|p|^2} - mc^2$ است که در آن c سرعت نور است. تابع $\eta(p) = -E(p)$ تابع مشخصهٔ یک فرایند لوی است. برخی از نتایج این مطلب را در ادامه بررسی خواهیم کرد.

۷ ـ فرایندهای تبعی: هر فرایند لوی یک بعدی $\{T(t) : t \geq 0\}$ که با احتمال یک ناکاهشی باشد، یک فرایند تبعی نامیده می‌شود. برای این فرایندها، تبدیل فوریهٔ تعریف کنندهٔ تابع مشخصه را می‌توان ادامهٔ تحلیلی داد تا تبدیل لاپلاس آن

$$\forall u > 0, \mathbb{E}\left(e^{-uT(t)}\right) = e^{-t\psi(u)}$$

به دست آید که در آن

$$\psi(u) = -\eta(iu) = bu + \int_{(0,\infty)} \left(1 - e^{-uy}\right) \lambda(dy).$$

در اینجا، $b \geq 0$ و λ یک اندازه‌ی لوی است با این ویژگی که $\lambda(\,(-\infty, 0)\,) = 0$ و $\int_{(0,\infty)} (y \wedge 1)\ \lambda(dy) < \infty$.

تابع ψ را نمای لاپلاس فرایند تبعی T می‌نامند. مجموعهٔ همهٔ نماهای لاپلاس فرایندهای تبعی در تناظر یک به یک با مجموعهٔ توابع برنشتاین با ویژگی $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ قرار دارد. یادآوری می‌کنیم که هر تابع بینهایت بار مشتق‌پذیر روی $(0, \infty)$ یک تابع برنشتاین نامیده می‌شود اگر و فقط اگر نامنفی باشد و $(-1)^n f^{(n)} \leq 0$ برای هر $n \in \mathbb{N}$.

یک دسته از فرایندهای تبعی، α ـ پایدارهایی هستند $(0 < \alpha < 1)$ که نمای لاپلاس آنها به صورت $\psi(u) = u^\alpha$ است. در حالت خاص $\alpha = \frac{1}{2}$، هر $T(t)$ زمان اولین برخورد حرکت براونی به سطح $t/\sqrt{2}$ است، یعنی:

$$T(t) = \inf\left\{s \geq 0 : B(s) = \frac{t}{\sqrt{2}}\right\}$$

همچنین هر $T(t)$ دارای توزیع لوی با تابع چگالی احتمال زیر است:

$$f_t(s) = \left(\frac{t}{۲\sqrt{\pi}}\right)\ s^{-۳/۲}\exp\left(-\frac{t^۲}{۴s}.\right)$$

یک کاربرد مهم فرایندهای تبعی در تغییر مقیاس زمانی فرایندهای لوی است. اگر X یک فرایند لوی با نمای مشخصهٔ η_X و T یک فرایند تبعی مستقل از X با نمای لاپلاس λ باشد، فرایند $Y(t) := X(T(t)) : t \geq ۰$ فرایند لوی جدیدی با نمای مشخصهٔ $\eta_Y = -\lambda \circ -\eta_X$ است. این روش اولین بار در دهۀ ۱۹۵۰ توسط بوخنر مطالعه گردید و به این دلیل گاهی آن را به افتخار او «تبعی سازی به معنای بوخنر» می‌نامند. به ویژه وقتی X یک حرکت براونی است که ماتریس کوواریانس آن a، مضرب ماتریس واحد و T یک فرایند تبعی α ـ پایدار مستقل از X است، فرایند Y یک فرایند لوی ۲α ـ پایدار ناوردای گردشی است.

۸ ـ فرایند زتای ریمان: این نمونه از فرایندهای لوی می‌تواند برای علاقه‌مندان به نظریه‌ی اعداد جالب باشد. اگر ζ تابع زتای ریمان باشد، برای هر $u > ۱$ با انتخاب تابع زیر برای نمای مشخصه، یک فرایند لوی به‌دست می‌آید:

$$\eta_u(v) := \log\left(\frac{\zeta(u+iv)}{\zeta(u)}\right).$$

این مطلب را خینچین در دهۀ ۱۹۳۰ نشان داد.

تجزیۀ لوی ـ ایتو

حال با درکی که از مثال ۴ به‌دست آوردیم، می‌توانیم به تلاش برای درک ساختار مسیرهای نمونه‌ای فرایندهای لوی باز گردیم. متناظر با هر نمای مشخصه، یک فرایند لوی X وجود دارد که مسیرهای آن با احتمال یک از راست پیوسته و از چپ دارای حد هستند. به این دلیل، فرایند X تنها می‌تواند ناپیوستگی‌های پرشی داشته باشد، و در هر بازه‌ی زمانی بسته فقط تعداد شمارش‌پذیر از این ناپیوستگی‌ها وجود دارد. به‌طور رسمی X را می‌توان به صورت زیر تجزیه کرد:

$$X(t) = X_c(t) + \sum_{۰\leq s\leq t}\Delta X(s)$$

در اینجا X_c فرایندی است که بااحتمال یک دارای مسیرهای پیوسته است، $\Delta X(s) := X(s) - X(s^-)$ اندازۀ پرش در لحظۀ s، و $X(s^-) := \lim_{u\uparrow s} X(u)$ حد چپ x است.

فرایند X_c را می‌توان به طرز نسبتاً ساده‌ای توصیف کرد (اگرچه اثبات این مطلب اصلاً ساده نیست). این فرایند، یک حرکت براونی با رانش است یعنی $X_c(t) = bt + B_a(t)$. اما توصیف جملۀ دوم $\sum_{۰\leq s\leq t}\Delta X(s)$ مسأله‌سازتر است، به ویژه این که این مجموعه ممکن است همگرا نباشد. خوب است تعداد پرش‌های واقع در مجموعۀ برل A تا زمان t را بشماریم و به‌این منظور تعریف

می‌کنیم:

$$N(t,A) := \#\{\ \circ \leq s \leq t; \Delta X(s) \in A\ \}.$$

این N، موجود ریاضی بسیار جالبی است. در واقع تابعی است از سه متغیر ــ زمان t، مجموعهٔ A، و نقطهٔ نمونه‌ای ω. اگر t و ω را ثابت بگیریم، نگاشت N یک اندازهٔ σ ــ متناهی روی مجموعه‌های برل در $\mathbb{R}^d$ است. از طرف دیگر، اگر مجموعهٔ A را ثابت بگیریم و مطمئن باشیم که دور از صفر کراندار است، یک فرایند پواسن با پارامتر $\lambda = \nu(A)$ به‌دست می‌آوریم. به این دلایل N یک اندازه‌ی تصادفی پواسن نامیده می‌شود.

در هر بازهٔ زمانی متناهی، فرایند X فقط تعداد متناهی پرش با اندازهٔ بزرگ‌تر از واحد (یا در واقع بزرگ‌تر از هر عدد مثبت دلخواه) دارد. مجموع این تعداد متناهی پرش‌ها را می‌توان به‌صورت $\int_{\|x\|\geq ۱} N(t,dx)$ نوشت. به همین ترتیب مجموع پرش‌های با اندازهٔ بزرگتر از $۱/n$ و کمتر از ۱ عبارت است از $\int_{\frac{۱}{n}<\|x\|<۱} xN(t,dx)$. اما حد این عبارت هنگامی که $n \to \infty$، ممکن است واگرا باشد. استدلال لوی آن بود که تمایز بین تجمع تعداد بسیار زیادی از پرش‌های با اندازهٔ کوچک و حرکات تعیینی بسیار شدید، دشوار است. به این دلیل لازم است عبارت $M_n(t) = \int_{\frac{۱}{n}<\|x\|<۱} x(N(t,dx) - t\nu(dx))$ را در نظر بگیریم که در آن $\{M_n : n \in \mathbb{N}\}$ دنباله‌ای از مارتینگل‌های انتگرال پذیر با میانگین صفر، و بنابراین موجود ریاضی بسیار مطلوبی از نظر آماری و آنالیزی است. به ویژه، این دنباله در میانگین مربعی همگرا به یک مارتینگل به‌صورت $M(t) = \int_{\circ<\|x\|<۱} x\tilde{N}(t,dx)$ است، و $\tilde{N}(t,dx) = N(t,dx) - t\nu(dx)$ اندازه‌ی تصادفی پواسن جبران شده نامیده می‌شود. ایتو به این کشف شهودی لوی صورت دقیق ریاضی داد، و حال می‌توانیم تجزیهٔ مشهور لوی ــ ایتو را برای مسیرهای نمونه فرایند لوی ارائه کنیم:

$$X(t) = bt + B_a(t) + \int_{\|x\|<۱} x\tilde{N}(t,dx) + \int_{\|x\|\geq ۱} xN(t,dx) \quad (\circ.۳).$$

احتیاط کنید که این حالت را تعمیمی از فرایند گاوسی ندانید. به عنوان مثال، میانگین $X(t)$ در حالت کلی برابر با bt نیست. در واقع میانگین $X(t)$، چنان که در مثال (۵) در بالا دیده شد، ممکن است حتی وجود نداشته باشد. توجه کنید که گشتاورهای فرایند $M(t) + B_a(t)$، بخش مارتینگلی $X(t)$، از هر مرتبه موجودند. بنابراین وجود نداشتن گشتاور مرتبهٔ n ــ ام $X(t)$ فقط می‌تواند ناشی از اثر «جهش‌های بزرگ» باشد.

کاربرد در ریاضیات مالی

جامعه‌شناسی که رفتار متخصصین احتمال را در اوایل دههٔ ۱۹۹۰ بررسی کرده است، پدیدهٔ جالبی را گزارش می‌دهد: بسیاری از بهترین این افراد فعالیت تحقیقاتی خود را در زمینهٔ مدیریت مالی متمرکز ساخته بودند. علت اصلی این پدیده را می‌توان در سه کلمه خلاصه کرد: قیمت گذاری امتیاز.

یک امتیاز، قراردادی است که دارنده‌ی آن می تواند، اما ملزم نیست، یک واحد از سهام خاصی را به بهای تثبیت شده‌ی k در زمان تثبیت شده‌ی T یا قبل از این زمان، خریداری کند یا بفروشد. پس از زمان T، این امتیاز از او سلب خواهد شد. برای آن‌که این امتیاز با ارزش باشد، می بایست k به میزان قابل توجهی کمتر از قیمت جاری آن سهام در بازار باشد. اگر قیمت آن سهام در بازار به بیش از مقدار k افزایش یابد، دارنده‌ی امتیاز خرید سود قابل توجه خواهد داشت. از طرف دیگر اگر قیمت سهام کاهش ناگهانی داشته باشد ممکن است دارنده‌ی امتیاز با خرید سهام بیشتر کمتر ضرر کند تا فروش آنچه قبلاً خریده بود.

سؤال اساسی این است که آیا بازار مالی بهای یگانه‌ای را برای امتیازها تعیین می‌کند و اگر پاسخ مثبت است، آیا می‌توان این بهای یگانه را محاسبه کرد. توجه کنونی به این مسأله تا حد زیادی مربوط به نتایج بلک[۱]، شولز[۲]، و مرتن[۳] در دههٔ ۱۹۷۰ است، که با دادن پاسخ مثبت به این سئوال جایزهٔ نوبل را در اقتصاد از آن خود کردند. برتری تحلیل آنها بر تحلیل بشیلیه[۴] استفاده از حرکت براونی هندسی در مدل سازی ارزش سرمایه در زمان t بود:

$$S(t) = S(0)\exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B(t)\right].$$

عدد حقیقی ثابت μ نرخ (لگاریتمی) بازدهی مورد انتظار است، و σ، ضریب شدت تغییرات تصادفی[۵]، معیاری از میزان فعال بودن و تغییر پذیری بازار مالی است. دربارهٔ ضریب شدت تغییرات تصادفی بیشتر سخن خواهیم گفت. بلک و شولز بااستفاده از توزیع نرمال رابطه‌ای دقیق برای بهای امتیاز اروپایی (که تنها در لحظهٔ T قابل اجرا است) به دست آوردند. استخراج این رابطه با استفاده از ابزارهای آنالیز تصادفی مانند مارتینگل‌ها و قضیهٔ گرسانف[۶] عاملی بود که متخصصین احتمال را به توجه به این رشته و کار در این زمینه برانگیخت. الگوی بلک ــ شولز ــ مرتن با وجود زیبایی و ارزش نظری آن، دارای محدودیت‌ها و کمبودهایی است که منجر به سؤال برانگیز شدن آن شده است. یکی از عمده‌ترین این موارد مشاهدهٔ رفتار آماری قیمت‌های سهام به صورت توزیع‌های دارای دم‌های قابل توجه است. این با مدل گاوسی مطابقت ندارد و لذا پیشنهاد شد که حرکت براونی با یک فرایند لوی کلی‌تر جایگزین شود. در واقع ژمن[۷]، مدان[۸]، و یور[۹] این مطلب را چنین توجیه کرده‌اند که این جایگزینی طبیعی است ازاین جهت که، باتوجه به تجزیه‌ی لوی ــ ایتو، جمله‌ی $(\int_{\|x\|<1} x\tilde{N}(t,dx))$، متناظر با «پرش‌های کوچک»، توصیف کنندهٔ تغییرات و تلاطم‌های کوچک روزانه در قیمت سهام است، در حالی‌که جملهٔ $(\int_{\|x\|\geq 1} xN(t,dx))$ متناظر با «پرش‌های بزرگ»، الگویی برای آثار حوادث شدید اجتماعی، سیاسی و اقتصادی بر بازارهای مالی است.

با کنار گذاردن حرکت براونی، گسترهٔ وسیعی از فرایندهای لوی دیگر وجود دارند که از بین آنها می‌توان مدلی را انتخاب کرد. این انتخاب باید مناسب و به‌صورتی انجام گیرد که ما را

---

1) F. Black 2) M. Scholes 3) R. Merton 4) Bachelier 5) volatility 6) Girsanov
7) H. Geman 8) D. Madan 9) M. Yor

قادر به استخراج فرمول‌هایی کند که تحلیل‌گران بازارهای مالی بتوانند آنها را برای محاسبهٔ قیمت سهام به‌کاربرند. یک گروه جالب، فرایندهای لوی هذلولوی (متقارن) است که کاربردهای مالی آنهابه‌طور گسترده توسط ابرلین[1] و گروه تحقیقاتی‌اش در فرایبورگ در آلمان توسعه یافته است. این فرایندها بخش براونی ندارند و تابع مشخصهٔ آنها به صورت زیر است:

$$\Phi_t(u) = \left(\frac{\zeta}{K_1(\zeta)} \, \frac{K_1\left(\sqrt{\zeta^2 + \delta^2 u^2}\right)}{\sqrt{\zeta^2 + \delta^2 u^2}} \right)^t$$

که در آن K_1 تابع بسل نوع سوم، و ζ و δ پارامترهای نامنفی هستند.

فرایند لوی هذلولوی توسط بارندورف ـ نیلسن[2] در دههٔ ۱۹۷۰ کشف شد و به عنوان الگویی برای اندازه‌ی ذرات در رسوبات شنی ناشی از وزش باد به کار رفت. بینگهام[3] و کیسل[4] مشابهت جالبی را بین فرایند تشکیل رسوبات شنی و بهای سهام‌ها یافتند: همان‌گونه که آثار متوالی انتقال انرژی، سنگ‌های بزرک را می‌شکند و به توده‌های شن تبدیل می‌کند، آثار متوالی انتقال اطلاعات از سطح جهانی تا سطح منطقه‌ای و واحدهای کوچک و کوچک‌تر اجتماعی، متوالیاً نقش تعیین کننده ارزش سرمایه‌ها و سهام را دارند.

یک مسأله در ارتباط با برآورد غیرگاوسی ارزش سهام این است که بازار مالی «غیر کامل» است؛ به‌این معنا که قراردادها دارای قیمت معینی نیستند. واضح است که این رویداد مطلوبی نیست، و روش‌های متعددی مانند روش حداقل‌سازی انتروپی، برای غلبه بر این مسأله به‌کار گرفته شده‌اند. برای فرایندهای هذلولوی فرمول‌های ارزیابی قراردادها بر اساس حداقل‌سازی انتروپی به‌دست آمده‌اند و ادعا می‌شود که برتر از فرمول‌های بلک و شولز هستند. مسألهٔ دیگر در فرمول‌های بلک ـ شولز ـ مرتن آن است که در آنها ضریب شدت تغییرات تصادفی ثابت است. مطالعات تجربی نشان داده‌اند که این کمیت ثابت نیست و مطابق یک منحنی شبیه به لبخند[5] تغییر می‌کند. بر این اساس، عده‌ای از محققین مدل های آنالیز تصادفی را برای بررسی تغییرات این کمیت پیشنهاد کرده‌اند که در آنها به جای σ در مدل بلک ـ شولز فرایند تصادفی قرار می‌گیرد که در یک معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی صدق می‌کند. این کار به روش‌های گوناگون انجام گرفته است. بارندورف ـ نیلسن[6] و شپارد[7] اخیراً مدعی شده‌اند که فرایند $\{\sigma(t)^2 : t \geq 0\}$ می‌بایست یک فرایند اورنشتاین ـ اولنبک[8] باشد که از فرایند تبعی $\{T(t) : t \geq 0\}$ ناشی می‌شود؛ به عبارت دیگر

$$\sigma(t)^2 = e^{-\lambda t}\sigma(0)^2 + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \, dT(\lambda s)$$

که در آن λ یک پارامتر مثبت است. از آنجایی که فرایند T با احتمال یک دارای تغییرات کران‌دار است، انتگرال لبگ ـ اشتیلیس فوق خوش تعریف است.

1) E. Eberlein 2) O. Barndorff-Nielsen 3) N. H. Bingham 4) R. Kiesel
5) volatility smile 6) O. Barndorff-Nielsen 7) N. Shepard 8) Ornstein-Uhlenbeck

خوانندگانی که مایل به مطالعهٔ بیشتر در زمینهٔ کاربرد فرایندهای لوی در ریاضیات مالی هستند، می‌توانند به [۱۲]، [۴]، فصل ۵ در [۱]، و مراجع بیان شده در آنها مراجعه کنند.

فرایندهای مارکف، نیم‌گروه‌ها، و عملگرهای شبه‌دیفرانسیلی

هر فرایند لوی یک فرایند مارکف است، یعنی فرایندی که با دانستن حال، آیندهٔ آن از دید احتمالاتی مستقل از گذشته است. این مطلب را می‌توان با استفاده از امید ریاضی شرطی نمایش داد به این ترتیب که اگر $B_b(\mathbb{R}^d)$ فضای باناخ همهٔ توابع اندازه‌پذیر کران‌دار روی $\mathbb{R}^d$ با نرم سوپریمم باشد، برای هر $t \geq \circ, u \geq \circ$ و هر $f \in B_b(\mathbb{R}^d)$ داریم:

$$\mathbb{E}(\ f(X(t+u)) \mid \mathcal{F}_t\ )\ =\ \mathbb{E}(\ f(X(t+u)) \mid X(t).\ )$$

در اینجا «گذشته»، یعنی σ ــ جبر $\mathcal{F}_t$، کوچکترین σ ــ جبری است که نسبت به آن همهٔ $X(s)$ ها برای $\circ \leq s \leq t$ اندازه‌پذیرند. خانوادهٔ دو پارامتری $\{T_{s,t} : \circ \leq s \leq t < \infty\}$ از انقباض‌های خطی روی $B_b(\mathbb{R}^d)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(T_{s,t}f)(x) = \mathbb{E}(f(X(t)) \mid X(s) = x\ ) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x+y)\ p_t(dy).$$

از ویژگی مارکف نتیجه می‌شود که این خانواده یک دستگاه تحولی تشکیل می‌دهد به این معنی که برای هر $r \leq s \leq t$، معادله‌ی $T_{r,s}\ T_{s,t} = T_{r,t}$ برقرار است. توجه کنید که همه‌ی این عملگرها با عمل طبیعی گروه انتقال‌های $\mathbb{R}^d$ روی $B_b(\mathbb{R}^d)$ جابه‌جامی‌شوند.

فرایندهای لوی ردهٔ جالبی از فرایندهای مارکف را تشکیل می‌دهند. یک ویژگی مهم آنها همگنی زمانی است: برای هر $s \leq t$، رابطهٔ $T_{s,t} = T_{\circ,t-s}$ برقرار است. حال اگر تعریف کنیم $T_t = T_{\circ,t}$، آن‌گاه ویژگی تحولی به ویژگی نیم‌گروهی $T_sT_t = T_{s+t}$ تبدیل می‌شود. دوم این که فرایندهای لوی از دستهٔ فرایندهای فلر[۱] هستند، به این معنی که برای هر $t \geq \circ$، عملگر T_t فضای باناخ $C_\circ(\mathbb{R}^d)$ مرکب از توابع پیوسته روی $\mathbb{R}^d$ را که در بینهایت صفرند حفظ می‌کند و برای هر $f \in C_\circ(\mathbb{R}^d)$ داریم:

$$\lim_{t\downarrow\circ} ||T_tf - f||\ =\ \circ.$$

بنابراین $\{T_t : t \geq \circ\}$ یک نیم گروه انقباضی یک پارامتری به طور قوی پیوسته روی $C_\circ(\mathbb{R}^d)$ است و بر مبنای نظریهٔ کلی نیم گروه‌ها، مولد A برای این نیم گروه وجود دارد:

$$Af\ =\ \lim_{t\downarrow\circ} \frac{T_tf - f}{t}, \quad f \in D_A.$$

دامنهٔ D_A، یک زیرفضای برداری چگال در $C_\circ(\mathbb{R}^d)$ است و A یک عملگر خطی بسته است. می‌توانیم این نیم گروه و مولد آن را به صورت عملگرهای شبه دیفرانسیلی به صورت صریح

1) Feller processes

به‌دست آوریم. برای سهولت، فضای شوارتس $S(\mathbb{R}^d)$ را در نظر می‌گیریم که متشکل از همهٔ توابع هموار روی $\mathbb{R}^d$ است که خود و همهٔ مشتق‌های آنها در بی‌نهایت سریع‌تر از هر توان منفی $\|x\|$ به صفر میل می‌کنند. فضای $S(\mathbb{R}^d)$ در $C_\circ(\mathbb{R}^d)$ چگال است و دامنهٔ طبیعی برای تبدیل فوریهٔ

$$\hat{f}(u) \;=\; (۲\pi)^{-d/۲} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-iu.x} f(x)\, dx$$

و تبدیل وارون آن

$$f(x) \;=\; (۲\pi)^{-d/۲} \int_{\mathbb{R}^d} e^{iu.x} \hat{f}(u)\, du$$

می‌باشد. با اعمال فرمول لوی ـ خینچین، به دست می‌آوریم:

$$(T_t f)(x) \;=\; (۲\pi)^{-d/۲} \int_{\mathbb{R}^d} e^{iu.x} e^{t\eta(u)} \hat{f}(u)\, du$$

بنابراین T_t یک عملگر شبه دیفرانسیلی با نماد $e^{t\eta}$ است. با مشتق گیری نمادین، که می‌توان درستی آن را نشان داد، مولد نیم‌گروه به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$(Af)(x) \;=\; (۲\pi)^{-d/۲} \int_{\mathbb{R}^d} e^{iu.x} \eta(u) \hat{f}(u)\, du$$

بنابراین A نیز یک عملگر شبه دیفرانسیلی، با نماد η است. با استفاده از فرمول لوی ـ خینچین و ویژگی‌های مقدماتی تبدیل فوریه، عمل مولد روی $S(\mathbb{R}^d)$ به طور صریح

$$\begin{aligned}(Af)(x) \;=\; & \sum_{i=۱}^{d} b_i\, \partial_i f(x) + \frac{۱}{۲} \sum_{j=۱}^{d} a_{ij}\, \partial_i \partial_j f(x) \\ & + \int_{\mathbb{R}^d - \{\circ\}} \left[f(x+y) - f(x) - \sum_{i=۱}^{d} y_i\, \partial_i f(x)\, ۱_{\|y\|<۱}(y) \right] \nu(dy)\end{aligned}$$

به‌دست می‌آید. بااستفاده از روش‌های پیچیده‌تر، می‌توان دامنهٔ A در عبارت فوق را به فضای بزرگ‌تر توابع دوبار مشتق‌پذیر در $C_\circ(\mathbb{R}^d)$ گسترش داد. تعدادی از مثال‌های خاص و جالب مولدها عبارتند از:

۱ــ حرکت براونی (با $a = I$) توسط ۱/۲ لاپلاسین تولید می‌شود: $A = \frac{۱}{۲}\Delta = \frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{d} \partial_i^۲$

۲ــ فرایندهای α ـپایدار ناوردای چرخشی (با $\sigma = ۱$) توسط توان‌های کسری لاپلاسین تولید می‌شوند: $A = -(-\Delta)^{\alpha/۲}$

۳ــ مولد فرایند نسبیتی عبارت است از $A = -\left(\sqrt{m^۲c^۴ - c^۲\Delta} \;-\; mc^۲\right)$.

عملگر $-A$ در آخرین مثال در مکانیک کوانتمی عملگر شرودینگر نسبیتی نامیده می‌شود. دقت کنید که A به‌طور نمادی از طریق تناظر $p \leftrightarrow -i\nabla$ به‌دست می‌آید، و این دقیقاً همان قاعدهٔ

کوانتمی‌سازی در مکانیک کوانتمی است، اگرچه در اینجا به صورت طبیعی‌تری در یک ساختار فضای هیلبرتی ارائه می‌شود (به بحثی در این مورد که در ادامه خواهد آمد، توجه کنید).

اگر A_Z مولد فرایند لوی $Z(t) = X(T(t))$ باشد که از فرایند لوی X با نمای مشخصه‌ی η_X، نیم گروه وابسته‌ی $\{T_t^X : t \geq ۰\}$ و مولد A_X، به توسط فرایند تبعی مستقل T با نمای لاپلاس ψ، به دست آمده است، آن‌گاه کوانتم‌سازی اتحاد $\eta_Z = (-\psi) \circ (-\eta_X)$ به صورت معادله‌ی زیبای $A_Z = -\psi(-A_X)$ در می‌آید. به ویژه می‌توانیم با استفاده از رابطه‌ی زیبای زیر توان‌های کسری $-A_X$ را با استفاده از فرایندهای تبعی α ـ پایدار تعریف کنیم:

$$-(-A_X)^a f = \frac{\alpha}{\Gamma(۱-\alpha)} \int_{(۰,\infty)} \left(T_s^X f - f\right) \frac{ds}{s^{۱+\alpha}}$$

تعمیم عمیقی منسوب به فیلیپس [۱] اجازه می‌دهد تا A_X و T_t^X را با مولد یک نیم گروه انقباضی کلی روی یک فضای باناخ جایگزین کنیم.
نیم گروه وابسته به هر فرایند لوی می‌تواند روی فضای $L^p(\mathbb{R}^d)$ برای هر $۱ \leq p \leq \infty$ نیز عمل کند و مانند حالات قبل انقباضی و به‌طورقوی پیوسته باشد. از آنجایی که برای هر $۱ \leq p \leq \infty$، فضای $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ در $L^p(\mathbb{R}^d)$ چگال است، نمایش‌های به شکل عملگر شبه‌دیفرانسیلی که در بالا بحث شد کماکان معتبر می‌مانند. ازاین جا به بعد حالت $p = ۲$ را در نظر می‌گیریم. مولد متناظر با نماد η دارای دامنهٔ بیشینهٔ $\mathcal{H}_n(\mathbb{R}^d)$ است. این فضای سوبولف ناهمگون مرکب از همهٔ توابع $f \in L^۲(\mathbb{R}^d)$ است که دارای ویژگی زیر هستند:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\eta(u)|^۲ \left|\hat{f}(u)\right|^۲ du \ < \ \infty$$

بر اساس نظریهٔ نیم‌گروه‌ها، مثبت و خودالحاق بودن عملگر $A-$ شرط لازم و کافی برای خودالحاق بودن T_t برای هر t است. یک شرط لازم و کافی برای مثبت و خودالحاقی بودن $A-$، متقارن بودن فرایند لوی متناظر است. به عبارت دیگر $P(\ X(t) \in A\ ) \ = \ P(\ X(t) \in -A\ )$. و این رابطه برقرار است اگر و تنها اگر

$$\eta(u) = -\frac{۱}{۲} u \cdot au + \int_{\mathbb{R}^d - \{۰\}} (\ \cos(u.y) - ۱\ )\ \nu(dy)$$

این درواقع اثباتی بر مبنای نظریهٔ احتمال برای خودالحاق بودن هر یک از سه عملگر بحث‌شده در بالا روی فضای $\mathcal{H}_n(\mathbb{R}^d)$ است.

فرض کنید A مولد خودالحاق یک فرایند لوی متقارن باشد. برای هر $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ عملگر $\mathcal{E}$ که به صورت $\mathcal{E}(f,g) = - < f, Ag >$ تعریف می‌شود، به یک فرم دیریکلهٔ متقارن روی $L^۲(\mathbb{R}^۲)$ توسعه می‌یابد. به عبارت دیگر به یک فرم متقارن بسته در H با دامنه‌ی D به طوری که $f \in D \Rightarrow (f \vee ۰) \wedge ۱ \in D$ و همچنین $\mathcal{E}((f \vee ۰) \wedge ۱) \leq \mathcal{E}(f)$ برای هر $f \in D$، که در آن

1) R. S. Phillips

به‌اختصار قرار داده‌ایم $\mathcal{E}(f) := \mathcal{E}(f,f)$. محاسبات سرراست نتیجه می‌دهند

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(f,g) &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\int_{\mathbb{R}^d}(\partial_i f)(x)\,(\partial_j g)(x)\,dx,\\ &+ \frac{1}{2}\int_{(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)-D}(\,f(x)-f(x+y)\,)(\,g(x)-g(x+y)\,)\,\nu(dy)\,dx,\end{aligned}$$

که در آن D «قطر» $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ است: $D = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}^d\}$. این در واقع نمونه‌ای از رابطه‌ی برلینگ ـ دنای[1] برای فرم‌های متقارن دیریکله است.

حال به فضای $C_0(\mathbb{R}^d)$ برمی‌گردیم. ایده‌هایی که در مورد این فضا توضیح دادیم تعمیمی گسترده دارد که اولین بار توسط فون والدن‌فلدز[2] و کارژ[3] در اوایل دههٔ ۱۹۶۰ مطرح شد و اخیراً توسط جیکوب[4] و همکارانش در ارلانگن و سوانسی به صورت سازمان یافته بررسی شده است [۷]. نقطهٔ شروع این تعمیم آن است که اگر X یک فرایند فلر کلی روی $\mathbb{R}^d$ باشد که توابع پیوسته با محمل فشرده مشمول دامنهٔ مولد آن A هستند، آنگاه A را می‌توانیم به صورت عملگر شبه‌دیفرانسیلی زیر نمایش دهیم:

$$(Af)(x) = (2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d} e^{iu.x}\eta(x,u)\,\hat{f}(u)\,du.$$

دقت کنید که در اینجا نماد η به x نیز وابسته است، اما کماکان هر $\eta(x,\cdot)$ یک نمای مشخصه است. به این ترتیب به درکی جذاب از فرایند X می‌رسیم: «میدانی از فرایندهای لوی» که بامتغیر مکان اندیس‌گذاری شده است. البته طرفداران عملگرهای شبه‌دیفرانسیلی باید آگاه باشند که نگاشت $x \mapsto \eta(x,u)$ در حالت کلی دارای خواص هموراری خوبی نیست.

