فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

سال ۲۵، شمارهٔ ۱، بهار ۱۳۸۵

(تاریخ انتشار: بهار ۱۳۸۶)

شمارهٔ پیاپی: ۳۶

فهرست مطالب

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی هر سال در دو شماره (بهار و پاییز) منتشر و به اعضای حقیقی، حقوقی و مشترکین انجمن ریاضی ایران ارسال می‌شود.

علاقه‌مندان به عضویت حقیقی و دانشگاه‌ها، مؤسسات و کتابخانه‌ها که تمایل به عضویت حقوقی یا اشتراک سالانه دارند می‌توانند با دبیرخانهٔ انجمن ریاضی ایران تماس حاصل نمایند.

شماره‌های قبلی این مجله با هماهنگی دبیرخانه قابل فروش می‌باشند.

روی جلد: **کیوشی ایتو** (Kiosi Itô)

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۶ (بهار ۱۳۸۵) صص. ۱ تا ۱۶

مسائل وارون

محمود حصارکی، مرتضی فتوحی فیروزآباد

چکیده

در این مقاله برای آشنایی با مسائل وارون چند مثال از این گونه مسائل و کاربردهای آنها ارائه می‌گردد. در پایان نیز به مشکلی که عموم مسائل وارون با آن مواجه هستند، یعنی بدرفتاری معادلات، اشاره شده و یکی از راه‌های برخورد با این مشکل مطرح می‌شود.

۱. مقدمه

دو مسأله را وارون یکدیگر گویند، هرگاه صورت‌بندی یکی به اطلاعاتی از مسأله دیگر نیاز داشته باشد. اما همواره یکی از این دو مسأله قبل از دیگری مورد بررسی قرار می‌گیرد و به آن مسألهٔ مستقیم[۱] گفته می‌شود. در مقابل مسألهٔ دیگر را وارون آن می‌گویند. تفاوت عمده این دو مسأله از آنجا ناشی می‌شود که در مورد مسألهٔ مستقیم معمولاً اطلاعات خوبی در دست است. مثلاً جواب هر مسأله به طور یکتا از روی داده‌های اولیه تعیین می‌گردد و این جواب پایدار است (بدین معنا که اختلال کوچک در داده‌های اولیه تغییر چندانی در جواب مسأله ایجاد نمی‌کند). این خاصیت جواب‌ها، حداقل انتظاری است که در بررسی مدل‌های فیزیکی از جواب مسأله داریم. بر همین اساس داشتن خواص وجود، یکتایی و پایداری جواب برای یک مسأله به خوش‌رفتاری آن مسأله تعبیر می‌شود و اگر یکی از این سه خاصیت برقرار نباشد، مسأله را بدرفتار گویند. غالب مسائل وارون مهمّی که تاکنون مطرح شده‌اند، بدرفتار می‌باشند، و همین مطلب باعث تقدم بررسی مسائل مستقیم بر مسائل وارون شده است. با بیان صورت مسألهٔ مستقیم، مسأله وارون متناظر آن این گونه مطرح می‌شود که چگونه می‌توان از روی جواب مسألهٔ مستقیم، یکی از داده‌های اولیه را تعیین کرد.

1) direct problem

عمده مباحثی که در هر مسألهٔ وارون مطرح می‌شود، عبارتند از یکتایی جواب، پایداری جواب و ارائه الگوریتمی که به وسیله آن بتوان به جواب وارون رسید. در مثال‌هایی که در بخش‌های ۲ الی ۷ می‌آیند، فقط به معرفی اجمالی مسائل و بیان صورت مسألهٔ وارون پرداخته شده است. برای اطلاع بیشتر از دستاوردهای موجود در هر قسمت به مراجع اشاره شده در هر بخش مراجعه شود. در پایان در بخش ۸ به معرفی مسائل بدرفتار پرداخته و روش‌های منظم‌سازی برای مقابله با اینگونه مسائل مطرح می‌شوند.

۲. جاذبه

اگر f تابع چگالی جسم Ω باشد، میدان جاذبهٔ تولید شده توسط آن در معادلهٔ پواسون[1] همراه با شرط حدی زیر صدق می‌کند:

$$-\Delta u = f \quad \text{در } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$$

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$$

این شرط حدی از این حقیقت فیزیکی نتیجه شده است که جاذبه در فاصله بسیار دور از جسم صفر است. در اینجا مسألهٔ مستقیم پیدا کردن میدان جاذبهٔ u از تابع چگالی f است. این مسأله برای هر تابع انتگرال‌پذیر f و حتی برای هر تابع توزیع که خارج Ω صفر باشد، دارای جواب یکتا است و این جواب پایدار است.

مسألهٔ وارون متناظر، پیدا کردن تابع چگالی f با فرض دانستن نیروی جاذبه ∇u روی رویهٔ Γ می‌باشد، که Γ قسمتی از مرز ناحیه‌ای است که Ω را در بر دارد. کاربرد این مسأله در زمین‌شناسی است و به وسیلهٔ آن و با محاسبهٔ نیروی جاذبه می‌توان درون زمین را شناسایی کرد. متأسفانه یکتایی جواب این مسأله وارون برقرار نمی‌باشد و نمی‌توان درون زمین را به طور منحصر به فردی بازیابی کرد. ولی با این حال اگر به دنبال تابع f باشیم که خواص معینی دارد مثلاً این که تابع f هارمونیک باشد، یا این که فقط به یک متغیر وابسته باشد و یا این که از نوع توابع مشخصهٔ $\chi(D)$ باشد که ناحیهٔ D درون Ω قرار دارد، می‌توان آن را به طور یکتا تعیین کرد [۱۰].

علاوه بر تعیین چگالی زمین از روی محاسبهٔ میدان جاذبه، این مسأله در هدایت موشک و هواپیما نیز به کار می‌رود. برای این منظور نیاز به این است که مقدار u در نزدیکی سطح زمین مشخص باشد. به همین منظور میدان جاذبه را به وسیلهٔ ماهواره‌ها در دور دست محاسبه کرده و با استفاده از این مسأله وارون تابع f که این میدان را تولید می‌کند، تعیین می‌گردد. با محاسبه f به راحتی می‌توان میدان را در هر نقطهٔ دلخواه خارج سطح زمین محاسبه کرد. برای اطلاعات بیشتر از نتایج به دست آمده به مراجع [۸]، [۱۰]، [۹] و [۲۰] مراجعه شود.

---

1) Poisson

۳. رسانایی

فرض کنید $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ناحیه‌ای کراندار با مرز هموار باشد و تابع مثبت γ رسانایی Ω را نشان دهد. پتانسیل u در Ω با ولتاژ f روی مرز ناحیه در معادلهٔ زیر صدق می‌کند:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\gamma \nabla u) &= 0 \quad \text{در } \Omega \\ u &= f \quad \text{روی } \partial\Omega \end{aligned} \tag{۱}$$

نگاشت Λ_γ تابع ولتاژ روی مرز را به تابع جریان متناظر می‌کند، یا به عبارت دقیق ریاضی نگاشت دیریکله به نیومن است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Lambda_\gamma(f) = \left(\gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}\right)\Big|_{\partial\Omega}.$$

در رابطهٔ بالا u جواب معادلهٔ (۱) و ν نشان دهندهٔ بردار عمود خارجی $\partial\Omega$ است. با مشخص بودن رسانایی γ می‌توان نگاشت Λ_γ را تعیین کرد که خود یک مسألهٔ مستقیم است. مسألهٔ وارون متناظر بدین صورت بیان می‌شود که با دانستن نگاشت Λ_γ چگونه می‌توان میزان رسانایی γ را تعیین کرد. در بعضی موارد مسأله وارون با اطلاعات کمتری نیز مطرح می‌شود، مثلاً آیا با دانستن تنها یک مقدار تابع ولتاژ f و جریان $\Lambda_\gamma(f)$ می‌توان رسانایی γ را تعیین کرد؟ تفاوت این سؤال با مسألهٔ قبل در این است که در اینجا تنها کافی است یکبار برای یک ولتاژ خاص، جریان را اندازه بگیریم. در مقابل در مسألهٔ قبل باید برای تمام ولتاژها میزان جریان مشخص باشد.

این مسأله در عکسبرداری تومورها به روش امپدانس[۱] کاربرد دارد. به همین منظور الکترودهایی روی سطح بدن قرار می‌گیرد و جریان الکتریسیته از آنها عبور داده شده و ولتاژ را در الکترودها محاسبه می‌کنند. این مسأله کاربردهای دیگری نیز در اکتشاف معدن و منابع زیرزمینی نیز دارد. برای اطلاع بیشتر از دستاوردهای این بخش به کارهای الساندرینی[۲] به عنوان مثال در [۲] یا کارهای اولمن[۳] در [۱۸] مراجعه شود.

۴. تبدیل رادون

اگر f تابعی تعریف شده در $\mathbb{R}^n$ باشد، تبدیل رادون f که با Rf نشان داده می‌شود، روی خانواده‌ای از زیرخمینه‌های $\mathbb{R}^n$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Rf(\gamma) := \int_\gamma f \, d\gamma$$

مسألهٔ وارون در اینجا تعیین R^{-1} می‌باشد، بدین معنا که با دانستن مقدار انتگرال یک تابع روی خانواده‌ای از زیرخمینه‌ها، چگونه می‌توان آن تابع را پیدا کرد. در حالت خاص و معروف این مسأله

1) electrical impedance tomography 2) Alessandrini 3) Uhlman

$\{\gamma\}$ خانواده‌ای از ابرفضاهای $\mathbb{R}^n$ هستند. در [۹] یکتایی جواب وارون و پایداری آن در بعدهای دو و سه بررسی شده است.
این مسأله در بُعد دو در حالتی که خانوادهٔ زیرخمینه‌های $\{\gamma\}$ خطوط راست صفحه باشند، در عکسبرداری تومورها به وسیلهٔ اشعهٔ X کاربرد دارد. در این کاربرد هر انتگرال $Rf(\gamma)$ بیانگر میزان کاهش انرژی اشعه X عبور داده شده از بدن می‌باشد که به وسیلهٔ ابزارهای پزشکی قابل محاسبه است. شناسایی تابع f بیانگر وضعیت داخلی بدن است.

همچنین این مسأله کاربرد دیگری در زمین‌شناسی و اکتشاف منابع زیرزمینی به روش لرزه‌ای[3] دارد. در این روش مسیر موجی که در زمین ایجاد می‌شود بین دو نقطهٔ x و y، منطبق بر ژئودزیک‌های $\gamma(x,y)$ است که از متریک ریمانی $a(x)|dx|^2$ به دست می‌آیند. تابع a معکوس تابع چگالی درون زمین است. با این فرض زمان عبور موج از نقطه x به y برابر است با

$$\tau(x,y) = \int_{\gamma(x,y)} d\gamma$$

این زمان به وسیلهٔ ابزارهای زمین‌شناسی قابل محاسبه است. مسألهٔ وارون پیدا کردن تابع چگالی a با اطلاعات $\tau(x,y)$ برای مقادیر $x,y \in \Gamma$ می‌باشد که Γ قسمتی از سطح زمین است. برای مطالعهٔ بیشتر به [۴]، [۱۴]، [۱۵] و [۱٦] مراجعه شود.