حالات بازگشتی، حالات گذرا و مقید

از دیدگاه شهودی، یک فرایند تصادفی در نقطهٔ x بازگشتی است اگر به هر همسایگی به دلخواه کوچک آن نقطه، با احتمال یک، بی‌نهایت بار بازگردد و گذرا است اگر از هر همسایگی آن نقطه، با احتمال یک، فقط به تعداد دفعات متناهی بازدید نماید. به عبارت دقیق‌تر، فرایند لوی X بازگشتی (در مبدأ) نامیده می‌شود اگر با احتمال یک $\liminf_{t\to\infty}|X(t)| = 0$، و گذرا (در مبدأ) نامیده می‌شود اگر با احتمال یک $\liminf_{t\to\infty}|X(t)| = \infty$. این تقسیم‌بندی بازگشتی/گذرا به واقع وجود دارد: هر فرایند لوی یا بازگشتی است یا گذرا. در دهه ۱۹۶۰، پورت[5] و استون[6] نشان دادند که یک فرایند لوی بازگشتی است اگر و تنها اگر برای هر $a > 0$

1) Beurling-Deny 2) W. von Waldenfels 3) P. Courrège 4) N. Jacob 5) S. C. Port 6) C. J. Stone

$$\int_{\|u\|<a} \Re\left(-\frac{1}{\eta(u)}\right) du = \infty.$$

با این حساب، حرکت براونی در ابعاد $d = 1, 2$ بازگشتی است. به ازای $d = 1$، فرایند α ــ پایدار برای $1 \leq \alpha < 2$ بازگشتی، و برای $0 < \alpha < 1$ گذرا است. در ابعاد $d \geq 3$ همهٔ فرایندهای لوی گذرا هستند.

در دههٔ ۱۹۹۰، کارمونا[1]، مسترز[2] و سیمون[3] ویژگی‌های طیفی عملگرهای هامیلتونی به صورت $H = H_0 + V$ را روی فضای $L^2(\mathbb{R}^d)$ مطالعه کردند، که در آن H_0 قرینهٔ مولد یک فرایند لوی متقارن X و V یک تابع پتانسیل مناسب است. به ویژه، آنان توانستند نشان دهند که X دارای حداقل یک حالت مقید است (به عبارت دیگر دارای حداقل یک ویژه مقدار منفی است) اگر و تنها اگر X بازگشتی باشد. در حالت خاصی که H_0 یک عملگر شرودینگر نسبیتی است و از دیدگاه فیزیکی حائز اهمیت است، حالات مقید تنها در ابعاد ۱ و ۲ وجود دارند.

فرایندهای لوی در گروه‌ها

تا به حال تنها با فرایندهای لوی سر و کار داشته‌ایم که مقادیرشان در فضاهای اقلیدسی است. حال فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^d$ را با یک گروه توپولوژیک G جایگزین می‌کنیم. ابتدا چند کلمه‌ای کلی‌گویی می‌کنیم. تداخل شاخه‌های نظریهٔ احتمال و نظریهٔ گروه‌ها از دههٔ ۱۹۶۰ تاکنون زمینهٔ تحقیقاتی فعالی ایجاد کرده است. در واقع این تداخل، زمینه‌ای مناسب برای بررسی آثار متقابل «شانس» و «تقارن» است. یک زمینهٔ تحقیقاتی که در حال حاضر نظر بسیاری از محققین را به خود جلب کرده است، نظریهٔ ماتریس‌های تصادفی است [۵]. بخشی از این علاقه، به دلیل ارتباط‌های پیچیده و اسرارآمیز بین رفتار مجانبی ماتریس‌های به طور یکنواخت توزیع‌شده در گروه یکانی $U(n)$ و صفرهای تابع زتای ریمان است. مروری بر قدم‌زدن تصادفی و پخش‌های ناوردا در گروه‌ها، با تأکید خاص بر رابطه بین رفتار مجانبی فرایند و رشد حجم گروه را می‌توان در [۱۰] یافت. فرایند لوی روی یک گروه توپولوژیک G، کاملاً مشابه با حالت اقلیدسی تعریف می‌شود، اما «نمو» به‌جای $X(t) - X(s)$ در اینجا $X(s)^{-1}X(t)$ است (که در آن عمل گروه را به صورت ضربی نوشته‌ایم). نقش مبدأ $\mathbb{R}^d$ را نیز در اینجا عضو خنثای گروه، که آن را با e نمایش می‌دهیم، بازی می‌کند. اگر p_t قانون احتمال $X(t)$ باشد، مجموعهٔ $\{p_t : t \geq 0\}$ یک نیم گروه پیچشی به‌طورضعیف پیوسته از اندازه‌های احتمال روی G است. پس به خصوص

$$p_{s+t}(A) = \int_G p_t(\tau^{-1}A)\, p_s(d\tau).$$

---

1) R. Carmona 2) W. C. Masters 3) B. Simon

سه حالت جالب در این مبحث عبارتند از: گروه‌های آبلی به‌طورموضعی فشرده (گروه‌های LCA)، گروه‌های لی و گروه‌های به‌طورموضعی فشردهٔ کلی. حالت گروه‌های آبلی به‌طورموضعی فشرده در سال‌های دههٔ ۱۹۶۰ به‌طورگسترده بررسی گردید. این واقعیت که گروه دوگان $\hat{G}$ خود یک گروه آبلی به‌طور موضعی فشرده است، امکان تعمیمی طبیعی برای تبدیل فوریه را از $\mathbb{R}^d$ به G فراهم می‌آورد که براساس آن می‌توان فرمول لوی ــ خینچین را مشابه با حالت اقلیدسی به دست آورد. در اینجا بیش از این به این مطلب نخواهیم پرداخت و خوانندگان علاقه‌مند را به بخش ۵.۶ در [۶] ارجاع می‌دهیم. درحالتی که G یک گروه لی است مطالعات گسترده‌ای انجام شده است. اگر G غیرآبلی باشد، مشابه مستقیمی برای تبدیل فوریه در دست نیست و رویارویی با این مسأله و تلاش برای حل آن با استفاده از ابزارهای نظریه‌ی نیم‌گروه‌ها، آنالیز تصادفی، نمایش گروه‌ها و آنالیز هارمونیک ناجابجایی یکی از جنبه‌های شادی‌بخش کار در این زمینه است. اولین گام مهم در این زمینه توسط هانت[۱] در ۱۹۵۶ برداشته شد. او فرایندهای لوی را روی گروه‌های لی با تعمیم فرمول (۵.۴) توصیف کرد. به‌طور دقیق‌تر، فرض کنید $X = \{X(t) : t \geq ۰\}$ یک فرایند لوی روی گروه لی d بعدی G، و p_t قانون احتمال $X(t)$ باشد. با تعریف عملگرهای T_t به صورت:

$$(T_t f)(\tau) = \mathbb{E}(f(\tau X(t))) = \int_G f(\tau\sigma)\, p_t(d\sigma)$$

یک نیم‌گروه انقباضی به‌طور قوی پیوستهٔ یک پارامتری $\{T_t : t \geq ۰\}$ به‌دست می‌آوریم. توجه کنید که T_t با عملگر انتقال از چپ جابجا می‌شود. حال فرض کنید $\{Y_۱, \ldots, Y_d\}$ پایه‌ای تثبیت شده برای جبر لی $\mathfrak{g}$ متشکل از میدان‌های برداری ناوردا از چپ روی G باشد. خمینه خطی $C_۲(G)$ که به صورت

$$C_۲(G) := \{\ f \in C_۰(G) : Y_i f \in C_۰(G)\ \&\ Y_i Y_j f \in C_۰(G)\ ,\ ۱ \leq i, j \leq d\ \}$$

تعریف می‌شود در $C_۰(G)$ چگال است. هانت نشان داد توابع $\chi_i \in C_۲(G),\ i = ۱, \ldots, n$ وجود دارند به طوری که $(\chi_۱, \ldots, \chi_n)$ یک دستگاه مختصاتی کانونیک برای G با مبدأ e است. اندازهٔ لوی ν، یک اندازهٔ برل روی $G - \{e\}$ با ویژگی زیر است:

$$\int_{G-\{e\}} \left[\left(\sum_{i=۱}^{d} \chi_i(\sigma)^۲ \right) \wedge ۱ \right] \nu(d\sigma) < \infty.$$

هانت توانست نتیجهٔ کلیدی زیر را به‌دست آورد:

قضیهٔ ۲. **(قضیهٔ هانت.)** اگر X یک فرایند لوی در G با مولد بینهایت کوچک A باشد، آنگاه:

[۱] $C_۲(G) \subseteq \mathrm{Dom}(A)$

[۲] بردار $b = (b_۱, b_۲, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$، ماتریس $n \times n$ حقیقی متقارن نامنفی معین $a = (a_{ij})$، و اندازهٔ لوی ν روی $G - \{e\}$ وجود دارند به طوری که برای هر $\tau \in G$ و هر $f \in C_۲(G)$

1) G. A. Hunt

$$(Af)(\tau) = \sum_{i=1}^{d} b_i\, Y_i f(\tau) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} a_{ij}\, Y_i Y_j f(\tau)$$
$$+ \int_{G-\{e\}} \left[f(\tau\sigma) - f(\tau) - \sum_{i=1}^{d} \chi_i(\sigma)\, Y_i f(\tau) \right] \nu(d\sigma).$$

برعکس، هر عملگر خطی که مولد بینهایت کوچک آن به صورت بالا باشد، تحدید مولد بینهایت کوچک یک فرایند لوی به $C_2(G)$ است.

همانند حالت اقلیدسی، سه‌تایی مشخصهٔ (b, a, ν) برای یک فرایند لوی، قانون احتمال آن را به طور کامل تعیین می‌کند.

در دههٔ ۱۹۹۰، کونیتا[1] و نگارندهٔ این مقاله موفق شدند تجزیهٔ لوی ـ ایتو را تا حدی بسط دهند که برای هر $f \in C_2(G)$، فرایند حقیقی ـ مقدار $f(X) = \{f(X(t)) : t \geq 0\}$ را (با استفاده از انتگرال‌های تصادفی ایتو) بر حسب یک حرکت براونی روی $\mathbb{R}^d$ و یک اندازه‌ی تصادفی پواسن روی $\mathbb{R}^+ \times (G - \{e\})$ توصیف کنند. حال مثال‌هایی را از فرایندهای لوی روی یک گروه لی G ارائه می‌دهیم:

۱. حرکت براونی در G

این یک فرایند لوی با سه تایی مشخصهٔ $(0, I, 0)$ است. مسیرهای نمونه‌ای آن با احتمال یک پیوسته هستند و مولد آن یک دوم لاپلاسین ناوردا از چپ $\Delta_G = \sum_{i=1}^{d} Y_i^2$ روی G است. در اینجا وابستگی به پایه مسأله‌ساز است. می‌توان با مجهز ساختن G به یک متریک ریمانی m که $(Y_1, \ldots, Y_n)$ نسبت به آن متعامد یکه باشد، این مشکل را برطرف ساخت. به این ترتیب Δ_G عملگر لاپلاس ـ بلترامی متناظر با (G, m) و حرکت براونی متناظر دارای ماهیتی هندسی خواهد بود. در واقع این فرایند در سال‌های اخیر نقشی اساسی در گسترش تحلیل‌های فضاهای مسیری و حلقوی ایفا کرده است.

۲. فرایند پواسن مرکب

فرض کنید $\{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$ دنباله‌ای G ـ مقدار از متغیرهای تصادفی .i.i.d، با قانون احتمال یکسان μ و $\{N(t) : t \geq 0\}$ یک فرایند پواسن مستقل از دنبالهٔ فوق با پارامتر $\lambda > 0$ باشد. فرایند پواسن مرکب را در G به صورت زیر تعریف می‌کنیم: مولد این فرایند، عملگری کراندار و برای هر $f \in C_0(G)$ به صورت

$$(Af)(\tau) = \int_G (\, f(\tau\sigma) - f(\tau)\,)\, \nu(d\sigma)$$

است، که در آن اندازهٔ لوی $\nu(\cdot) = \lambda\, \mu(\cdot)$ متناهی است.

---

1) H. Kunita

۳. فرایندهای پایدار

نظریهٔ فرایندهای پایدار در گروه‌های لی در دههٔ ۱۹۹۰ توسط کونیتا ارائه شد. رویکرد او، تعمیم ویژگی خود ـ خودسانی بود و برای انجام این کار او نیاز به تعریفی برای

$$Y(t) := \gamma_1 \ \gamma_2 \ \cdots \ \gamma_{N(t)}.$$

تغییرمقیاس داشت و این مقصود را هم با تعریف یک انبساط (dilation) تأمین نمود، یعنی خانواده‌ای از خودریختی‌ها مانند $\delta = \{\delta(r) : r > 0\}$ با ویژگی $\delta(r)\ \delta(s) = \delta(rs)$ برای هر $r, s > 0$ که به‌علاوه شرایط پیوستگی مناسبی را نیز دارا است. فرایند لوی X در G نسبت به انبساط δ پایدار است اگر برای هر $r, s > 0$، متغیرهای تصادفی $\delta(r)X(s)$ و $X(rs)$ دارای توزیع احتمال یکسان باشند. انبساط‌ها (و در نتیجه فرایندهای لوی پایدار) تنها می‌توانند روی گروه‌های پوچ توان همبند ساده وجود داشته باشند. فرایندهای پایدار روی چنین گروه‌هایی دارای ویژگی‌های اعجاب انگیزی هستند؛ به عنوان نمونه کونیتا نشان داده است که انبساطی وجود ندارد که نسبت به آن حرکت براونی روی گروه هایزنبرگ پایدار باشد. با این حال می‌توان روی گروه هایزنبرگ یک فرایند پایدار ساخت که دو مؤلفه‌ی اول آن حرکت براونی و مؤلفه‌ی سوم آن یک فرایند کوشی باشند.

۴. فرایندهای تبعی

فرض کنید $Y = \{Y(t) : t \geq 0\}$ و $T = \{T(t) : t \geq 0\}$ به‌ترتیب یک فرایند لوی روی G و یک فرایند تبعی مستقل از Y باشند. کاملاً شبیه به حالت اقلیدسی می‌توانیم فرایند لوی جدید $Z = \{Z(t) : t \geq 0\}$ را به‌صورت $Z(t) := Y(T(t))$ برای هر $t \geq 0$ تعریف کنیم.

موضوع فرایندهای لوی در گروه‌های لی در حال حاضر به شدت در حال گسترش است. دراین‌باره می‌توانید به مقالهٔ مروری نگارنده در [۲] و کتاب اخیر لیائو[1] [۸] رجوع کنید. مرجع دوم شامل مطالب جالب بسیاری در مورد رفتار مجانبی ($t \to \infty$) فرایندهای لوی روی گروه‌های لی نیم‌سادهٔ غیر فشرده است. لیائو همچنین رده‌ای از فرایندهای لوی روی گروه‌های لوی فشرده را یافته است که دارای L^2 ـ چگالی هستند. این چگالی بنابر قضیه‌ی پیتر ـ وایل[2] دارای بسط فوریهٔ ناجابجایی است. در حالت خاص حرکت براونی روی گروه $SU(2)$، لیائو فرمول زیبای زیر را برای ρ_t، چگالی در زمان t، به‌دست آورده است:

$$\rho_t(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n \ \exp\left(-\frac{(n^2-1)t}{64\pi^2}\right) \ \frac{\sin(2n\pi\theta)}{\sin(2\pi\theta)}$$

که در آن $\theta \in [0, 1)$ پرمایش چنبرهٔ ماکسیمال $\{\ \mathrm{diag}\left(e^{i2\pi\theta}, e^{-i2\pi\theta}\right) : \theta \in [0, 1)\ \}$ است. زمینهٔ مهم دیگری که آغازگر آن گنگولی[3] در دههٔ ۱۹۶۰ بود، مطالعهٔ فرایندهای لوی متقارن کروی روی گروه‌های لی G نیم ساده G (گروه‌هایی که قوانین احتمال آنها تحت عمل یک زیر گروه

1) M. Liao 2) Peter-Weyl 3) R. Gangolli

فشردهٔ ثابت K ناوردای دوگانه است) می‌باشد. با استفاده از نظریهٔ توابع کروی هریش ـ چاندرا[۱]، می‌توان نوعی آنالیز فوریه وضع کرد و مشابهی برای فرمول لوی ـ خینچین به دست آورد. یکی از دلایل جالب بودن این کار این است که گروه خارج قسمتی G/K یک فضای ریمانی به طور سراسری متقارن است و به‌علاوه همهٔ فضاهای از این دست را می‌توان به این صورت به‌دست آورد. هر فرایند لوی در G به یک فرایند لوی در G/K تصویر می‌شود، و این در واقع انگیزهٔ اولیهٔ شروع ساخت فرایندهای لوی روی خمینه‌های ریمانی کلی‌تر است.

قبل از به پایان بردن بحث فرایندهای لوی در گروه‌ها، به اختصار دربارهٔ حالت کلی‌تر مربوط به گروه‌های به‌طور موضعی فشرده بحث می‌کنیم. کار روی مسئلهٔ پنجم هیلبرت در دههٔ ۱۹۵۰ نشان داد که هر گروه به‌طور موضعی فشرده دارای زیر گروه بازی از همانی است که حد افکنشی گروه‌های لی است. این مطلب به‌کارگیری روش‌های مبتنی بر گروه‌های لی را در حالات کلی‌تر امکان‌پذیر می‌سازد، و از دههٔ ۱۹۷۰ به این طرف، کارهای زیادی در این زمینه توسط هیر[۲]، هازود[۳]، سیبرت[۴]، و دانشجویانشان در آلمان انجام شده است ([6]). اخیراً بندیکوف[۵] و سالوف ـ کاسته[۶] از دانشگاه کرنل ویژگی‌های مسیرهای حرکت براونی در گروه‌های به‌طور موضعی فشردهٔ کلی را بررسی کرده‌اند. جالب است بررسی شود که آیا روش‌های جدیدی را که آنها ابداع کرده‌اند، می‌توان روی رده‌های کلی‌تر فرایندهای لوی نیز اعمال کرد یا خیر.

فرایندهای لوی در گروه‌های کوانتمی

از طریق کارهای فیزیکدانانی چون نیلز بور، ماکس بورن، و ورنر هایزنبرگ، و صورت‌بندی ریاضی این کارها توسط جان فون نویمان، به درک دو گانه‌ای از مکانیک کوانتمی رسیده‌ایم. از یک طرف، کمیت‌های فیزیکی قابل مشاهده مانند مکان، تکانه، انرژی و اسپین، باید توسط عملگرهای خطی خود الحاق (نه لزوماً کران‌دار) روی یک فضای هیلبرت مختلط توصیف شوند. از طرف دیگر، همین کمیات قابل مشاهده کمیت‌های تصادفی هستند که ویژگی‌های آماری آنها توسط یک بردار واحد در فضای هیلبرت (برای حالت‌های خالص) یا یک ماتریس چگالی کلی تر (برای حالت‌های آمیخته) تعیین می‌شوند. با این حال، بنابر اصل معروف عدم قطعیت هایزنبرگ، جفت‌هایی از این عملگرها، مانند آنهایی که مکان و تکانه را توصیف می‌کنند، جابجایی‌پذیر نیستند. در نتیجه آن طور که کلموگورف می‌گوید نمی‌توان هردوی آنها را با هم به صورت توابع اندازه پذیر روی یک فضای احتمال توصیف کرد و در نتیجه نمی‌توانند توزیع احتمال توأم داشته باشند. برای آن که بتوانیم ویژگی‌های احتمالاتی پدیده‌های مکانیک کوانتمی را به‌صورتی سازمان یافته توصیف کنیم، باید دیدگاهی جبری داشته باشیم. یک فضای احتمال کوانتمی را به صورت یک زوج مرتب (B,ω)

1) Harish-Chandra 2) H. Heyer 3) W. Hazod 4) E. Siebert 5) A. Bendikov
6) L. Saloff-Coste

تعریف می‌کنیم که در آن B یک $*$ ـ جبر مختلط (با عضو همانی I) و ω یک حالت روی B است؛ به عبارت دیگر یک نگاشت خطی مثبت روی B با ویژگی $\omega(I) = ۱$. اگر B یک C^* ـ جبر باشد، با استفاده از نمایش گلفاند ـ نیمارک ـ سگال [۱] می‌توانیم نگرش فضای هیلبرتی را دوباره زنده کنیم.

فرایندهای تصادفی کوانتمی را آکاردی[۲]، فریجریو[۳]، و لویس[۴] در دههٔ ۱۹۸۰ معرفی کردند. هر فرایند تصادفی «کلاسیک» $\{X(t) : t \geq ۰\}$ با فضای حالت E خانواده‌ای از $*$ ـ همریختی‌های $\{j_t : t \geq ۰\}$ را از $*$ ــ جبر $B_b(E)$ مرکب از توابع اندازه‌پذیر کران‌دار روی E به $*$ ــ جبر $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ با تعریف $j_t(f) = f \circ X(t)$ ایجاد می‌کند.

اگر یک فضای احتمال کوانتمی (B, ω) و یک $*$ ـ جبر A داده شده باشند، آن‌گاه یک فرایند تصادفی کوانتمی خانواده‌ای از $*$ ـ همریختی‌ها از A به B است. هودسون[۵] و پارتاساراتی[۶] مثال‌های ملموس بسیاری از این فرایندها را با استفاده از حسابان تصادفی کوانتمی ساخته‌اند که این‌ها جواب‌های معادلات دیفرانسیل تصادفی عملگر ـ مقدار ناشی از نوفه‌های کوانتمی هستند. برای مثال فرایندهای ابداع[۷]، ابقاء[۸]، و امحاء[۹] که در یک فضای فوک[۱۰] مناسب عمل کنند از این نوع هستند.

برای روشن ساختن این مثال، کمی از مطلب اصلی دور می‌شویم. فضای فوک $\Gamma(H)$ روی یک فضای هیلبرت مختلط به صورت $\Gamma(\mathbf{h}) := \bigoplus_{n=۰}^{\infty} \mathbf{h}^{(n)}$ تعریف می شود، که در آن $\mathbf{h}^{(۰)} := \mathbb{C}$، $\mathbf{h}^{(۱)} := \mathbf{h}$، و $\mathbf{h}^{(n)}$ برای $n \geq ۲$ ضرب تانسوری n نسخه از $\mathbf{h}$ است. غالباً بهتر است که خود را به فضای فوک بوزونی (متقارن) یا فضای فوک فرمیونی (پاد متقارن) محدود کنیم که به ترتیب زیرفضاهای بستهٔ به‌دست آمده از تحدید به تانسورهای متقارن و پاد متقارن هستند. برای هر $f \in \mathbf{h}$، عملگرابداع $a^\dagger(f)$ هر فضای $\mathbf{h}^{(n)}$ را به $\mathbf{h}^{(n+۱)}$ تصویر می‌کند، در حالی که عملگر امحاء $a(f)$ هر فضای $\mathbf{h}^{(n)}$ را به $\mathbf{h}^{(n-۱)}$ تصویر می‌کند. برای هر عملگر خود الحاق T روی $\mathbf{h}$، عملگر ابقاء $d\Gamma(T)$ فضای $\mathbf{h}^{(n)}$ را به خودش تصویر می‌کند. عملگرهای ابداع، ابقاء، و امحاء هر سه عملگرهای خطی با دامنه‌ی چگال در $\Gamma(H)$ هستند (برای دیدن تعاریف دقیق آنها می توانید برای مثال به [۹] مراجعه کنید). یکی از دست‌آوردهای جانبی کار روی نمایش‌های خارج قسمت‌پذیر این گروه‌ها در دهه‌های ۱۹۶۰ و ۱۹۷۰ آن بود که هر فرایند لوی $X = \{X(t) : t \geq ۰\}$ روی $\mathbb{R}^d$ را می‌توان به چشم خانواده‌ای از عملگرهای خود الحاق روی یک فضای فوک متقارن نگریست، و تجزیه‌ی لوی ـ ایتوی فرایند به صورت ترکیبی از عملگرهای ابداع، ابقاء، و امحاء ظاهر خواهد شد. در دهه ۱۹۸۰ هودسون و پارتاساراتی پی بردند که می‌توان رده‌های جالبی از فرایندهای تصادفی کوانتمی را با ارائهٔ نوعی آنالیز تصادفی ساخت به طوری که در آن هر یک از بخش‌های ابداع، ابقاء، و امحاء به‌جای این که تنها در یک ترکیب خود الحاق «کلاسیک» خاص ظاهر شوند،

---

1) Gelfand-Naimark-Segal 2) L. Accardi 3) A. Frigerio 4) J. T. Lewis 5) R. I. Hudson
6) K. R. Parthasarathy 7) creation 8) conservation 9) annihilation 10) Fock

به صورت فرایندهای عملگر ـ مقدار مجزا در نظر گرفته می‌شوند. حال می‌توانیم بکوشیم «فرایند لوی کوانتمی» را تعریف کنیم. در نگاه اول این فرایند باید یک فرایند تصادفی کوانتمی $\{j_t : t > \circ\}$ باشد که در آن هر j_t در تناظر با $k_{\circ,t}$، در یک خانواده‌ی دو پارامتری از * ـ همریختی‌های $\{ k_{s,t} : \circ \leq s \leq t < \infty \}$ که «نموهای» فرایند هستند، نشانده می‌شود. ویژگی ایستایی نموها به این ترتیب تعمیم می‌یابد که برای هر $a \in A$ داشته باشیم $\omega(k_{s,t}(a)) = \omega(k_{\circ,t-s}(a))$. تعمیم ویژگی استقلال نموها را به صورت‌های گوناگون بر اساس مفاهیم جبری استقلال می‌توان انجام داد، و هر کدام از آن‌ها به تعریفی متمایز برای فرایند لوی کوانتمی می‌انجامد. ساده‌ترین تعمیم ویژگی نموهای مستقل، که استقلال تانسوری (یا استقلال بوزونی) نامیده می‌شود از این قرار است که برای هر $n \in \mathbb{N}$، هر $a_\text{۱}, \ldots, a_n \in A$، و هر دنباله‌ی $\circ \leq s_\text{۱} \leq t_\text{۱} \leq s_\text{۲} \leq t_\text{۲} \ldots \leq s_n \leq t_n < \infty$ طوری که برای هر i, j عملگرهای $k_{s_i,t_i}(a)$ و $k_{s_j,t_j}(a)$ جابجایی‌پذیر باشند، داشته باشیم:

$$\omega\left(k_{s_\text{۱},t_\text{۱}}(a_\text{۱})k_{s_\text{۲},t_\text{۲}}(a_\text{۲}) \cdots k_{s_n,t_n}(a_n)\right) = \prod_{i=\text{۱}}^{n} \omega\left(k_{s_i,t_i}(a_i).\right)$$

بعضی دیگر از تعریف‌های استقلال، عبارت‌اند از استقلال فرمیونی (یا درجه‌بندی شده با $\mathbf{Z}_\text{۲}$) و استقلال آزاد که آن را وویکولسکیو[1] ارائه داده است. سایر ویژگی‌های فرایندهای کلاسیک لوی را به راحتی می‌توان به زبان این چارچوب جدید ترجمه کرد. با این حال، آنچه در اینجا به‌دست آورده‌ایم بیش از حد کلی است و مشخص نیست چگونه به $k_{s,t}$ها مفهوم «نمو» اطلاق می‌شود.

برای رفع این مشکل لازم است مفهوم گروه را از دیدگاه جبری تعمیم دهیم و این دقیقاً هدف نظریه‌ی گروه‌های کوانتمی است. به عبارت دقیق‌تر، لازم است A یک * ـ جبر دوگانه باشد یعنی * ـ جبری که در آن طوری برای عمل گروه و عضو واحد دوگان تعریف شود که یک ساختار جبری سازگار را فراهم آورد. بنابراین در اینجا وجود دو * ـ همریختی لازم است، یکی عمل هم ـ ضرب $\Delta : A \to A \otimes A$، و دیگری هم ـ واحد گروه $\epsilon : A \to \mathbb{C}$ که در اصل‌های هم ـ شرکت پذیری و هم ـ واحدی زیر صدق می‌کنند:

$$(id \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes id) \circ \Delta \qquad\qquad (id \otimes \epsilon) \circ \Delta = (\epsilon \otimes id) \circ \Delta$$

که در آن id نگاشت همانی است.

اگر A یک * ـ جبر دوگانه باشد، با اضافه‌کردن اصل زیر به تعمیم‌های بالا، یک فرایند لوی کوانتمی روی A به‌دست می آید:

برای هر $\circ \leq r \leq s \leq t < \infty$: $\quad k_{r,s} * k_{s,t} = k_{r,t}$

که در آن عمل پیچش به صورت

$$k_{r,s} * k_{s,t} = m_B \circ (k_{r,s} \otimes k_{s,t}) \circ \Delta$$

تعریف می‌شود و m_B عمل ضرب در B را نشان می‌دهد.

1) D. Voiculescu

برای درک معنای این اصل در ساده‌ترین حالت ممکن، فرض کنید X یک فرایند لوی روی گروه متناهی G باشد و فرض کنید A، * ـ جبر دوگانه‌ی مرکب از همه‌ی توابع مختلط ـ مقدار روی G همراه با اعمال متداول جبری نقطه به نقطه و هم ـ ضرب $(\Delta f)(\sigma_1, \sigma_2) = f(\sigma_1 \sigma_2)$ و هم ـ واحد $\epsilon(f) = f(e)$ باشد. با انتخاب $B = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ و $k_{s,t} f = f \circ X(s)^{-1} X(t)$، ویژگی $k_{r,s} * k_{s,t} = k_{r,t}$ دقیقاً «ویژگی نموی» $X(r)^{-1} X(t) = X(s)^{-1} X(t)$ $X(r)^{-1} X(s)$ را توصیف می‌کند.

فرایندهای لوی کوانتمی اولین بار در کارهای والدنفلز[1] روی مدل‌سازی انتشار و جذب نور توسط اتم‌هایی که با نوفه اندرکنش دارند، ظاهر شد. به نظر می‌رسید فرایند لوی کوانتمی که به این ترتیب به‌دست آمده بود، مشابه ناجابجایی یک فرایند لوی روی گروه یکانی $U(d)$ باشد. این مطلب از طریق جایگزینی $U(d)$ با یک * ـ جبر دوگانه‌ی ناجابجایی که جبر ضریبی $U(d)$ را تعمیم می‌دهد، دقیق گردید. نظریه‌ی فرایندهای لوی کوانتمی را شورمن[2] و فرانتز[3] در سطح وسیعی در آلمان گسترش داده‌اند (به مرجع [۱۳] یا فصل ۷ مرجع [۹] مراجعه کنید). به ویژه نشان داده شده است که همه‌ی فرایندهای لوی کوانتمی جواب‌های معادلات دیفرانسیل تصادفی کوانتمی هستند که از فرایندهای ابداع، ابقاء، و امحاء روی فضاهای فوک مناسب ناشی می‌شوند.

در اینجا به‌اختصار یک کاربرد جالب فرایندهای لوی کوانتمی را در نظریه‌ی احتمال کلاسیک شرح می‌دهیم. فرض کنید $B = \{B(t) : t \geq 0\}$ یک حرکت براونی یک بعدی باشد و $g(t) = \sup\{s \in [0, t] : B(s) = 0\}$. مارتینگل آزیما[4] $M = \{M(t) : t \geq 0\}$ که به صورت

$$M(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ \mathrm{sign}(B(t))\ \sqrt{t - g(t)}$$

تعریف می‌شود نسبت به پالایش $\mathcal{F}_t = \sigma\{M(s) : 0 \leq s \leq t\}$ یک مارتینگل‌است. این فرایند دارای ویژگی‌های عجیب بسیاری است. برای مثال امری[5] نشان داده است که این فرایند مانند حرکت براونی و فرایند پواسن مرکب دارای ویژگی نادر «آشوبی ـ کامل»[6] است؛ به این معنا که پیمای خطی همه‌ی انتگرال‌های چندگانهٔ وینر در فضای طبیعی L^2 چگال است. هر چند M یک فرایند لوی به مفهوم عادی روی $\mathbb{R}$ نیست، با این حال شورمن نشان داده است که M یک فرایند لوی کوانتمی روی یک * ـ جبر دوگانه است.