۵. شنیدن شکل طبل

این مسأله این گونه مطرح شده است که آیا می‌توان با شنیدن صدای طبل و هارمونیک‌های آن شکل آن را تعیین کرد؟ صورت ریاضی این مسأله بدین صورت است که اگر D پوستهٔ طبل باشد و به ارتعاش در آید، جابجایی آن در زمان t که با $F(x,y,t)$ نشان داده می‌شود در معادلهٔ موج

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = c^2 \Delta F \\ &F(x,y,t) = 0 \qquad (x,y) \in \partial D \end{aligned} \tag{۲}$$

صدق می‌کند که c مقداری ثابت است. جواب‌های به صورت $F(x,y,t) = u(x,y)e^{iwt}$ بیانگر همان تُن‌های خاصی است که پوسته می‌تواند ایجاد کند و مُدهای طبیعی آن طبل نامیده می‌شوند. با قراردادن رابطهٔ بالا در معادلهٔ (۲) معادلهٔ زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \Delta u + \lambda u &= 0 \quad \text{در } D \\ u &= 0 \quad \text{روی } \partial D \end{aligned}$$

مقدار ثابت λ را که معادلهٔ بالا برای آن جواب دارد، مقدار ویژهٔ دیریکله در ناحیهٔ D می‌نامند. ثابت شده است که این مقادیر دنبالهٔ گسسته $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \cdots$ را ایجاد می‌کنند که $\lambda_n \to \infty$،

3) seismic

و این مقادیر بیانگر همان مدهای طبیعی طبل هستند. مسألهٔ شنیدن شکل طبل که مسألهٔ وارون مقادیر ویژه است، این گونه بیان می‌شود که چگونه با دانستن مقادیر ویژه $\{\lambda_n\}$ شکل D را تعیین کنیم. ثابت شده است که مقادیر ویژهٔ D، برخی ویژگی‌های ناحیه مانند مساحت، محیط و تعداد مؤلفه‌های همبندی را تعیین می‌کند [۱۲]. با وجود این، یکتایی مسألهٔ وارون برقرار نمی‌باشد. در [۵] دو ناحیه متمایز با مرز قطعه قطعه هموار مثال زده شده است که مقادیر ویژهٔ آنها برابر است. ولی همچنان سؤال یکتایی مسألهٔ وارون برای نواحی با مرز هموار، مسأله‌ای باز است. برای مطالعات بیشتر در زمینهٔ مسائل وارون مقادیر ویژه به [۱۳] مراجعه شود.

٦. بازشناسی تصویر

هر تصویر در ناحیهٔ D را به وسیلهٔ تابع $u : D \longrightarrow [0, 1]$ می‌توان نشان داد که $u(x)$ بیانگر میزان روشنایی نقطه x است. به عنوان مثال $u(x) = 0$، یعنی رنگ نقطهٔ x کاملاً سفید است و $u(x) = 1$، یعنی کاملاً سیاه. دقت هر دستگاه عکسبرداری محدود است و میزان رنگ نقطه x را به صورت ترکیبی از رنگ نقاط اطراف آن نقطهٔ بیان می‌کند. مدل ریاضی این پدیده را می‌توان با یک عملگر انتگرالی بیان کرد. اگر تصویر به دست آمده از دستگاه عکسبرداری Au باشد، آنگاه Au به صورت زیر به دست آمده است:

$$(Au)(x) = \int_D K(x-y)u(y)\,dy$$

تابع K خارج گوی به شعاع r صفر است. در این صورت میزان رنگ نقطهٔ x در تصویر به دست آمده ترکیبی از رنگ نقاط در r ـ همسایگی آن نقطه است. مسألهٔ وارون در اینجا پیدا کردن تصویر واقعی u از تصویر به دست آمده $Au = v$ است. اهمیت این مسأله واضح است و کاربرد فراوانی در بازشناسی عکس‌های به دست آمده از ماهواره‌ها دارد. در بعضی موارد دستگاه عکسبرداری مقداری اختلال [۱] نیز در تصویر ایجاد می‌کند، به خصوص در تصاویر ماهواره‌ای که تصاویر همراه با مقداری اختلال ارسال می‌شوند. در این صورت u، تصویر واقعی و v، تصویر به دست آمده رابطه زیر را با هم دارند، که η اختلال وارده در تصویر است:

$$Au + \eta = v$$

در این حالت نیز باید با دانستن v بتوان u را محاسبه کرد. به عنوان نمونه در [۳]، [۱۱] و مراجع اشاره شده در آنها روش‌هایی برای بازشناسی تصویر آمده است.

٦. پراکندگی امواج

فرایند پراکندگی موج در اثر قرار گرفتن مانعی بر سر راه میدان امواج صوتی یا الکترومغناطیسی پدید

1) noise

می‌آید. بسته به خواص فیزیکی مانع فرآیند پراکندگی به صورت‌های مختلف مدل می‌شود. در این قسمت فقط به بررسی مدل پراکندگی امواج صوتی می‌پردازیم. برای بررسی این مدل، میدان امواج صوتی را به صورت نوسانی و هارمونیک زمانی در نظر می‌گیرند، یعنی $U(x,t)=\mathrm{Re}\{u(x)e^{-i\omega t}\}$ که $\omega>0$، فرکانس موج است. بدین ترتیب با قرار دادن $U(x,t)$ در معادلهٔ موج، معادله مستقل از زمان زیر

$$\Delta u+k^{2}u=0$$

که به معادله هلموتز معروف است، به دست می‌آید. در این معادله $k=\dfrac{\omega}{c_0}>0$, عدد موج و c_0 سرعت موج را نشان می‌دهند. این مدل، رفتار موج را در محیط همگن نشان می‌دهد. اگر محیط ناهمگن باشد و سرعت موج در آن تغییر کند، دیگر رفتار موج مطابق این مدل نخواهد بود. ولی به هر حال اگر مانع D بر سر راه موج باشد، میدان امواج در خارج از ناحیهٔ D مطابق معادله هلموتز رفتار می‌کند. اکنون اگر موج u^i در فضا منتشر شود و در اثر برخورد آن با D، موج u^s پراکنده شود، میدان $u=u^i+u^s$ در بیرون ناحیهٔ D تشکیل خواهد شد که در معادلهٔ هلموتز صدق می‌کند. اگر D یک مانع نرم ــ صوت[1] باشد، یعنی فشار موج روی مرز آن صفر است، در این صورت شرط مرزی دیریکله $u=0$ روی ∂D برقرار است. اگر D، مانع سخت ــ صوت[2] باشد، مؤلفهٔ عمودی سرعت موج روی مرز صفر است و به شرط مرزی نیومن $\dfrac{\partial u}{\partial\nu}=0$ روی ∂D می‌رسیم.

در حالت کلی‌تر روی مرز D مؤلفهٔ عمودی سرعت می‌تواند متناسب با فشار روی مرز باشد. در این حالت شرط مرزی را اَمپدانس[3] گویند:

$$\frac{\partial u}{\partial\nu}+i\lambda u=0 \qquad \text{روی } \partial D$$

حالت $\lambda=0$ به شرط مرزی نیومن، سخت ــ صوت، منجر می‌شود و حالت $\lambda=\infty$ همان شرط مرزی دیریکله، نرم ــ صوت است. در ساده‌ترین مدل فرض بر این است که λ ضریب ثابت است، یعنی شرایط فیزیکی مانع در عبور موج همگن است ولی در بعضی از مدل‌ها این ضریب وابسته به مکان تغییر می‌کند [۱]. مدل دیگری نیز برای مسائل پراکندگی موج وجود دارد که ترکیبی از حالات، شرط مرزی دیریکله و امپدانس است. این موانع به موانع به طور موضعی پوشیده شده معروف هستند. در این مدل مرز ∂D به صورت $\partial D=\Gamma_D\cup\Pi\cup\Gamma_I$ تجزیه می‌شود که Γ_D و Γ_I زیرمجموعه‌های باز و جدا از هم ∂D می‌باشند و Π مرز مشترک Γ_D و Γ_I است. بر روی Γ_D شرط مرزی دیریکله حاکم است و بر روی Γ_I شرط امپدانس، یعنی

$$\begin{aligned} u&=0 &&\text{روی } \Gamma_D\\ \frac{\partial u}{\partial\nu}+i\lambda u&=0 &&\text{روی } \Gamma_I\end{aligned}$$

انتظاری که در هر کدام از مدل‌های بالا داریم این است که بعد از منتشر شدن موج دلخواه u^i موج

1) sound-soft 2) sound-hard 3) impedance

پراکنده شده u^s در فاصلهٔ بسیار دور شبیه یک موج کروی رفتار کند. این خاصیت با رابطهٔ زیر که به رابطهٔ تشعشعی زامرفلد[1] معروف است بیان می‌شود:

$$\lim_{r\to\infty} r(\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s) = \circ \ , \qquad r = |x| \ .$$

از این رابطه نتیجه می‌شود که رفتار مجانبی میدان u^s به صورت زیر است:

$$u^s(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|}\left\{u^\infty(\hat{x}) + o(\frac{۱}{|x|})\right\} \ , \qquad |x| \to \infty.$$

در این رابطه $\hat{x} = \frac{x}{|x|}$ است و

$$u^\infty(\hat{x}) = \frac{۱}{۴\pi}\int\limits_{\partial D}\left\{u^s(y)\frac{\partial e^{-ik\hat{x}\cdot y}}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u^s}{\partial \nu}(y)e^{-ik\hat{x}\cdot y}\right\} ds(y).$$

که روی کرهٔ واحد تعریف می‌شود، الگوی میدان دور[2] میدان u^s نامیده می‌شود.

در غالب مسائل، موج منتشر شدهٔ u^i موج تخت، $u^i(x,d) := e^{ikx\cdot d}$، است که در راستای d منتشر شده است. میدان امواج پراکنده شده و الگوی میدان دور آن را به ترتیب با $u^s(x,d)$ و $u^\infty(\hat{x},d)$ نشان می‌دهند. با شناخت D و ماهیت فیزیکی آن که تعیین کنندهٔ شرط مرزی D می‌باشد، تابع $u^\infty(\hat{x},d)$، برای هر $\hat{x},d \in \Omega$ قابل محاسبه است. مسألهٔ مستقیم پراکندگی موج، محاسبهٔ میدان امواج پراکنده شده یا الگوی میدان دور برای هر موج دلخواه منتشر شدهٔ u^i است.

در مقابل مسألهٔ وارون پراکندگی موج به این صورت مطرح می‌شود، آیا با دانستن الگوی میدان دور $u^\infty(\hat{x},d)$ برای تمام امواج تخت، ناحیهٔ D قابل شناسایی است؟ اگر به نظر می‌رسد این میزان اطلاعات برای پیدا کردن D زیاد است، می‌توان فرض مسأله را بدین صورت تغییر داد که u^∞ تنها برای تعداد متناهی جهت d یا تنها یک جهت مشخص است. یا این که اصلاً برای یک موج دلخواه u^i که لزوماً تخت نیست، u^∞ مشخص است و آیا می‌توان D و u^s را تعیین نمود؟ البته باید ذکر کرد که الگوریتم‌هایی که تا چندی پیش برای شناسایی D وجود داشتند، علاوه بر اطلاعات کامل $u^\infty(\hat{x},d)$ نیاز به این داشتند که خواص فیزیکی D نیز تا حدودی مشخص باشد و نوع شرط مرزی را از قبل بدانیم. یعنی به فرض سؤال باید این مطلب را اضافه کرد که D، نرم ـ صوت، سخت ـ صوت یا به طور موضعی پوشیده شده است. این در حالی است که در بسیاری از کاربردها مانع D کاملاً ناشناخته است.