سخن پایانی

یکی از راه‌های سنجش میزان پویایی یک شاخه از ریاضیات این است که ببینیم تا چه اندازه در شاخه‌های دیگر نفوذ دارد و اثرگذار است. راه دیگر، بررسی کاربردهای آن است. از هر دو دید که بنگریم، به نظر می‌رسد نظریهٔ فرایندهای لوی در حال گسترش و شکوفایی است. در واقع

1) W. von Waldenfels 2) M. Schürmann 3) U. Franz 4) Azema 5) M. Emery
6) chaotically complete

محدودیت تعداد صفحات در این مقاله، اجازه صحبت دربارهٔ بسیاری از موضوعات دیگر را نداده است؛ از جمله پیشرفت‌های نظری جدید در زمینهٔ نوسان‌ها و تغییرات فرایندهای لوی حقیقی ــ مقدار منسوب به برتوین[۳] و دونی[۴] و همچنین کاربرد در نظریهٔ تلاطم، سری‌های زمانی، و رمزنگاری فرایندهای شاخه‌ای. نگارنده از خوانندگان دعوت می‌کند با او دراین مطلب هم‌عقیده شوند که اندرکنش حرکت پیوستهٔ گاوسی و پرش‌های پواسنی، یا ظهور جنبه‌های نظری کوانتمی آن از طریق عملگرهای ابداع، ابقاء، و امحاء یک ویژگی عمومی رده‌ای از حرکت‌های تصادفی (کلاسیک و کوانتمی) است، دامنهٔ آن آنقدر وسیع است که ریاضی‌دانان را تا سالها مشغول نگاه دارد.

قدردانی

مترجم از دست اندرکاران فرهنگ و اندیشه ریاضی برای دعوت به انجام این ترجمه، از آقای دکتر جهانی‌پور برای ویرایش نهایی (از جمله انتخاب معادل‌های کلمات creation، conservation، و annihilation)، و از خانم هانیه حسینی و خانم هما کبیری دانشجویان دانشگاه صنعتی شریف برای کمک‌های ارزنده‌ی ایشان در ویرایش اولیهٔ این ترجمه سپاس‌گزار است.

مراجع

[1] D. Applebaum, *Lévy Processes and Stochastic Calculus*, Cambridge University Press, 2004.

[2] O. E. Barndorff-Nielsen, T. Mikosch, and S. Resnick (Eds.), *Lévy Processes, Theory and Applications*, Birkhäuser, Basel(2001)

[3] J. Bertoin, *Lévy Processes*, Cambridge University Press, 1996.

[4] R. Cont, and P. Tankov, *Financial Modeling With Jump Processes*, Chapman and Hall/CRC, (2004).

[5] P. Diaconis, Patterns in eigenvalues, The 70th Josiah Willard Gibbs Lecture, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **40** (2003), 155-179.

[6] H. Heyer, *Probability Measures on Locally Compact Groups*, Springer-Verlag, 1977.

[7] N. Jacob, *Pseudo-Differential Operators and Markov Processes: 1. Fourier Analysis and Semigroups*, World Scientific (2001); *2. Generators and Their Potential Theory*, World Scientific (2002).

1) J. Bertoin 2) R. A. Doney

[8] M. Liao, *Lévy Processes in Lie Groups*, Cambridge University Press, 2004.

[9] P.-A. Meyer, *Quantum Probability for Probabilists*, Second Edition, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1538, Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg., 1995.

[10] L. Saloff-Coste, Probability on groups: random walks and invariant diffusions, *Notices Amer. Math. Soc.*, **48** (2001), 968-977.

[11] K.-I. Sato, *Lévy Processes and Infinite Divisibility*, Cambridge University Press, 1999.

[12] W. Schoutens, *Lévy Processes in Finance: Pricing Financial Derivatives*, Wiley, 2003.

[13] M. Schürmann, *White Noise on Bialgebras*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1544, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1991.

مترجم: حسن نجومی
دانشگاه صنعتی شریف، دانشکدهٔ علوم ریاضی
پست الکترونیک nojumi@sina.sharif.edu

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۴ (بهار ۱۳۸۴) صص. ۲۷ تا ۴۱

۲۳ مسألهٔ هیلبرت و نگاهی به مسألهٔ شانزدهم آن

حمیدرضا ظهوری زنگنه و رسول عاشقی

چکیده

هیلبرت در دومین کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان در پاریس در ۱۹۰۰ میلادی، ۲۳ مسأله را به عنوان مسائل ریاضی قرن بیستم معرفی کرد، مسایلی که ریاضیات قرن بیستم را کاملاً تحت تأثیر قرار داد. این مسائل در چهار دستهٔ کلی قرار داشتند. گروه اول شامل شش مسأله بنیادی بود که با استفاده از تحلیل اعداد حقیقی با استفاده از نظریهٔ کانتوری مجموعه‌ها خواستار ارائهٔ یک چهارچوب اصول موضوعی برای حساب و فیزیک بود. شش تای بعدی بر گرفته از مطالعهٔ وی از نظریهٔ جبری اعداد و قضیهٔ کرونکر و سومین مجموعهٔ شش تایی مخلوطی از مسائل جبری و هندسی بود که موضوعات بسیار متنوعی را پوشش می‌داد. گروه آخری پنج مسأله از معادلات با مشتقات جزیی و حساب تغییرات را در بر میگرفت. اکثر این مسائل یک برنامهٔ وسیع تحقیقات ریاضی را شامل می‌شدند. برخی از آنها هنوز جواب مناسب خود را نگرفته‌اند و برخی دیگر در چهارچوب مطرح شده نادرست بودند و نیاز به فرمول‌بندی جدیدی داشتند. یکی از مسائل حل نشده در این لیست مسألهٔ شانزدهم بود که علیرغم گذشت بیش از یکصد و شش سال از طرح مسأله و چاپ صدها و بلکه هزاران مقاله هنوز جواب کامل و قانع کننده‌ای برای آن ارائه نشده است. در این مقاله ضمن مروری بر گذشته و حال مسائل هیلبرت به بررسی پیشرفت‌های صورت گرفته در جهت حل قسمت دوم مسأله شانزدهم می‌پردازیم.

لغات کلیدی: مسائل هیلبرت، مسألهٔ شانزدهم هیلبرت، سیکل‌های حدی، نظریهٔ انشعاب.

۱. مسائل هیلبرت

در سال ۱۹۰۰ میلادی دیوید هیلبرت (۱۸۶۲م–۱۹۴۳م) در دومین کنگره بین‌المللی ریاضیدانان در پاریس در یک سخنرانی از مسائل ریاضیات سخن گفت به طوری که هرمن ویل[1] دربارهٔ آن مسائل چنین گفت: «هر کس این مسائل را حل کند به کلاس افتخاری ریاضیدانان وارد می‌شود». در ۱۹۰۰ میلادی هیلبرت به یک ریاضیدان برجسته در آلمان تبدیل شد. او به خاطر حل مسائل اساسی در نظریهٔ پایایی و برای گزارش مهم در نظریهٔ اعداد که در ۱۸۹۶ میلادی به چاپ رسید مشهور شد. در ۱۸۹۹ میلادی به در خواست کلاین[2] او کتاب مبانی هندسه را برای تجلیل از مقام گاوس[3] و وبر[4] در گوتینگن به چاپ رساند. هرویتز[5] در نامه‌ای به هیلبرت دربارهٔ این کتاب نوشت «شما با نوشتن این کتاب کوچک زمینهٔ شگرفی از تحقیقات را باز کردی که می‌توان آنرا ریاضیات اصل موضوعه نامید که بسیار فراتر از قلمرو هندسه است. با توجه به موقعیت کسب شده در جامعهٔ ریاضی، هیلبرت پس از مشورت با هرویتز و دوستش مینکوسکی[6] برای ارائهٔ سخنرانی در دومین کنگرهٔ ریاضیدانان مصمم شد. هیلبرت سخنرانی خود را چنین آغاز کرد[۱۵]: «چه کسی از پرتو انداختن به پیشرفت‌های آتی علم و رازهای توسعهٔ آن در قرون آینده و کشف حجابی که آینده را پشت خود پنهان کرده خوشحال نخواهد شد؟ چه اهداف خاصی ذهن و روح ریاضیدانان در قرون آینده را به خود مشغول خواهد کرد و چه قضایا و روش‌های تازه‌ای در زمینهٔ وسیع ریاضیات در قرن آینده ابداع خواهد شد؟»

او در ادامهٔ سخنرانی خود برای نشان دادن اهمیت مسائل در پیشبرد ریاضیات گفت:

«هر شاخه از علم تا زمانی زنده است که انبوهی از مسائل را ارائه دهد. کمبود مسأله در یک رشته نابودی قریب‌الوقوع یا تسلیم آن در برابر یک شاخه مستقل را نتیجه می‌دهد. درست همانطور که هر کوشش انسانی اهداف مشخصی را دنبال می‌کند، تحقیقات ریاضی نیز به مسأله نیازمند است. محقق با حل مسائل، وسعت و عمق نظریه‌های علمی‌اش را آزمایش می‌کند و با ابداع روش‌های جدید به دیدگاه خود عمق و وسعت می‌بخشد.»

عناوین مسائل هیلبرت به شرح ذیل هستند:

مسألهٔ ۱. مسألهٔ کانتور برای عدد کاردینال پیوستار

مسألهٔ ۲. سازگاری اصول موضوعهٔ حساب

مسألهٔ ۳. تساوی حجم دو چند وجهی با مساحت قاعده و ارتفاع برابر

مسألهٔ ۴. مسألهٔ خط مستقیم با کوتاهترین فاصله بین دو نقطه

مسألهٔ ۵. مفهوم لی[7] از گروه‌های پیوسته از تبدیلات، بدون فرض مشتق پذیری توابع تعریف کنندهٔ گروه‌ها

---

1) Herman Weyl 2) Klein 3) Gauss 4) Weber 5) Hurwitz 6) Minkowski 7) Lie

مسألهٔ ۶. ارائهٔ ساختار اصل موضوعی ریاضی برای فیزیک

مسألهٔ ۷. گنگ و متعالی بودن اعدادی معین

مسألهٔ ۸. مسألهٔ اعداد اول، توزیع اعداد اول و فرضیهٔ ریمان[1]

مسألهٔ ۹. اثبات کلی‌ترین اصل تقابل در هر میدان

مسألهٔ ۱۰. آیا یک الگوریتم برای تعیین حل‌پذیری معادلات دیوفانتی وجود دارد.

مسألهٔ ۱۱. ارائهٔ یک نظریه برای فرم‌های درجه دوم با ضرایب عددی جبری

مسألهٔ ۱۲. تعمیم قضیهٔ کرونکر برای میدان‌های آبلی به هر ساختار جبری گویا

مسألهٔ ۱۳. ناممکن بودن حل معادلات کلی درجهٔ ۷ توسط توابعی تنها از دو مؤلفه

مسألهٔ ۱۴. اثبات متناهی بودن دستگاههای کامل و مشخص از توابع

مسألهٔ ۱۵. ارائهٔ مبانی دقیق برای حساب شمارش شوبرت[2]

مسألهٔ ۱۶. مسألهٔ توپولوژی منحنی‌ها و رویه‌های جبری و تعیین کرانی برای تعداد سیکل‌های حدی دستگاه‌های چندجمله‌ای در صفحه

مسألهٔ ۱۷. نمایش فرم‌های مشخص توسط مربع جملات

مسألهٔ ۱۸. ساختن فضاهای اقلیدسی با تعداد متناهی گروههای چند وجهی

مسألهٔ ۱۹. آیا جواب‌های مسائل منظم در حساب تغییرات همواره لزوماً تحلیلی‌اند؟

مسألهٔ ۲۰. ارائهٔ یک نظریهٔ کلی برای مسائل شرط مرزی

مسألهٔ ۲۱. اثبات وجود معادلات دیفرانسیل خطی با گروه مونودرامی از پیش تعیین شده

مسألهٔ ۲۲. یکنواخت سازی روابط تحلیلی توسط توابع اتومورفیک

مسألهٔ ۲۳. توسعهٔ بیشتر روش‌های حساب تغییرات

مسائل هیلبرت در جلب نظر ریاضیدانان جوان بسیار موفق بود[۱۴]. ریاضیدان روسی سرژ برنشتاین[3] در ۱۹۰۰ میلادی به گوتینگن سفر کرد تا نشان دهد که تحت شرایط مطرح شده توسط هیلبرت، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی بیضوی دارای جوابهای تحلیلی هستند. بیبرباخ[4] ریاضیدان دیگری بود که در ۱۹۰۸ میلادی نشان داد تنها تعداد متناهی از گروههای چند وجهی در فضای اقلیدسی با بعد دلخواه موجود است. هیلبرت و اکثر دانشجویانش روی این مسائل به طور خاص کار نکردند و به جای آن در ابتدای قرن بیستم به مطالعهٔ فضای هیلبرت پرداختند. دل مشغولی هیلبرت در این ایام مسألهٔ اصل موضوعی کردن مبانی ریاضیات و منطق ریاضی بود. این علاقه منجر به ارائه دروس مختلف برای اصل موضوعی کردن فیزیک شد، اما به چاپ مقاله‌ای

1) Riemann 2) Schubert 3) Bernestein 4) Bieberbach

نینجامید. این دیدگاه نقش اساسی در ایجاد ساختار اصل موضوعی در نظریهٔ مجموعه‌ها و مبانی هندسه بازی کرد. سؤالات وی در نظریهٔ اعداد که رشتهٔ مورد علاقهٔ وی بود به خوبی طرح شده بودند، اگرچه فرمولبندی هیلبرت از مسألهٔ کرونکر گمراه کننده بود ولی ریاضیدان ژاپنی به نام تاکاگی[1] که رسالهٔ دکتریش را تحت راهنمایی هیلبرت در گوتینگن برای دانشگاه توکیو نوشت در ۱۹۲۰ میلادی قادر به تعمیم این مسأله به حالت آبلی شد. در ۱۹۲۳ میلادی امیل آرتین[2] به طور تصادفی به کارهای تاکاگی برخورد کرد. کارهای وی بر روی این مسأله، هسه[3] را قادر ساخت تا مسألهٔ نهم هیلبرت رادر ۱۹۲۷ میلادی حل کند. در همین ایام در ۱۹۲۳ میلادی هسه توانست مسألهٔ یازدهم هیلبرت دربارهٔ فرم‌های درجه دوم را حل کند. در ۱۹۲۶ میلادی آرتین در یک فرم محدود شده اما در عین حال کلی مسألهٔ هفدهم هیلبرت را حل کرد. مسألهٔ هفتم هیلبرت در ۱۹۳۴ میلادی توسط ریاضیدان روسی گلفاند[4] و پس از آن و به طور مستقل در همان سال توسط اشنایدر[5] حل شد. مسألهٔ پنجم هیلبرت دربارهٔ مشخص سازی گروه‌های لی با کارهای گلیسن[6]، مونتگمری[7] و زیپین[8] در ۱۹۵۲ میلادی حل شد. مسألهٔ چهاردهم دربارهٔ حلقهٔ پایاها توسط زاریسکی[9] به طور هندسی تعبیر شد و در ۱۹۵۹ میلادی ناگاتا[10] نشان داد که‌این مسأله نادرست است. در دهه‌های ۱۹۶۰ و ۱۹۷۰ ریاضیدانان و منطق‌دانان مجدداً به مسائل هیلبرت بازگشتند. در ۱۹۶۶ میلادی پاول کوهن[11] نشان داد که اصل انتخاب و فرضیهٔ پیوستار از دیگر اصول نظریهٔ مجموعه‌ها مستقل است و جایزهٔ فیلدز را برای آن بدست آورد. اصل انتخاب یکی از مسائل هیلبرت نبود اما با فراخوان برای یک مجموعهٔ اصول موضوعه برای حساب، بررسی‌های مشابه را برای تمامی ریاضیات هموار کرد. کوهن در حقیقت با اثبات استقلال فرضیهٔ پیوستار به مسألهٔ اول هیلبرت پاسخ گفت.

در اوایل دههٔ ۱۹۷۰ میلادی ریاضیدان روسی ماتیاسویچ[12] با استفاده از مقالات مارتین دیویس[13]، هیلاری پاتنام[14] و ژولیا رابینسون[16] مسألهٔ دهم را به طور منفی حل کرد یعنی نشان داد پروسه‌ای که هیلبرت خواهان آن برای حل معادلات دیوفانتی بود امکان‌پذیر نیست. ماتیاسویچ و ژولیا رابینسون در نتیجهٔ کارهای مشترک این مسأله را به طور مثبت نیز حل کردند و به انگارهٔ گلدباخ که در پاریس توسط هیلبرت ارائه شد جواب منفی دادند.

تعداد کمی از مسائل هیلبرت با گذشت زمان کم رنگ شدند. شاید پاسخ کامل به مسألهٔ پنجم هیلبرت یکی از آنها باشد که گلیسن مونتگمری و زیپین با حل کامل آن زمینهٔ توسعه و تحقیق در اطراف موضوع را از بین بردند. اما در بسیاری از اوقات مسائل هیلبرت کاملاً مفید بودند. قطعاً گسترش وسیع نظریه جبری اعداد مدیون مسائل هیلبرت است. با طرح مسألهٔ نوزدهم هیلبرت

---

1) Takagi 2) Artin 3) Hasse 4) A.O. Gelfond 5) Schneider 6) Gleason
7) Montgomery 8) Zippin 9) Zariski 10) Nagata 11) Paul Cohen
12) Matijasevich 13) Davis 14) Putnum 15) Robinson

موضوع معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی رونق دوباره‌ای گرفت. هنوز باید درستی جواب‌ها و فرمولبندی مسائل را بررسی کرد، در دو مورد ریاضیدانان روسی نشان دادند که جوابهای اولیه نادرست بوده‌اند و برای آنها پاسخی متفاوت و دقیق ارائه دادند. برای اطلاع بیشتر از مسائل هیلبرت به مقاله‌های [۱۵] رجوع کنید. در ۱۹۷۵ میلادی انجمن ریاضی امریکا یک مجموعهٔ ۲ جلدی از مقالات منتشر شده دربارهٔ مسائل هیلبرت به جز مسألهٔ ۳ و ۱٦ چاپ کرد.

۲. مقدمه: مسألهٔ شانزدهم هیلبرت چیست؟

قسمت دوم مسألهٔ شانزدهم هیلبرت تعداد ماگزیمم و موقعیت نسبی سیکل‌های تناوبی در صفحه را برای معادلات دیفرانسیل چندجمله‌ای در صفحه به صورت

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P_n(x,y), \\ \dot{y} &= Q_n(x,y) \end{aligned} \tag{۱}$$

بررسی می‌کند که در آن P_n و Q_n چندجمله‌ای‌هایی حداکثر از درجهٔ n هستند. به طور سنتی مسألهٔ هیلبرت به سه مسألهٔ بنیادی زیر تقسیم می‌شود که جواب مثبت به هر مسأله، پاسخ مثبت برای سؤال‌های قبلی را در بر دارد.

مسألهٔ I. آیا یک میدان برداری چند جمله‌ای در صفحه، تعداد متناهی سیکل حدی دارد؟

مسأله II. آیا کرانی یکنواخت برای تعداد سیکل‌های حدی یک میدان برداری چند جمله‌ای در صفحه موجود است که تنها به درجهٔ چندجمله‌ای و نه چندجمله‌ای داده شده بستگی داشته باشد؟ این کران بالا را با $H(n)$ نمایش داده، عدد هیلبرت می‌نامیم.

مسألهٔ III. یک کران بالا برای $H(n)$ ارائه دهید.

برای این مسأله، لوید[۱] اظهار کرد که ویژگی برجسته و قابل توجه این مسأله فرض جبری و نتیجهٔ توپولوژیکی آن است. هیلبرت حدس زد که تعداد سیکل‌های حدی دستگاه (۱) به عددی تنها وابسته به درجهٔ n از میدان‌های برداری بستگی دارد. فرض کنیم χ_N فضای میدان‌های برداری مسطح $X = (\sum_{i+j=0}^{n} a_{ij}\, x^i y^j, \sum_{i+j=0}^{n} b_{ij}\, x^i y^j)$ با ضرایب $(a_{ij}, b_{ij}) \in B \subset \mathbb{R}^N$ برای $0 \leq i+j \leq n$ باشد و $N = (n+1)(n+2)$. روش استاندارد در مطالعهٔ میدان‌های برداری چندجمله‌ای

1) Lloyd

بررسی رفتار آنها در بینهایت با تعمیم به کرهٔ پوانکاره است. کرهٔ یکّه در $\mathbb{R}^3$ یعنی

$$S^2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\mid\; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

و صفحهٔ مماس $\Pi = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x_3 = 1\}$ بر آن در قطب شمال را در نظر بگیرید. فرض کنید L خط مستقیم واصل بین مبدأ و نقطهٔ $p \in \Pi$ باشد. خط L، S^2 را در دو نقطه p_+ و p_- قطع می‌کند که در آن $p_\pm \in H_\pm$ و $H_\pm = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \mid \pm x_3 > 0\}$. دو دیفیومورفیسم $f\pm : \Pi \mapsto H_\pm$ حاصل، نگاشت تصویر است که در آن $f_\pm = \pm\dfrac{(x_1, x_2, 1)}{\Delta(x)}$ و $\Delta(x) = (x_1^2 + x_2^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$. فرض کنید X یک میدان برداری در $\Pi = \mathbb{R}^2$ باشد، آن گاه $\tilde{X}$ با تعریف

$$\tilde{X}(y) = Df_\pm(x)\, X(x), \quad y = f_\pm(x) \in H_\pm$$

یک میدان برداری القاء شده از X در $H_+ \cup H_-$ است. برای $X \in \chi_N$، $\tilde{X}$ می‌تواند به دایرهٔ استوا یعنی $S^1 = \{x \in S^2 \mid x_3 = 0\}$ توسیع یابد تا به یک میدان برداری تحلیلی $\rho\,\tilde{X}$ در S^2 تبدیل شود، به طوری که دایرهٔ استوا مجموعهٔ پایای آن است و در آن $\rho : S^2 \mapsto \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $\rho(y_1, y_2, y_3) = y_3^{n-1}$ تعریف می‌شود. $\rho\,\tilde{X}$ را میدان فشرده شدهٔ X می‌نامند. اکثر مؤلفین از دیسک بستهٔ $D^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_3 = 0\}$ به عنوان مدلی از میدان فشرده شدهٔ X استفاده می‌کنند. نقطهٔ بینهایت متناظر با مرز دیسک است هرگاه نقاط روبروی هم بر قطر یکی گرفته شوند. این را فشرده سازی پوانکاره گویند. چون کرهٔ پوانکاره و دیسک فشرده هستند، همهٔ مدارهای $\tilde{X}$ کاملند یعنی بازهٔ زمانی ماکزیمال هر مدار $\tilde{X}$ برابر $\mathbb{R}$ است.
اگر تعداد سیکلهای حدی هر میدان برداری تحلیلی روی S^2 با نقاط تعادل ایزوله شده متناهی باشد، آن گاه هر میدان برداری چند جمله‌ای روی $\mathbb{R}^2$ نیز تعداد سیکل‌های حدی متناهی دارد (چیکن[1] و سوتومایر[2][۵]). با توجه به نکات فوق صورت‌هایی دیگر از مسأله شانزدهم هیلبرت مرتبط با تعداد سیکل‌های حدی سیستم‌های چندجمله‌ای یا تحلیلی روی کرهٔ پوانکاره مطرح می‌شود.

مسألهٔ IV. آیا یک میدان برداری تحلیلی روی کره پوانکاره S^2 تعداد متناهی سیکل حدی دارد؟

یک خانوادهٔ تحلیلی از میدانهای برداری، یک خانواده با تعداد متناهی پارامتر از میدانهای برداری تحلیلی است که به طور تحلیلی به پارامتر بستگی دارند.

مسأله V. آیا برای هر خانوادهٔ تحلیلی از میدان‌های برداری با تعداد متناهی پارامتر روی S^2، تعداد سیکل‌های حدی آن به طور یکنواخت نسبت به پارامتر کراندار می‌شود هرگاه مجموعهٔ پارامترها فشرده باشد؟

یک جواب مثبت به مسأله V، جواب‌های مثبت برای مسائل I و II و IV را به همراه دارد. با بحثی

---
1) Chicone 2) Sotomayer

مختصر می‌توان نشان داد که مسائل I و II نیز توسط نگاشت فشرده‌سازی پوانکاره به مسألهٔ IV و V کاهش می‌یابند. مسائل I و II به طور مستقل توسط ایلیاشنکو[1] [۱۹] و اِکال[2] [۱۱] حل شده‌اند. در حقیقت هر دو اثبات برای توابع تحلیلی انجام شده و حالت چندجمله‌ای به عنوان حالتی خاص به شمار می‌آید. تاریخچهٔ این مسأله بسیار قابل توجه است. دربارهٔ آن ادعاهای بسیار، مطرح و چاپ شد و سپس نادرستی آنها اثبات گردید. اگر چه این مسأله در ۱۹۰۰ میلادی توسط هیلبرت بیان شد، ولی قبل از او پوانکاره میدان‌های برداری چندجمله‌ای را به عنوان اوّلین مرحله از برنامهٔ خود برای توسعهٔ نظریهٔ هندسی معادلات دیفرانسیل مطرح کرد و نشان داد:
«یک میدان برداری مسطح بدون ارتباط زینی حداکثر تعداد متناهی سیکل حدی دارد.»
در سال ۱۹۲۳ میلادی، دولاک[3][۷] ادعا کرد که مسألهٔ I را با تعمیم کاملش حل کرده است. در اواسط دههٔ ۱۹۵۰ میلادی، پتروفسکی[4] و لاندیس[5] جوابی برای مسألهٔ III انتشار دادند. آنها ادّعا کردند که $H(۲) = ۳$ و $H(n) \leqslant P_۳(n)$ که در آن $P_۳(n)$ یک چندجمله‌ای خاص از درجهٔ ۳ است.

در اوایل دههٔ ۱۹۶۰ میلادی ادّعای آنها توسط نُویکف[6] و ایلیاشنکو رد شد و در سالهای ۱۹۷۹ و ۱۹۸۰ توسط ریاضیدانان چینی یک میدان برداری درجه دوّم با ۴ سیکل حدی به صورت زیر ساخته شد، یعنی $H(۲) \geq ۴$.

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x - y - ۱۰ x^۲ + (۵ + \delta) x y + y^۲, \\ \dot{y} = x + x^۲ + (-۲۵ + ۸ \varepsilon - ۹ \delta) x y. \end{cases}$$

که در آن $\lambda = -۱۰^{-۲۰۰}$ و $\varepsilon = -۱۰^{-۵۲}$ و $\delta = -۱۰^{-۱۳}$.

در آغاز سال ۱۹۸۱ میلادی، ایلیاشنکو یک اشتباه و شکاف بزرگ در اثبات دولاک یافت. لذا پس از ۸۰ سال مطالعه و تحقیق، اطلاعات موجود در مورد مسألهٔ هیلبرت تقریباً به اندازهٔ زمان طرح آنها توسط هیلبرت بود. در سال ۱۹۸۵ میلادی، بامُن[7][۳] ثابت کرد که هر دستگاه چندجمله‌ای مرتبه دوّم تعداد متناهی سیکل حدی دارد. سرانجام متناهی بودن سیکل‌های حدی یک دستگاه چندجمله‌ای از درجهٔ $n > ۲$ و معادلات دیفرانسیل تحلیلی در صفحه و کرهٔ پوانکاره توسط ایلیاشنکو و اِکال اثبات شد. شاید این پیشرفت یکی از مهمترین و عمیق‌ترین نتایج در رابطه با مسألهٔ شانزدهم هیلبرت باشد. قضیهٔ آنها به صورت زیر است.

قضیهٔ ۱. (متناهی بودن تعداد سیکل‌های حدی)
یک میدان برداری چند جمله‌ای در صفحه و همچنین یک میدان برداری تحلیلی روی ۲ — کره دارای تعداد متناهی سیکل حدی است.

---

1) Ilyashenko 2) Ecale 3) Dulac 4) Petrovskii 5) Landis 6) Novikov 7) Bamon

۳. قضیهٔ متناهی بودن

در این بخش به برخی از ایده‌های اثبات قضیهٔ ۱ می‌پردازیم. فرض کنید که قضیهٔ ۱ نادرست باشد یعنی یک میدان برداری تحلیلی روی ۲ − کره با تعداد نامتناهی سیکل حدی موجود باشد. از همان ابتدا فرض می‌کنیم که تعداد نقاط بحرانی میدان برداری داده شده متناهی است. در این صورت می‌توان مؤلفه‌های میدان برداری داده شده را بر عامل مشترک بین آنها تقسیم کرد. دو سیکل حدی بدون یک نقطهٔ تعادل بین آنها طبق تعریف به یک آشیانه[1] تعلق دارند. لذا باید حداقل یک آشیانه با تعداد نامتناهی سیکل حدی موجود باشد. امّا با توجه به فشردگی کره این سیکل‌های حدی باید در یک مجموعهٔ حدی انباشته شوند. این مجموعهٔ حدی یک مدار تناوبی و یا اجتماع نقاط تعادل و مدارهای هترو(همو)کلینیک است که آنها را به هم مرتبط می‌کند (پلی سیکل). تمامی این نکات بین میدانهای برداری تحلیلی و هموار مشترک است. امّا بین آنها یک تفاوت اساسی موجود است: در حالت هموار، مجموعهٔ حدی می‌تواند شامل تعداد شمارش پذیر از سیکل‌های حدی باشد که به یک نقطهٔ بحرانی نزدیک می‌شوند، امّا در حالت تحلیلی این مجموعه تنها می‌تواند شامل اجتماعی متناهی از مدارها باشد. این مطلب مهم در قضیهٔ زیر تحت عنوان قضیه غیرانباشتگی توسط ایلیاشنکو در ۱۹۸۰ میلادی اثبات شد. صورت قضیه به صورت زیر است:

قضیهٔ ۲. (غیر انباشتگی)

سیکل‌های حدی یک میدان برداری تحلیلی روی ۲ − کره نمی‌تواند بر یک پلی سیکل این میدان انباشته شوند.

این نکته از قضیه‌ای مهم به نام عادی‌سازی نتیجه می‌شود. عادی‌سازی[2] یک نقطه بحرانی، دنباله‌ای از بزرگنمایی[3]هاست که نقطهٔ تعادل اوّلیه را با تعداد متناهی نقطهٔ تعادل ابتدایی جایگزین می‌کند.

تعریف ۱. یک نقطهٔ تعادل از یک معادلهٔ دیفرانسیل در صفحه را ابتدایی گوئیم هرگاه ماتریس خطی شده معادله در این نقطه حداقل یک ویژه مقدار ناصفر داشته باشد در غیر این صورت آن را غیر ابتدایی گوئیم. ساده‌ترین مثال از یک نقطهٔ تعادل غیرابتدایی نقطه گوشه با ماتریس خطی شده پوچ‌توان ناصفر است. خطی شده یک میدان برداری در نقطهٔ گوشه به فرم $\dot{x} = y$ و $\dot{y} = ۰$ است.

تعریف ۲. یک پلی سیکل از یک میدان برداری یک دستهٔ مرتب از نقاط تعادل $p_۱$ و $p_۲$ و ... و p_k و کمانها یا منحنی‌های انتگرالی است که با ترتیب معینی آنها را به هم وصل می‌کنند. مثلاً برای $j = ۱, ..., k$ کمان jام نقطه p_j را به $p_{j+۱}$ وصل می‌کند. یک پلی سیکل را ابتدایی می‌نامیم اگر تنها شامل نقاط تعادل ابتدایی باشد.

---

1) nest 2) Desingularization 3) Blow-up

مثالی بدیهی از یک پلی سیکل یک جواب تناوبی از معادلهٔ دیفرانسیل است که فاقد نقطه تعادل و تنها شامل یک کمان است.
مثال دیگری از پلی سیکل یک نقطهٔ تعادل است که حاوی هیچ کمانی نیست. حال به بیان قضیهٔ عادی سازی می‌پردازیم:
(قضیهٔ عادی سازی)
اگر یک میدان برداری تحلیلی ادامه‌ای تحلیلی به صفحهٔ مختلط داشته باشد که دارای نقطهٔ تعادل ایزولهٔ صفر است، آن گاه نقطه تعادل میدان برداری اوّلیه را می‌توان پس از تعداد متناهی بزرگنمایی به تعداد متناهی نقطهٔ بحرانی ابتدایی تبدیل کرد.