اگر مسألهٔ وارون دقیق‌تر مطرح شود، تعیین خواص فیزیکی مانع از روی اطلاعات الگوی میدان دور نیز در صورت مسأله جا می‌گیرد. اینکه بتوان تعیین کرد که مانع سخت ـ صوت است یا نرم ـ صوت و یا این که به طور موضعی پوشیده شده است، یا در حالت امواج الکترومغناطیس بتوان

---

1) Sommerfeld radiation condition 2) far field pattern

مشخص کرد که مانع رسانای کامل است یا خیر. این مسأله در حالتی که با شرایط مرزی اَمپدانس سروکار داریم با تعیین ضریب اَمپدانس سطح کامل‌تر می‌شود. همچنین در حالت موانع به طور موضعی پوشیده شده می‌تواند این سؤال مطرح شود که کدام قسمت از سطح پوشیده شده است؟ علاوه بر این‌ها در بررسی مسائل وارون بحث یکتایی جواب نقش مهمی دارد. بنابراین در کلی‌ترین حالت که همان موانع به طور موضعی پوشیده شده هستند، مسائل وارون را در چهار سؤال می‌توان مطرح کرد:

۱− چگونه شکل مانع موج را بازسازی کنیم؟ آیا این بازسازی جواب یکتا دارد؟

۲− آیا می‌توان شرایط مرزی را تعیین کرد؟ آیا مانع به طور موضعی پوشیده شده است یا خیر؟

۳− کدام قسمت از سطح پوشیده شده است؟ آیا می‌توان به جواب یکتا رسید؟

۴− خواص الکتریکی سطح پوشیده شده چیست؟ آیا ضریب اَمپدانس به طور یکتا تعیین می‌شود؟

برای آشنایی با آخرین دستاوردها در این زمینه می‌توانید به [٦] و [١٧] مراجعه کنید. مسائل وارون پراکندگی امواج نقش مهمی در علوم کاربردی نظیر عکسبرداری‌های پزشکی، علم مواد، رادارها و اکتشافات زیرزمینی دارد. در همهٔ این کاربردها با استفاده از خواص پدیدهٔ پراکندگی امواج سعی در شناسایی یک شیء ناشناخته یا خواصی از آن می‌شود.

۸. مسائل بدرفتار

همه مثال‌های قبل به نوعی عملگر پیوسته‌ای مانند $A : X \longrightarrow Y$ را نشان می‌دادند، که در هر مسأله فضاهای X و Y متناسب با آن مسأله تعریف می‌شوند. در هر قسمت مسألهٔ وارون پیدا کردن جواب معادله

$$Ax = y \qquad (۳)$$

برای مقدار مشخص $y \in Y$ است. بنابراین قبل از هر چیز، وجود جواب و یکتایی آن اهمیت خود را نشان می‌دهند. ولی مطلب مهم دیگری که بیش از همه در آزمایش‌های فیزیکی مهم جلوه کرده است، پایداری جواب است. در اندازه‌گیری‌های فیزیکی هیچ وقت مطمئن نخواهیم شد که اندازهٔ محاسبه شده میزان واقعی کمیت مورد نظر است. لذا اگر میزان واقعی کمیت مورد نظر در معادلهٔ (۳)را y بنامیم و کمیت اندازه‌گیری شده را y^δ قرار دهیم، تنها اطلاعی که از میزان واقعی y داریم، این است که ابزار فیزیکی ما با تقریب مثلاً δ، کمیت مطلوب را محاسبه می‌کند، یعنی

$$||y^\delta - y||_Y < \delta.$$

لذا در عمل به جای حل معادله و پیدا کردن x به جواب x^δ می‌رسیم که جواب آن معادله برای مقدار y^δ می‌باشد، یعنی $Ax^\delta = y^\delta$. شرط پایداری تضمین می‌کند که جواب به دست آمده x^δ

نزدیک به جواب واقعی x می‌باشد. در واقع $\|x^\delta - x\| \to 0$ هرگاه $\|y^\delta - y\| \to 0$. بر همین اساس هادامارد[۱] مفهوم خوش‌رفتاری[۲] معادله $Ax = y$ را این گونه تعریف کرد که سه خاصیت وجود جواب، یگانگی جواب و پایداری جواب برای آن برقرار باشد، یا به عبارت دیگر عملگر $A^{-1} : Y \longrightarrow X$ خوش‌تعریف و پیوسته باشد. در غیر این صورت اگر معادلهٔ $Ax = y$ یکی از این سه خاصیت را نداشته باشد، بدرفتار[۳] می‌نامند.

مثال ۱.تابع $u(x,t)$ درجهٔ حرارت یک میله را در زمان t نشان می‌دهد که در معادلهٔ زیر صدق می‌کند:

$$
\begin{aligned}
\partial_t u - \partial_x^2 u &= 0 \qquad && \text{در } (0,1)\times(0,T) \\
u(0,t) = u(1,t) &= 0 \qquad && t \in (0,T) \\
u(x,0) &= u_0 \qquad && x \in (0,1)
\end{aligned}
$$

عملگر $A : L^2(0,1) \longrightarrow L^2(0,1)$ مقدار حرارت میله را در زمان T برحسب مقدار آن در زمان صفر نشان می‌دهد یعنی

$$Au_0 = u_T$$

که $u_T(x) = u(x,T)$. در این صورت معادلهٔ $Au_0 = u_T$ بدرفتار است. زیرا اگر $a_k(x) = \sin(\pi k x)$ آنگاه

$$(Aa_k)(x) = e^{-\pi^2 k^2 T} \sin(\pi k x)$$

در این صورت $\|Aa_k\|_{L^2} \to 0$ در حالی که $\|a_k\|_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

مثال ۲. هر عمگر فشردهٔ $K : X \longrightarrow Y$ که بعد فضای X نامتناهی است، بدرفتار است. زیرا در غیر این صورت K^{-1} پیوسته است و از آنجا که ترکیب دو عملگر فشرده و پیوسته، فشرده خواهد شد، نتیجه می‌شود که $I = K^{-1}K : X \longrightarrow X$ فشرده است و این مطلب با فرض بعد نامتناهی X تناقض دارد. نمونه خوبی از عملگرهای فشرده، عملگرهای انتگرالی

$$(Af)(x) = \int_\Omega K(x,y) f(y)\, dy$$

می‌باشند که در مسائل وارون مختلفی ظاهر می‌شوند، مانند مثال ۱ یا مسائل مطرح شده در بخش‌های ۲ و ۶.

1) Hadamard 2) well-posedness1) 3) ill-posed

از آنجا که عموم مسائل وارون بدرفتار هستند، لذا در نظریهٔ مسائل وارون بررسی مسائل بدرفتار اهمیت به سزایی دارد. هر چند با انتخاب فضاهای مناسب می‌توان مشکل وجود و یکتایی آن را برطرف کرد، ولی از آنجا که اهمیت مسائل وارون در کاربردهای فیزیکی آنها و حل عددی می‌باشد، لذا بحث پایداری از اهمیت بسیاری برخوردار است. یکی از راه‌های برخورد با این مشکل آن است که نُرم فضاهای X و Y را تغییر دهیم تا عملگر A^{-1} پیوسته شود. اما این روش برای بسیاری از مسائل مناسب نیست، چرا که محدودیت‌های فیزیکی مسألهٔ فضاهای X، Y و نرم‌های آنها را تعیین می‌کنند. راه دیگر، روش‌های منظم‌سازی[1] است که در بخش بعد مطرح خواهد شد.

۱.۸ روش‌های منظم‌سازی

به‌وسیلهٔ روش‌های منظم‌سازی می‌توان تقریبی از جواب هر معادلهٔ بدرفتار را به دست آورد که پایدار نیز باشد. فرض کنید $A : X \longrightarrow Y$ عملگر خطی و یک به یک باشد. همان طور که در بخش قبل نیز اشاره شد، شرط یک به یکی را با انتخاب مناسب فضای X می‌توان برقرار کرد. قرار است معادلهٔ $Ax = y$، با دانستن تقریب y^δ از y حل شود که

$$\|y^\delta - y\| \leq \delta.$$

وقتی $y \in \operatorname{Im} A$، معادلهٔ $Ax = y$ جواب یکتا دارد. اما برای مقدار مختل شدهٔ y^δ دیگر لزومی برای برقراری شرط $y^\delta \in \operatorname{Im} A$ و وجود جواب مسأله نیست. روش‌های منظم‌سازی برای مقدار y^δ، مقدار x^δ را متناظر می‌کند که علاوه بر این که تقریبی از جواب $Ax = y$ می‌باشند، پایدار نیز هستند. یعنی اگر δ به صفر میل کند، آنگاه x^δ نزدیک x خواهد شد. در حالتی که عملگر A پایدار نباشد، $A^{-1} : \operatorname{Im} A \longrightarrow X$ بیکران است. در روش‌های منظم‌سازی برای پیدا کردن جواب پایدار معادله تقریبی از عملگر A^{-1} ارائه می‌شود.

تعریف ۱. X و Y فضاهای نرم‌دار بوده و $A : X \longrightarrow Y$ عملگری خطی و یک به یک است. خانواده عملگرهای خطی $R_\alpha : Y \longrightarrow X$، $\alpha > 0$، را طرح منظم‌سازی عملگر A گویند، هرگاه برای هر $x \in X$،

$$\lim_{\alpha \to 0} R_\alpha Ax = x.$$

پارامتر α را پارامتر منظم‌سازی می‌نامند. از این تعریف به راحتی نتیجه می‌شود که برای هر $y \in \operatorname{Im} A$، $R_\alpha y \to A^{-1} y$ وقتی $\alpha \to 0$. قضیه زیر نشان می‌دهد در حالتی که عملگر A فشرده باشد، همگرایی خانواده R_α نمی‌تواند یکنواخت باشد.

قضیهٔ ۱. X و Y فضاهای نرم‌دار و $A : X \longrightarrow Y$ عملگری خطی و فشرده است و $\dim X = \infty$. در این صورت اگر خانوادهٔ عملگرهای $\{R_\alpha\}$، طرح منظم‌سازی عملگر A باشند، آنگاه:

---

1) regularization methods

۱ـ عملگرهای $\{R_\alpha\}$ به طور یکنواخت کراندار نیستند، یعنی زیردنبالهٔ $\{\alpha_j\}$ وجود دارد که $\|R_{\alpha_j}\| \to \infty$ وقتی $\alpha_j \to 0$.

۲ـ دنبالهٔ عملگرهای $\{R_\alpha A\}$ وقتی $\alpha \to 0$ به طور یکنواخت همگرا نمی‌باشد.

اثبات. قضیه ۴ـ۴ در مرجع [٦].

به وسیلهٔ طرح منظم‌سازی R_α جواب x از معادلهٔ $Ax = y$ به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$x_\alpha^\delta := R_\alpha y^\delta.$$

خطای تقریب به دست آمده عبارت است از:

$$\begin{aligned}\|x_\alpha^\delta - x\| = \|R_\alpha y^\delta - R_\alpha y + R_\alpha Ax - x\| &\leq \|R_\alpha\|\|y^\delta - y\| + \|R_\alpha Ax - x\| \\ &\leq \delta\|R_\alpha\| + \|R_\alpha Ax - x\|\end{aligned}$$

اگر α ثابت بماند و $\delta \to 0$، جملهٔ اول به صفر میل می‌کند ولی مقدار جملهٔ دوم ثابت است و میزان خطا به اندازهٔ دلخواه کوچک نمی‌شود. همچنین اگر δ را ثابت نگه داریم و $\alpha \to 0$، جمله دوم به صفر میل می‌کند، اما بنا بر قضیهٔ قبل جمله اول بزرگ می‌شود. برای رسیدن به یک جواب پایدار، هر طرح منظم‌سازی شامل روشی برای انتخاب $\alpha = \alpha(\delta)$ بر حسب δ است، تا میزان خطای کل به اندازهٔ قابل قبولی کوچک شود.

تعریف ۲. طرح منظم‌سازی R_α همراه با انتخاب $\alpha = \alpha(\delta)$ را قابل قبول گویند هرگاه برای هر $x \in X$ و $\|y^\delta - Ax\| \leq \delta$ داشته باشیم:

$$\alpha(\delta) \to 0\,, \qquad \|R_{\alpha(\delta)} y^\delta - x\| \to 0$$

وقتی $\delta \to 0$.

در دو بخش بعدی دو نمونه از طرح‌های منظم‌سازی، به همراه انتخاب قابل قبول پارامتر منظم‌سازی ذکر می‌شود. کتاب‌های [٦]، [۹]، [۱۳] و [۱۹] مراجع مناسبی در این زمینه می‌باشند.

۲.۸ تجزیه مقادیر تکین

X و Y فضاهای هیلبرت بوده و عملگر خطی $A : X \longrightarrow Y$ فشرده می‌باشد. در این صورت عملگر الحاقی A که با $A^* : Y \longrightarrow X$ نشان داده می‌شود، نیز فشرده است. عملگر فشرده، خودالحاق و نامنفی $A^*A : X \longrightarrow X$ دارای مقادیر ویژهٔ زیر می‌باشد:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \cdots > 0$$

دنبالهٔ متعامد یکهٔ $\{u_n\}$ در X موجود است که

$$A^*Au_n = \lambda_n u_n.$$

با قرار دادن $\mu_n = \lambda_n^{1/2}$ و $v_n = \frac{1}{\mu_n}Au_n$، دنبالهٔ $\{v_n\}$ متعامد یکه خواهد شد و

$$Au_n = \mu_n v_n \ , \qquad A^*v_n = \mu_n u_n.$$

دنبالهٔ (μ_n, u_n, v_n) را دستگاه تکین[1] عملگر A می‌نامند. اگر عملگر A یک به یک باشد، دنبالهٔ $\{u_n\}$ پایهٔ متعامد یکه برای X خواهد بود. در این صورت هر مقدار $x \in X$، تجزیه‌ای به صورت زیر دارد:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}(x, u_n)u_n.$$

همچنین رابطهٔ زیر برقرار است:

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(x, u_n)v_n.$$

در صورتی که $y \in N(A^*)^\perp$، جواب معادلهٔ $Ax = y$ بدین شکل قابل محاسبه است:

$$x = A^{-1}y = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(y, v_n)}{\mu_n}u_n.$$

این رابطه طبیعت بدرفتاری معادلهٔ $Ax = y$ را به خوبی نمایش می‌دهد. چرا که اگر $y^\delta = y + \delta v_n$ آنگاه $x^\delta = x + \frac{\delta v_n}{\mu_n}$ و خطای به دست آمده عبارتست از:

$$\|x^\delta - x\| = \frac{\|y^\delta - y\|}{\mu_n}.$$

یعنی با مقادیر مختلف y^δ که در تقریب $\|y^\delta - y\| = \delta$ صدق می‌کنند، میزان خطای جواب معادله به اندازهٔ کافی می‌تواند بزرگ باشد، چرا که $\mu_n \to 0$. بر همین اساس نرخ صفر شدن مقادیر تکین μ_n، معیاری برای میزان بدرفتاری معادلهٔ $Ax = y$ ارائه می‌کند.

برای از بین بردن بدرفتاری معادله می‌توان تأثیر عامل $\frac{1}{\mu_n}$ را با قرار دادن فیلتر مناسبی کم کرد و منظم سازی R_α را به صورت زیر تعریف کرد:

$$R_\alpha y = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\omega_\alpha(\mu_n)}{\mu_n}(y, v_n)u_n.$$

توابع $\omega_\alpha : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ باید دارای خواص زیر باشند:

1) singular system

۱ــ برای هر α، ω_α کراندار است. این شرط همگرایی سری فوق را تضمین می‌کند.

۲ــ برای هر α، $\sup_{0<s}|\frac{\omega_\alpha(s)}{s}| < \infty$. در این صورت R_α پیوسته خواهد بود و $\|R_\alpha\| \le \sup_{0<s}|\frac{\omega_\alpha(s)}{s}|$.

۳ــ برای هر مقدار $s > 0$، $\lim_{\alpha\to 0}\omega_\alpha(s) = 1$. از این شرط، نتیجه می‌شود که، $R_\alpha Ax \to x$.

مثال ۳. با قرار دادن $\omega_\alpha(s) = \begin{cases} 1, & s > \alpha \\ 0, & s \le \alpha \end{cases}$، طرح منظم‌سازی R_α به صورت زیر به دست می‌آید:

$$R_\alpha y = \sum_{\mu_n > \alpha} \frac{1}{\mu_n}(y, v_n)u_n,$$
$$\|R_\alpha\| \le \tfrac{1}{\alpha}.$$

در R_α سری $A^{-1}y$ از یک جا به بعد بریده شده است. اگر α کوچک انتخاب شود این سری به $A^{-1}y$ نزدیک‌تر می‌شود و دقت جواب بیشتر خواهد بود. از طرف دیگر برای به دست آوردن پایداری نیاز است که α بزرگ باشد. با انتخاب $\alpha(\delta) = \delta^p$، $0 < p < 1$، می‌توان تعادلی بین دقت و پایداری برقرار کرد. در این صورت میزان خطا عبارتست از:

$$\delta^{1-p} + \|R_{\alpha(\delta)}Ax - x\|,$$

که می‌تواند با انتخاب مناسب δ به اندازه کافی کوچک شود.

مثال ۴. (منظم‌سازی تیخونوف[1]). طرح منظم‌سازی به دست آمده از توابع $\omega_\alpha(s) = \dfrac{s^2}{s^2+\alpha}$ را تیخونوف نامند و داریم:

$$\|R_\alpha\| \le \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}.$$

می‌توان پارامتر منظم‌سازی را با انتخاب $\alpha(\delta) = \delta^p$، $0 < p < 2$، قابل قبول کرد.

۳.۸ منظم‌سازی تیخونوف

عملگر خطی و پیوسته $A : X \longrightarrow Y$ بین فضاهای هیلبرت X و Y مفروض است. در این صورت بهترین جواب معادلهٔ $Ax = y$ در حالتی که $y \notin \operatorname{Im} A$، پیدا کردن مقدار $\hat{x} \in X$ است که

$$\|A\hat{x} - y\| = \min_{x\in X}\|Ax - y\|.$$

1) Tikhonov Regularization

مقدار $\hat{x} \in X$ در رابطهٔ بالا صدق می‌کند اگر و تنها اگر $A^*A\hat{x} = A^*y$. این معادله همچنان بدرفتار است و برای حل این مشکل جملهٔ $\alpha J(x)$ را به می‌نیمم‌ساز اضافه می‌کنیم. تابع جریمهٔ[1] J، تابعی نیم‌پیوسته پایینی و مثبت می‌باشد. در این صورت طرح منظم‌سازی R_α را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$R_\alpha(y) = \arg\min_{x \in X}\{\|Ax - y\|^۲ + \alpha J(x)\}.$$

تابع $\arg\min$ مقداری را نسبت می‌دهد که از آن می‌نیمم به دست می‌آید. اگر $J(x) = \|x\|^۲$، طرح منظم‌سازی R_α را تیخونوف نامند و $x_\alpha = R_\alpha y$ در معادلهٔ زیر صدق می‌کند:

$$(\alpha I + A^*A)x_\alpha = A^*y.$$

در حالتی که A فشرده باشد، عملگر $\alpha I + A^*A$ دوسویی است و وارون پیوسته دارد و طرح منظم‌سازی R_α عبارت است از:

$$R_\alpha = (\alpha I + A^*A)^{-۱}A^*.$$

به راحتی می‌توان دید که R_α همان طرح منظم‌سازی مثال ۴ است. (برای اثبات این مطلب که R_α طرح منظم‌سازی است به قضایای ۴—۱۳ و ۴—۱۴ در [٦] مراجعه شود.)

در [۱۹] نمونه‌های مختلفی از توابع جریمه معرفی شده است. انتخاب مناسب تابع جریمه می‌تواند در به دست آوردن نتایج مطلوب، مفید واقع شود. به عنوان نمونه به [۳] مراجعه شود که مسألهٔ بازشناسی تصویر را بررسی می‌کند. در آنجا تابع جریمه به گونه‌ای تعیین می‌شود که جواب مسأله مرز شکل‌های مختلف را حفظ کند.

در پایان برای انتخاب قابل قبول α در طرح منظم‌سازی تیخونوف روش دیگری ارائه می‌شود که به اصل اختلاف[2] معروف است.

قضیهٔ ۲. اگر عملگر $A : X \longrightarrow Y$ خطی، فشرده و یک به یک باشد که تصویرش در Y چگال است، برای مقدار $y \in Y$ و $\circ < \delta < \|y\|$، می‌توان پارامتر α را به طور یکتا تعیین کرد که

$$\|AR_\alpha y - y\| = \delta.$$

اثبات. قضیه ۴—۱۵ در کتاب [٦].

از طرف دیگر با توجه به رابطهٔ

$$x_\alpha = R_\alpha y^\delta = \arg\min_{u \in X}(\|Au - y^\delta\|^۲ + \alpha\|u\|^۲)$$

اگر x جواب واقعی معادلهٔ $Ax = y$ باشد، خواهیم داشت:

1) penalty function 2) discrepancy principle

$$\begin{aligned}\|Ax_\alpha - y^\delta\|^۲ + \alpha\|x_\alpha\|^۲ \leq \|Ax - y^\delta\|^۲ + \alpha\|x\|^۲ &= \|y - y^\delta\|^۲ + \alpha\|x\|^۲ \\ &= \delta^۲ + \alpha\|x\|^۲\end{aligned}$$

با توجه به انتخاب α از قضیهٔ ۲ نتیجه می‌شود که $\|x_\alpha\| \leq \|x\|$. از طرف دیگر وقتی $\delta \to ۰$، همگرایی ضعیف $x_\alpha \rightharpoonup x$ برقرار است. برای نشان دادن این مطلب کافی است برای هر $z \in Y$ عبارت زیر به صفر میل کند، زیرا که تصویر A^* چگال است ($\overline{\operatorname{Im} A^*} = N(A)^\perp$).

$$\begin{aligned}|(x_\alpha - x, A^* z)| &= |(Ax_\alpha - Ax, z)| = |(AR_\alpha y^\delta - y^\delta + y^\delta - y, z)| \\ &\leq (\|AR_\alpha y^\delta - y^\delta\| + \|y^\delta - y\|)\|z\| \leq ۲\delta\|z\| \longrightarrow ۰.\end{aligned}$$

بنابراین از همگرایی ضعیف $x_\alpha \rightharpoonup x$ و رابطهٔ $\|x_\alpha\| \leq \|x\|$ نتیجه می‌شود که میزان خطای جواب وقتی $\delta \to ۰$، به صفر میل خواهد کرد:

$$\|x_\alpha - x\|^۲ = \|x_\alpha\|^۲ - ۲\operatorname{Re}\langle x_\alpha, x\rangle + \|x\|^۲ \leq ۲\|x\|^۲ - ۲\operatorname{Re}\langle x_\alpha, x\rangle \longrightarrow ۰.$$

مراجع

[1] Akduman I. and Kress R., Direct and Inverse Scattering Problems for inhomogeneous impedance cylinders of arbitrary Shape, *Radio Science*, vol. 38, No. 6, (2003) 1110.