اثبات این قضیه دارای تاریخچه‌ای طولانی است. در ۱۹۵۱ میلادی بندیکسون ادّعا کرد که این قضیه را اثبات کرده است، امّا اثباتی برای آن ارائه نکرد. به نظر می‌آید که دولاک اوّلین ریاضیدانی بود که از این قضیه قبل از دهه ۶۰ میلادی استفاده کرد. اثباتهای کامل و مستقل از هم این قضیه برای حالت تحلیلی توسط سیدنبرگ[1] و لفشتز[2] در ۱۹۶۸ میلادی ارائه شد. تعمیم آن به حالت هموار توسط دومورتیر[3] در ۱۹۷۷ میلادی اثبات شد. اوّلین اثبات شفاف این قضیه توسط وان دن اِسن[4] در ۱۹۸۰ میلادی ارائه شد. قضیهٔ عادی سازی یکی از واقعیات پایه‌ای در نظریهٔ موضعی معادلات دیفرانسیل مسطح است. برای اثبات قضیهٔ غیرانباشتگی، نقاط تعادل غیر ابتدایی روی پلی سیکل را باید عادی کرد. پلی سیکل غیر عادی با پلی سیکلی طولانی‌تر با تعداد رأس‌های بیشتر که هر کدام از آنها دارای یک نقطهٔ تعادل ابتدایی است جایگزین می‌شود. نظریهٔ فرم‌های نرمال، نگاشت‌های متناظر با این نقاط را تشریح می‌کند. مطالعهٔ ترکیب این نگاشت‌ها که در اثبات قضیه غیر انباشتگی مورد استفاده قرار می‌گیرند بسیار پیچیده هستند. ایلیاشنکو و اِکال با استفاده از قضیهٔ ۲ قضیهٔ ۱ را اثبات کردند.
برای مشاهدهٔ جزئیات بیشتر این مسأله به مقالهٔ [۳۵] مراجعه کنید. اِکال[۱۱] و ایلیاشنکو[۱۹] اثبات‌های مستقلی از قضیهٔ غیرانباشتگی ارائه داده‌اند.

۴. ارتباط نظریهٔ انشعاب با مسألهٔ شانزدهم هیلبرت

در این بخش ابتدا تعریفی از انشعاب و نقاط انشعاب ارائه می‌دهیم و سپس به بررسی برخی کوشش‌های انجام شده در راستای ارائهٔ یک نظریهٔ انشعاب سراسری برای دستگاه‌های دینامیکی و کاربردهای آن در پاسخگویی به مسألهٔ شانزدهم هیلبرت می‌پردازیم. دستگاه چندجمله‌ای (۱) را که به N پارامتر (a_{ij}, b_{ij}) بستگی دارد در نظر بگیرید. با تغییر این پارامترها ممکن است نمای فاز سیستم به ازای مقادیر معینی از پارامترها به طور کیفی تغییر یابد، این تغییرات را انشعاب و مقادیری از پارامترها که به ازای آنها دستگاه (۱) به طور ساختاری ناپایدار می‌گردد را نقاط انشعاب می‌نامند.

1) Seidenberg 2) Lefschetz 3) dumortier 4) Van den Essen

توسعهٔ نظریهٔ انشعاب میدان‌های برداری به درک عمیق‌تری از وجود سیکل‌های حدی میدان‌های برداری چندجمله‌ای منجر می‌شود. طبق نظریهٔ دستگاههای دینامیکی مسطح، سیکل‌های حدی دستگاه (۱) از راه‌های زیر می‌توانند ایجاد شوند:

۱. انشعاب پوانکاره ــ آندرنف ــ هاپف از یک نقطه تعادل مرکز یا کانون.

۲. انشعاب هموکلینیک یا هتروکلینیک از سیکل جداکننده.

۳. انشعاب سیکل‌های حدی چندگانه.

اوّلین انشعاب تنها برای دستگاه‌های درجهٔ دوّم به طور کامل بررسی شده است. در این زمینه باوتین[۱] [۴] ثابت کرد که حداکثر تعداد سیکل‌های حدی که از یک کانون ضعیف و یا مرکز یک دستگاه چندجمله‌ای مرتبه دوّم می‌تواند منشعب شود (سیکل پذیری نقطهٔ تعادل) برابر ۳ است. همچنین زولادک[۲] [۳۳] نشان داد که ماگزیمم سیکل پذیری نقاط تعادل در دستگاه‌های درجه ۳ کمتر از ۱۱ نیست.
دوّمین انشعاب توسط دمرتیر[۳]، روساری[۴] و روسیو[۵] [۸،۹،۱۰] به طور وسیعی مورد مطالعه قرار گرفته است. به‌ویژه روساری برای اثبات متناهی بودن $H(۲)$ (حداکثر تعداد سیکل‌های حدی در سیستم‌های درجه دوّم) برنامه‌ای بر اساس مفهوم سیکل‌پذیری مجموعه‌های حدی تناوبی ارائه کرد. برنامهٔ وی کاهش مسالهٔ فوق به مطالعهٔ انشعاب سیکل‌های حدی از پلی‌سیکل‌ها بود. برای اینکه این برنامه را به اختصار توضیح دهیم به چند تعریف و قضیه احتیاج داریم.

تعریف ۵. فرض کنید X_λ یک میدان برداری از ردهٔ $C^۱$ روی کرهٔ $S^۲$ باشد. یک مجموعهٔ حدی تناوبی برای خانوادهٔ X_λ در $\lambda_۰$، یک زیرمجموعهٔ فشردهٔ γ از $S^۲$ است که تحت جریان $X_{\lambda_۰}$ پایاست اگر یک دنبالهٔ γ_i از مدارهای تناوبی X_λ موجود باشد به طوری که هرگاه $i \to \infty$ آنگاه $\lambda_i \to \lambda_۰$ و $d(\gamma_i, \gamma) \to ۰$. d متر هاسدورف در نظر گرفته می‌شود.

تعریف ٦. یک مجموعهٔ حدی تناوبی $\gamma_۰$ از یک میدان برداری $X_{\lambda_۰}$ در یک میدان $p-$ پارامتری از میدان‌های برداری X_λ دارای سیکل پذیری متناهی در X_λاست هرگاه عدد طبیعی N و اعداد حقیقی و مثبت ε و δ موجود باشند به طوری که هر میدان برداری X_λ با $|\lambda - \lambda_۰| < \delta$ حداکثر دارای N سیکل حدی γ_i با $d(\gamma_۰, \gamma_۱) < \varepsilon$ باشند.

قضیهٔ ۵. مجموعهٔ حدی تناوبی یک میدان برداری درجهٔ دوم از یک نقطهٔ تعادل، یک جواب تناوبی، یک پلی سیکل ابتدایی و یا یک پلی سیکل غیر ابتدایی با نقاط تعادل غیرایزوله تشکیل می‌گردد.
قضیهٔ بعدی اساس برنامهٔ روساری برای اثبات متناهی بودن $H(۲)$ است.

1) Bautin 2) Zoladoc 3) Dumortier 4) Roussarie 5) Rousseau

قضیهٔ ٦. فرض کنید X_λ با $\lambda \in P$ یک خانوادهٔ C^1 از میدانهای برداری روی ناحیهٔ فشردهٔ M از $\mathbb{R}^2$ باشد. اگر P فشرده باشد آنگاه برای هر $\lambda \in P$ یک کران بالای یکنواخت k برای تعداد سیکل‌های حدی X_λ موجود است اگر و تنها اگر هر مجموعهٔ حدی تناوبی γ از X_λ دارای سیکل پذیری متناهی در X_λ باشد.

بر این اساس نشان داده شد که $H(2) < 2M$ که در آن M حداکثر تعداد سیکل‌های حدی است که مبدأ را در دستگاه‌های درجهٔ دوم زیر احاطه کرده است:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \lambda x - \mu y + \varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 xy + \varepsilon_3 y^2, \\
\dot{y} &= \mu x + \lambda y + \delta_1 x^2 + \delta_2 xy + \delta_3 y^2
\end{aligned}
\tag{2}
$$

که در آن $(\lambda, \mu) \in S^1$ و $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3) \in S^5$.

از این رو برنامهٔ روساری کاهش مسأله به مسألهٔ موضعی اثبات متناهی بودن سیکل‌پذیری مجموعه‌های حدی تناوبی است. در واقع با یافتن تمامی پلی‌سیکل‌های ممکن از یک دستگاه مرتبهٔ دوم و اثبات متناهی بودن سیکل پذیری آنها می‌توان متناهی بودن $H(2)$ را ثابت کرد. در این زمینه لیست کاملی از ۱۲۱ پلی سیکل که ممکن است در دستگاه‌های چند جمله‌ای درجهٔ دوم اتفاق بیفتند را ارائه کرد که هنوز باید متناهی بودن سیکل پذیری بیش از ۵۰ پلی سیکل برای تعیین کران بالای یکنواخت M اثبات شود. تمامی انشعابات بیان شده در بالا از نوع سیکل‌های حدی یا انشعابات موضعی هستند یعنی تنها در همسایگی به اندازهٔ کافی کوچک یک نقطهٔ تعادل یا سیکل جدا کننده و یا سیکل حدی چند گانه مطالعه شده‌اند. در این نگاه تنها شکافت موضعی در فضای پارامترها مورد مطالعه قرار گرفته است. برای پاسخگویی کاملتر به این مسأله، نیاز به بررسی نمای فاز در تمامی صفحه و در تمامی فضای پارامترهاو یا به عبارت دیگر احتیاج به یک انشعاب سراسری داریم. برای بدست آوردن تصویری کلی از انشعاب سراسری نیازمند کنترل انشعابات سیکل های حدی و چگونگی تغییر حالت آنها هستیم. بنابراین می‌توان با متصل کردن سیکل‌های حدی حاصل از انشعابات موضعی به یکدیگر به تصویری کلی دست یافت. این مطلب در اصل پایان پذیری وینتنر ــ پرکو[1] مستتر است که توسط پرکو در بررسی سیکل‌های حدی چندگانه در دستگاه‌های مسطح مورد استفاده قرار گرفته است صورت این قضیه به صورت زیر است:

قضیه ۷. اصل پایان پذیری ویتنر ــ پرکو [۱۲]. هر خانوادهٔ تک پارامتری از سیکل‌های حدی با مرتبهٔ تکرار m از دستگاه چندجمله‌ای (۱) به طریق منحصر به فردی می‌تواند به یک خانوادهٔ تک پارامتری ماکزیمال از سیکل‌های حدی با مرتبهٔ تکرار m که باز یا دوری است توسیع یابد. اگر باز باشد موقعی به پایان می‌رسد که پارامتر یا سیکل‌های حدی بیکران شوند و یا خانواده در یک نقطهٔ تعادل یا روی یک سیکل جدا کننده (مرکب) با مرتبهٔ تکرار m پایان پذیرد.

1) Wintner-Perko

در نهایت برای تکمیل این روند نیاز به طراحی یک برنامهٔ کامپیوتری بر اساس روش‌های جبری و عددی داریم که تعیین موقعیت یک دستگاه چندجمله‌ای مرتبهٔ دوم در فضای پارامترها و انواع انشعابات اتفاق افتاده را تأمین نماید.

۵. مسائل مرتبط با مسألهٔ شانزدهم

چون مسألهٔ شانزدهم هیلبرت همچنان لاینحل باقی مانده است، در این راستا در سال ۱۹۷۷ میلادی آرنولد[1] مسألهٔ زیر را که در ارتباط با قسمت دوّم مسألهٔ شانزدهم هیلبرت است، مطرح کرد: «فرض کنید $H(x,y)$ یک چندجمله‌ای حقیقی از درجهٔ n و P یک چندجمله‌ای حقیقی از درجهٔ m برحسب متغیرهای (x,y) باشد.حداکثر تعداد ریشه های حقیقی **انتگرال آبلی** $I(h) = \int\int_{H\leq h} P\,dx\,dy$ چقدر است؟»
این مسأله به مسألهٔ ضعیف شده یا مماسی هیلبرت معروف است و ارتباط زیادی با مسألهٔ تعیین یک کران بالای $V(n,m)$ برای تعداد سیکل‌های حدی در یک طوق تناوبی برای سیستم‌های هامیلتونی از درجه $(n-۱)$ تحت اختلالات درجهٔ m، یعنی تعیین سیکل‌پذیری یک طوق تناوبی دارد. همچنین اسمیل[2] در دو سخنرانی مشهور خود تحت عنوان «مسائل بزرگ، کوشش‌هایی که با شکست روبرو شد» [۳۰] و «مسائل ریاضی قرن آینده» [۳۱] مجموعه مسائلی را برای قرن ۲۱ ارائه کرد و در آن چندین صورت ساده و محدود شده از این مسأله که توسط محققین مختلف طرح شده بود مطرح کرد که در میان آنها می‌توان به مسألهٔ مماسی هیلبرت، مسألهٔ هیلبرت ــ آرنولد، معادلات لینیارد[3] و آبل اشاره کرد. تاکنون، اکثر نتایج بدست آمده از مسالهٔ مماسی هیلبرت به اختلالات سیستم‌های هامیلتونی مربوط می‌شوند ([۱۳، ۱٦، ۱۷، ۱۸، ۲۳، ۳۲]. از حالات محدود شده دیگر بررسی دستگاه‌های چند جمله‌ای مرتبه دوّم کرانداراست (دستگاههایی که همهٔ مدارها برای $t \geq ۰$ کراندار است) که توسط پرکو و همکاران در مقالات [٦، ۲۵، ۲٦، ۲۷، ۲۸] بررسی شده است. برای جزئیات بیشتر به مقالات [۳۵,۳۴] مراجعه کنید.
مقالهٔ حاضر تنها مروری کوتاه بر بخش کوچکی از صدها مقالهٔ تحقیقی در این زمینه است و ادعای کامل و جامع بودن را ندارد و تنها کوششی جهت طرح اهمیت و نکات برجستهٔ یکی از فعّالترین زمینه‌های تحقیقاتی در نظریهٔ کیفی معادلات دیفرانسیل و دستگاه‌های دینامیکی است.

مراجع

[1] Andronov, A. A., Leontovich, E. A., Gordon, I. I. and Maier, A. G., *Theory of Bifurcations of Dynamical Systems on a Plane*, John Wiley, New York (1973).

1) Arnold 2) Smale 3) Linard

[2] Arnold, V.I. Loss of stability of self-oscillations close to resonance and versal deformations of equivariant vector fields, *Funct. Anal. Appl.*, **11**, (1977), 85–92.

[3] Bamon, R. The solution of Dulac's problem for quadratic vector fields, *Ann. Acad. bris. Ciênc.*, 57, (1985), 111–142.

[4] Bautin, N.N. On the number of limit cycles which appear with the variation of coefficients from an equilibrium position of focus or center type, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 100(1), (1952), 397–413.

[5] Chicone, C. and Sotomayer, J. On a class of complete polynomial vector fields in the plane, *J. Diff. Eqns.*, **61**, 398–418. *Diff. Eqns.*,no 17(3), (1986), 469–478.

[6] Dickson, R. J. and Perko, L. M. Bounded quadratic systems in the plane *J. of Diff. eqns.*, 7, (1970) 251–273.

[7] Dulac, H., Sur les cycles limite, *Bull. Soc. Math. France*, 51, (1923), 5–188.

[8] Dumortier, F., Roussarie, R. and Rousseau, C. Hilbert 16th Problem for Quadratic Vector Fields. *J. Diff. Eqns.*,no 110, (1994), 86–133.

[9] Dumortier, F., El Morsalani, M. and Rousseau, C. Hilbert 16th problem for quadratic systems and cyclicity of elementary graphics. *nonlinearity*, 9, (1996), 1209–1261.

[10] Dumortier, F., Herssens, C. and Perko, L. Local bifurcations and a survey of bounded quadratic systems. *J. Diff. Eqns.*, 165, (2000), 430–467.

[11] Écalle, J. Introduction aux fonctions analaysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac, *Hermann, Paris,* MR **97f**:58104, (1992),.

[12] Gaiko, V.A. Hilbert's sixteenth problem and global bifurcations of limit cycles. Three, *Nonlinear Analysis* 20 47, (2001), 4455–4466.

[13] Gavrilov L., Nonoscillation of elliptic integrals related to cubic polynomials with symmetry of order three, *Bull. Lond. Math. Soc.* 30, (1998), 267–273.

[14] Gray, J., The Hilbert problems, 1900–2000,*Newsletter. European Math. Soc.* 36, (2000), 10–13.

[15] Hilbert D., Mathematical problems,*Bull. Amer. Math. Soc.* 8, (1902), 437–479.

[16] Horozov, E. and Iliev I. D., On the number of limit cycles in perturbations of quadratic Hamiltonian systems,*Proc. Lond. Math. Soc.* 69, (1994), 198–224.

[17] Horozov, E. and Iliev I. D., Linear Estimate for the Number of Zeros of Abelian Integrals with Cubic Hamiltonians, *Nonlinearity* 11, (1998), 1521–1537.

[18] Iliev, I. D., Higher order bifurcations of limit cycles. *J. Diff. eqns.*, 154, (1999), 339–363.

[19] Il'yashenko, Y., Finiteness theorems for limit cycles, *Uspekhi Mat. Nauk*, 45, No. 2 (1990), 143-200, MR**92a**:58110.

[20] Il'yashenko, Yu. S. and Yakovenko S., Double exponential estimate for the number of zeros of complete Abelian integrals, *Inv. Math.* 121 [1995] 613–50.

[21] Il'yashenko, Yu. S. and Yakovenko S. Counting real zeros of analytic functions satisfying linear ordinary differential equations, *J. Diff. Eqns.* 126, (1996), 87–105.

[22] Ilyashenko, Y., Centennial history of Hilbert 16th problem. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 39, No.3,(2002), 301–354.

[23] Li,J. Hilbert's 16th Problem and bifurcations of planar polynomial vector fields. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 13, No. 1 (2003), 47–106.

[24] Liu C., Estimate of the number of zeros of Abelian integrals for an elliptic Hamiltonian with figure-of-eight loop, *nonlinearity,* 16, (2003) 1151–1163.

[25] Perko, L. M., Rotated vector fields and the global behavior of limit cycles for a class of quadratic systems in the plane. *J. Dif. Eqns.*, 18, (1975), 63–86.

[26] Perko, L. M., Limit cycles of quadratic systems in the plane. *Rocky Mountain Journal of mathematics*, 14, No. 3 (1984) 619–645.

[27] Perko, L. M., Higher order bifurcations of Homoclinic loop and multiple limit cycle bifurcation surfaces. *Transaction of the American Mathematical Society*, 344, No.1 (1994), 101–130.

[28] Perko, L. M., Multiple limit cycle bifurcation surfaces and global families of multiple limit cycles. *J. Diff. Eqns.*, 122, (1995), 89–113.

[29] Roussarie, R., A Note on Finite Cyclycity and Hilbert's 16th Problem, *in Dynamical Systems, Valparaiso 1986,* eds Bammon, R. et al., Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1331 (Springer-Verlag, N.Y.), (1988), 161–168.

[30] Smale, S., Dynamics Retrospective: Great problems, Attempts that failed, *Physica D*, 51, (1991), 261–273.

[31] Smale, S., Mathematical problems for the next century, *The math. Intell*, 20(2),7–15; *Mathematics: Frontiers and Perspectives 2000,* (1998), 271–294.

[32] Zhao Y. and Zhang Zhifen, Linear estimate of the number of zeros of Abelian integrals for a kind of quartic Hamiltonians, *J. Diff. Eqns.* 155, (1999), 73–88.

[33] Zoladek, H., Eleven small limit cycles in a cubic vector field, *Nonlinearity*, 8, 843–860, Hamiltonians, *J. Diff. Eqns.* 155, (1995), 73–88.

[۳۴] الهی دانیار، ظهوری زنگنه حمیدرضا، ارتباط مسألهٔ شانزدهم هیلبرت با انتگرالهای آبلی و چند روش برای بررسی یکنوایی دو انتگرال آبلی، فرهنگ واندیشهٔ ریاضی، ۳۲، (۱۳۸۳) ۴۴–۳۱.

[۳۵] ظهوری زنگنه حمیدرضا، عاشقی رسول، تاریخچهٔ یکصد سالهٔ مسألهٔ شانزدهم هیلبرت، مجموعه مقالات ششمین سمینار معادلات دیفرانسیل و دستگاههای دینامیکی، مرکز تحصیلات تکمیلی زنجان، (۱۳۸۳) ٦٠–۳۸.

حمیدرضا ظهوری زنگنه
دانشگاه صنعتی اصفهان، دانشکده علوم ریاضی
پست الکترونیک: hamidz@cc.iut.ac.ir

رسول عاشقی
دانشگاه صنعتی اصفهان، دانشکده علوم ریاضی
پست الکترونیک: rasoul_asheghi@yahoo.com

.

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۴ (بهار ۱۳۸۴) صص. ۴۳ تا ۵۷

پژوهش در ریاضیات: بررسی دیدگاه‌های مایکل عطیه*

علی‌رضا مدقالچی

سخن گفتن از پژوهش در ریاضیات کاری است سهل و ممتنع. سهل است از این جهت که پژوهش در ریاضیات نیز همچون پژوهش در سایر شاخه‌های علوم جستجو برای یافتن ایده‌های نو، ساختن مدل‌های جدید ریاضی برای پدیده‌های فیزیکی، و یا حل مسائل بازی است که پژوهش‌های عمیق در ریاضیات را تشکیل می‌دهد. ممتنع است زیرا، دانش ریاضی دارای مکتب‌های گوناگون است از نود و هفت شاخهٔ اصلی و متجاوز از پنج هزار شاخهٔ فرعی تشکیل شده است. چگونه می‌توان در این دنیای عظیم ایده‌ای مفید برای پژوهش پیدا کرد؟ عده‌ای معتقدند که:

ریاضیات چیزی نیست مگر دستگاهی از نتایج حاصل از تعریف‌ها و اصول موضوعی که فقط باید سازگار باشند و از سایر لحاظ با میل و ارادهٔ ریاضیدان خلق می‌شوند.

به نظر می‌آید که این توصیف از ریاضیات تهدیدی جدی برای آن است. زیرا در این صورت ریاضیات مجموعه‌ای از تعریف‌ها و استنتاجات بی‌هدف است. بدون شک ذهن انسان‌های نخبه توانایی خلق اصول را دارد و انسان می‌تواند اصولی را وضع و بر آن اساس نظریه‌ای را بسازد ولی مسلماً این کل ماجرا نیست، بلکه باید ابداع ساختارها براساس کل جریان دانش ریاضی و در ارتباط با سایر علوم شکل گیرد تا ارزش علمی داشته باشد.

به نظر من تعریف زیر از دانش ریاضی از کتاب «ریاضیات چیست» تألیف ریچارد کورانت و هربرت رابینز جامع‌ترین و کامل‌ترین تعریفی است که دیدگاه ما را در مورد ریاضیات روشن می‌سازد و مسیر اصلی پژوهش را نمایان می‌سازد. «ریاضیات به منزلهٔ یکی از تجلیّات ذهن انسان،

---

* این مقاله سخنرانی نگارنده در دانشکدهٔ ریاضی و مهندسی کامپیوتر دانشگاه تربیت معلم تهران است که به مناسبت هفتهٔ پژوهش در سال ۱۳۸۳ برای دانشجویان دوره‌های کارشناسی‌ارشد و دکترا ایراد شده است. نگارنده، از مسئولین دانشکده به خاطر در اختیار گذاشتن این فرصت تشکر و قدردانی می‌نماید. این مقاله براساس تحقیقات نگارنده و مراجعه به کتاب‌ها و مقالات کلاسیک و تحقیقی و با توجه به مقالات بسیار ارزشمند [1] و [2] تدوین شده است، و از مقالات [۳] و [۴] نیز استفادهٔ زیادی شده است.

منعکس کنندهٔ ارادهٔ فعال، عقل تأمل‌گر، و علاقهٔ وافر او به کمال زیباشناختی است. عناصر بنیادی آن، منطق و شهود، تحلیل و ساختن، عمومیت و فردیت است. هر چند سنت‌ها و مکتب‌های گوناگون ریاضی به جنبه‌های متفاوتی از آن توجه دارند. سرزندگی، سودمندی، و ارزش ریاضیات تنها از تأثیر متقابل این نیروهای متضاد و تلاش برای تلفیق و ترکیب آنها ناشی می‌شود.» ([۴]، مقدمه).

شیوه‌های پژوهش چگونه‌اند؟

الف) تعمیم یک مسأله از یک حالت به حالت‌های کلی‌تر؛

ب) تعریف یک مسألهٔ کلی براساس مدلهای مختلف و یا در دیسیپلین‌های مختلف؛

ج) ایجاد ارتباط بین نظریه‌های مختلف ریاضی.

در ادامهٔ سخن روی این سه عنوان بیشتر بحث خواهیم کرد، در اینجا بد نیست به یک مثال از آنالیز هارمونیک توجه کنیم. گروه‌های توپولوژیک چگونه به وجود آمده‌اند؟ مشابه نظریهٔ لبگ روی گروه‌های توپولوژیک چیست؟ چه پدیده و یا مدل‌هایی سبب توسیع گروه دایره به گروه‌های فشرده شده است؟ در تعمیم و تعریف گروه‌های توپولوژیک چه مباحثی مطرح شده است و متقابلاً این نظریه چگونه برای حل مسائل واقعی مفید واقع شده است؟ بالاخره، آنالیز روی این گروه‌ها چگونه به حالت‌های تعویض ناپذیر توسیع یافته است و آنها چه کاربردهای عملی دارند؟ در مقالهٔ، «آنالیز هارمونیک از کجا شروع شده است و به کجا می‌رود» در این موارد بحث کرده‌ام [۴]. در اینجا آن مباحث را تکرار نمی‌کنیم ولی در ادامهٔ سخن، مباحث بیشتری را می‌شکافیم. اما بیان جمله‌ای از مقدمهٔ آن مقاله به بحث ما کمک می‌کند:

«معمولاً نقش ریاضیات با ارائهٔ مثال‌هایی از ابداعات مهم به دنیا عرضه می‌شود که بدون کمک ریاضیات نمی‌توانند به وجود آیند. این امر با قدرتی ظاهر می‌شود که ما ریاضیدانان خود را با حقیقت ابدی مرتبط می‌دانیم، آن را به فیزیکدانان تحویل می‌دهیم و آنان نیز به شیمیدانان و مهندسین تحویل می‌دهند و در نهایت همهٔ آنها در اختیار بشریت قرار می‌گیرند ... یک نظریهٔ اساسی وجود دارد که معتقد است که ریاضیات و ریاضیدانان دانش بشری را کاملاً احاطه کرده‌اند و به ویژه به هنر نیز متصلند ... (دیوید مامفورد، کنگرهٔ ریاضیات ۱۹۹۸).»

از این رو، در این حوزه از دانش بشری ایده‌های خوب و دقیق به دشواری مطرح می‌شوند ولی کشف جواب دقیق غیرمقدور نیست. طرح مسائل و ایده‌های جدید در حوزهٔ ریاضیات نیازمند اطلاعات دقیق و بررسی مقالات و یافته‌های ریاضیدانان بزرگ است.

در یک مصاحبه از مایکل عطیه[۱] می‌پرسند: شما بر چه اساسی مسأله‌ای را برای مطالعه انتخاب

۱) عطیه ریاضیدان سوری‌الاصل انگلیسی است که در زمینه‌های متعددی از قبیل توپولوژی، هندسه، معادلات دیفرانسیل و فیزیک نظری تحقیقات بسیار مهمی دارد. او را مبدع K ــ نظریه (K-Theory) می‌دانند. او متولد ۱۹۲۹ میلادی است و در سال ١٩٦٦ میلادی نشان فیلدز را از آنِ خود کرده است.

می‌کنید؟
پاسخ عطیه به سؤال فوق به شرح زیر است:

«فکر می‌کنم این سؤال مبتنی بر یک فرض قبلی در مورد نحوهٔ کار است. شیوهٔ کار من چنین نیست. ممکن است بعضی‌ها بنشینند و به خود بگویند «می‌خواهم این مسأله را حل کنم»، ولی من چنین کاری نمی‌کنم. فقط در دنیای ریاضی این سو و آن سو شنا می‌کنم. دربارهٔ مفاهیم می‌اندیشم نسبت به بعضی از آنها کنجکاو و علاقمند می‌شوم، ایده‌هایی در ذهنم برانگیخته می‌شوند و من آنها را تعقیب می‌کنم. ممکن است مفهومی را در ارتباط با مفهوم دیگری ببینم. در چنین مواردی سعی می‌کنم آنها را در کنار هم قرار دهم و مفاهیم جدیدی پدید آورم. هیچ وقت در شروع کار، دربارهٔ اینکه کجا می‌خواهم بروم و جریان اوضاع از چه قرار خواهد بود، ایده‌ای ندارم، با ریاضیدانها صحبت می‌کنم، می‌آموزم، بحث می‌کنم و آن گاه مسائل جالب به سادگی پیش می‌آید. [۳]»

سؤال دیگر:
آیا نظریهٔ کی (K) نیز چنین به دست آمده است؟

عطیه: «بله، پیدایش این نظریه از لحاظی بسیار تصادفی بود. من به کارهایی که گروتندیک در هندسهٔ جبری کرده بوده علاقه‌مند بودم. وقتی به بن رفتم، خواستم قدری توپولوژی بیاموزم. یوان جیمز[۱] در بررسی مسائل توپولوژیک در ارتباط با فضاهای تصویری نکاتی را بررسی کرده که بعضی از آنها مورد توجه من قرار گرفت، دریافتم که با استفاده از فرمول‌های گروتندیک می‌توان این نکات را توضیح داد و نتایج زیبایی به دست آورد.

بوت نیز در قضیهٔ تناوبی کردن کار کرده بود. با بوت و دستاورد او آشنا شدم و دریافتم که با استفاده از دستاورد بوت می‌توان مسائل جالبی را حل کرد. لازم به نظر می‌رسید که ابزارهایی فراهم آید تا این مفهوم به صورت رسمی بیان شود و نظریهٔ کی از این تلاش پدید آمد ... [۳].»

بحث فوق رهنمودهای ذیل را پیش روی ما قرار می‌دهد.

الف) مسائل جدید ریاضی به طور ذاتی در روند بررسی دقیق و هوشمندانه نظریه‌های ریاضی به دست می‌آیند.

ب) در حمله به یک مسأله بعضی از ریاضیدانان ترجیح می‌دهند که در اطراف مسأله دور بزنند، حالتهای خاص را بررسی کنند، مثالهای ممکن را بسازند، و به تدریج شیوه‌ای برای حل مسأله بیابند.

1) Ioan James

ج) شیوه‌های غور در اطراف مسأله منجر به حل مسائل مهم شده‌اند. مثلاً رده‌بندی گروه‌های متناهی ساده از این نوع مسائل هستند. در این مورد بعداً بیشتر بحث خواهیم کرد.

به طوری که قبلاً اشاره کردیم یک حوزهٔ ریاضی صرفاً مجموعه‌ای از اصول موضوع، چند قضیه و غیره نیست. ریاضیات را نمی‌توان مجموعه‌ای جداگانه از دیسیپلین‌های مختلف مانند آنالیز، جبر و غیره دانست.

در یک مصاحبه از عطیه سؤال می‌شود: آیا به نظر شما در ریاضیات جریان‌های عمده و غیرعمده وجود دارد؟

> پاسخ عطیه: «من با این نظر به شدّت مخالفم که شما چند اصل موضوع را کنار هم بگذارید و به این طریق یک شاخهٔ ریاضی ابداع کنید. ریاضیات صرفاً حاصل یک گسترش ارگانیک نیست، بلکه تاریخچهٔ مفصلی در ارتباط با گذشته و ارتباطاتی با سایر رشته‌ها دارد.»

دانش ریاضی جریان سیالی است که مسائل آن از دنیای واقعی سرچشمه می‌گیرد و مدلهای آن در جهان واقعی وجود دارد اما در درون ریاضیات این مدل‌ها به صورت محاسبه با اعداد و یا تشکیل معادلات شکل می‌گیرند، و در نتیجه اهمیت یک شاخه از ریاضیات متکی بر میزان ارتباطی است که با سایر شاخه‌های ریاضی و سایر علوم دارد. اصل دیگری که در پژوهش ریاضی اساسی است تجرید و تعمیم است. در مرحلهٔ تجرید به طور موقت یک شاخه از ریاضیات را از سایر شاخه‌ها جدا می‌کنیم تا با تمرکز کامل روی آن کار کنیم، اما همواره باید ارتباطات را حفظ کنیم و با ترکیب و تلفیق با سایر مباحث به دست آوریم.

امروزه ما در امر تربیت محققین در کنار ادارهٔ موفقیت‌آمیز دوره‌های دکتری مشکلاتی هم داریم. به علت علاقهٔ وافر دانشجویان به ادامهٔ تحصیل در دوره‌های دکتری ریاضی و عدم توانایی کافی در همهٔ زمینه‌ها در مؤسسات تحقیقاتی و دانشگاه‌ها و در بعضی از مواقع کمبود امکانات و بودجه و وجود بعضی موانع تحقیقاتی، به جای تحقیقات اصیل، در بعضی موارد، مسائل و پروژه‌های مصنوعی ساخته و پرداخته می‌شود که حاصل آنها چاپ مقالاتی در مجلات «نامعتبر» می‌باشد. نامعتبر از این بعد که، این مقالات توسط هیچ ریاضیدانی خوانده نمی‌شوند و در نتیجه هیچ ارجاعی به آنها انجام نمی‌شود. به نظرم برای مقابله با این مشکل بهتر است به تدریج کارهای دسته جمعی و مشترک گسترش یابند. پروژه‌های قوی و غنی، با توجه به یکپارچه‌نگری در ریاضیات، تعریف شود و سپس مسائل مختلف از درون این ایده‌ها بیرون آید. ارتقاء سطح تحقیقات، ایجاد فضای انجام کارهای تحقیقاتی مشترک، تحول در بودجه‌های تحقیقاتی و لزوم توجه به تحقیقات بنیادی می‌تواند در آینده باعث تحول عمیق و شگرف در دوره‌های دکتری و تربیت محققین زبردست شود. بدینوسیله، می‌توان امیدوار بود که در آینده‌ای نه چندان دور جوانان ما تحقیقات خود را به سطحی برسانند که

مدال فیلدز در ریاضیات و جایزهٔ نوبل در سایر رشته‌ها را از آنِ خود سازند.

نگرش‌های مختلف به پژوهش‌های ریاضی

در تحولات قرن‌های نوزدهم و بیستم علاوه بر تحول در شیوه‌های تحقیق و ایجاد ارتباط عمیق بین ریاضی و فیزیک، پیشگامان ریاضی مدارس و مکاتب خود را بنیان نهادند و از این مراکز افکار و تحقیقات خود را در سراسر جهان گسترده‌اند. مثلاً می‌توان به مکتب هیلبرت و گوتینگن در آلمان، گروتندیک و بورباکی در فرانسه و پرینستون در آمریکا اشاره کرد که محل تربیت محققین بزرگ ریاضی هستند. زمانی، در دوران طلایی تمدن ایرانی ــ اسلامی نیز این نوع مدارس و مکاتب وجود داشته‌اند که افکار و یافته‌های خود را به جهان آن زمان ارسال می‌کردند. امیدوارم که روزی دیگر شاهد چنین تحولی باشیم.

مایکل عطیه رفتاری که با ریاضیدانان در کشورهای مختلف می‌شود به صورت زیر بیان می‌کند:

۱ــ در انگلستان مفهوم ریاضیات کلّی است و شامل ریاضیات اعم از محض و کاربردی است، و در گذشته با فلسفه توأم بوده است.

۲ــ در فرانسه، فلسفه و ادبیات و هنر جایگاه ویژه‌ای دارند و ریاضیات هم در این گروه جای می‌گیرد و جایگاه ویژه‌ای دارد.

۳ــ در آلمان، به طور سنتی استادان جایگاه ویژه‌ای دارند و ریاضیدانان هم در این جایگاه قرار دارند.

۴ــ از دیدگاه عمومی در آمریکا، ریاضیات به ریاضیات محض اطلاق می‌شود.

۵ــ دیدگاه و سنت ریاضیات روسی کاملاً متفاوت است و کمتر صوری است و از این رو، در این سنت مجموعه‌ای از مسائل ریاضی که تقریباً شامل اکثر دیسیپلین‌های ریاضی و حتی فیزیکی است با هم پیش می‌روند.[۳، صفحهٔ ۱۴]

همان طور که در سنت شرق و به ویژه در دوران طلایی تمدن ایرانی ــ اسلامی، تحقیق و تتبع در مفاهیم ریاضی، براساس فلسفه به طور دقیق و کامل انجام می‌شد و این امر باعث شکوفایی در این دوران گردید.

نکاتی دربارهٔ انتقال ایده‌ها

تبیین روش‌های انتقال ایده‌ها به ویژه ایده‌های پژوهشی و بالاخص آن ایده‌های پژوهشی که محتمل به رسیدن به نتایج مطلوب باشند، تا اندازه‌ای مشکل است، و بخشهایی از آن ریشه در آموزش ریاضی دارد. اما، می‌توان در انتقال مفاهیم به نکات مهم زیر متوسل شد:

الف) همواره باید در ذهن خود ریاضیات را به عنوان یک دانش یک پارچه مدنظر داشت و

حتی‌المقدور ایده‌ها را در این ارتباط در نظر گرفت.

ب) تقسیم ریاضیات و مطالعه و تحقیق دیسیپلین‌های خاص برای سهولت در پژوهش ضروری است.

ج) اگر چه ریاضیات به دو بخش عمدهٔ محض و کاربردی تفکیک شده است، باید تصور ذهنی این باشد که در محض‌ترین شرایط به کاربردی‌ترین ریاضیات کمک می‌کنیم و متقابلاً تحقیق و پژوهش در مسائل کاربردی نیازمند مدلهای محض است که ساختن آنها از عهدهٔ ریاضیات محض برمی‌آید و یا با همکاری و تعامل ریاضیات محض و کاربردی حاصل می‌شود.

نتیجه می‌شود که:

۱— ایده‌های اصلی ایده‌هایی هستند که از جهان واقعی می‌آیند. نظریه‌های مجزا و منفرد ارزشی ندارند، مگر آن که به طور تصادفی ایده‌ای بسیار پیشرفته از زمان خود باشد.

۲— در تصورات ذهنی همواره تصور هندسی و تصور جبری به وجود می‌آید و برحسب شرایط در یکی از دو جهت ادامه پیدا می‌کند. به نظرم اگر بتوان تصورات را براساس ترکیبی از این دو ایجاد کرد مفید فایدهٔ بیشتری خواهد شد.

۳— برای دریافت و شهود یک ایدهٔ خوب نیازمند اطلاعات وسیعی از دانش ریاضی هستیم.

۴— فهم عمیق و خوب مسأله و تفکر عمیق دربارهٔ آن، ذهن را برای حل، یا توسیع آن و یا توسیع نظریه‌هایی در اطراف آن آماده می‌کند، در حالی که ممکن است اصل مسأله حل نشود. نظریه‌های زیادی وجود دارند که به این صورت شکوفا شده‌اند. شاید یک مثال ساده حدسیهٔ فرما است که بیان می‌کند معادلهٔ $x^n + y^n = z^n$ به‌ازای $n \geq ۳$ در مجموعه اعداد صحیح جواب ندارد. این حدسیه در طول سالهای طولانی نظریه‌های فراوانی در ریاضیات به وجود آورد و بالاخره، توسط آندره و وایلز با توسل به ابزارهای هندسه، هندسهٔ جبری و نظریهٔ اعداد حل شد.

۵— گاهی تراکم مطالب در ذهن و کوشش در جهت پیدا کردن ارتباط بین آنها و تصادم آنها چنان جرقه‌ای در ذهن می‌زند که نظریه‌ای جدید به وجود می‌آید.

٦— ارتباط با ریاضیدانان، شرکت در کنگره‌ها، کنفرانس‌ها، سخنرانی‌ها و مطالعهٔ آثار ریاضیدانان بزرگ در رسیدن به ایده‌های خوب و توسیع آنها کمک شایانی می‌کنند.

مثال. فروبینوس در ۱۸۹۰ میلادی در تعدادی از مقالات، نظریهٔ نمایش گروهها را روی گروه‌های متناهی انجام داد. شاگرد او شور[1] ایده‌های او را در اوایل قرن بیستم ادامه داد. هرمان وایل، نظریهٔ

1) Issai Schur

نمایش را به گروههای فشرده توسیع داد. وایل از تبار ریاضیدانان با ایده‌های هندسی است و ریاضیدان برجسته‌ای است که در نظریهٔ نمایش گروهها، معادلات دیفرانسیل، هندسهٔ دیفرانسیل و فیزیک نظری پیشگام بود. نگرش او به ریاضیات به عنوان یک مجموعهٔ کامل بود. این ایده‌ها در قضیهٔ بسیار مهم پیتر ـ وایل [۱] در ۱۹۲۷ به ثمر نشست که هر گروه موضعاً فشرده به اندازهٔ کافی نمایش تحویل‌ناپذیر دارد. از سوی دیگر، گرچه از نظر فلسفهٔ ریاضی هیلبرت به عنوان یک ریاضیدان صورت‌گرا شناخته شده است ولی ایده‌های او باعث تحولات شگرف در زمینه‌های مختلف ریاضیات شد، تا جایی که می‌توان مسألهٔ پنجم هیلبرت را زیربنای آنالیز هارمونیک دانست. مسألهٔ پنجم او چنین است: آیا هر گروه توپولوژیک موضعاً اقلیدسی یک گروه لی است؟ در واقع، علّت بیشترین توسعهٔ آنالیز هارمونیک، به ویژه در بین دو جنگ جهانی، توسعهٔ فیزیک کوانتم است. وایل، فون نویمن و ویگنر [۲] جهت مطالعهٔ عمیق فیزیک کوانتم، آنالیز هارمونیک را توسعه داده‌اند. ویگنر در مقاله‌ای در ۱۹۲٦ میلادی تشخیص داد که نظریهٔ نمایش گروه‌های متقارن فروبینوس در مورد مطالعهٔ توابع موجیِ دستگاه چندنقطه‌ای مناسب است.

در این مقاله ویگنر از فون نویمن به علت در اختیار گذاشتن کارهای فروبینوس و شور تشکر کرده است. این مقاله را می‌توان اساس آنالیز هارمونیک ناجابجایی یعنی آنالیز هارمونیک روی $G = S_n$ دانست. در ۱۹۲۷ میلادی، ویگنر در گوتینگن دستیار هیلبرت بود. در این مرکز او و چندین ریاضیدان و فیزیکدان را ملاقات کرد و با پاسکال جردن [۳] همکاری نزدیک داشت. همکاری این دو منجر به تألیف مقاله [۴]ای شد که به وسیلهٔ جردن، فون نویمن، و ویگنر به چاپ رسید [۲].

در این مقاله رده‌بندی جبری جردن با بعد متناهی روی R، و شامل حالت‌هایی استثنایی از هشت‌تایی کیلی [۵] به دست آمده است. برای تبیین مباحث فوق می‌توان به اجمال به روند توسعهٔ آنالیز هارمونیک ناجابجایی پس از مسألهٔ پنجم هیلبرت به شرح زیر اشاره کرد:

۱ — اولین مقاله که در ارتباط با مسألهٔ پنجم هیلبرت در ۱۹۲۷ توسط فون نویمن نوشته شد، تحت عنوان «هر نمایش با بعد متناهی و پیوسته از یک گروه لی به طور اتوماتیک دیفرانسیل‌پذیر، یعنی تحلیلی است» می‌باشد.

۲ — تشخیص داده شد که آنالیز را باید روی گروههای موضعاً فشرده توسیع داد. گروه R^n اندازهٔ لبگ می‌پذیرد، یک گروه لی با بعد متناهی، اندازهٔ پایای چپ یعنی فرم دیفرانسیل‌پذیر دارد. در نتیجه اثبات وجود اندازهٔ هار روی گروه‌های موضعاً فشرده در ۱۹۳۳ میلادی تکمیل شد. اثبات یکتایی بعداً ارائه گردید.

۳ — با همکاری هار و فون نویمن مسألهٔ وجود اندازهٔ هار سامان یافت و مقالات آنها در پشت سر هم در "Annals of Math." چاپ شد.

1) F., Peter - H., Weyl 2) E. P., Wigner 3) Pascal Jordan 4) On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalisim. 5) A. Cayley

۴ــ فون نویمن برهان ساده‌ای برای اثبات اندازهٔ هار روی گروه‌های توپولوژیک فشرده ارائه داد.

۵ــ تعمیم برهان فون نویمن به گروه‌های موضعاً فشرده این بار به مفهوم دیگری به نام میانگین رسید و شاخهٔ جدیدی در ریاضیات تحت عنوان میانگین‌پذیری و نظریهٔ توابع تقریباً متناوب را ظاهر کرد. این مفهوم جدید کاملاً با مفهوم میانگین در آمار و احتمال مقدماتی سازگار است. بدون شک آمار و احتمال همواره از نظریه‌های محکم ریاضیات محض استفاده کرده است. کارهای فون نویمن در راستای مسألهٔ بور[1] بود که منجر به کشف توابع تقریباً متناوب شد. از این رو گروه‌های توپولوژیک به دو دستهٔ ذیل تقسیم شدند:

الف) گروه‌های به طور مینیمال تقریباً متناوب، یعنی گروه‌هایی که توابع تقریباً متناوب نمی‌پذیرند.

ب) گروه‌های به طور ماکسیمال تقریباً متناوب، یعنی گروه‌هایی که توابع تقریباً متناوب کافی می‌پذیرند که مجموعهٔ آنها نقاط G را جدا می‌کند. بالاخره این مسأله توسط وایل به انتها رسید:
«گروه توپولوژیک G به طور ماکسیمال تقریباً متناوب است اگر و فقط اگر به طور پیوسته در یک گروه فشرده نشانده شود». این قضیه نیز به نوبهٔ خود نظریهٔ جدید فشرده‌سازی را وارد آنالیز هارمونیک کرد.

۶ــ زیرجبرهای $B(H)$ تحت عنوان جبرهای فون نویمن محصول دیگر این مطالعات است، که تعمیم جبرهای C^* است [۲].

در ادامهٔ این مقاله به اجمال در مورد ویژگی‌های ریاضیات قرن بیستم و پیش‌بینی ریاضیات قرن بیست و یکم از دیدگاه عطیه می‌پردازیم. قبل از ارائهٔ دیدگاه‌های عطیه نکاتی کلی در مورد ویژگی‌های ریاضیات قرن بیستم می‌آوریم. ابتدا باید اذعان کرد که مقالهٔ هایزنبرگ در مورد عدم قطعیت، ارائهٔ نظریهٔ نسبیت توسط انشتین، ابداع رایانه‌ها توسط تورینگ، تحقیقات فون نویمن در زمینهٔ آنالیز و ریاضیات کاربردی از پیشرفت‌های مهم قرن بیستم است. باید اعتراف کرد که زمینهٔ به وجود آمدن این اندیشه‌ها و نیز ابداع کامپیوتر بدون ارتباط با ساختارهای منطقی و جبری هیلبرت نیست و حتی ریشه‌های آن در اندیشه‌ها و دیدگاه‌های ساختاری بول نهفته است. از این رو، چنان که تأکید کردیم تقسیم‌بندی ریاضیات به جبر، آنالیز، هندسه، کاربردی، احتمال و غیره فقط می‌تواند توجیهی برای مطالعهٔ دقیقتر باشد و هیچ توجیه دیگری نمی‌تواند داشته باشد. پیشرفت علوم و به ویژه دانش ریاضی یک جریان کاملاً پیوسته و یک‌پارچه است. منتها در سده‌ها و دهه‌های اخیر این پیشرفت فوق‌العاده است. مثلاً می‌گویند پیشرفت علوم در آخرین دههٔ قرن بیستم به اندازهٔ تمام پیشرفت آن بوده است.

1) Harold Bohr

بسیاری از پیشرفت‌ها وابداعات مهم ریاضی در فرهنگ ریاضی عصر حاضر جذب شده است و از این رو، اهمیت این بخشها آن چنان که باید و شاید پدیدار و آشکار نیست. ما بسیاری از قضایای مهم را در تدریس خود بیان می‌کنیم و برهان‌های آنها را با استفاده از مراجع درسی و کتاب‌ها و مقالات می‌آوریم بدون این که بدانیم این قضایا چگونه و براساس چه ایده‌هایی ساخته و پرداخته شده‌اند. شناخت سیر تحول مفاهیم نه تنها کمک ارزنده‌ای به پژوهش می‌کند بلکه از نظر آموزشی هم حایز اهمیت فراوان است.

ویژگی‌های ریاضیات قرن بیستم را می‌توان با استفاده از دیدگاه‌های عطیه به صورت ذیل بیان کرد: [۱]

۱ ـ **عبور از وضعیت موضعی به غیرموضعی:** یعنی به جای مطالعهٔ خواص اشیاء و نگاشت‌ها در یک نقطه و یا در یک همسایگی، این مطالعه را در یک وضعیت کلی انجام می‌دهیم. توپولوژی بهترین مثال است که توسط پوانکاره جهت مطالعهٔ حالت‌های غیرموضعی به کار گرفته شد. آنالیز مختلط مثال دیگری است. از دیدگاه وایراشتراس آنالیز مختلط مطالعهٔ توابعی بود که به وسیلهٔ سری‌ها ارائه می‌شد. اما در قرن بیستم این توابع از دیدگاه غیرموضعی مورد مطالعه قرار گرفتند. در سایر شاخه‌ها نیز چنین اتفاقی افتاده است.

۲ ـ **تعمیم بعد:** در حالت کلاسیک در آنالیز و آنالیز مختلط بحث توابع در مورد توابع یک یا دو متغیره بود و در این قرن به متغیرهای بیشتر گسترش پیدا کرد و بالاخره آنالیز مختلط n متغیره که بسیار مشکل‌تر از آنالیز با دو متغیر است، توسعه یافت. چنین اتفاقی در مورد هندسهٔ دیفرانسیل هم اتفاق افتاد و هندسهٔ منیفلد گسترش یافت. در جبر خطی، فضاهای خطی با بعدهای متناهی مورد بررسی قرار می‌گرفت ولی در این قرن فضاهای خطی به فضاهای هیلبرت و سایر فضاهای با بعدهای نامتناهی توسیع یافت. توابع نیز به توابع از تعداد متغیرهای نامتناهی و به توابعی از توابع یعنی تابعکها گسترش یافت.

۳ ـ **عبور از جابجایی به ناجابجایی:** موضوع سوم عبور از جابجایی به ناجابجایی است شاید بتوان گفت که خاصیت ناجابجایی یکی از ویژگیهای ریاضیات و به ویژه، جبر این قرن است. البته ریشهٔ این ایده در ریاضیات قرن نوزدهم است و دارای پشتوانه‌های مختلف است. ولی ریشهٔ اصلی آن در کواترنیون هامیلتون قرار دارد که در واقع منجر شد به آنچه که میدان ناجابجایی نامیده می‌شود. دیدگاه هامیلتون از ایده‌های فیزیکی نشأت گرفته بود. دیدگاه دیگری که منجر به وضعیت ناجابجایی شد کارهای گراسمن[1] بود که اکنون به صورت فرمهای دیفرانسیل پذیر در آمده است. تحقیقات کیلی روی ماتریس‌ها و نظریهٔ گالوا نیز همه به حالتهای ناجابجایی منجر شد. در نتیجه، همهٔ این‌ها پایه‌ای برای تعریف ضرب در جبرهای ناجابجایی شد. با کمال تعجب ایدهٔ ناجابجایی در جهت‌های

1) H. G. Grassmann

مختلف منجر به کاربردهای وسیع شد. کاربرد ماتریس‌ها و ضرب ناجابجایی در نظریهٔ کوانتوم در فیزیک ظاهر شد. روابط مرکزساز هایزنبرگ مثال مهمی از کاربرد جبر ناجابجایی در فیزیک است. این ایده‌ها در نهایت به وسیلهٔ فون نویمن تحت عنوان جبر عملگرها توسیع یافت که در واقع از زیرجبرهای $B(H)$ است که مرکز ساز دوگانهٔ آنها با خود جبر یکسان است.

۴ ــ خطی به غیرخطی: بخش عمده‌ای از ریاضیات کلاسیک یا خطی است، و اگر خطی نباشد، تقریباً خطی است. مطالعهٔ نظریهٔ غیرخطی واقعاً مشکل‌تر است و فقط در قرن بیستم انجام شده است. این داستان از هندسهٔ اقلیدسی شروع می‌شود که هندسهٔ اقلیدسی، هندسهٔ صفحه، فضا، خطوط راست است یعنی همه چیز خطی است. این هندسه سپس طی مراحلی به هندسه‌های نااقلیدسی توسیع یافته است، مثلاً، به هندسهٔ ریمانی توسیع یافته است که همه چیز غیرخطی است. در معادلات دیفرانسیل هم مطالعهٔ جدی پدیده‌های غیرخطی گسترش بیشتر یافته است. در فیزیک معادلات ماکسول [۱] (معادلات اساسی الکترومغناطیس) معادلات دیفرانسیل خطی نسبی هستند. در حالی که معادلات معروف یانگ ــ میلز [۲] غیرخطی هستند. در واقع، این معادلات، صورتهای ماتریسی معادلات ماکسول هستند.

۵ ــ هندسه در مقابل جبر: تاکنون ایده‌های مشترک و کلی را بیان کردیم. حال به یک دوگانگی می‌پردازیم. هندسه و جبر دو ستون اصلی ریاضیات هستند و هر دو قدیمی‌اند. هندسه ریشه در تمدن یونانی و جبر ریشه در تمدن ایرانی، هندی، و اسلامی دارد. از این رو، هر دو در ریاضیات اساسی هستند ولی رابطهٔ راحتی نداشته‌اند. دوباره از هندسه اقلیدسی شروع می‌کنیم. این هندسه مثال خوبی از یک ساختار ریاضی است که تا زمان ابداع هندسهٔ تحلیلی به وسیلهٔ دکارت هندسی باقیمانده بود ولی از این به بعد مختصاتی شد. می‌توان گفت که این اقدام اولین قدم برای جبری کردن هندسه بود. از دیدگاه عطیه این حملهٔ بزرگی از طرف هندسه به جبر بود. اگر به آنالیز برگردیم و با آن مقایسه کنیم دیدگاه نیوتن اساساً هندسی، در حالی که دیدگاه لایب‌نیتز اساساً جبری بود. برای نیوتن، حسابان، وسیله‌ای برای تبیین قوانین طبیعت بود. او با فیزیک در ارتباط بود و فیزیک او در عالم هندسی رخ می‌داد. زمانی که او حسابان را ابداع کرد، آن را ابزاری برای جهان فیزیکی و پدیده‌های فیزیکی می‌دانست. از این رو، بحث‌های هندسی را ترجیح می‌داد. دیدگاه لایب‌نیتز، کاملاً جبری و در مقابل نیوتن قرار داشت و نمادهای آن کاملاً متفاوت بود. اگرچه ایده‌های لایب‌نیتز حاکم شد ولی به هر حال روح نیوتن هنوز در حسابان حضور دارد.

در پایان قرن نوزدهم دو ریاضیدان برجسته، پوانکاره و هیلبرت به ترتیب حواریون نیوتن و لایب‌نیتز بودند.

---

1) Maxwell   3) Yang-Mills

ایده‌های پوانکاره به عنوان مبدع توپولوژی ادامهٔ تفکر هندسی بود. در حالی که هیلبرت بزرگترین ریاضیدان صورتگرا بود. ایده‌های او فرمول‌بندی، اصل موضوعی کردن ریاضیات و ارائهٔ پایه‌های محکم برای ریاضیات بود. می‌توان آرنولد را وارث پوانکاره و نیوتن دانست و بورباکی[1] را وارث هیلبرت. به طور کلی، در تفکر هندسی بیشتر با مفاهیم سروکار داریم در حالی که در تفکر جبری اعمال ماشینی ما را به نتیجه می‌رساند. بحث بین جبر و هندسه را نمی‌توان به نفع یکی خاتمه داد. عطیه می‌گوید بحث این که شما تنها یک جبردان و یا هندسه‌دان باشید مثل این است که کور یا کر هستید.

تکنیکهای مشترک

از دیدگاه عطیه، تکنیک‌ها و روش‌های مشترکی که در ریاضیات قرن بیستم مشاهده شده است عبارتند از نظریهٔ همولوژی، نظریهٔ کی، گروه‌های لی و گروه‌های متناهی ([۱]). در ذیل به تفصیل به هر یک می‌پردازیم:

نظریهٔ همولوژی

به طور سنتی نظریهٔ همولوژی به عنوان شاخه‌ای از توپولوژی شروع شده است. فرض کنید یک ساختار پیچیدهٔ توپولوژیکی دارید و می‌خواهید از آن اطلاعات ساده‌ای شامل تعداد حفره‌ها و یا چیزهای مشابه به دست آورید، در این صورت نوعی پایاهای خطی جمعی به این فضای پیچیده نسبت می‌دهید، که یک ساختار از پایاهای خطی در وضعیت غیرخطی است. از نظر هندسی، می‌توان در مورد «دورها» چنین تصور کرد که می‌توان آنها را با هم جمع و یا از هم کم کرد و یک گروه همولوژی در یک فضا به دست آورد. همولوژی یک ابزار بسیار قوی جبری است که در نیمهٔ اول قرن بیستم به عنوان روشی برای به دست آوردن فضاهای توپولوژیک ابداع شد. همولوژی در شاخه‌های دیگر نیز ظاهر می‌شود. نوع دیگری از همولوژی به کارهای هیلبرت در مطالعهٔ چندجمله‌ای‌ها برمی‌گردد. چندجمله‌ای‌ها توابع غیرخطی هستند و با ضرب آنها می‌توان به درجات بالاتر رسید. بصیرت عمیق هیلبرت او را به تعریف «ایده‌آل‌ها» یعنی ترکیب خطی از چندجمله‌ای‌ها

---

۱) نیکولا، بورباکی نام مستعار گروهی از ریاضیدانان فرانسوی است که براساس مکتب هیلبرت از سال ۱۹۳۹ تألیف کتب ریاضی را به عنوان یک دانش واحد شروع کردند. بورباکی در آثار خود به روش اصل موضوعی سخت پایبند است. اعتقاد بر این است که ریاضیدانان معروفی چون هنری کارتان، س. شوالیه، ژان دیودنه، آندره وایل، از بنیانگزاران این گروه‌اند و گویا برحسب مقررات گروه اعضایی که به سن پنجاه‌سالگی می‌رسند استعفا می‌دهند. تا سال ۱۹۶۰ تعداد ۲۴ جلد از آثار بورباکی منتشر شده بود. در سالهای اخیر در ایران آثار دیگری از بورباکی تحت عناوین کتابچه خلاصه در زمینه‌های مختلف توسط آقای دکتر ارسلان شادمان استاد گروه ریاضی دانشگاه تهران به فارسی برگردانده شده و توسط انتشارات دانشگاه تهران منتشر شده است.

با صفرهای مشترک سوق داد. او به دنبال مولدهای این چندجمله‌ای‌ها بود، این مولدها ممکن است بیش از اندازه زیاد باشند او روابط بین آن‌ها را مورد مطالعه قرار داد و سپس روابط بین این رابطه‌ها را نگریست و سلسله مراتبی از روابط را به دست آورد که طریقهٔ بسیار محکمی برای مطالعهٔ چندجمله‌ای‌ها با ابزارهای خطی بود. به این طریق دستگاه بسیار پیچیده‌ای از روابط خطی به دست آورد که مطالعهٔ دستگاه غیرخطی چندجمله‌ای‌ها را به مطالعهٔ اشیاء خطی کاهش داد. نظریهٔ جبری همولوژی موازی نظریهٔ توپولوژیک آن است. این دو نظریهٔ هم اکنون با هم تلفیق شده و جبر همولوژیک را به وجود آورده‌اند. در هندسهٔ جبری، یکی از پیروزی‌های شادی‌بخش در ۱۹۵۰ میلادی گسترش کوهمولوژی بافه‌ها[۱] و تعمیم آن به هندسهٔ تحلیلی توسط مکتب لری[۲]، سر[۳]، و گروتندیک انجام گرفت که ترکیبی از ایده‌های توپولوژیکی ریمان ـ پوانکاره، ایده‌های جبری هیلبرت، با ترکیبی از آنالیز بود.

نظریهٔ همولوژی هنوز کاربرد وسیعی در تمام شاخه‌های جبر دارد. گروه‌های همولوژیک معمولاً اشیاء خطی را به اشیاء غیرخطی منسوب می‌کنند. می‌توان، مثلاً گروه‌ها، گروه‌های متناهی و جبرهای لی را در نظر گرفت و گروه‌های همولوژی را ساخت. همولوژی در نظریهٔ اعداد به کمک گروه گالوا کاربرد وسیعی پیدا کرده است. بالاخره تعمیم کوهمولوژی هاخشیلد به جبرهای باناخ توسط ریاضیدانان مختلف از جمله جانسون[۴] و هلمسکی[۵] سبب پیشرفت کاربرد آن در آنالیز و تسهیل در مطالعات شده است.

نظریهٔ کِی

ابزار دیگری که کاربرد وسیعی همانند همولوژی دارد و در بسیاری از شاخه‌های دانش ریاضی نفوذ کرده است نظریهٔ کی است. گرچه این نظریه تا اواسط قرن بیستم ظاهر نشد ولی ریشه در ریاضیات قرن نوزدهم دارد. نمایش گروه‌های متناهی به قرن گذشته برمی‌گردد ولی شکل جدید آن، «نظریهٔ کی»، بسیار جدید است. نظریهٔ کی را می‌توان ابزاری در مورد نظریهٔ ماتریس‌ها دانست که پایاهای آبلی برای این نظریه ساخته است. در حالی که ضرب ماتریس‌ها تعویض‌ناپذیر است، اثر، بعد و دترمینان پایاهای نظریهٔ ماتریس‌ها هستند و مطالعهٔ سیستماتیک این‌ها توسط نظریهٔ کی انجام می‌شود. ایدهٔ اصلی آن است که فرض کنید ماتریس‌های A و B جابجا نمی‌شوند، اما، اگر این دو ماتریس را در دو جایگاه متعامد در بلوک‌های مختلف قرار دهید آن‌گاه جابجا می‌شوند. یک مثال دیگر اضافه می‌کنم تا این دیدگاه عطیه روشن شود. در واقع، محاسبهٔ اندیس عملگر فردهلم دقیقاً نظریهٔ کی برای $B(H)$ و $K(H)$ است. عملگر فردهلم T، عملگری خطی روی یک فضای هیلبرت است که هسته و هم ـ هستهٔ آن دارای ابعاد متناهی می‌باشند. در این صورت $\mathrm{IndexT} = \dim \mathrm{kerT} - \dim \ker \mathrm{T}^*$ که در آن T^* عملگر الحاقی T است. نظریهٔ کی نیز همانند نظریهٔ همولوژی کوششی برای دریافت اطلاعات خطی از دستگاه‌های پیچیدهٔ غیرخطی است.