[2] Alessandrini G. and Gabouro, R., Determining Conductivity with Special anisotropy by boundary measurements, *SIAM J. Math. Anal.,* **33**, 1 (2001) 153–171.

[3] Aubert G. and Vese L., A variational method in Image recovery, SIAM J. *Numer. Anal.*, **34**, 5, (1997) 1948–1979.

[4] Bleistein N., Cohen J.K., Stockwell J.W. and Jr., *Mathematics of multidimensional seismic imaging, migration and inversion*, Springer-Verlag, New York, (2001).

[5] Chapman S.J., Drums that Sound the same, *Amer. Math. Monthly,* **102**, 2, (1995) 124–138.

[6] Colton D. and Kress R., *Inverse acoustic and electromagnetic Scattering theory*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1998).

[7] Fotouhi M., *Inverse Scattering Problems*, Phd Thesis, Sharif University of Thechnology (2005).

[8] Glasko V.B., *Inverse problems of mathematical physics*, American Institute of Physics, New York (1984).

[9] Isakov V., *Inverse Source Problems*, Math. Surveys and Monographs Series, vol. 34, AMS, providence, R.I. (1990).

[10] Isakov V., *Inverse problems for partial differential equations*, Springer-Verlag, New York (1998).

[11] Jain A.K., *Fundamentals of digital image processing*, Prentice-Hall, New York (1989).

[12] Kac M., Can one hear the shape of a drum?, *Amer. Math. Monthly*, **73**, 4, (1966) 1–23.

[13] Kirsch A., *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, Springer-Verlag, New York (1996).

[14] Louis A.K., *Medical imaging State of art and future developments Inverse Problems*, **89** (1992) 709–738.

[15] Louis A.K. and Natterer F., *Mathematical Problems in Computerized tomography*, Proc. IEEE, **71**, (1983) 379–384.

[16] Natterer F., *The mathematics of Computerized Tomography*, Teubner-Verlag, Stuttgart (1986).

[17] Potthast R., *Point Sources and multiples in inverse scattering theory*, Chapman&Hall/CRC (2001).

[18] Uhlmann G., *Recent progress in the anisotropic electrical impedance problems*, Proceedings of the USA-Chile workshop on Nonlinear Analysis, J. Diff. Eqns., Conf. 06 (2001), 303–311.

[19] Vogel C.R., *Computational methods for inverse problems*, SIAM (2002).

[20] Zidarov D., *Inverse gravimetric problems in geoprospecting and geodesy*, elsevier, Amsterdam (1980).

محمود حصارکی
دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده علوم ریاضی
پست الکترونیک: hesaraki@sina.sharif.edu

مرتضی فتوحی فیروزآباد
دانشگاه‌صنعتی شریف، دانشکده علوم ریاضی
پست الکترونیک: fotouhi@sina.sharif.edu

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۶ (بهار ۱۳۸۵) صص. ۱۷ تا ۳۸

تاریخچهٔ انتگرال تصادفی و ریاضیات مالی از ۱۸۸۰ تا ۱۹۷۰

رابرت ژارو و فیلیپ پروتر[۱]

تاریخ انتگرال‌گیری تصادفی و یافتن الگویی برای قیمت‌گذاری قراردادهای بازار بورس، هر دو به حرکت براونی بازمی‌گردد، بنابراین بحث را از حرکت براونی آغاز می‌کنیم. کوشش‌های اولیه برای ارائهٔ الگوی ریاضی حرکت براونی از سه منبع مختلف سرچشمه می‌گیرد که هیچ کدام ارتباطی با دیگری نداشته است: اولی کار ت. ن. تیله[۲] در کپنهاگ در سال ۱۸۸۰ بود که هنگام مطالعهٔ سری‌های زمانی، الگوی هوشمندانه‌ای برای حرکت براونی ابداع کرد [۸۰][۳]. دومی به کارهای ل. بشیلیه[۴] در پاریس مربوط می‌شود که هنگام مطالعهٔ رفتار پویای بازار بورس پاریس در سال ۱۹۰۰، الگویی برای حرکت براونی ارائه داد (مراجع [۱]، [۲] و [۱۱] را ملاحظه کنید). بالأخره منبع سوم، الگویی بود که آلبرت اینشتین در سال ۱۹۰۵ برای حرکت ذرات ریز معلق در یک مایع ارائه کرد تا فیزیکدانان دیگر را درباره ماهیت مولکولی ماده، متقاعد سازد (برای ملاحظهٔ شرحی از انگیزه‌های اینشتین و توصیف الگوی او به [۶۳] رجوع کنید). از این سه الگو، الگوهای تیله و بشیلیه در طولانی مدت بروز چندانی نداشتند، لکن الگوی اینشتین تأثیر خود را بلافاصله نشان داد.

از آنجا که بسیاری، بشیلیه را بنیان‌گذار ریاضیات مالی می‌دانند، آنچه را بر او گذشت قدری مبسوط‌تر بیان می‌کنیم. بشیلیه، پس از کار تیله (که در زمان خودش مورد اقبال چندانی واقع نشد) و پیش از کار اینشتین، تلاش کرد تا نوفه‌های بازار بورس پاریس را الگوسازی کند. در این راه، سپس با الهام از ایده‌های مربوط به قضیهٔ حد مرکزی و درک این مطلب که نوفه‌های بازار می‌بایست بی‌حافظه باشند، استدلال کرد که نموهای قیمت‌های کالاها باید مستقل و دارای توزیع نرمال باشند.

1) Robert Jarrow and Philip Protter   2) T. N. Thiele

۳) این مطلب را رانگار نوربرگ به ما گوشزد کرد که از او تشکر می‌کنیم و یادآوری می‌کنیم که سهم تیله در بسط این موضوع به‌طور مشروح در مقاله‌ای از هالد [۳۰] آمده است.

4) L. Bachelier

استدلال خویش را با ویژگی‌های مارکفی و نیمگروهی در هم آمیخت و با استفاده از این‌که هستهٔ گاوسی، جواب اساسی معادلهٔ حرارت است، حرکت براونی را به معادلهٔ حرارت مرتبط ساخت. او همچنین توانست سایر فرآیندهای مرتبط با حرکت براونی را نیز تعریف کند، برای مثال فرآیند ماکسیمم تغییرات در یک بازهٔ زمانی برای حرکت براونی یک‌بعدی را با استفاده از قدم‌زدن تصادفی و کوچک ساختن طول قدم‌ها با عمل حدگیری به سمت صفر، تعریف کرد. رسالهٔ دکتری او را استاد مشاورش هانری پوانکاره تمجید فراوان کرد، لکن عمدتاً به‌خاطر بی‌میلی که در آن زمان نسبت به مطالعهٔ اقتصاد به عنوان بخشی از کاربردهای ریاضی وجود داشت، نتوانست به جمع نخبگان ریاضی پاریس بپیوندد و باقی عمر خویش را بسیار دور از پاریس در روستایی در مرکز بیزانسن در شرق فرانسه نزدیک سوئیس گذراند (شرحی از این داستان غم‌انگیز در مرجع [۱۱] آمده است). باز می‌گردیم به الگوی اینشتین. به زبان امروزی، اینشتین حرکت براونی را فرآیندی تصادفی معرفی کرده بود که مسیرهای پیوسته و نموهای مستقل با توزیع گاوسی مانا دارد. او ویژگی‌های فیزیکی دیگری از قبیل طول‌پذیری مسیرها را برای الگوی خود قائل نشد که البته اگر این ویژگی اخیر را نیز لحاظ کرده بود، اکنون می‌دانستیم فرآیندی که او معرفی کرده بود، وجود خارجی ندارد. با این حال، اینشتین نتوانست نشان دهد که این فرآیند به عنون یک شیء ریاضی واقعاً وجود دارد که البته این مطلب قابل درک است، زیرا ایده‌های بُرل و لبگ در ساختن نظریهٔ اندازه طی دههٔ نخست قرن بیستم شکل گرفت در حالی که اینشتین فرآیند مزبور را در سال ۱۹۰۵ ارائه کرده بود. در سال ۱۹۱۳، رویکرد دانیل دربارهٔ نظریهٔ اندازه (که در آن انتگرال پیش از اندازه تعریف می‌شود) به صحنه آمد و ن. وینر[1] توانست در سال ۱۹۲۳ به کمک این رویکرد همراه با سری‌های فوریه، حرکت براونی را بسازد و دیدگاه فیزیکی اینشتین را جامهٔ ریاضی بپوشاند. وینر و دیگران، بسیاری از ویژگی‌های مسیرهای حرکت براونی را ثابت کردند که این کار، تا به امروز نیز ادامه یافته است. دو ویژگی کلیدی حرکت براونی که به انتگرال‌گیری تصادفی مربوط می‌شوند عبارتند از:

(۱) مسیرهای حرکت براونی، تغییرات مرتبه دوم کراندار ناصفر دارند طوری که روی بازهٔ (s,t) مقدار تغییرات مرتبه دوم برابر است با $t-s$ ،

(۲) مسیرهای حرکت براونی، قریب به یقین روی بازه‌های زمانی فشرده، تغییرات بی‌کران دارند.

البته ویژگی دوم به سادگی از اولی به‌دست می‌آید.

توجه کنید که اگر اینشتین فرض کرده بود که مسیرها طول‌پذیرند، آن‌گاه اثبات وینر نشان می‌داد که وجود چنین الگویی غیرممکن است. معمولاً به خاطر ارج نهادن به کار وینر، حرکت براونی رافرآیند وینر نیز می‌نامند. وینر، یک انتگرال چندگانه نیز ساخت امّا این موضوع ارتباطی به آنچه امروزه «انتگرال چندگانهٔ وینر» می‌نامیم ندارد، در واقع در سال ۱۹۵۱ ک. ایتو[2] ضمن تلاش برای درک مقالات وینر که کار چندان ساده‌ای هم نبود، اندیشه‌های وینر را منظم کرد و اصلاحات زیادی در آن‌ها انجام داد [۳۶].