1) Sheaf 2) Leray 3) Serre 4) B. E. Johnson 5) A. Y. Helemskii

این کار، در هندسهٔ جبری با کارهای عمیق گروتندیک شروع شد که در بالا اشاره شد. در توپولوژی کارهای عطیه، توسیع کارهای گروتندیک است. عطیه می‌گوید: در حالی که تحقیقات گروتندیک با کارهای هیلبرت در ارتباط است، کارهای ما بیشتر در ارتباط با کارهای ریمان و پوانکاره دربارهٔ همولوژی است. در آنالیز تابعی، کاسپاروف[1] نظریهٔ کی را به C^*-جبرها توسیع داد. در واقع این تصور وجود دارد که نظریهٔ C^* ـ جبرها نظریهٔ «توپولوژی تعویض ناپذیر» است. در نتیجه نظریهٔ کی به دستگاه‌های ناجابجایی توسیع یافت. بسیاری از ایده‌ها توسط الن کن[2] به هندسهٔ دیفرانسیل تعویض‌ناپذیر توسیع یافته است.

عطیه به نکتهٔ مهم دیگری نیز اشاره می‌کند. وی می‌گوید فوق‌العاده جالب است که بدانیم ویتن[3] در تحقیق روی نظریهٔ ریسمان[4] در فیزیک بنیادی روش خیلی جالبی را شناسایی می‌کند که در آن نظریهٔ کی مدلی طبیعی برای «کمیت‌های پایا»[5] است. در حالی که در گذشته اعتقاد بر این بود که نظریهٔ همولوژی یک چهار چوب طبیعی برای این نظریه است، اکنون به نظر می‌آید که نظریهٔ کی پاسخ بهتری دراختیار می‌گذارد.

گروه‌های لی

منظور از یک گروه لی، گروهی توپولوژیک با ساختار تحلیلی است. این گروه‌ها نقش و سهم عمده‌ای در ریاضیات قرن بیستم دارند، گرچه سرآغاز آنها به قرن نوزدهم برمی‌گردد. سوفس لی[6] ریاضیدان نروژی در قرن نوزدهم، به همراه فلیکس کلاین[7] و دیگران «نظریهٔ گروه‌های پیوسته» را پیش بردند. اساساً، برای کلاین، گروه‌های لی وسیله‌ای برای یکسان سازی هندسهٔ اقلیدسی، و انواع مختلف هندسه‌های نااقلیدسی بود. گرچه این ایده در قرن نوزدهم شروع شد ولی در واقع در قرن بیستم جهش آن آغاز شد. ریاضیات قرن بیستم به شدت با نظریهٔ گروه‌های لی احاطه شده است. کلاین هندسه‌ها را فضاهایی همگن می‌دانست که می‌توان در آن‌ها اشیاء را بدون تغییر شکل حرکت داد، از این رو، هر هندسه را می‌توان با یک گروه طولپایی مشخص کرد. گروه اقلیدسی، هندسهٔ اقلیدسی را مشخص می‌کند، هندسه هذلولوی به وسیله گروه لی دیگری به دست می‌آید و بنابراین هر هندسهٔ همگن متناظر با یک گروه لی است. ولی بعد از کارهای ریمان در مورد هندسه، هندسه‌هایی به دست آمدند که همگن نیستند یعنی انحناء از نقطه‌ای به نقطه‌ای دیگر تغییر می‌کند و هیچ تقارن کلی در فضا وجود ندارد. با وجود این، بازهم گروه‌های لی نقش عمده‌ای بازی کردند و در سطح بینهایت کوچک‌ها ظاهر شدند، چون در این صورت در فضای مماس مختصات اقلیدسی حاکم است. از این رو، در فضای

1) G. G. Kasparov 2) Alain Connes 3) Witten

۴) بنا به اظهار نظر فیزیکدانان، نظریهٔ ریسمان موفق نبوده است.

5) Conserved Quantities 6) Sophus Lie 7) Felix Klein

مماس، به طور بینهایت کوچک، گروه‌های لی دوباره ظاهر می‌شوند. این نظریه‌ای بود که به وسیلهٔ الی کارتان[۱] گسترش یافت که پایهٔ هندسه دیفرانسیل نوین گردید و در واقع چهارچوبی شد که در نظریهٔ نسبیت اینشتین اساسی بود. بدون شک، نظریهٔ اینشتین نیز باعث گسترش عظیم هندسهٔ دیفرانسیل شد. به طوری که قبلاً هم اشاره کردیم گروه‌های لی در آنالیز سبب گسترش آنالیز هارمونیک تعویض ناپذیر شدند که در واقع توسیع نظریهٔ فوریه است که گروه‌های لی به کار رفته در آن دایرهٔ واحد و خط حقیقی است. با جایگزینی این گروه‌ها با گروه‌های پیچیدهٔ لی به نظریهٔ بسیار زیبایی از نظریهٔ نمایش گروه‌های لی و آنالیز می‌رسیم که اساس کارهای هریش چاندرا[۲] است. ممکن است این تصور پیش آید که گروه‌های لی فقط در زمینهٔ هندسه و متغیرهای پیوسته ظاهر می‌شوند در حالی که مشابه گروه‌های لی روی میدان‌های متناهی به گروه‌های متناهی منجر شده است و بسیاری از گروه‌های متناهی به این طریق حاصل شده‌اند.

گروه‌های متناهی

گروه‌های سادهٔ متناهی ما را به رده‌بندی گروه‌های متناهی سوق می‌دهد که در دههٔ هشتاد میلادی پایان یافته است. یک گروه ساده گروهی است که زیرگروه نرمال ندارد. قبلاً گروه‌های سادهٔ کشف شده عبارت بودند از گروه‌های دوری، گروه‌های متناوب و گروه‌های از نوع لی. ساده‌ترین این گروه‌ها، گروه‌های «دوری»اند که از اعداد صحیح به پیمانهٔ یک عدد اول با عمل جمع، تشکیل می‌شوند. این گروه‌ها حتی فاقد زیرگروه نابدیهی هستند. اولین گروه از این دسته از مرتبهٔ ۶۰ است که گالوا آن را کشف کرد. در ۱۹۰۶ ویلیام برنساید حدس زد که هر گروه سادهٔ متناهی (غیر از گروه دوری) دارای مرتبهٔ زوج است، در سال ۱۹۶۳ قدم مهم را برای حل نهایی والترفایت و جان تامسون برداشتند و حدس برنساید را اثبات کردند. بالاخره در ۱۹۶۵ به کمک روش فوق گروه‌های سادهٔ متفرق به دست آمد که گروه هیولا (مانستر) بزرگترین گروه متفرق بود. اکنون معلوم شده است که درست بیست و شش گروه سادهٔ متفرق موجود است. با این گروه‌ها و خانوادهٔ گروه‌های معلوم فهرست گروه‌های ساده متناهی کامل شد [۵]. در اینجا عطیه اعتراف جالبی دارد که نقل می‌کنیم. او می‌گوید: چند سال پیش زمانی که رده‌بندی گروه‌های سادهٔ متناهی رو به اتمام بود، در مصاحبه‌ای از من در مورد گروه‌های متناهی سؤال شد. عجولانه پاسخ دادم: فکر نمی‌کنم که چیز با اهمیتی باشد. توجیه من این بود که رده‌بندی گروه‌های سادهٔ متناهی اطلاعاتی در مورد گروه‌هایی می‌دهد که آنها را می‌شناسیم و استثناء کمی وجود دارد. به یک معنی دری را بسته است بدون این که در جدیدی بگشاید. ولی باید اعتراف کنم که در این فهرست از گروه‌های پراکنده یک هیولا وجود دارد که کشف آن در رده‌بندی بسیار شگفت‌آور است. این گروه ارتباط غیرمنتظره‌ای با قسمت‌های عمده‌ای از ریاضیات دارد. حتی با فیزیک نظری و نظریهٔ میدان کوانتومی در ارتباط است.

---

1) Elie Cartan   2) Harish Chandra

این محصول جالبی از رده‌بندی است. عطیه می‌گوید به طوری که اشاره شد، رده‌بندی دری را بست ولی این هیولا در دیگری را باز کرد.

بالاخره، از دیدگاه عطیه، در نیمهٔ اول قرن بیستم با حاکمیت رهیافت هیلبرت و ادامهٔ آن توسط گروه بورباکی تخصص گرایی در بخشهای مختلف ریاضی حاکم بود. ولی در نیمهٔ دوم آن مرزها از بین رفت، حوزه‌ها به هم نزدیک شدند و در نتیجه با تلفیق نظریه‌های مختلف نظریه‌های جدید با کاربردهای وسیعتر گسترش یافتند. و آخرین جمله از عطیه این است که برای سلامت ریاضیات در سطح تحقیقاتی، زنجیر ارتباط آن با فیزیک باید تا حد امکان حفظ شود.

مراجع

[1] Sir Michael Atiyah, OM, FRS, FRSE, Special Article, Mathematics in the 20th Century, *Bull. London Math.* Soc. 34(2002) 1-15.

[2] Jonathan Rosenberg, *A Panorma of Hungarian Mathematics in the Twentieth Century, Non-Commutative Harmonic Analysis*, University of Maryland (2001) 1-13.

[۳] گفتگو با مایکل اتیه، ترجمهٔ سیامک کاظمی، رشد آموزش ریاضی، سال سوم، شمارهٔ ۱۰، تابستان ۱۳۶۵، صص ۸ تا ۱۸.

[۴] علیرضا ـ مدقالچی، آنالیز هارمونیک از کجا شروع شده است و به کجا می‌رود، گزارش همایش ماهانه انجمن ریاضی ایران، جلد اول (۱۳۸۱)، صص ۵۹ تا ۶۹.

[۵] دوئل کننده و هیولا، یان استیوارت، ترجمهٔ علیرضا جمالی، نشر ریاضی، سال ۴، شمارهٔ ۱ و ۲، مرداد ۱۳۷۰.

علی‌رضا مدقالچی
دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر ـ دانشگاه تربیت معلم
پست الکترونیک medghalchi@saba.tmu.ac.ir

.

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۴ (بهار ۱۳۸۴) صص. ۵۹ تا ۸۰

مقدمه‌ای بر گروه خودریختی‌های درخت‌های ریشه‌دار منتظم و برخی زیرگروه‌های آن

محمد جلوداری ممقانی

۱ مقدمه

این مقاله به معرفی یکی از موضوع‌های واقع در نقطهٔ همرس رشته‌های نظریهٔ گروه، نظریهٔ گراف، علوم کامپیوتر و توپولوژی می‌پردازد. اگرچه امروزه گسترش روزافزون این رشته‌ها امکان تداخل آن‌ها را فراهم کرده است، اما، این امر قدمتی طولانی دارد. هنگامی که ماکس دن[1] در اوایل قرن بیستم مسألهٔ کلمه[2] در گروه‌ها را مطرح و آن را به روش ترکیبیاتی برای گروه‌های رویه[3] حل کرد، در واقع به‌طور ضمنی تداخل رشته‌های مذکور را نیز اعلام نمود. در آن زمان سؤال اصلی این بود که " آیا مسألهٔ کلمهٔ گروهی داده شده حل پذیر است؟" اکنون، اما، بدون این که آن سؤال اهمیت خود را از دست داده باشد سخن این است " گروه یا گروه‌هایی بسازید که مسألهٔ کلمهٔ آن‌ها حل‌پذیر باشد". با این نگاه می‌توان گروه‌های هذلولوی[4] گروموف[5] متعلق به نیمهٔ دوم دههٔ هشتاد و گروه‌های اتوماتیک ترستون[6]، کنون[7] و اپشتاین[8] متعلق به نیمهٔ اول دههٔ نود، و همچنین گروه‌های اتوماتون[9] که در این مقاله به آن‌ها نیز پرداخته می‌شود را در مقولهٔ پاسخ به این سؤال قرار داد.

به طور مشخص هدف این است که درخت‌های ریشه‌دار منتظم، مرز این نوع درخت‌ها، گروه خودریختی‌های درخت‌های منتظم و زیرگروه‌های خاص این گروه، به‌ویژه زیرگروه‌هایی موسوم به گروه‌های اتوماتون که به وسیلهٔ اشیایی موسوم به اتوماتون تولید می‌شوند را معرفی کنیم

1) Max Dehn 2) Word problem 3) Surface group 4) Hyperbolic group 5) Gromov
6) Thurston 7) Cannon 8) Epstein 9) Automaton group

تا شاید از این طریق موضوعی با طراوت و بین رشته‌ای معرفی شود و فقدان متنی به زبان فارسی در این خصوص از میان برود. در اینجا منظور از یک درخت ریشه‌دار منتظم، موجودی هندسی موسوم به گراف است که همهٔ رأس‌های آن بجز یکی بر تعداد مساوی، دست کم ۳، یال قرار دارند. این رأس استثنایی ریشه نام دارد و تعداد یال‌های متصل به آن یک واحد کمتر از تعداد مذکور است. انتظام موجود در این درخت تعریف یک خودریختی را بر آن تحمیل می‌کند، به این صورت که یک خودریختی یک درخت ریشه‌دار منتظم تابعی دو سویی از این درخت به خودش است که حافظ این انتظام باشد؛ به این معنی که ریشه را به ریشه بنگارد و مجاورت را حفظ کند. مجموعه‌ی تمام این خودریختی‌ها با عمل ترکیب توابع یک گروه است که گروه خودریختی‌های درخت ریشه‌دار نامیده می‌شود.

به طوری که خواهیم دید برخی از این خود ریختی‌ها را می‌توان به صورت بازگشتی تعریف کرد. به عبارتی نه چندان دقیق هرگاه چند خودریختی به صورتی بازگشتی به‌هم مرتبط باشند یک اتوماتون می‌سازند. زیرگروهی که این اتوماتون تولید می‌کند یک گروه اتوماتون نامیده می‌شود.

اگرچه با نگاهی به قضیهٔ ۲ (بخش ۱۰) وسعت حیطهٔ نفوذ گروه‌های اتوماتون را تا حدودی می‌توان شناخت، ولی به جرأت می‌توان گفت که نظریهٔ گروه‌های اتوماتون در حال گذر از دورهٔ نوزادی به دورهٔ کودکی است و راهی طولانی برای تکامل در پیش رو دارد. علاوه بر کاربردهای مذکور در این قضیه، گروه‌های اتوماتون در توپولوژی، احتمال، قدم‌زدن تصادفی، زنجیرهای مارکوف، نظریه ارگودیک ، سامانه‌های دینامیکی و نظریه گالوا کاربرد دارند و در حال حاضر از موضوع‌های روز تحقیقاتی ریاضیدانان در نقاط مختلف گیتی‌اند.

اگرچه سایر زیرگروه‌های گروه خودریختی‌های درخت‌های ریشه‌دار منتظم نظیر گروه‌های فرکتال، گروه‌های شاخه‌ای، گروه‌های شاخه‌ای ضعیف و ... اهمیتی کمتر از گروه‌های اتوماتون ندارند، ولی، به‌دلایل تاریخی و ارتباط با سایر شاخه‌های ریاضیات بیشترین مطالب این نوشته به گروه‌های اتوماتون اختصاص یافته است.

۲ تاریخچه

گروه‌های اتوماتون گروه‌هایی هستند که توسط اتوماتون‌های معکوس‌پذیر تولید می‌شوند و روی درخت‌های منتظم به صورت خودریختی عمل می‌کنند و از این رو زیرگروه‌هایی از گروه خودریختی های درخت‌های ریشه‌دار هستند. این گروه‌ها در سال‌های ٦٠ به پیشنهاد گولاشکف[1] [۱۹] نخستین بار در حل مسألهٔ برنساید[2] به‌کار گرفته شدند. این مسأله را که تأثیر عمیقی در جهت‌گیری تحقیقات در نظریهٔ گروه‌ها در قرن بیستم داشته است برنساید در ۱۹۰۲ به شرح زیر مطرح کرد [۱۸] .

هرگاه Γ گروهی با تولید متناهی باشد که مرتبهٔ همهٔ اعضای آن متناهی است آیا Γ لزوماً متناهی است؟

---

1) Gulashkov 2) Burnside

شور[1] و کاپلانسکی[2] اثبات کرده‌اند که اگر Γ با گروهی ماتریسی یک‌ریخت باشد حکم قضیهٔ برنساید درست است. همچنین گولُد[3] و شافارویچ[4] اثبات کرده‌اند که این حکم در حالت کلی نادرست است. یعنی گروه‌هایی با تولید متناهی وجود دارند که مرتبهٔ تمام اعضای آن‌ها متناهی اما مرتبهٔ خود گروه نامتناهی است [۶]. در اوایل دههٔ ۱۹۷۰ آلشین[5] با استفاده از اتوماتون‌ها نخستین بار برای این مسأله پاسخی منفی ارائه داد [۱]. اما نوآوری وی جدی گرفته نشد و ریاضیدانان بسیاری با ابداع روش‌های متفاوت به حل این مسأله مبادرت کردند. در آغاز دههٔ ۱۹۸۰ گریگورچوک[6] گروهی از تبدیل‌های اندازه نگه‌دار لبگ روی بازهٔ $[۰, ۱]$ ارائه داد که مجموعهٔ مولد آن چهار عضو مرتبهٔ ۲ دارد، نامتناهی است و مرتبهٔ هر عضو آن توانی از ۲ است [۱۱] و به این ترتیب یک بار دیگر برای مسالهٔ برنساید پاسخی منفی داده شد. جالب است بدانیم که گروه آلشین در نقطهٔ همرسی جبر و نظریهٔ اطلاع و گروه گریگورچوک در محل تلاقی جبر و نظریهٔ احتمال قرار دارند.

در سال ۱۹۸۳ گوپتا[7] و صدقی[8] p−گروه‌هایی معرفی کردند که آن‌ها نیز پاسخی منفی به مسألهٔ برنساید تأمین می‌کردند [۱۴]. در سال‌های بعد از ۱۹۹۵ ثابت شد که گروه‌های گریگورچوک، که اینک پیوستاری از آن‌ها موجود است، و گروه‌های گوپتا—صدقی، که اینک به تعداد آن‌ها بسیار افزوده شده‌است، همگی اعضای خانوادهٔ گروه‌های اتوماتون هستند. اما نظریه گروه‌های اتوماتون موقعی جان گرفت که برنر[9] ـ صدقی ـ ویرا[10] گروه BSV [۵] و گریگورچوک **گروه‌های شاخه‌ای همان نامتناهی**[11] [۸] را به ترتیب در سال‌های ۱۹۹۷ و ۱۹۹۸ معرفی کردند. گروه‌های گریگورچوک، گوپتا ـ صدقی و برنر ـ صدقی ـ ویرا مثال‌هایی از گروه‌های اتوماتون، شاخه‌ای و همان نامتناهی هستند. نویسنده نخستین بار مفاهیم مربوط به گروه‌های اتوماتون را در سال ۱۹۹۵ در دانشگاه صنعتی شریف از گریگورچوک آموخته است.

۳ گروه خودریختی‌های درخت‌های ریشه‌دار منتظم

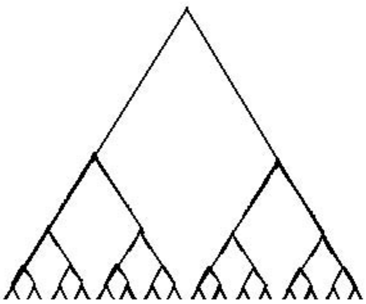
در این بخش درخت‌های ریشه‌دار منتظم و گروه خودریختی‌های آن‌ها را که در مقدمه از آن‌ها نام بردیم معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱. فرض کنید $d \geq ۲$ عددی صحیح باشد و مجموعهٔ $D = \{۰, ۱, \ldots d-۱\}$ را که در این نوشته الفبا، و هر یک از اعضای آن یک حرف خوانده خواهد شد در نظر بگیرید. هر دنبالهٔ متناهی از اعضای D را یک کلمه می‌نامیم. کلمه‌ای که شامل هیچ حرفی نباشد کلمهٔ تهی نامیده و با θ نشان داده می‌شود. مجموعهٔ تمام کلمه‌هایی که با الفبای D ساخته می‌شوند همراه با کلمهٔ تهی را با D^* نشان می‌دهیم. منظور از طول کلمهٔ u تعداد حرف‌هایی است (با شمارش تعداد تکرارهای هر حرف) که در u موجودند. طول u را با $|u|$ نشان می‌دهیم.

1) Schur 2) Kaplasnsky 3) Golod 4) Shafarevich 5) Aleshin 6) Grigorchuk
7) Gupta 8) Sidki 9) Brunner 10) Viera 11) Just infinite branch

به آسانی دیده می‌شود که D^* با عمل کنار هم نهادن یک **تکواره**[1] است. به این معنی که D^* تحت این عمل بسته و شرکت پذیر است. اگر $u, v, w \in D^*$ سه کلمه باشند و $w = uv$ می‌گوییم u یک پیشوند و v یک پسوند w است. چون $w = \theta w = w\theta$ پس w و θ نیز پسوند و پیشوندهای (بدیهی) w هستند. روشن است که تعداد پیشوند (پسوند)های یک کلمه به طول آن بستگی دارد. مثلاً هر کلمهٔ به طول ۳ چهار پیشوند و بنابراین چهار پسوند دارد.

یک نمود هندسی تکوارهٔ D^*، درخت ریشه‌دار و منتظم T_d است. رأس‌های T_d اعضای D^*اند و بین دو رأس u و v یال وجود دارد اگر اختلاف طول آن‌ها ۱ و کلمهٔ کوتاه‌تر یک پیشوند کلمهٔ بزرگتر باشد. بنابر این تعریف، از چهار کلمه‌ی ۱۱ ,۱۰ ,۰۱ و ۰۰ تنها دو کلمهٔ ۰۱ و ۰۰ رأس‌های مجاور به ۰ هستند. اگر u و ui دو رأس T_d باشند، یال بین آن دو را با $e = (u, ui)$ نشان می‌دهیم و u و ui را به ترتیب ابتدا و انتهای e می‌نامیم. بنابراین رأس دلخواه u به d رأس $u۰, u۱, \dots u(d-۱)$ توسط یال‌های متمایز وصل می‌شود و اگر $u = v'i$ آنگاه v' تنها رأسی است که یالی آن را به u وصل می‌کند. ازاین رو رأس متناظر با کلمهٔ تهی بجز رأس‌های $۰, ۱ \dots d-۱$ به هیچ رأسی وصل نمی‌شود. به این ترتیب گرافی نامتناهی حاصل می شود که یک درخت است و هر رأس آن بر $d + ۱$ یال قرار دارد جز یک رأس که بر d یال واقع است . این رأس که با θ متناظر است **ریشهٔ** این درخت نامیده می‌شود. این درخت را درخت **دِ ـ یی**[2] می‌نامیم و با T_d نشان می‌دهیم. شکل ۱، بخشی از درخت ریشه‌دار منتظم $T_۲$ را که همان درخت دودویی است نشان می‌دهد.



شکل ۱. بخشی از یک درخت دودویی ریشه‌دار

یک **مسیر** بین دو رأس u و v از درخت T_d دنباله‌ای چون $\{e_۱, \dots e_n\}$ از یال‌های T_d است به‌طوری‌که u ابتدای $e_۱$، انتهای e_i ابتدای $e_{i+۱}$ به ازای $i = ۱, ۲, \dots n-۱$ و v انتهای e_n است. یک **ژئودزیک** بین دو رأس u و v مسیری است بین این دو رأس که کمترین تعداد یال‌ها را دارد. این تعداد را **طول ژئودزیک** مذکور می‌نامیم. بنابراین طول کلمهٔ u با طول ژئودزیکی که بین

1) Monoid 2) $d-$array tree

ریشه و رأس u رسم می‌شود برابر است. به آسانی دیده می‌شود که اگر فاصلهٔ بین دو رأس T_d را برابر با طول ژئودزیک بین آن‌ها تعریف کنیم مجموعهٔ رأس‌های آن به یک فضای متریک تبدیل می‌شود و توپولوژی ناشی از این متریک توپولوژی گسسته است. در واقع هرگاه u یک رأس دلخواه در T_d و r، $0 < r < 1$، داده شده باشد آنگاه $B(u,r) = \{u\}$. بنابراین هر مجموعهٔ تک عضوی در توپولوژی مذکور باز است.

به ازای عدد صحیح و نامنفی n مجموعهٔ رأس‌های به طول n یعنی کرهٔ به مرکز θ و شعاع n در T_d را یک سطح تراز T_d می‌نامیم و آن را با L_n نشان می‌دهیم. بنابراین $L_n = \{v \in T_d | \ |v| = n\}$.

در شکل ۱ سطح‌های تراز L_0, L_1, L_2, L_3 را در درخت T_2 نشان داده‌ایم. به آسانی اثبات می‌شود که در درخت T_d تعداد اعضای سطح L_n برابر است با d^n. و این عدد برابر تعدادِ کلماتِ به طول n است که با d حرف ساخته می‌شوند.

علاوه بر سطح‌های تراز که نقش ویژه‌ای در مطالعهٔ ویژگی‌های T_d دارند، زیر درخت‌های T_d که مشابه خود آن هستند نیز در این مطالعه جایگاه مهمی دارند. برای تعریف این‌گونه زیردرخت‌ها کلمهٔ $u \in D^*$ یا به عبارت دیگر راس u از T_d را در نظر بگیرید. نمود هندسی مجموعهٔ تمام کلمه‌های $w = uv \in D^*$ با پیشوند u، یک درخت دِدِ ـ یی با ریشهٔ u است که زیر درختی از درخت T_d است. این زیردرخت را با T_u نشان می‌دهیم و آن را زیردرخت با ریشهٔ u یا زیر درختی که از u رشد کرده (آویزان) است، می‌نامیم. بین T_d و T_u رابطهٔ بسیار نزدیکی وجود دارد. در واقع تابع

$$\iota_u : T_d \to T_u, \iota_u(v) = uv$$

یک یکریختی بین درخت‌هاست. به این معنی که ι_u روی رأس‌های T_d یک به‌یک است، ریشهٔ T_d را به ریشه‌ی T_u می‌نگارد و مجاورت را حفظ می‌کند. توجه می‌کنیم که تابع

$$\tau_u : T_u \to T_d, \tau_u(uv) = v$$

معکوس تابع ι_u است. به ویژه به ازای $u = i \in D$ درخت‌های T_d و T_i یکریخت‌اند و

$$\iota_i : T_d \to T_i, \iota_i(v) = iv$$

و

$$\tau_i : T_i \to T_d, \tau_i(iv) = v$$

یکریختی‌هایی بین آن‌ها هستند.

۵ گروه خودریختی‌های T_d

در این بخش به معرفی مفهوم اساسی خودریختی یک درخت ریشه‌دار، گروه خودریختی‌های درخت‌های ریشه‌دار و چند مفهوم وابسته به آن می‌پردازیم و با ارائهٔ چند مثال به شرح بیشتر این

مفاهیم مبادرت می‌ورزیم.

تعریف ۳. منظور از یک خودریختی T_d تابعی چون $g: T_d \to T_d$ است به‌طوری‌که
الف) $\theta = g(\theta)$، یعنی g ریشه را ثابت نگاه می‌دارد؛
ب) g روی مجموعهٔ رأس‌های T_d دوسویی است؛
پ) g مجاورت را حفظ می‌کند، یعنی اگر $e = (u, v)$ یک یال از T_d باشد آنگاه $(g(u), g(v))$ یالی از $g(T_d)$ است.

بنابراین g سطح تراز L_1 را و در نتیجه هریک از سطح‌های L_n را به روی خودش می‌نگارد. یعنی تحدید g به $L_n, (n = 1, 2, \ldots)$ عضوی از گروه جایگشت‌های L_n $(n = 1, 2, \ldots)$، $S_{(L_n)}$ است. روشن است که مجموعهٔ $Aut(T_d)$ متشکل از تمام خودریختی‌های T_d با عمل ترکیب توابع یک گروه است که عضو خنثای این گروه تابع همانی است. این گروه را گروه خودریختی‌های T_d می‌نامیم.
در اینجا بهتر است به این نکته توجه کنیم که بین خودریختی‌های درخت T_d و خودریختی‌های تکوارهٔ D^* هیچ نسبتی وجود ندارد. و ما در این نوشته به هیچ وجه به خود ریختی‌های تکوارهٔ D^* نمی‌پردازیم.
برای روشن‌تر شدن مفهوم خودریختی درخت ریشه‌دار چند مثال می‌آوریم.

مثال ۱. تابع $a: T_2 \to T_2$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a(u) = \begin{cases} \theta & u = \theta \\ 1v & u = 0v \\ 0v & u = 1v \end{cases}$$

این خودریختی که دو رأس ۰ و ۱ را به یکدیگر و هر رأس به صورت $u = 0v$، با حرف اول ۰ را به رأس $u' = 0v$ و نیز در رأس $u = 1v$ با حرف اول ۱ را به رأس $u' = 0v$ می‌نگارد خودریختی ریشه‌دار T_2 نامیده می‌شود. ملاحظه می‌کنیم θ تنها نقطهٔ ثابت a است و ترکیب a با خودش همانی است یعنی $aoa = i$. بنابراین گروه $Aut(T_2)$ دارای اعضای تابدار است. معمولاً a را با $a = (1, 1)\epsilon$ یا به اختصار با $a = \epsilon$ نشان می‌دهیم.

مثال ۲. برای بدست‌آوردن خودریختی پیچیده‌تری از T_2 ابتدا رأس u از T_2 و زیر درخت T_u از آن با ریشهٔ u را در نظر می‌گیریم . اکنون با استفاده از خودریختی a در مثال ۱، خودریختی $a_u: T_2 \to T_2$ را به این صورت تعریف می‌کنیم که

$$a_u(w) = \begin{cases} ua(v) & w = uv \\ w & \text{درغیراین‌صورت} \end{cases}$$

از این که درخت‌های T_2 و T_u (بخش ۲) یکریخت‌اند نتیجه می‌گیریم که روی T_u رابطهٔ $a_u \iota_u = \iota_u a_u$ برقرار است. با توجه به این رابطه می‌گوییم خودریختی a_u روی زیر درخت T_u مانند خودریختی a روی درخت T_2 عمل می‌کند و روی بقیه‌ی درخت T_2 همانی است. روشن است که

$a_u^2 = i$ و $a_u \neq a$.

با توجه به نامتناهی بودن T_2 از این مثال‌ها نتیجه می‌شود که $Aut(T_2)$ نیز نامتناهی است و بینهایت عضو از مرتبهٔ متناهی دارد. یک سؤال طبیعی این است که به ازای عدد طبیعی n آیا $g \in Aut(T_2)$ وجود دارد که g^n همانی باشد. پاسخ این سؤال با توجه به مثال‌های فوق به ازای $n = 2^k, k = 1, 2, \ldots$ مشکل نیست. مثلاً به ازای $n = 4$ با استفاده از نمادها و تعبیرهای مثال‌های ۱ و ۲ خودریختی b از T_2 با تعریف $b = (((a, 1)\epsilon, 1), 1)$ از مرتبه‌ی ۴ است. و سؤال دوم این است که آیا $g \in Aut(T_2)$ یی وجود دارد که مرتبه‌اش نامتناهی باشد؟

مثال ۳. به طوری‌که در مثال ۲ دیدیم برخی از خودریختی‌های درخت‌های ریشه‌دار را می‌توان با استفاده از خود ریختی‌های شناخته شده بدست آورد. در اینجا نمونهٔ دیگری از این خود ریختی‌ها را ارائه می‌دهیم. فرض می‌کنیم v و w دو رأس T_2 باشند و $a_{v,w} : T_2 \to T_2$ را طوری تعریف می‌کنیم که روی T_v و T_w به ترتیب مانند a_v و a_w مثال ۲ عمل کند و در سایر رأس‌های T_2 همانی باشد. این در واقع یک تعریف استقرایی است . برای نمونه فرض می‌کنیم $v = 0$ و $w = 1$ و $a_{0,1}$ را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$a_{0,1}(u) = \begin{cases} u & u = \theta, 0, 1 \\ a_0(u) & u = 0u' \\ a_1(u) & u = 1u' \end{cases}$$

که در آن u' کلمه‌ایست با طول مثبت. $a_{0,1}$ را به صورت $a_{0,1} = (a_0, a_1)$ می‌نویسیم و برابری را مانند مثال ۲ تعبیر می‌کنیم.

اکنون می‌توان پرسید که اگر $u = u_1 u_2 \cdots u_n$ یک نقطهٔ ثابت $g \in Aut(T_2)$ باشد آیا پیشوندهای آن نیز نقاط ثابت g اند؟

مطالب دو مثال فوق را می‌توان مورد به مورد دربارهٔ هر یک از اعضای S_d و درخت ریشه‌دار T_d تکرار نمود.

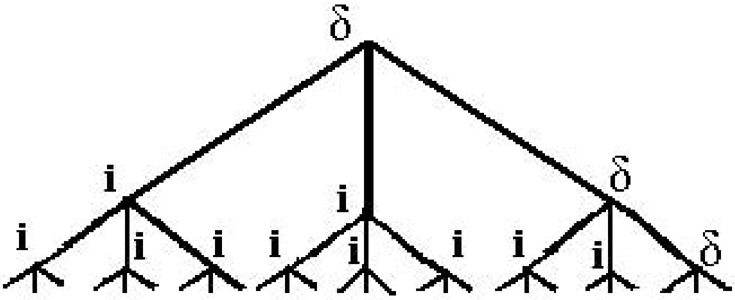
مثال ۴. می‌خواهیم با استفاده از $\lambda = (0, 2, 1) \in S_3$ یک خود ریختی از T_3 را تعریف کنیم . نگاشت b از مجموعه رأس‌های T_3 به خود این مجموعه را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$b(u) = \begin{cases} \theta & u = \theta \\ 2 & u = 0 \\ 0 & u = 1 \\ 1 & u = 2 \\ \overline{x}v & u = xv \end{cases}$$

که در آن $\overline{x}$ به معنی $\lambda(x)$ است. به آسانی دیده می‌شود که b یک خود ریختی T_3 است ، $b^3 = 1$ و بجز θ نقطهٔ ثابت دیگری ندارد. ملاحظه می‌کنیم که b حرف اول هر کلمه را با به کار بردن λ تغییر می‌دهد و بقیهٔ کلمه را ثابت نگاه می‌دارد. از این رو می‌نویسیم $b = (1, 1, 1)\lambda$ ، یابه اختصار $b = \lambda$. بنابراین تمام مؤلفه‌های b همانی‌اند.

هر عضو $g \in Aut(T_d)$ رأس‌های درخت T_d را به طور یکتایی برچسب گذاری می‌کند. به این ترتیب که تحدید g به سطح تراز L_n به ازای هر n یک عضو گروه تقارن L_n یعنی S_{L_n} است. برای روشن‌تر شدن مطلب به ازای $n \geq 1$ عضو $u \in L_{n-1}$ را در نظر بگیرید. رأس‌های مجاور u در سطح L_n عبارتند از $u0, u1, \cdots, ud-1$. بنا به تعریفِ خودریختی، رأس‌های مجاور $g(u) = v$ عبارتند از $\{g(u0), g(u1), \cdots, g(ud-1)\} = \{vg(0), vg(1), \cdots, vg(d-1)\}$ و بنابراین g یک جایگشت متعلق به S_d روی $\{u0, u1, \cdots, ud-1\}$ القا می‌کند. این جایگشت را با $g(u)$ نشان می‌دهیم، و آن را **برچسب** رأس u قرار می‌دهیم. اگر تمام رأس‌های T_d را به این صورت برچسب‌گذاری کنیم، درخت برچسب‌دار حاصل را چهره[1] g می‌نامیم. خودریختی‌هایی که چهرهٔ آن‌ها از الگوی رفتاری خاصی پیروی نمایند از اهمیت بیشتری برخوردارند. در شکل ۲ چهرهٔ خودریختی $b = (1, 1, b)\delta$ از درختِ سه‌سه‌ای T_3 داده شده است. ملاحظه کنید که برچسب رأس‌ها فقط در یک امتداد $\delta = (0, 1, 2)$ است و در سایر رأس‌ها همانی است. به عنوان مثالی دیگر چهرهٔ خودریختی $b = (1, 1, 1)\lambda$ در ریشه λ و در سایر جاها همانی است.

روشن است که هر برچسب‌گذاری رأس‌های T_d به وسیلهٔ اعضای S_d عضوی از $Aut(T_d)$ را مشخص می‌کند و هر خودریختی از این درخت یک برچسب بر آن القا می‌نماید. اکنون می‌توان تا حدودی خطوط چهرهٔ اعضای $Aut(T_d)$ و به ویژه آن‌هایی را که چهرهٔ متناهی دارند ترسیم کرد؛ بینهایت نسخه از T_d با چهره‌های متفاوت. و این دلیل دیگری است بر نامتناهی‌بودن $Aut(T_d)$.



شکل ۲ چهرهٔ خودریختی $b = (1, 1, b)\delta$

مثال ۵. الف ـ چهرهٔ خودریختی همانی $i : T_d \to T_d$، همانی است، یعنی برچسب تمام رأس‌های T_d که از خودریختی مذکور ناشی می‌شوند جایگشت همانی $i \in S_d$ است.

ب ـ چهرهٔ خود ریختیِ a در مثال ۱ درختی دودویی است که برچسب ریشهٔ آن ϵ و برچسب سایر رأس‌ها جایگشتِ همانی $i \in S_2$ است.

1) portrait

پ ـ برای تعیین چهرهٔ خودریختی $a_\circ = (a, ۱)$ مذکور در مثال ۲ توجه می‌کنیم که این خودریختی ۰ و ۱ را ثابت نگاه می‌دارد و بنابراین بر چسب ریشه، همانی است. به‌علاوه روی زیر درخت $T_۱$ به صورت همانی عمل می‌کند و بنابراین برچسب تمام رأس‌های $T_۱$ نیز همانی است. چون $a_\circ$ روی زیر درخت $T_\circ$ مانند a عمل می‌کند پس برچسب رأس ۰، ϵ و برچسب سایر رأس‌ها همانی است.

تعریف ۴. عدد صحیح و مثبت n را عمق (یا عمق چهره) $g \in Aut(T_d)$ می‌نامیم هرگاه سطح تراز $L_{n-۱}$ آخرین سطحی باشد که بر چسب القایی g روی T_d نابدیهی است. بنابراین به‌ازای هر رأس u با شرط $|u| \geq n$ بر چسب رأس های T_u همانی است.

بنابراین تعریف، عمق خودریختی همانی صفر، عمق خودریختی‌های a و $a_\circ$ که به ترتیب در مثال های ۱ و ۲ بالا مطرح شدند به ترتیب ۱ و ۲ و عمق خودریختی شکل ۲ بینهایت است.
اکنون این سؤال مطرح می‌شود که عمق $g \in Aut(T_d)$ چه رابطه‌ای با مرتبهٔ g دارد؟

۶ مرز T_d

هر دنبالهٔ نامتناهی از اعضای الفبای D را یک انتها[1] یا یک نقطهٔ مرزی[2] درخت ریشه‌دار T_d می‌نامیم و مجموعهٔ تمام نقاط مرزیِ T_d را با ∂T_d نشان می‌دهیم و آن را مرز T_d می‌نامیم. به عبارت دیگر با کمی بی‌دقتی می‌توان گفت که هر کلمه که از بینهایت حرف متعلق به D تشکیل شده باشد یک انتهای T_d است. از این رو $۱۰۱۰۱۰۱۰۱۰\cdots$، $۱۱۱\cdots$ و $۱\cdots۱\circ\circ\circ۱\circ\circ\circ\circ\circ$ عضوهایی از مرز درخت $T_۲$ هستند. روشن است که ∂T_d با مجموعهٔ تمام دنباله‌های نامتناهی از اعضای D یعنی با D^N در تناظری یک به یک قرار دارد و لذا در صورت ضرورت بین ∂T_d و D^N تمایزی قایل نمی‌شویم. بنابراین هر عضو مرز، مسیری است در T_d که از ریشه آغاز می‌شود و تا بینهایت ادامه می‌یابد. عضو $X \in \partial T_d$ را به صورت $x = x_۱x_۲x_۳\cdots$ که در آن $x_i \in D, i = ۱, ۲, \ldots$، نشان می‌دهیم. روشن است که به ازای هر عدد طبیعی n، قطعهٔ $w = x_۱x_۲x_۳\cdots x_n$ از $X = x_۱x_۲x_۳\cdots$ رأسی در T_d است.

به دو طریق می‌توان روی ∂T_d ساختار توپولوژی قرار داد؛ یکی با استفاده از یک متریک و دیگری با استفاده از توپولوژی گسسته روی D. فاصلهٔ دو عضو $X = x_۱x_۲\ldots$ و $Y = y_۱y_۲\ldots$ از ∂T_d را با $d(X,Y)$ نشان می‌دهیم و تعریف می‌کنیم $d(X,Y) = \frac{۱}{۲^k}$، که در آن k بزرگ‌ترین عدد طبیعی یا $+\infty$ است به طوری که $x_i = y_i$، به ازای هر $i \leq k$. بنابراین L_k سطحی است که X و Y در آن آغاز به جدا شدن می‌کنند. مثلاً اگر $X = ۱۲۰۲۱۰۲۱۰\cdots$ و $Y = ۱۲۰۱۱۰۲۱۰\cdots$ آنگاه $k = ۳$ و بنابراین $d(X,Y) = \frac{۱}{۲^۳} = \frac{۱}{۸}$. بنابراین تعریف $d(X,X) = \circ$، زیرا X از X در هیچ سطحی جدا نمی‌شود و از این رو $k = \infty$. به همین ترتیب اگر دو عضو X و Y واقع در مرز از ابتدا از هم جدا باشند، یعنی تنها نقطهٔ مشترک آن‌ها θ باشد آنگاه $k = \circ$ و بنابراین $d(X,Y) = ۱$.

1) end 2) boundary point

و سرانجام با صرف اندکی وقت ثابت می‌شود که نابرابری مثلث برقرار است. در نتیجه ∂T_d یک فضای متریک است که فاصلهٔ هر دو نقطهٔ متمایز آن حداکثر ۱ است. بنابراین ∂T_d کراندار است. فرض کنید X_n دنباله‌ای در ∂T_d و k عددی طبیعی باشد. چون تعداد ژئودزیک‌هایی که از ریشه آغاز و به سطح L_k ختم می‌شوند متناهی است پس بینهایت جملهٔ دنباله در رابطهٔ $d(X_n, X_m) \leq \frac{۱}{۲^k}$ صدق می‌کنند. بنابراین ∂T_d فشرده است.

مجموعه‌های باز در ∂T_d نمود جالبی دارند. مثلاً گوی باز به مرکز X و شعاع $\frac{۱}{۲^k}$ در ∂T_d شامل تمام انتهاهایی چون Y است که از ریشه آغاز و با X دست‌کم تا رأس $k+۱$ ام برابرند و در آن رأس از X جدا می‌شوند. به عبارت دیگر اگر $X = x_۱ \cdots x_k x_{k+۱} \cdots$ و $Y = x_۱ \cdots x_k x_{k+۱} y \cdots$ دو عضو از مرز T_d باشند، آنگاه Y به گوی به مرکز X و شعاع $\frac{۱}{۲^k}$ تعلق دارد. با توجه به آنچه که گفته شد داریم

$$B(X, \frac{۱}{۲^k}) = T_u,$$

که در آن $u = x_۱ \cdots x_k x_{k+۱}$. به عبارت دیگر گوی باز به مرکز X و به شعاع $\frac{۱}{۲^k}$ شامل تمام انتهاهای زیر درخت ریشه‌دار T_u از T_d است. در واقع با اندکی بی دقتی ازای $x = x_۱ x_۲ \ldots x_{k+۱} \ldots$ داریم:

$$B(x, \frac{۱}{۲^k}) = \{x_۱ x_۲ \ldots x_{k+۱}\} \times D^N.$$

خاطرنشان می‌کنیم که می‌توان توپولوژی دیگری روی ∂T_d یا D^N قرار داد که از توپولوژی گسسته روی D ناشی می‌شود و برخی ویژگی‌های ∂T_d را آشکار می‌کند. چون D متناهی است پس فشرده است در نتیجه بنابر قضیهٔ تیخونوف، ∂T_d نیز فشرده است. توجه می‌کنیم که ∂T_d کاملاً ناهمبند است و از این رو با یک مجموعهٔ کانتور هومیومرف می‌باشد.

۷ زیرگروه‌های خاص $Aut(T_d)$

به ازای هر $d \geq ۲$ گروه $Aut(T_d)$ ساختار زیرگروهی بسیار غنی‌ای دارد. در این میان زیر گروه‌هایی که با ساختار هندسی T_d ارتباط نزدیک‌تری دارند از ویژگی‌های بیشتری برخوردارند و بنابراین اهمیت به‌سزایی نیز دارند. این زیرگروه‌ها را که نقش ویژه‌ای در بررسی ویژگی‌های $Aut(T_d)$ و سایر زیر گروه‌های آن دارند زیر گروه‌های خاص $Aut(T_d)$ می‌نامیم. در این بخش این زیرگروه‌ها را به اختصار معرفی می‌کنیم.

۱. **پایاگر یک رأس.** فرض کنید u یک رأس T_d باشد، منظور از پایاگر u مجموعهٔ تمام اعضای $Aut(T_d)$ است که u را ثابت نگه می‌دارند. هر گاه $Stab(u)$ پایاگر u باشد، داریم:

$$Stab(u) = \{f \in Aut(T_d) | f(u) = u\}.$$

روشن است که $Stab(u)$ یک زیرگروه $Aut(T_d)$ است.

۲. پایاگر یک سطح. فرض کنید به ازای عدد صحیح و نامنفی n، L_n مجموعهٔ رأس‌های سطح n−ام T_d باشد. زیرگروه

$$Stab(n) = \{f \in Aut(T_d) | f(u) = u, u \in L_n\}$$

متشکل از تمام $f \in Aut(T_d)$هایی که L_n را نقطه به نقطه ثابت نگه می‌دارند، پایاگر سطح L_n نامیده می‌شود. با توجه به اینکه هر عضو $g \in Aut(T_d)$ یک جایگشت روی L_n القا می‌کند، به‌ازای $f \in Stab(n)$ داریم:

$$gfg^{-۱}(u) = u.$$

بنابراین $Stab(n)$ یک زیرگروه نرمال $Aut(T_d)$ است. اندیس این زیرگروه در $Aut(T_d)$ متناهی است و

$$\bigcap_{n=۱}^{\infty} Stab(n) = \{۱\}.$$

در نتیجه دنبالهٔ $\{Stab(n)\}$ در $Aut(T_d)$ متناهی باقیمانده‌ای [۱] است.

پایاگر صلب یک رأس u. فرض کنید به‌ازای رأس u از T_d، T_u زیر درختی از T_d باشد که از u آویزان است(ر.ک. بخش ۳). منظور از پایاگر صلب u که با نماد $Rist(u)$ نشان داده می‌شود زیرگروهی از T_d است که در خارج T_u به صورت همانی عمل می‌کند. روشن است که $Rist(u)$ زیرگروهی از $Stab(u)$ است.

۴. پایاگر صلب یک سطح. منظور از پایاگر صلب سطح L_n که با $Rist(n)$ نشان داده می‌شود زیرگروهی از $Aut(T_d)$ است که به‌وسیلهٔ پایاگرهای صلب رأس‌های متعلق به L_n تولید می‌شود. یعنی

$$Rist(n) = < Rist(u) | u \in L_n > = \Pi_{u \in L_n} Rist(u).$$

روشن است که $Rist(n)$ زیرگروهی از $Stab(n)$ نیز است.

۵. پایاگر یک انتها، زیر گروه سهموی. با توجه به این‌که $Aut(T_d)$ برابر با گروه ایزومتری‌های ∂T است، پایاگر عضو $\gamma \in \partial T$ معنی دارد. این زیرگروه را با $P(\gamma)$ نشان می‌دهیم و آن را زیر گروه سهموی وابسته به γ می‌نامیم. داریم:

$$P(\gamma) = \{g \in Aut(T_d) | g(\gamma) = \gamma\}.$$

حال اگر G یک زیر گروه دلخواه از $Aut(T_d)$ باشد زیرگروه‌های $Stab_G(u) = Stab(u) \cap G$، $Stab_G(n) = Stab(n) \cap G$، $Rist_G(u) = Rist(u) \cap G$، $Rist_G(n) = Rist(n) \cap G$ و $P_G(\gamma) = P(\gamma) \cap G$ را به ترتیب پایاگر رأس u، پایاگر سطح L_n، پایاگر صلب رأس u، پایاگر صلب سطح L_n و پایاگر انتهای γ در G می‌نامیم.

---

1) residually finite

۸ اتوماتون‌های متناهی

به طوری که قبلاً اشاره کردیم تمام زیر گروه‌هایی که در بالا معرفی کردیم مبتنی بر ساختار هندسی درخت داده شده‌اند. در این بخش مقدمات تعریف زیر گروه‌هایی از $Aut(T_d)$ را فراهم می‌کنیم که روی T_d به صورت خودسان[1] عمل می‌کنند، مولدهای آن‌ها به‌صورت بازگشتی در تعریف یکدیگر سهیم‌اند و بنابراین رابطه‌ای نزدیک با هم دارند. این رابطه به‌وسیلهٔ یک گراف جهت دارِ برچسب دار همراه با برخی ویژگی‌های دیگر برقرار می‌شود. گرافی با این ویژگی‌ها یک **اتوماتون خروجی‌دار**[2] یا یک اتوماتون میلی[3] و یا معادلاً یک نمودار مور[4] نامیده می‌شود. از این روست که این (زیر)گروه‌ها، به گروه‌های اتوماتون موسوم‌اند. در این جا هر عضو زیرگروه با یک اتوماتون متناهی قابل نمایش است. از ویژگی‌های مهم این گروه‌ها ارتباط نزدیک آن‌ها با حاصل‌ضرب‌های حلقه‌ای[5] گروه‌ها، سامانه‌های دینامیکی و فضاهای حدی گروه‌هاست.
اگر چه اتوماتون‌ها در خاستگاه طبیعی خود یعنی نظریهٔ محاسبه و علوم کامپیوتر، از تنوع وسیعی برخوردارند، ولی ما در اینجا به اتوماتون‌های خروجی‌دار معکوس‌پذیر اکتفا خواهیم کرد.

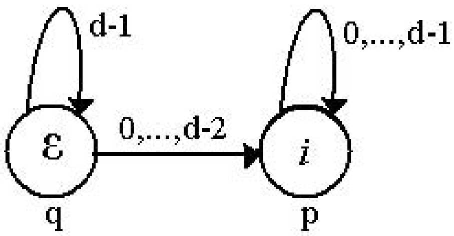
تعریف ۵. گوئیم گروه G روی T_d به صورت خودسان عمل می‌کند هر گاه به ازای هر $g \in G$ و هر $x \in D$ اعضای $h \in G$ و $y \in D$ یافت شوند به طوری‌که $g(xw) = yh(w)$.

قبل از ارائهٔ مثالی از عمل خودسان و گروه خودسان به معرفی اتوماتون‌ها می‌پردازیم. برای این منظور مجموعهٔ ناتهی و متناهی $Q = \{q_۱, \cdots q_n\}$ را، که در آن $n \geq ۱$ در نظر می‌گیریم.

تعریف ۶. منظور از یک اتوماتون A با الفبای متناهی D روی Q، یک چهارتایی $A = (D, Q, \mu, \tau)$ است که در آن Q مجموعهٔ حالت[6]ها و $\mu : D \times Q \to D$ و $\tau : D \times Q \to Q$ به ترتیب توابع خروجی[7] و انتقال[8] A نامیده می‌شوند. هر یک از اعضای Q را یک حالت اتوماتون A می‌نامیم. هر گاه به‌ازای هر $q \in Q$ تابع $\mu(.,q) : D \to D$ به S_d تعلق داشته باشد A را معکوس پذیر می‌نامیم. می‌توانیم اتوماتون $A = (D, Q, \mu, \tau)$ را با یک گراف جهت‌دار و برچسب‌دار نشان دهیم. رأس‌های این گراف اعضای Q اند و یال‌های آن جفت‌های مرتبی به صورت (p,q) از اعضای $Q \times Q$ اند به طوری‌که $\mu(i,p) = j$ و $\tau(i,p) = q$، در این حالت حرف j یادقیق‌تر نماد $i|j$ بر چسب یال (p,q) است و تابع $\mu_p = \mu(.,p) : D \to D$ برچسب رأس p. در شکل ۳ یک اتوماتون دو حالتی روی الفبای $D = \{۰, ۱, \ldots d-۱\}$ را نشان داده‌ایم. این اتوماتون ماشین جمع فون نویمن روی d حرف نامیده می‌شود.

---

1) self similar 2) automaton with output 3) Mealey 4) Moore diagram
5) wreath product 6) state 7) output 8) transition



شکل ۳ ماشین جمع فون نویمن

سؤال این است که کار اتوماتون A چیست؟ برای پاسخ دادن به این سؤال ابتدا با انتخاب هر یک از حالت‌های A به عنوان **حالت آغازی**[1]، اتوماتون‌های آغازی A_{q_1}، A_{q_2}،... و A_{q_n} را به ترتیب با حالت‌های آغازی q_1، q_2 ... و q_n روی الفبای D به‌دست می‌آوریم. توجه می‌کنیم که گراف معرف هریک از این اتوماتون‌های آغازی همان گراف اتوماتون A است. تنها تفاوت در این است که این گراف رأس مشخصی به‌نام حالت آغازی دارد. بنابراین در اینجا اتوماتون‌های آغازی با حالت آغازی خود مشخص می‌شوند و با به راه انداختن آن آغاز به کار می‌کنند. با استفاده از برچسب رأس q یعنی $\mu_q = \mu(.,q)$، اتوماتون آغازی A_q را به صورت $A_q = (D, Q, \mu_q, \tau, q)$ نشان می‌دهیم. کار هر اتوماتون آغازی خواندن کلمه‌ها یعنی اعضای D^* حرف به حرف از چپ به راست است. اتوماتون آغازی A_{q_i} با حالت آغازی q_i کار خود را با فعال کردن حالت آغازی خود شروع می‌کند. اتوماتون A با به‌کار انداختن اتوماتون‌های آغازی خود، کلمه‌های متعلق به D^* را حرف به حرف از چپ به راست می‌خواند و کلمه‌هایی متعلق به D^* به عنوان خروجی تحویل می‌دهد. به‌این صورت که‌اتوماتون A به محض دریافت $(i,q) \in D \times Q$ اتوماتون آغازی A_q را به‌کار می‌اندازد و A_q خروجی $\mu(i,q) = j$ را محاسبه و وارد حالت $\tau(i,q) = s$ می‌شود، و اگر A جفت $(u_1u_2 \dots u_n, q) \in D^* \times Q$ را دریافت نماید، ورودی، یعنی کلمهٔ $u = u_1u_2 \dots u_n$ را از چپ به راست می‌خواند. به این ترتیب که نخست اتوماتون آغازی A_q، مقادیر $\mu(u_1, q) = v_1$ و $\tau(u_1, q) = q_1$ را محاسبه می‌کند و سپس در حالت جدید اتوماتون آغازی A_{q_1} به‌کار می‌افتد و مقادیر $\mu(i_2, q_1) = v_2$ و $\tau(u_2, q_1) = q_2$ را تعیین می‌نماید. این کار تا خوانده شدن آخرین حرف کلمهٔ داده شده، یعنی محاسبهٔ $\mu(u_n, q_{n-1}) = v_n$ و $\tau(u_n, q_{n-1}) = q_n$ ادامه می‌یابد و آنگاه اتوماتون A کلمهٔ $v = v_1v_2 \cdots v_n \in D^*$ را به عنوان خروجی به دست می‌دهد.
بنابراین اتوماتون A، رأس‌های T_d را به رأس‌های خود T_d می‌نگارد. چون طول خروجی آن یعنی $|v|$ برابر است با طول ورودی آن یعنی $|u|$، این کار را با ثابت نگاه‌داشتن طول کلمه انجام می‌دهد.

1) initial state

اکنون می‌توانیم با استفاده از نمایش اتوماتون به‌وسیلهٔ یک گراف جهت‌دار و برچسب‌دار تعریف دیگری از اتوماتون معکوس پذیر بیاوریم.

تعریف ۷. اتوماتون معکوس‌پذیر. منظور از یک اتوماتون معکوس پذیر باالفبای D و مجموعهٔ حالت‌های $Q = \{q_1, \ldots, q_n\}$ یک گراف جهت دار و برچسب‌دار چون A با رأس‌های q_1، $\cdots$، q_n و احتمالاً یک رأس دیگر I است به‌طوری که:

۱− به ازای هر $q \in Q$ بر چسب رأس q عضوی از S_d است .

۲− از هر رأس A، d یال هر یک فقط با یک بر چسب متعلق به D خارج و به رأس‌هایی از A وارد می‌شود.

۳− تمام یال‌های خارج شده از I به I وارد می‌شوند.

۴− بر چسب رأس احتمالی I عضو همانی $i \in S_d$ است.

توجه می‌کنیم که بنابر این تعریف:

۱− ممکن است رأس‌های متفاوت برچسب‌های یکسان داشته باشند.

۲− ممکن است یال یا یال‌هایی از یک رأس خارج و به آن وارد شوند.

مثال ۵. اتوماتون‌های شکل‌های ۳ و ۴ دو نمونه از اتوماتون‌های معکوس‌پذیراند.
در شکل ۳ که در آن $Q = \{p, q\}$ و $D = \{0, \cdots d-1\}$ بر چسب رأس q، جایگشت دوری $\epsilon = (0, \cdots, d-1)$ و بر چسب رأس p، جایگشت همانی i است. از رأس q تعداد d یال خارج شده است که از آن‌ها $d-1$ یال با برچسب های $0, \cdots, d-2$ به p و یال آخری با برچسب $d-1$ به q وارد شده‌است .
اتوماتون شکل ۴ پنج حالت دارد اما $Q = \{p, q, r, s\}$ چهار عضو و $D = \{0, 1\}$ دو عضو دارد. ملاحظه می‌کنیم که در این اتوماتون برچسب حالتی که به Q تعلق ندارد جایگشت همانی $i \in S_2$ است و هر یالی که از آن خارج شود به آن نیز وارد می‌شود.

تعریف ۸. اتوماتون بدیهی. اتوماتون آغازی $A = (D, Q, \mu, \tau, q)$ را بدیهی می‌نامیم هرگاه توسیع μ به D^* که آن را نیز با μ نشان می‌دهیم همانی باشد، یعنی

$$\mu : D^* \to D^*, \mu(wi, q) = \mu(w, \tau(i, q)) = wi$$

به ازای هر $w \in D^*$ و هر $i \in D$.

تعریف ۹. اتوماتون‌های هم‌ارز. اتوماتون‌های آغازی $A_1 = (D, Q_1, \mu_1, \tau_1, q_1)$ و $A_2 = (D, Q_2, \mu_2, \tau_2, q_2)$ را هم‌ارز می‌نامیم و می‌نویسیم $A_1 \equiv A_2$ هرگاه روی مجموعهٔ D^*

نگاشت‌های برابر ایجاد کنند، یعنی به‌ازای هر $w \in D^*$ داشته باشیم:

$$\mu_1(w, q_1) = \mu_2(w, q_2)$$

روشن است که این رابطه روی هر مجموعه از اتوماتون‌های آغازی یک رابطهٔ هم‌ارزی است. ردهٔ هم ارزی اتوماتون A_q را با $[A_q]$ نشان می‌دهیم. به‌ویژه ردهٔ هم‌ارزی اتوماتون همانی (بدیهی) چیزی نیست جز مجموعهٔ تمام اتوماتون‌هایی که روی D^* به صورت همانی عمل می‌کنند، و بنابراین با نماد $[i]$ نشان داده می‌شود.

مثال ٦. اتوماتون شکل ۳ را در نظر بگیرید و آن را A بنامید. بنا بر تعریف ۷، $A = (Q, D, \mu, \tau)$ که در آن $D = \{0, 1, \ldots, d-1\}$، $Q = \{p, q\}$، و

$$\mu : Q \times D \to D, \mu(i,p) = i, \mu(i,q) = \begin{cases} i+1 & 0 \le i < d-1 \\ 0 & i = d-1 \end{cases}$$

و

$$\tau : Q \times D \to Q, \tau(i,p) = p, i = 0, 1, \ldots d-1, \tau(i,q) = \begin{cases} p & i = 0, 1, \ldots d-2, \\ q & i = d-1 \end{cases}$$

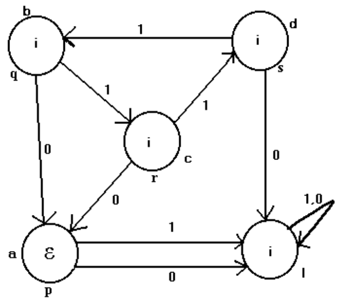
در این شکل برچسب‌های $\mu(.,p) = i$ و $\mu(.,q) = \epsilon$ به ترتیب نمایندهٔ جایگشت‌های همانی و دوری مجموعهٔ D هستند. از این اتوماتون دو اتوماتون آغازی A_p و A_q به ترتیب با حالت‌های آغازی p و q حاصل می‌شوند. اتوماتون آغازی A_p فقط یک حالت دارد و برچسب این حالت جایگشت همانی است. بنابراین هر کلمه که به آن خورانده شود بدون هیچ تغییری از آن خارج می‌شود. این اتوماتون نمونه‌ای از یک اتوماتون بدیهی است .اما اتوماتون آغازی $c = A_q$ دو حالت دارد و حالت آغازی آن q است. اتوماتون c کلمهٔ یک حرفی $u = i, 0 \le i \le d-1$ را مطابق تعریف جایگشت ϵ به حرف

$$c(i) = \begin{cases} i+1 & 0 \le i \le d-2 \\ 0 & i = d-1 \end{cases}$$

تبدیل می‌کند. ملاحظه می‌کنیم که c پس از خواندن $0 \le i \le d-2i$، به اتوماتون A_p تبدیل می‌شود و بنابر این اگر در کلمهٔ $u = u_1u_2, u_n$ داشته باشیم $0 \le u_1 \le d-2$، آنگاه u به $v = v_1u_2, u_n$ تبدیل می‌شود که در آن $v_1 = u_1 + 1$. ولی اگر $u_1 = d-1$ آنگاه u به $v = oc(u_2, u_n)$ تبدیل می‌شود. این مطالب را می‌توان به این صورت هم بیان کرد که c پس از خواندن هر یک از اعضای سطح L_1 به تابع همانی تبدیل می‌شود مگر حرف $d-1$ که به خودش تبدیل می‌شود و بنابراین می‌نویسیم:

$$c = (1, 1, \cdots, c)\epsilon,$$

که در آن $d - ۱$ مؤلفه شامل ۱ است و فقط مؤلفهٔ آخر c است.



شکل ۴ اتوماتون گروه گریگورچوک

مثال ۷. اتوماتون شکل ۴ که بر الفبای $D = \{۰, ۱\}$ ساخته شده است شامل پنج حالت و بنابراین شامل پنج اتوماتون آغازی است . یکی از این‌ها اتوماتون بدیهی است، به این معنی که مانند جایگشت همانی روی D^* عمل می‌کند. چهارتای دیگر را با توجه به شکل به صورت زیر نشان می‌دهیم

$$a = A_p, b = A_q, c = A_r, d = A_s.$$

ملاحظه می‌کنیم که برچسب رأس p جایگشت $\epsilon \in S_۲$ است و برچسب سایر رأس‌ها جایگشت همانی $i \in s_۲$ است.

اکنون به بررسی عمل هریک از این اتوماتون‌ها روی D^* و بنابراین بر $T_۲$ می‌پردازیم. برای این منظور $u = u_۱ \cdots u_n \in D^*$ را در نظر بگیرید. ملاحظه می‌کنیم که a پس از خواندن حرف اول u به جایگشت همانی تبدیل می‌شود؛ یعنی $a(u) = a(u_۱)u_۲ \cdots u_n \in D^*$. بنابراین a خودریختی ریشه‌دار $T_۲$ است. می‌نویسیم $a = (۱, ۱)\epsilon$ یا به اختصار $a = \epsilon$ و برابری را مانند خودریختی ریشه‌دار درخت $T_۲$ تعبیر می‌کنیم .