1) N. Wiener   2) Kiosi Itô

قدم بعدی را در آماده‌سازی بستر تعریف برای انتگرال تصادفی، آ. ن. کلموگرف برداشت. نظریهٔ انتگرال تصادفی از دیدگاه غیر مالی، از همان روزهای نخست شکل‌گیری، با نظریهٔ فرآیندهای مارکف درهم آمیخت که البته در این جریان، کلموگرف نقشی اساسی بازی کرد. در واقع، کلموگرف در سال ۱۹۳۱، درست دو سال پیش از آن‌که در کتاب مشهورش مبانی ریاضی نظریهٔ احتمال را با استفاده از نظریهٔ اندازه پایه‌گذاری کند، اشاراتی مختصر به روش بشیلیه در ساختن حرکت براونی داشته است ([۴۱]، صفحات ٦۴ و ۱۰۲–۱۰۳). به‌علاوه در همین مقاله بخش زیادی از نظریه‌اش را در باب فرآیندهای مارکف ارائه داده است. به‌خصوص در همین مقاله، نشان داد که فرآیندهای مارکف پیوسته (فرآیندهای نفوذ) اساساً فقط به دو پارامتر بستگی دارند، یکی سرعت پیشروی و دیگری اندازهٔ بخش تصادفی خالص (مؤلفهٔ نفوذی). سپس توانست توزیع‌های احتمال فرآیند را به جواب‌های معادلات دیفرانسیل پاره‌ای مربوط سازد و آن معادلات را حل کند که امروزه آن‌ها را «معادلات کلموگرف» می‌نامیم. البته کلموگرف به نظریهٔ انتگرال ایتو دسترسی نداشت و از این‌رو، مبنای کار خود را آنالیز نیمگروه‌ها و مولدهای بی‌نهایت کوچک آن‌ها و معادلات دیفرانسیل پاره‌ای حاصل، قرار داد.[1] پس از کلموگرف، به سراغ داستان جالب و غم‌انگیز وینسنت دوبلین[2] (با نام اصلی ولفگانگ دوبلین) می‌رویم که پسر نویسندهٔ مشهور آلفرد دوبلین بود. خانوادهٔ دوبلین به‌خاطر فرار از نازی‌های آلمان، ابتدا به سوئیس و سپس به پاریس گریختند. ولفگانگ، به وینسنت دوبلین تغییر نام داد و شهروند فرانسوی شد. دوران دبیرستان خود را در فرانسه به پایان رساند و دیری نپایید که هوش سرشار ریاضی او آشکار گشت. در اواخر دههٔ ۱۹۲۰، نظریهٔ احتمال در میان ریاضی‌دانان به خصوص در دو مرکزیت مسکو و پاریس، در حال شکل‌گیری بود. دوبلین به احتمال‌دانان پیوست و به کار بر روی زنجیرهای مارکف و سپس فرآیندهای مارکف مشغول شد[3].

---

۱) ج. ل. دوب [۱۷] از این موضوع ابراز ناخشنودی می‌کند که روش‌های حاوی معادلات دیفرانسیل پاره‌ای منسوب به کلموگرف و فِلِر که در مطالعهٔ فرآیندهای مارکف به‌کار گرفته می‌شوند، غالباً روش‌های «آنالیزی» خوانده می‌شود، در حالی‌که روش دیفرانسیل‌های تصادفی منسوب به ایتو، «احتمالاتی» نام گرفته است. او می‌نویسد: « عده‌ای از ریاضی‌دانان تصور می‌کنند که اگر به ویژگی‌های آنالیزی و امید ریاضی پرداخته شود، آن‌گاه این مطلب بخشی از آنالیز است در حالی‌که اگر به بررسی دنباله‌های نمونه‌ای و توابع نمونه‌ای بپردازیم، آن‌گاه موضوع، احتمالات است نه آنالیز». سپس دوب تلاش می‌کند که متقاعد سازد هر دو روش احتمالاتی هستند. با این حال نظر ما بر این است که روش‌های ایتو در تغییر شهود احتمالاتی حاکم بر فرآیندهای مارکف، تأثیر داشته است.

2) Vincent Doeblin

۳) دوب در کتاب خود [۱۷] اشارات فراوانی به کارهای زیربنایی دوبلین روی زنجیرهای مارکف و فرآیندهای مارکف دارد. پال لوی در مقاله‌ای که پس از مرگ دوبلین به خاطر پاسداشت کارهای او منتشر کرد، می‌نویسد:
«به جرأت می‌گویم که پس از آبل و گالوا، تعداد ریاضی‌دانانی که در جوانی مردند و پشت سر خویش انبوهی از کارهای مهم را بر جای گذاشتند، به انگشتان یک دست هم نمی‌رسد و دوبلین یکی از آن‌ها بود.» [۴۴]

دوبلین می‌خواست فرآیندی تصادفی بسازد که مسیرهای پیوسته دارد و با نظریهٔ آنالیزی کلموگرف دربارهٔ احتمال‌های گذرِ فرآیندهای مارکف، سازگاری داشته باشد و سرانجام چارچوبی برای مطالعهٔ این گونه فرآیندها ارائه کرد که با درنظر گرفتن پیشرفت‌های آتی، بسیار آینده نگرانه بود. دوبلین یادداشت اولیه‌ای از یافته‌هایش تهیه نمود و تصمیم گرفت بدون چاپ کردن آن‌ها، به تحقیقات خویش ادامه دهد. لکن پیش از آن‌که به آلمان عزیمت کند، طرح‌واره‌ای از ایده‌هایش تهیه کرد و آن‌ها را به بخش امانات آکادمی ملی علوم فرانسه سپرد تا صد سال دیگر توسط خود او یا فرد دیگری گشوده شود. به نظر می‌رسد دوبلین به خاطر این‌که اندیشه‌هایش به دست نازی‌ها نیفتد، آن‌چه از یادداشت‌هایش باقی مانده بود را سوزانده و سپس به زندگی خویش پایان داده‌است. در ماه می سال ۲۰۰۰ بخش امانات آکادمی به درخواست برادر او کلود دوبلین باز شد و تازه معلوم شد که در کارهای دوبلین چه بصیرت علمی بالایی وجود داشته است. او در یادداشت‌هایش از مفهوم جدید مارتینگل که در سال ۱۹۳۹ توسط جی. ویل [1] معرفی شد، استفاده کرده بوده است، به‌علاوه بر اهمیت مطالعهٔ مسیرهای نمونه‌ای به جای تمرکز بر ویژگی‌های توزیع‌های متناهی ــ بعد واقف بوده است. از جمله ایده‌هایی که داشته است، طی کردن حرکت براونی با یک ساعت تصادفی است که امروزه آن را با بحثی با عنوان تغییر زمان می‌شناسیم. سپس تغییر زمان را با ضرایب معادلهٔ نفوذ مرتبط ساخته و به این طریق توانسته بود روش جدیدی را در بررسی این دست معادلات ارائه کند که ده‌ها سال پس از او توسط دیگران به انجام رسید.[2]

حال به سراغ کیوشی ایتو، پدر انتگرال تصادفی، می‌رویم. قصد نداریم مختصرنامهٔ زیبایی را که وارادان و استروک [3] در سال ۱۹۸۷ از کارهای علمی ایتو تهیه کردند [۸۲]، بازگویی کنیم، بلکه می‌خواهیم بخش‌های کوتاهی را که به نظر ما نقطهٔ عطف فعالیت‌های اوست، بیان کنیم. شکی نیست که یکی از نخستین انگیزه‌های ایتو برای مطالعهٔ انتگرال‌های تصادفی، پایه‌گذاری تعبیر درستی از دیفرانسیل تصادفی بوده است که بتوان آن را در بررسی فرآیندهای مارکف به‌کار گرفت و این دقیقاً همان کاری بود که پیش از او دوبلین قصد انجامش را داشت، هرچند که کار دوبلین به بخش امانات آکادمی علوم فرانسه سپرده شد که تا ده‌ها سال نیز از چشم دیگران پنهان بماند. در انتگرال وینر نمی‌توان فرآیندهای تصادفی را به عنوان انتگرالده به‌کار برد در حالی‌که اگر بخواهیم برای مثال یک فرآیند نفوذ را به صورت جوابی از یک معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی نمایش دهیم، گریزی از چنین انتگرالده‌هایی نخواهد بود. در واقع، خود ایتو این انگیزه را به این صورت بیان می‌کند:

---

1) J. Ville

۲) نگارندهٔ دوم این مقاله مایل است از مارک یور به خاطر ارسال مقالهٔ زیبایی که به همراهی برنارد بریو نگاشته است [٦] تشکر کند. این مقاله به علاوهٔ مقالهٔ مبسوط‌تر [۷] منابعی هستند که در شرح کارهای دوبلین، از آن‌ها استفاده شده است. اخیراً نیز داستان دوبلین در کتابی به شکل زندگی‌نامه درج شده است [٦۴].

3) S. Varadhan and D.W. Stroock

«در این مقالات[1] به روش‌های آنالیزی نیرومندی برای مطالعهٔ احتمال‌های گذر فرآیندها برخورد کردم، منظورم معادلهٔ سهموی کلموگرف و توسیعی از آن است که فلر ارائه کرده است. امّا می‌خواهم مسیرهای فرآیندهای مارکف را همان‌طوری مطالعه کنم که لوی به فرآیندهای دیفرانسیلی می‌نگریست. دیدگاه شهودی را که کلموگرف در به‌دست آوردن معادلاتش برگزیده بود و در مقدمهٔ این مقالات شرح داده است، پیش چشم قرار دادم و متوجه شدم که یک ذرهٔ مارکفی در هر لحظه به ازای آینده‌ای بسیار کوچک، یک فرآیند دیفرانسیلی همگن زمانی را می‌پیماید و به این ترتیب به مفهوم معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی حاکم بر مسیرهای یک فرآیند مارکف رسیدم که می‌شد آن را بر حسب دیفرانسیل‌های یک فرآیند دیفرانسیلی تنها بیان کرد.[2]» (مرجع [۳۷] را ملاحظه کنید). اولین مقالهٔ ایتو دربارهٔ انتگرال‌گیری تصادفی در سال ۱۹۴۴ منتشر شد [۳۴]، درست همان سالی که کاکوتانی دو یادداشت کوتاه دربارهٔ ارتباط حرکت براونی و توابع همساز منتشر ساخت. همچنین طی دههٔ ۱۹۴۰، دوب[3] که از آنالیز مختلط وارد نظریهٔ احتمال شده بود، متوجه ارتباط بین مارتینگل‌ها و توابع همساز شد و تلاش کرد نظریهٔ احتمالاتی پتانسیل را بر مبنای مارتینگل‌ها بنا کند. به علاوه، هانری کارتان[4] در میانهٔ دههٔ ۴۰ پیشرفت‌های عظیمی را در نظریهٔ پتانسیل سبب گشت که پس از او با کار کلاسیک دنای در سال ۱۹۵۰ دنبال شد. این ایده‌های پراکنده در گوشه و کنار، گرد هم آمدند تا این‌که دوب توانست به کمک آن‌ها برای نخستین بار، به روشنی ویژگی مارکفی قوی را تشریح کند. چند سال بعد یعنی در ۱۹۴۸، ای. هیله[5] و ک. یوشیدا مستقل از یکدیگر، ساختار نیمگروه‌های عملگرهای به‌طور قوی پیوسته را ارائه دادند و نقش مولدهای بی‌نهایت کوچک را در نظریهٔ فرآیندهای مارکف آشکار ساختند.

ایتو در تلاش برای الگوسازی فرآیندهای مارکف، یک معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی به شکل زیر به‌دست آورد:

$$dX_t = \sigma(X_t)dW_t + \mu(X_t)dt$$

که در آن W فرآیند وینر استاندارد است. اکنون او دو مسأله پیش رو داشت: یکی این‌که معنای دیفرانسیل تصادفی $\sigma(X_t)dW_t$ را مشخص سازد که این کار را در مقاله‌ای که قبلاً ذکر شد انجام داد [۳۴] و مسألهٔ دوم این بود که کارهای کلموگرف دربارهٔ فرآیندهای مارکوف را با تعبیرات خودش مرتبط سازد.

---

۱) اینجا ایتو به مقالات کلموگرف [۴۱] و فِلِر [۲۶] اشاره می‌کند.

۲) توجه کنید که هرچند ایتو در تحقیقاتش هیچ اشاره‌ای به کار بشیلیه نمی‌کند ولی چون از کلموگرف، لوی و دوب تأثیر زیادی گرفته است، به نظر معقول می‌آید که فکر کنیم از کار بشیلیه آگاه بوده زیرا کلموگرف در مقالهٔ کلیدی خود [۴۱] ضمن شرح و ارجاع به کار بشیلیه، آن را جزء انگیزه‌بخش‌ترین منابع خود دانسته است. با این که هیچ شاهدی وجود ندارد که ایتو حتی کار بشیلیه را خوانده باشد، هانس فولر و روبرت مِرتُن در مکاتبات شخصی با نویسندگان مقاله گفتند که ایتو واقعاً از کار بشیلیه تأثیر گرفته است.

3) J. L. Doob   4) H. Cartan   5) E. Hille

به‌ویژه می‌خواست مسیرهای X را به تابع گذر فرآیند نفوذ ربط دهد که در پیگیری این خواسته، نشان داد توزیع X جواب معادلهٔ پیشروی کلموگرف است. این کوشش‌ها منجر به مقالهٔ بارز او در سال ۱۹۵۱ شد [۳۵]، که در آن چیزی را بیان و ثابت کرد که امروزه با نام **فرمول ایتو** شناخته می‌شود:

$$f(X_t) = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)d[X,X]_t.$$

در اینجا تابع f از ردهٔ C^2 است و برای معرفی آن از نمادگذاری‌های کنونی استفاده کرده‌ایم[۱]. فرمول ایتو توسیعی است از فرمول تغییر متغیر در انتگرال‌گیری ریمان ــ اشتیلیس و تفاوت بین حسابان تصادفی ایتو و حسابان تصادفی کلاسیک را روشن می‌سازد که در آن اعمال حسابان را روی فرآیندهای تصادفی پیوسته که مسیرهایشان در بازه‌های زمانی فشرده با تغییرات کراندار است، مسیروار انجام می‌دهیم. فرمول مربوط به حسابان تصادفی کلاسیک عبارت است از:

$$df(A_t) = f'(A_t)dA_t$$

که در آن A نشان دهندهٔ فرآیند مذکور و f تابعی از ردهٔ C^1 است. می‌توان نشان داد که اگر H فرآیندی با مسیرهای نمونه‌ای پیوسته باشد و بخواهیم انتگرال $\int_0^t H_s dA_s$ را به‌طور مسیری به عنوان حد مجموع‌های ریمانی تعریف کنیم، آن‌گاه بنابر قضیهٔ باناخ ــ اشتاینهاوس فرآیند A می‌بایست روی بازه‌های زمانی فشرده، مسیرهای با تغییرات کراندار داشته باشد [۶۶]. چون تقریباً هر مسیر حرکت براونی روی هیچ بازهٔ زمانی متناهی با تغییرات کراندار نیست، ایتو می‌دانست که نمی‌شود از همهٔ فرآیندهای تصادفی پیوسته انتگرال گرفت. یکی از بصیرت‌های عالی ایتو این بود که فضای انتگرالده‌های خود را به فرآیندهای به اصطلاح پیش‌بینی ناپذیر محدود کرد، یعنی انتگرالده‌هایی را مجاز می‌دانست که با صافی زمینهٔ متشکل از $\sigma-$ جبرهای تولیدشده توسط حرکت براونی، سازگار باشد. به این ترتیب او می‌توانست از استقلال نموهای حرکت براونی سود جوید و L^2- یکمتری را ثابت کند:

$$E((\int_0^t H_s dW_s)^2) = E(\int_0^t H_s^2 ds).$$

پس از آن‌که این یکمتری برای فرآیندهای پیش‌بینی ناپذیر پیوستهٔ H ثابت شد، می‌توان آن را به

---

۱) کتاب اچ. پ. مک‌کین پسر که در ۱۹۶۹ منتشر شد [۴۷]، تأثیر بسزایی در عمومی‌سازی انتگرال ایتو داشت به‌خاطر این‌که نخستین شرح کارهای ایتو و دیگر کارهای مربوط به آن، در قالب یک کتاب بود. امّا مک‌کین «فرمول» ایتو را لم ایتو می‌نامد که این نام‌گذاری در متون امروزی نیز گاهی به چشم می‌خورد. روشن است که اهمیت این قضیهٔ کلیدی ایتو بیش از آن است که آن را صرفاً یک «لم» بنامیم و ما هم همان اصطلاح ایتو یعنی «فرمول» را ترجیح می‌دهیم.

فرآیندهای پیش‌بینی ناپذیر توأماً اندازه‌پذیر گسترش داد[1]. ج. ل. دوب متوجه شد که در روش ایتو برای تعریف انتگرال تصادفی نسبت به حرکت براونی، از تمامی توان استقلال نموهای حرکت براونی استفاده نشده است، به همین دلیل در کتاب بسیار تأثیرگذارش به سال ۱۹۵۳ انتگرال تصادفی ایتو برای حرکت براونی را ابتدا به فرآیندهایی با نموهای متعامد (به مفهوم L^2) و سپس به فرآیندهایی با نموهای متعامد شرطی، یعنی مارتینگل‌ها، توسعه داد [۱۶]. آن‌چه در این مسیر نیاز داشت مارتینگل M بود به طوری که $M_t^2 - F(t)$ مجدداً مارتینگل باشد که در اینجا فرآیند صعودی F غیرتصادفی است. به این منظور، قضیه‌ای را ثابت کرد که اکنون به تجزیهٔ دوب معروف است:اگر X_n یک زیرمارتینگل زمان گسسته باشد، آن‌گاه تجزیهٔ یکتایی به صورت $X_n = M_n + A_n$ دارد که در آن M یک مارتینگل و A فرآیندی با مسیرهای نانزولی است، $A_0 = 0$ و A_n نسبت به $\mathcal{F}_{n-1}$[2] اندازه‌پذیر است. اگر M یک مارتینگل باشد، M^2 زیرمارتینگل است، لذا دوب برای توسعهٔ بیشتر انتگرال تصادفی خود نیاز به قضیهٔ تجزیهٔ مشابهی برای فرآیندهای زمان پیوسته داشت و با اثبات این قضیه، توانست یکمتری ایتو را به رابطه‌ای به صورت زیر گسترش دهد:

$$E((\int_0^t H_s dM_s)^2) = E(\int_0^t H_s^2 dF(s))$$

که در آن F نانزولی و غیر تصادفی است و $M^2 - F$ مجدداً مارتینگل است و انتگرال تصادفی حاصل نیز مارتینگل می‌شود (فصل ۹ از مرجع [۱۶]).

سؤال جالبی مطرح شد، این‌که آیا فقط به خاطر توسعهٔ تعریف انتگرال تصادفی به مارتینگل‌ها است که باید قضیهٔ تجزیهٔ دوب را به زیرمارتینگل‌های زمان پیوسته گسترش دهیم؟ نه! دلایل دیگری نیز برای این کار وجود داشت، مثلاً در پیشرفت‌های نظریهٔ احتمالاتی پتانسیل که درست با گسترش نظریهٔ اصل موضوعی پتانسیل به‌دلیل چاپ مقالات متوالی هانت[2] ([۳۱]، [۳۲]، [۳۳]) در سال‌های ۱۹۵٦ و ۱۹۵۸، همگام شده بود. شاید یک دهه طول کشید تا ارزش والای این مقالات روشن شود، اما به‌خاطر این مقالات بود که در اواخر دههٔ ۱۹٦۰ و اوایل دههٔ ۱۹۷۰ تمایل فزون‌تر به نگرش ایتو به فرآیندهای مارکف به عنوان جوابی برای معادلات دیفرانسیل تصادفی نمایان شد، فرآیندهای مارکفی چون حرکت براونی و آنچه امروزه با نام اندازهٔ تصادفی پواسن شناخته می‌شود. این مشکل را ریاضیدان جوان فرانسوی پ. آ. مِیِر[3] طی دو مقاله در سال ۱۹٦۲ حل کرد.

---

۱) در واقع این، روشی است که در کتاب سال ۱۹٦۹ مک‌کین ارائه شد [۴۷]. متأسفانه تعیین این‌که کدام فرآیندها را باید در این روش لحاظ کرد به آن سادگی که مک‌کین در سال‌های اولیهٔ شروع نظریه تصور می‌کرد نیست. $\sigma-$ جبر طبیعی که انتگرالده‌های ساده تولید می‌کنند، امروزه $\sigma-$ جبر حدس‌پذیر نامیده می‌شود و فرآیندهای اندازه‌پذیر حدس‌پذیر زیرمجموعهٔ سره‌ای از فرآیندهای توأماً اندازه‌پذیر پیش‌بینی ناپذیر است. این نکته مثلاً در کتاب چانگ و ویلیامز [۹] صفحهٔ ٦۳ روشن شده است.

۲) f_n دنباله‌ای صعودی از میدان‌های سیگمایی است که صافیِ زمینه را تشکیل می‌دهد

2) G. A. Hunt   3) P. A. Meyer

در واقع، میر به منظور گوشزد کردن اهمیت نظریهٔ احتمالاتی پتانسیل در پیشرفت انتگرال تصادفی، در مقالهٔ نخست خود، وجود تجزیهٔ دوب را برای زیرمارتینگل‌های زمان پیوسته به زبان نظریهٔ پتانسیل اثبات کرد [۵۱]. مِیِر نشان داد که این قضیه در حالت کلی برقرار نیست. این قضیه برقرار است اگر و فقط اگر فرض شود که وقتی زیرمارتینگل را با زمان‌های توقف اندیس‌گذاری می‌کنیم، به‌طور یکنواخت انتگرال‌پذیر شود و زیرمارتینگل‌های با این ویژگی را به افتخار دوب، از «ردهٔ D» نامید. اورنشتاین نشان داده بود که زیرمارتینگل‌هایی وجود دارند که از ردهٔ D نیستند و در سال ۱۹۶۳ ج. جانسون[1] و ل. هلمز[2]، به کمک حرکت براونی سه بعدی مثالی از این گونه زیرمارتینگل‌ها ساختند[۴۰]. همچنین در سال ۱۹۶۳، میر یکتایی تجزیهٔ دوب را ثابت کرد و به همین دلیل این قضیه اکنون تجزیه دوب ـ میر نامیده می‌شود [۵۲]. به‌علاوه، میر در مقالهٔ دومش، تحلیلی از ساختار L^2 ـ مارتینگل‌ها فراهم آورد که بعدها معلوم شد در تکمیل پیشرفت‌های نظریهٔ انتگرال‌گیری تصادفی نقش اساسی داشته است. دو سال بعد یعنی در ۱۹۶۵، ایتو و واتانابه[3] هنگام مطالعهٔ تابعک‌های ضربی فرآیندهای مارکف، مارتینگل‌های موضعی را تعریف کردند که همان شیء اساسی مورد نیاز برای اثبات درستی حدس اولیهٔ دوب بود به این مضمون که هر زیرمارتینگل X چه از ردهٔ D باشد و چه نباشد، تجزیهٔ یکتایی به صورت $X_t = M_t + A_t$ دارد که در آن M یک مارتینگل موضعی و A یک فرآیند نانزولی حدس‌پذیر است که $A_\circ = \circ$ [۳۹].