در مورد اتوماتون b با توجه به شکل ۴ داریم:

$$b(u) = \begin{cases} ۰a(u_۲ \cdots u_n) & u_۱ = ۰ \\ ۱c(u_۲ \cdots u_n) & u_۱ = ۱ \end{cases}$$

بنابراین b روی زیر درخت‌های $T_{۰۰}$ و $T_{۰۱}$ مانند a و روی زیر درخت‌های $T_{۱۰}$ و $T_{۱۱}$ مانند c عمل می‌کند. از این رو می‌نویسیم $b = (a, c)i$ و یا به اختصار $b = (a, c)$. به همین ترتیب داریم:

$$c(u) = \begin{cases} ۰a(u_۲ \cdots u_n) & u_۱ = ۰ \\ ۱d(u_۲ \cdots u_n) & u_۱ = ۱ \end{cases}$$

ملاحظه می‌کنیم که c روی زیر درخت‌های $T_{۰۰}$ و $T_{۰۱}$ مانند a و روی زیر درخت‌های $T_{۱۰}$ و $T_{۱۱}$ مانند d عمل می‌کند. از این رو می‌نویسیم $c = (a, d)i$ و یا به اختصار $c = (a, d)$. به همین ترتیب

داریم:

$$d(u) = \begin{cases} u_۱ \cdots u_n & u_۱ = ۰ \\ ۱b(u_۲ \cdots u_n) & u_۱ = ۱ \end{cases}$$

و در نتیجه $d = (۱, b)i$ و یا $d = (۱, b)$.
ملاحظه می‌کنیم که هر یک از اتوماتون‌های آغازی ناشی از اتوماتون شکل ۴ یک خودریختی درخت $T_۲$ است.

۹ گروه‌های اتوماتون

در این بخش می‌خواهیم گروهی را که اتوماتون داده شدهٔ A تولید می‌کند تعریف کنیم. برای این منظور نخست لازم است که ترکیب اتوماتون‌های آغازی حاصل از A را تعریف کنیم. این کار را با الهام از ضرب حلقه‌ای گروه‌ها انجام می‌دهیم. مجدداً فرض کنید که $Q = \{q_۱ \cdots q_n\}$ مجموعهٔ حالت‌های اتوماتون معکوس‌پذیر A باشد و $D = \{۰, \cdots d - ۱\}$ الفبای آن. در این صورت با الهام گرفتن از مثال‌های بالا می‌توان گفت که به‌ازای هر $q \in Q$ اتوماتون‌های آغازی $A_{q۰}, \cdots, A_{qd-۱}$ و جایگشت $\sigma \in S_d$ وجود دارند به‌طوری که $A_q = (A_{q۰}, \cdots, A_{qd-۱})\sigma$ و برابری به این معنی است که A_q پس از خواندن حرف j متعلق به سطح $L_۱$ درخت T_d، توسط یالی که برچسب $\partial(j) = k$ دارد به اتوماتون A_{qk} تبدیل می‌شود و روی زیر درخت‌های $T_{u_۱u_۲}$ درست مانند A_{qk} عمل می‌کند. به عبارت دیگر تحدید A به درخت‌های مذکور برابر است با A_{qk}. این همان تعریف بازگشتی است که پیش از این بیان شد.

تعریف ۱۰. ترکیب اتوماتون‌ها. منظور از ترکیب اتوماتون آغازی $A_p = (A_{p۰}, \cdots, A_{pd-۱})\gamma$ بااتوماتون آغازی $A_q = (A_{q۰}, \cdots, A_{qd-۱})\sigma$ اتوماتونی آغازی چون $A_{(p,q)} = A_p * A_q$ با حالت آغازی (p, q)، مجموعهٔ حالت‌های $Q \times Q$ و الفبای D است، به‌طوری‌که اگر

$$A_{(p,q)} = (A_{(p,q)}۰, \cdots, A_{(p,q)}d - ۱)\gamma\sigma$$

آنگاه $A_{(p,q)j} = A_{pj} * A_{q\gamma^{-۱}(j)}$.

تعریف ۱۱. اتوماتون آغازی $A_q = (A_{q۰}, \cdots, A_{qd-۱})\sigma$ را یک معکوس اتوماتون آغازی $B_q = (B_{q۰}, \cdots, B_{qd-۱})\gamma$ می‌نامیم و می‌نویسیم $B_q = A_q^{-۱}$ هرگاه $A_q * B_q$ و $B_q * A_q$ هر دو با اتوماتون بدیهی هم‌ارز باشند.
بنابراین شرط‌های لازم برای این که A_q یک معکوس B_q باشد از این قرارند:

- $\sigma\gamma$ همانی S_d باشد.
- اتوماتون‌های $A_{qj} * B_{q\sigma^{-۱}(j)}$ و $B_{qj} * A_{q\gamma^{-۱}(j)}$ به ازای هر $۰ \leq j \leq d - ۱$ بدیهی باشند.

می‌توان نشان داد که اگر X و Y معکوس‌هایی برای T باشند، هم ارزند و بنابراین هر دو به ردهٔ

هم‌ارزی $[T^1]$ تعلق دارند. در نتیجه صحبت از معکوس وقتی معنی دارد که به پیمانهٔ رده‌های هم‌ارزی باشد.

اتوماتون A را روی مجموعه حالت‌های Q و با الفبای D در نظر بگیرید و فرض کنید اتوماتون‌های آغازی حاصل از آن $A_{q_1}, \cdots, A_{q_n}$ باشند. عمل ترکیب اتوماتون‌های آغازی موجب می‌شود که به ازای هر عدد طبیعی k و هر k–تایی $(q_1, \cdots, q_k) \in Q^k$ نماد $(\cdots(A_{p_1} * A_{p_2}) * \cdots * A_{p_k})\cdots)$ که در آن تعداد عوامل k است و $p_i \in Q$، معنی داشته باشد. فرض کنید $G(A)$ مجموعهٔ رده‌های هم‌ارزی خانوادهٔ تمام این نمادها باشد. بنابراین به عنوان مثال $[A_{q_i}] \in G(A)$ به‌ازای هر $q_i \in Q$. اکنون روی $G(A)$ تعریف می‌کنیم:

تعریف ۱۲. عمل زیر روی $G(A)$ تعریف می‌شود:

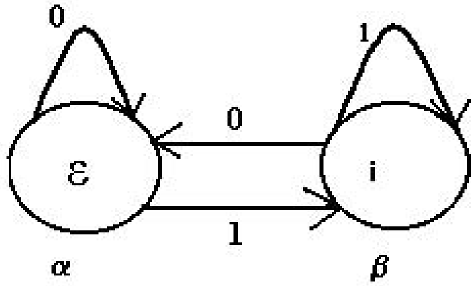
$$[X][Y] = [X * Y]$$

ثابت می‌شود که $G(A)$ با این عمل یک گروه است. این گروه را **گروه اتوماتون** تولید شده به‌وسیلهٔ اتوماتون A می‌نامیم.
برای به‌دست‌آوردن مختصات حاصل‌ضرب دو اتوماتون A_i و A_j، گروه $G = G(A)$ را در یک حاصل‌ضرب حلقوی[1] گروه‌ها می‌نشانیم. برای این منظور گروه G^D متشکل از تمام d تایی های مرتب اعضای G با عمل ضرب مؤلفه به مؤلفه را در نظر بگیرید. منظور از حاصل‌ضرب حلقوی $G \wr S_d$ عبارت است از حاصل‌ضرب نیمه مستقیم $G^D * S_d$. اعضای این گروه اعضای حاصل‌ضرب دکارتی $G^D \times S_d$ اند که به صورت $X = (x_0, x_1, \dots x_{d-1})\sigma$ نشان داده می‌شوند و عمل دوتایی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(x_0, x_1, \dots x_{d-1})\sigma(y_0, y_1, \dots y_{d-1})\gamma = (z_0, z_1, \dots, z_{d-1})\sigma\gamma,$$

که در آن $z_i = x_i y_{\sigma^{-1}(i)}$. اکنون روشن است که $G(A)$ با یک زیرگروه $G \wr S_d$ یک‌ریخت است.
هر عضو $g \in G(A)$ روی T_d به صورت یک خودریختی عمل می‌کند مشروط بر این‌که تعریف کنیم $g(\theta) = \theta$، و لذا $G(A)$ یک زیر گروه $Aut(T_d)$ است.
با این تعبیر اتوماتون A را می‌توان یک نمایش اتوماتیک $G(A)$ دانست. با استفاده از این نمایش می‌توان چهرهٔ عضو $g \in G(A)$ را به صورت زیر مشخص کرد:
فرض کنید u رأسی در T_d باشد. در این صورت g به عنوان یک اتوماتون آغازی می‌تواند u را به صورت یک ورودی بخواند. بر چسب اولین حالتی که اتوماتون پس از خواندن u به آن می‌رسد عضوی از S_d و متعلق به چهرهٔ g در رأس u است .

گروه‌های اتوماتون به ازای $Q=\{p,q\}$ و $D=\{0,1\}$ در قضیهٔ ۱ شناسایی شده‌اند.



شکل ۵ گروه چشمک زن

قضیهٔ ۱. فرض کنید A یک اتوماتون دو حالتی روی الفبای $D=\{0,1\}$ باشد. در این صورت $G(A)$ با یکی از گروه‌های زیر یکریخت است:

الف) بدیهی،

ب) Z_2،

پ) چهار کلاین،

ت) دوری نامتناهی،

ث) دو وجهی نا متناهی،

ج) چشمک زن[1] $Z_2 \wr Z$ که در شکل (۵) یک نمایش اتوماتیک آن نشان داده شده‌است.

توجه می‌کنیم که هر عضو گروه چشمک زن به صورت یک جفت مرتب (f,i) است که در آن $f\in Z_2^Z$ دنباله‌ای دو طرفه به صورت $f=(\ldots,x_{-1},x_0,x_1\ldots)$ است و $i\in Z_2$. حال اگر (g,j)، $g=(\ldots,y_{-1},y_0,y_1,\ldots)$، عضو دیگری از این مجموعه باشد آن‌گاه

$$(f,i)(g,j)=(h,i+j)$$

که در آن مؤلفهٔ kام h برابر است با $h(k)=f(k)+g(-i+k))=x_k+y_{-i+k}$.

در حال حاضر این مسأله که چه گروه‌هایی توسط اتوماتون‌های با بیشتر از دو وضعیت روی الفبای D با $|D|>2$ تولید می‌شوند مسأله‌ای حل نشده است.

۱۰. مثال

در این بخش با ارائهٔ یک مثال از گروه‌های اتوماتون خواننده را با برخی از مسائل که این گروه‌ها درصدد پاسخ گویی به آنها هستند، آشنا می‌کنیم.

1) lamplighter

مثال ۱۲. گروه اول گریگورچوکΓ. این گروه که نخستین بار در اواخر سال‌های ۱۹۷۹ و اوایل سال ۱۹۸۰ به صورت گروهی از تبدیل‌های بازهٔ [۰, ۱] که حافظ اندازهٔ لبگ‌اند معرفی شد [۱۱].

اولین مثال از دسته‌ای از گروه‌ها موسوم به گروه‌های با رشد متوسط و نیز اولین مثال از دستهٔ گروه‌های شاخه‌ایست. گروه گریگورچوک توسط اتوماتون ۵ وضعیتی شکل ۴ تولید می‌شود. به طوری که از این شکل بر می‌آید این اتوماتون روی الفبای $D = \{0, 1\}$ تعریف شده است و اتوماتون‌های آغازی $a = (1, 1)\epsilon, b = (a, c), c = (a, d), d = (1, b)$ که در آن i و ϵ به ترتیب جایگشت‌های همانی و دوری D هستند، مولدهای این گروه می‌باشند. در قضیهٔ زیر به برخی از ویژگی‌های این گروه اشاره می‌کنیم.

قضیهٔ ۲. گروه Γ دارای ویژگی‌های زیر است:

الف) نامتناهی است؛

ب) از رشد متوسط است (مسألهٔ میلنور) به این معنی که اگر $|g|$ طول $g \in \Gamma$ نسبت به مجموعهٔ مولد $\{a, b, c, d\}$ باشد و $\gamma : N \to N$ به صورت $\gamma(n) = |\{g \in \Gamma : |g| = n\}|$ تعریف شود آنگاه γ نه با یک چند جمله‌ای هم ارز است نه با تابع نمایی 2^n؛

پ) یک ۲ ـ گروه است، یعنی مرتبهٔ هر عضو آن توانی از ۲ است (مسألهٔ برنساید)؛

ت) همان نامتناهی است ، یعنی اندیس هر زیر گروه نرمال نابدیهی آن متناهی است؛

ث) غیر خطی است؛

ج) میانگین‌پذیر است اما میانگین‌پذیر مقدماتی نیست (مسألهٔ دی)؛

چ) فرکتال است؛

ح) شاخه‌ای منظم روی زیر گروه $K =< [a, b]^\Gamma >$ است؛

خ) دارای نمایشی نامتناهی به صورت

$$\Gamma =< a, b, c, d | a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = bcd = \sigma^k((ad)^4) = \sigma^k((adacac)^4) = 1, k = 0, 1, \ldots$$

است که در آن $\sigma(a) = aca, \sigma(b) = d, \sigma(c) = b, \sigma(d) = c$.

د) مسألهٔ کلمهٔ آن حل‌پذیر است.

ذ) هر زیرگروه نرمال Γ یک زیرگروه همنهشتی است، به‌این معنی که زیرگروهی از یک $Stab_\Gamma(k)$ است.

ر) متناهی باقیمانده‌ای است، به‌این معنی که Γ شامل دنباله‌ای نزولی از زیرگروه‌های نرمال است که همگی در Γ اندیس متناهی دارند و اشتراک آن‌ها زیر گروه همانی $\{1\}$ است. در واقع $Stab_{\Gamma^-}(n)$ دنبالهٔ مورد نظر است.

ز) هوپفی‌است، به این معنی که هر همریختی پوشای آن یک به یک نیز هست.

ژ) مسألهٔ تزویج [1] برای آن حل‌پذیر است.

1) conjugacy problem

سپاسگزاری

از سپهر جلوداری به خاطر ترسیم شکل‌ها و واردنمودن آن‌ها در متن سپاسگزاری می‌کنم.

مراجع

[Al] S.V. Aleshin, *Finite Automata and Burnside problem on Periodic Groups,* Math. Notes 11, Princeton Univ. Press, (1972), 319-328.

[A] Jean - Paul Allouche and Jeffrey Shallit, *Automatic Sequences*, Cambridge university press, (2003).

[BOR] H. Bass, M. Otero-Espinar, D.N. Rockmore, C.P.L. Tresser, *Cyclic renormalization and the automorphism groups of rooted trees,* Berlin: Springer Verlag, (lect. notes math., vol. 1621), (1995).

[BGS] L. Bartholdi, R.I. Grigorchuk and Z. Sunik, *Branch Groups,* Handbook in Algebra (to appear).

[BSV] A.M. Brunner, S. Sidki, A.C. Vieira, A just non-solvable torsion free group defined on a binary tree, Journal of Algebra, 211, (1999), 99-114.

[dlh] P. De La Harpe , *Topic in geometric group theory*, Chicago lectures in mathematics, Univ. of Chicago press, Chicago, IL, (2000).

[Ep.] D.B.A. Epstein, J.W. Cannon, D.F. Holt, S.V.F. Levy, M.S. Paterson and W.P. Thursron, *Word Processing in Groups* Jones and Bartlett, Boston, (1992).

[Gr1] R.I. Grigorchuk, *Just Infinite Groups*, in New Horizons in pro-p Groups, p. 75-119, ed. M. Sautoy. D. Segal, A. Shalev, (Prog. Math. v. 184), Birkhauser, (2000).

[GNS] R.I. Grigorchuk, V.V. Nekrashevich, V.I. Shushchansky, *Automata, Dynamical Systems, and Groups,* Proceedings of the SIM., Vol. 231, (2000), 128-203.

[Gr5] R.I. Grigorchuk, *Just infinite branched groups,* Horizons in Profinite Groups (Marcus P.F.du Sautoy and Dan Segal, eds.) Birkhauser(Basel), (1998).

[Gr2] R.I. Grigorchuk, On the Burnside problem for Periodic groups, *Func. Anal. Appl.***14** (1980) 41-43.

[GZ2] R.I. Grigorchuk and A. Zuk, *On a torsion-free weakly branch group defined by a three state automaton,* preprint, (2001).

[GZ1] R.I. Grigorchuk and A. Zuk, The lamplighter group as a group generated by a 2-state automaton and its spectrum, Geometriae Dedicata, 87, (2000), 209-244.

[GS] N. Gupta, S. Sidki, *On Burnside Problem for periodic Groups,* Math. Zam. 182(1983), 385-388.

[M] M.J. Mamaghani, On an Automata Group Generated By a Three State Automata, *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, Vol. 29, No. 2, (2003).

[M1] M.J. Mamaghani, A Class of Three Generated Automaton Groups on A three Letter Alphabet, *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, Vol. 30, No. 1, (2004).

[MKS] W. Magnus, A. Karrass, D. Solitar, *Combinatorial group theory*, Dover publications, INC. New York, New York, 1976 .

[Sh] V.I. Shushchansky, Periodic p-groups of permutations and the unrestricted Burnside problem, Dokl. AN. SSSR **147**(1979), pp. 557-561. *Journal of Algebra*, 211, (1999), 99-114.

[UH] J.D. Ullman, J.E. Hopcroft, *Introduction to automata theory, languages and cumputation,* Addison-Wesley, Reading, (1979).

محمد جلوداری ممقانی
دانشکدهٔ اقتصاد ـ دانشگاه علامه طباطبائی
پست الکترونیک j_mamaghani@atu.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۴ (بهار ۱۳۸۴) صص. ۸۱ تا ۸۳

پل لوی

حسن نجومی

فرایندهای لوی به نام ریاضی‌دان فرانسوی پل لوی[۱] (۱۹۷۱ — ۱۸۸۰)، یکی از پایه‌گذاران نظریهٔ فرایندهای تصادفی، نام‌گذاری شده‌اند. لوی کشفیات بسیار مهم و اساسی در زمینهٔ متغیرها و فرایندهای تصادفی گاوسی، قوانین اعداد بزرگ، قضیهٔ حد مرکزی، توزیع‌های احتمال پایدار، و توزیع‌های تقسیم پذیر نامتناهی انجام داد، و آغازگر مطالعهٔ فرایندهای دارای نموهای مستقل و غیر همبسته بود، که امروزه به نام او به «فرایندهای لوی» معروف هستند (فیزیک‌دانان انواع پایدار این فرایندها را با نام «پروازهای لوی[۲]» می‌شناسند). کتابی که او در این زمینه نگاشت الهام‌بخش بسیاری از محققین در نظریهٔ احتمال بوده است[۴]. او پیشتاز مطالعهٔ ویژگی های مسیرهای براونی است، و برای اولین بار مفهوم «زمان موضعی[۳]» را معرفی کرد. این مطالعات منجر به کتاب کلاسیک او در زمینهٔ فرایندهای تصادفی و حرکت براونی گردید [۳].

بنا به گفتهٔ تیلور[۴] «در آن زمان هنوز نظریهٔ ریاضی احتمال وجود نداشت، و شاخهٔ احتمالات در ریاضیات تنها مجموعه‌ای از مسائل کوچک محاسباتی بود. در حال حاضر نظریهٔ احتمال یک شاخهٔ تکامل یافته ریاضیات است؛ از روشهای همهٔ شاخه های آنالیز نوین بهره می برد، و به نوبهٔ خود ابزار مؤثر و ایده ها و مسائل جالبی را در اختیار شاخه های دیگر علوم قرار می دهد. اگر بخواهیم تنها از یک شخص به عنوان بیشترین تأثیرگذار بر استحکام و توسعهٔ نظریهٔ احتمال نام ببریم، آن شخص باید پل لوی باشد.»[٦]

لوئو[۵] توصیف زنده و روشنی از سهم لوی در نظریهٔاحتمال نوین ارائه می دهد: «پل لوی مانند یک نقاش در دنیای احتمالات بود. مانند نوابغ بزرگ نقاشی، رنگ آمیزی های او ابتکار شخصی بود و تابلوهای او نگرش ما را نسبت به واقعیت برای همیشه متحول ساخت. مطالعات او از نظر زمانی به سه دورهٔ اصلی تقسیم می‌شوند: دورهٔ قوانین حدی احتمال، دورهٔ بزرگ فرایندهای جمع و مارتینگل‌ها و «نقاشی شده با رنگ آمیزی‌های مسیر زمانی»، و دورهٔ مسیریابی براونی.»[5]

1) Paul Lévy 2) Lévy flights 3) local time 4) Taylor 5) Loève

اگرچه لوی معاصر با کلموگروف بود، اما روش اصول‌گرای کلموگروف را اتخاذ نکرد. دوب[۱] دربارهٔ لوی می‌نویسد: «پل لوی مقید به آداب و رسوم نیست. روش متداول او در رویارویی با ریاضیات تعریف متغیرهای تصادفی یکی پس از دیگری است، به جای آن که با یک فضای اندازه و خانوادهٔ توابع اندازه‌پذیر روی آن با تعدادی ویژگی درگیر باشد. لوی خود را درگیر تفاوت‌های جزئی رسمی بین ویژگی‌های مارکف و ویژگی‌های مارکف قوی نمی‌سازد. او این ایده را که اصل انتخاب اصل جداگانه‌ای است که می‌توان آن را نپذیرفت، رد می‌کند. او همواره مسیر مستقلی را در تفکراتش پیموده است؛ شاید به این دلیل که دنباله‌روی از دیگران برایش مشکل و دردآور بوده است.»[۱]

این رفتار لوی کاملاً مغایر با رفتار معاصرینش بود، به ویژه در فرانسه که جنبش بورباکی بر صحنه‌های علمی تسلط داشت. با توجه به این نکته و به علاوه با توجه به آن که بسیاری از معاصران لوی نظریهٔ احتمال را شاخهٔ جداگانه‌ای از ریاضیات تلقی نمی‌کردند، علت این که ایده‌های او در زمان انتشار توجهی را که سزاوار آن بودند در فرانسه کسب نکردند، روشن می‌شود [۱]. به گفتهٔ دوب «نشو و نمای علوم همچون دنباله‌ای از گام‌هایی که به جلو برداشته می‌شوند نیست. دقیق که بنگریم، خواهیم دید که پیشرفت کار تدریجی بوده، مسیر پر پیچ و خمی را پشت سر نهاده، و سر از بن بست‌ها در آورده، و چه بسا در جهاتی راه پیموده که قابل قبول دانشوران پیشروی دوران نبوده است»[۸].

با این حال ارزش کارهای لوی به‌تدریج در سطح بین‌المللی مطرح شد. آن طور که نوربرت وینر در شرح حال خود نوشته است [۷]، یکی از حوادث مهم زندگی او ملاقات با لوی در جریان کنگرهٔ بین‌المللی ریاضی‌دانان در استراسبورگ فرانسه در سال ۱۹۲۰ بود.

ایده‌های مشترک لوی و وینر در زمینهٔ نظریهٔ احتمال و آنالیز تصادفی به دوستی خاص و عمیقی بین آنها منجر شد و در سال‌های بعد فعالیت تحقیقاتی آن دو ادامه یافت. لوی یکی از دوستان بسیار نزدیک وینر، که بر اساس ویژگی های شخصیتی دوستان زیادی نداشت، بود و افکار و نظرات هریک از آنها بر کشفیات و نتایج دیگری بسیار اثر داشت.

اولین شماره مجلهٔ بین‌المللی *Annals of Probability* در زمینهٔ نظریهٔ احتمال، به بزرگداشت لوی اختصاص یافته است [۴] که در آن می‌توان شرح حالی از لوی، با تأکید بر کارهای ریاضی او را یافت. لوی خود نیز شرح حال علمی از زندگیش را نوشته است[۳].

نگاه احتمالاتی به آنالیز کلاسیک منجر به کشف و ابداع راه‌های روشن‌تر برای حل مسائل و اثبات‌های جذاب برای بسیاری از قضایای آنالیز شده است. از جمله می‌توان به اثبات قضیهٔ تقریب وایرشتراس به وسیلهٔ روش‌های احتمالاتی اشاره کرد[۹]. این مطلب تأثیر عمیق کارهای لوی و دیگر متخصصین احتمال را در شاخه‌های گوناگون ریاضی، حتی ریاضیات قطعی، روشن می‌سازد.
به طور خلاصه می‌توان گفت نظریهٔ احتمال و آنالیز تصادفی «که در ابتدا و نیز پس از آن برای مدتی

1) Doob

طولانی، عبارت بود از صورت آرمانی و تحلیل برخی از پدیده‌های زندگی واقعی در خارج از حیطهٔ ریاضیات» [۹]، در قرن بیستم توسط مثلث لوی ـ وینر ـ کلموگروف پایه‌ریزی و به یکی از مهمترین و اساسی‌ترین بخش‌های ریاضیات تبدیل شد. بسیاری از دستاوردهای علوم، مهندسی و مدیریت نتیجهٔ مستقیم اعمال نتایج و ایده‌های نظریهٔ احتمال و آنالیز تصادفی بوده است.

در حال حاضر به جرأت می‌توان گفت مدل‌سازی مؤثر و سودمند هر پدیده و سیستم در ارتباط با فعالیت‌های انسانی بدون استفاده از روشهای آنالیز تصادفی، که این سه تن توسعه دادند، امکان پذیر نیست. در واقع توانایی عمدهٔ روش‌های آمار و احتمال و آنالیز تصادفی آن است که با استفاده از آنها می توان بسیاری از متغیرهای به طور ذاتی توصیفی، مانند میزان اطمینان، میزان ریسک، میزان اعتماد، و غیره را به نحوی «اندازه‌گیری» کرد و در استنتاج‌ها و تصمیم‌گیری‌ها مورد استفاده قرار داد.

مراجع

[1] R. Cont, and P. Tankov, *Financial modeling with jump processes*, Chapman and Hall/CRC, 2004.

[2] P. Lévy, *Processes stochastiques et mouvement Brownien*, Editions Jacques Gabay, Sceaux, 1992.

[3] P. Lévy, *Quelques aspects de la Pensée d'un mathématicien. Introduction. Première Partie: Souvenirs Mathématiques. Deuxième Partie: Considérations Philosophiques* , Libraire Scientifiques et Technique Albert Blanchard, Paris, 1970.

[4] P. Lévy, *Théorie de l'Addition des Variables Aléatoire*, Gauthier Villards, Paris, 1937.

[5] M. Loève, Paul Lévy, 1886-1971, *Ann. Probability*, **1**(1971), 1-18.

[6] S. Taylor, Paul Lévy, *Bull. London Math. Soc.*, **7**(1975), 300-320.

[7] N. Wiener, *I Am a Mathematician*, MIT Press, 1956.

[۸] ج. دوب، «سیر پیدایش دقت در احتمال ریاضی»، نشر ریاضی، سال ۱۲، شمارهٔ ۱ و ۲، ۲۱—۲۷.

[۹] ب. ظهوری زنگنه، «روش‌های احتمالاتی در حل مسائل دترمینیستیک»، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، شمارهٔ ۲۸، بهار ۱۳۸۱، ۴۱—۵۲.

مترجم: حسن نجومی
دانشگاه صنعتی شریف، دانشکدهٔ علوم ریاضی
پست الکترونیک nojumi@sina.sharif.edu

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۴ (بهار ۱۳۸۴) صص. ۸۵ تا ۸۶

مسأله

این قسمت از فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی به طرح و سپس حلِ مسائلی در حدِ دروسِ دوره‌های کارشناسی و کارشناسی ارشدِ ریاضیات اختصاص دارد. از کسانی که مایل به ارسال مسائل یا حل مسائلِ مطرح شده می‌باشند، تقاضا می‌شود مسائل خود را به نشانی آقای دکتر محمد صال مصلحیان که در ذیل مسائل آمده است، ارسال فرمایند. مسائلِ ارسال‌شده، که باید همراه با حل کامل مسأله باشد، در مجله به نامِ شخصِ فرستنده درج خواهد شد.

مسألهٔ ۸۰: فرض کنیم a، b و c اعداد حقیقی مثبتی باشند که $abc = 1$. ثابت کنید

$$a^{2} + b^{2} + c^{2} \leq a^{3} + b^{3} + c^{3}.$$

(مجید میرزاوزیری، دانشگاه فردوسی)

مسألهٔ ۸۱: فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد مثبت باشد که به عدد ثابتی مانند a همگراست. ثابت کنید $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$.

مسألهٔ ۸۲: فرض کنید $f : [0, 1] \to [0, 1]$ به طور پیوسته مشتق‌پذیر باشد، $f(0) = 0$ و $f(1) = 1$. ثابت کنید حداقل یک خط $y = y_0$ وجود دارد که $y_0 \in [0, 1]$ و هیچ جا بر نمودار f مماس نیست.

مسألهٔ ۸۳: فرض کنید S مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی $x \in [0, 1]$ باشد که به ازای هر $\varepsilon > 0$ عدد گویای $\frac{p}{q}$ موجود است که $|x - \frac{p}{q}| < \frac{\varepsilon}{q^{2}}$. ثابت کنید S نامتناهی است و شامل هیچ بازه‌ای نیست.

مسألهٔ ۸۴: ثابت کنید هر زیرگروه سیلوی یک گروه متناهی پوچتوان، نرمال است.

مسألهٔ ۸۵: فرض کنید A یک جبر باناخ جابجایی (مثلاً $C([0, 1])$) باشد، $a \in A$، $T : A \to A$ عملگر $T(x) = xa$ باشد، $J = \cap\{a^n A : n \in \mathbb{N}\}$ و به ازای یک عدد $m \in \mathbb{N}$، $\overline{a^{m+1}A} = a^m A$، که در آن علامت بار نشان دهنده بستار است. ثابت کنید $T : J \to J$ یک‌به‌یک و پوشا است.
(شیرین حجازیان، دانشگاه فردوسی)

مسألهٔ ۸۶: فرض کنید n عددی طبیعی و a_n تعداد سه‌تاییهای صحیح (x, y, z) صادق در $x + y = 2z$ با شرط $1 \leq x, y, z \leq n$ باشد. ثابت کنید که a_n در یک معادله تفاضلی که خواهید یافت

صدق می‌کند. همچنین معادله $a_{n+1} - a_n = 1 + 2[\frac{n}{2}]$ را حل کنید. (آدینه محمد نارنجانی، دانشگاه فردوسی)

مسألهٔ ۸۷: تمام چندجمله‌ایهایی را بیابید که در رابطه زیر صدق می‌کنند:

$$f(x)f(x+1) = f(x^2 + x + 1)$$

(هانیه میرابراهیمی، دانشگاه فردوسی)

مسألهٔ ۸۸: فرض کنید X یک فضای متریک و فشرده و $f : X \to X$ تابعی پیوسته باشد. نشان دهید زیرمجموعه $Y \subseteq X$ وجود دارد بطوریکه $f(Y) = Y$. (هانیه میرابراهیمی، دانشگاه فردوسی)

مسألهٔ ۸۹: فرض کنید $a \in \mathbb{R}^3$ یک بردار غیر صفر باشد. همهٔ ماتریس‌های مربعی A با درایه‌های حقیقی را پیدا کنید که الف) برای هر $x \in \mathbb{R}^3$، $a \times Ax = A(a \times x)$ ب) $a \times Ax = (Aa) \times x$ (در اینجا $\times$ نمایش ضرب خارجی در $\mathbb{R}^3$ است).

نشانی: **مشهد، دانشگاه فردوسی، صندوق پستی ۱۱۵۹—۹۱۷۷۵، گروه ریاضی، دکتر محمد صال مصلحیان**