به اولین مقالهٔ مِیِر باز می‌گردیم [۵۱]. در انتهای این مقاله، مِیِر به‌عنوان کاربردی از قضیهٔ تجزیه، توسیعی از انتگرال تصادفی دوب و به طریق اولی توسیعی از انتگرال ایتو ارائه داده است که در آن فضای انتگرالده‌ها عبارت است از فرآیندهای «خوش‌سازگار»، یعنی فرآیندهای توأماً اندازه‌پذیر که نسبت به صافی $\sigma-$ جبرهای زمینه سازگار است. سپس در انتهای مقاله تذکر اکید می‌دهد که به سختی می‌توان نشان داد که کل ردهٔ فرآیندهای خوش‌سازگار با «نرم» متناهی به همین روش به‌دست می‌آید، گرچه این مطلب یقیناً درست است. شش سال بعد، همین پیش‌گویی میر، پیش چشم مک‌کین بود و همین مشکل عجیب و غریب اندازه‌پذیری باعث شد که گسترش نظریهٔ انتگرال تصادفی برای مارتینگل‌های پرش‌دار به تعویق بیفتد.

پیش از ادامهٔ شرح تحولات نظریهٔ انتگرال تصادفی، قدری از بحث منحرف می‌شویم و پیشرفت‌هایی را که در اقتصاد رخ داد بیان می‌کنیم. پیتر برنشتاین[4] در کتاب خود [۴] به سال ۱۹۹۲ می‌نویسد : «پایان‌نامهٔ بشیلیه با وجود اهمیتی که داشت، بی اعتنا رها شد تا این‌که تصادفاً در سال ۱۹۵۰، جیمی ساواژ[5] آماردانی از شیکاگو آن را مجدداً کشف کرد.» سپس قدری جلوتر می‌نویسد: «حوالی سال ۱۹۵۴ زمانی که ساواژ مشغول زیر و رو کردن کتاب‌های کتابخانه‌ای در یکی از دانشگاه‌ها بود، اتفاقاً به کتاب کوچکی از بشیلیه دربارهٔ سرمایه‌گذاری و داد و ستد، برخورد کرد که در سال ۱۹۱۴ منتشر شده بود.» می‌دانیم که کلموگرف و دوب به صراحت به کارهای بشیلیه ارجاع داده‌اند و یقیناً ایتو هم از این کارها آگاه بوده است، بنابراین شاید آنچه در این میان مفقود مانده

1) G. Johnson 2) L. L. Helms 3) S. Watanabe 4) Peter Bernstein 5) Jimmie Savage

بوده، سهمی است که بشیلیه در اقتصاد داشته است.[1] برنشتاین می‌گوید که ساواژ، پاول ساموئلسن[2] اقتصاددان را از کار بشیلیه آگاه ساخته، به او اطلاع می‌دهد که پایان‌نامهٔ بشیلیه را در کتابخانه MIT یافته است و سپس می‌نویسد: «گویا چیزی تمام ذهن بشیلیه را به خود مشغول کرده بوده است ولی چه چیز؟» [۷۲] (مرجع [۷۳] را هم ببینید).

ساموئلسون، پس از یک دهه سخنرانی در گوشه و کنار کشور دربارهٔ قیمت‌گذاری ضمانت‌نامه‌ها و تصادفی بودن قیمت کالاها در بازار معاملات، در سال ۱۹٦۵ تصمیم گرفت دو مقاله در باب نوآوری‌های خویش در این زمینه به چاپ برساند. در مقالهٔ [۷۱]، استدلال‌های اقتصادی خود را مبنی بر تصادفی بودن نوسانات قیمت کالاها ارائه می‌دهد، موضوعی که ٦۵ سال پیش، بشیلیه نیز مدعی آن شده بود. این مقاله همراه با کاری که فاما در همین مورد انجام داد [۲۴]، مبانی آن چیزی را تشکیل دادند که امروزه « فرض بازار کارا» نامیده می‌شود. فرض بازار کارا، انقلابی را در تجارت تجربی موجب شد، با این حال، بحث و بررسی در باب سودمندی عملی آن هنوز هم ادامه دارد [۲۵]. دو بصیرت زیربنایی دیگر نیز در این مقالهٔ اولی به چشم می‌خورد که صورت اصلاح شدهٔ آن، سنگ بنای نظریهٔ قیمت‌گذاری اختیاری شد. یکی، اعتقاد به این موضوع بود که تغییرات پیش بینی نشده در قیمت‌ها دارای ویژگی مارتینگلی است. ساموئلسون توانست به کمک این اصل ثابت کند که تغییرات آتی در قیمت‌های کالاها، در طی زمان ناهمبسته باقی می‌ماند، که این تعمیمی است از الگوی قدم زدن تصادفی [۱۳, ۴٦]. نکتهٔ دوم این بود که این گزاره را می‌توان به توابع دلخواهی از قیمت کالاها تعمیم داد. هرچند او به‌طور صریح، در آن مقاله به این مطلب اشاره نکرد، لیکن این، نویدبخش کاربردهای وسیعی در قیمت‌گذاری اختیاری بود.

ساموئلسون در مقالهٔ مشترک [۷۰] توانایی‌های مک‌کین را هم به یاری طلبید.[3] مک‌کین که در همان سال کتاب مشترک خود با ایتو [۳۸] را منتشر کرده بود، پیوست ریاضی بر آن مقاله افزود که در آن اساساً نشان داده بود که الگوی مناسب برای تغییرات قیمت کالاها در بازار بورس آن چیزی است که امروزه حرکت براونی هندسی نام دارد. ساموئلسون شرح می‌دهد که الگوی بشیلیه از تضمین مثبت بودن قیمت کالاها قاصر است و به ناسازگاری آشکار با اصول اقتصادی منجر می‌شود،

۱) احتمالاً ساواژ به این دلیل کار بشیلیه را خوانده است که یک سال قبل از این اتفاق، کتاب دوب منتشر شده و به آن کار ارجاع داده بود و احتمالاً ساواژ از محتوای اقتصادی کار بشیلیه متعجب شده بوده است. ساموئلسون نیز در مرجع [۷۲] (صفحهٔ ٦) می‌نویسد: «هرچند در مطالب استاندارد مرتبط به احتمالات به بشیلیه ارجاع فراوان داده می‌شود، لکن در بخش عظیمی از یادداشت‌های ریاضی اشاره‌ای به کار او در اقتصاد نشده است.»

2) Paul Samuelson

۳) ساموئلسون به این دلیل از توانایی‌های مک‌کین و بعداً ر. س. مرتُن سود جست که با مفاهیم مربوط به حسابان تصادفی تازه متولد احساس راحتی نمی‌کرد([۴] صفحهٔ ۲۱۵). این عقیده‌ای است که با بررسی مکاتبات شخصی‌اش با مرتن تأیید می‌شود.

در حالی که حرکت براونی هندسی با چنین دردسری مواجه نیست. در این مقاله، فرمول‌هایی برای ارزیابی اختیار معاملهٔ اروپایی و آمریکایی هم به‌دست آمده است[۱]. روش به‌دست آوردن این فرمول‌ها تقریباً با آنچه حدود یک دهه بعد در استنتاج فرمول بلک ــ شولز به‌کار رفت، یکسان بود جز این‌که در عوض به‌کارگیری اصل عدم واسطه‌گری در به‌دست آوردن فرمول ارزیابی، فرض کرده بود که پرداختی‌های اختیاری تنزیل از ویژگی مارتینگلی تبعیت می‌کنند (صفحه ۱۹ مرجع [۷۰] را ملاحظه کنید) که از آنجا فرمول‌های ارزیابی به راحتی نتیجه می‌شوند. به‌علاوه شایان ذکر است که در همین مقاله، ساموئلسون و مک‌کین قیمت یک اختیار معاملهٔ آمریکایی را با کشف رابطهٔ بین اختیار معاملهٔ آمریکایی و مسألهٔ مرز آزاد برای معادلهٔ حرارت، تعیین می‌کنند. این اولین باری بود که چنین ارتباط عجیبی کشف می‌شد. جالب است که ساموئلسون و مک‌کین خودشان را به استفاده از ابزارهای حسابان تصادفی، لااقل به‌طور صریح، مقید نساختند. روش‌هایی که مک‌کین در پیوست خود بر این مقاله به‌کار می‌گیرد عبارتند از معادلات دیفرانسیل پاره‌ای ملهم از اندیشه‌های کلموگرف، همراه با نظریهٔ زمان توقف و روش‌های نظریهٔ پتانسیل که پیشروی این نظریه‌ها هانت بود و دینکین آن‌ها را گسترش داد.

آنچه در جریان پیشرفت نظریهٔ انتگرال‌گیری تصادفی تقریباً به حساب نیامده بود و ارتباطی هم با ریاضیات مالی نداشت، ایده‌های هرمان روبین[۲] بود. روبین در سومین گردهمایی برکلی در سال ۱۹۵۵، دربارهٔ معادلات دیفرانسیل تصادفی سخنرانی کرد. یک سال پس از آن، به ارائهٔ مقاله‌ای برای گردهمایی سیاتل دعوت شد که به‌طور مشترک از طرف مؤسسهٔ آمار ریاضی، انجمن ریاضی آمریکا، انجمن زیست‌سنجی، جامعهٔ ریاضی آمریکا و انجمن اقتصاددانان برگزار شد. در این مقاله مطالبی را ارائه کرد که بعداً موضوع پایان‌نامهٔ دکترای د. ل. فیسک[۳] را مشخص کرد و به ابداع شبه‌مارتینگل‌ها و همچنین به قول امروزی انتگرال استراتونوویچ شد. خود او در مجموعهٔ مقالاتش می‌نویسد: «با انتگرال ایتو راحت نبودم به خاطر این‌که تحت تغییر مختصات غیرخطی هرچند به اندازهٔ کافی هموار، ناوردا نبود و مشاهده کردم که اگر میانگین نقاط انتهایی چپ و راست را به‌کار ببریم، دقیقاً همان چیزی که می‌باید انتگرال XdX باشد (حتی برای X ناپیوسته)

---

۱) در این مقاله، اولین باری بود که اصطلاحات اختیار معاملهٔ «اروپایی» و «آمریکایی» به‌کار می‌رفت. از شواهدی که بر مبنای مکاتبات شخصی ساموئلسون با ر. س. مرتن به دست آمده، معلوم شده است که او پیش از نوشتن مقاله‌اش به وال استریت رفته است تا موضوع این دو نوع اختیار معامله را با متخصصین صنعتی در میان گذارد. بررسی تماس‌هایش با وال استریت نشان می‌دهد که دو نوع اختیار معامله وجود داشته است: یکی که پیچیده‌تر است را می‌شده پیش از سررسید پرداخت اعمال کرد و دیگری که ساده‌تر بوده باید درست در زمان سررسید اعمال می‌شد و فقط مغز تحلیل‌گر اروپایی (در مقابل مغز آمریکایی) می‌توانسته نوع اول را درک کند. با این حال، وقتی ساموئلسون مقاله‌اش را نوشت و از این پسوندها استفاده کرد، جای آن‌ها را عوض کرد.

2) Herman Rubin   3) L. Fisk

به‌دست می‌آید. به نظر می‌رسید اگر X پیوسته و دارای ویژگی‌های به اندازهٔ کافی خوبی باشد، این مفهوم گزینهٔ مناسبی برای تعریف انتگرال خواهد بود. از طرفی، شبه‌مارتینگل‌ها طبیعی‌ترین گزینه برای ردهٔ فرآیندهای تصادفی به نظر می‌رسید ولی اثبات روشنی برای این مطلب نداشتم به همین خاطر کار را بر عهدهٔ فیسک گذاشتم تا موضوع پایان‌نامهٔ دکترایش باشد و او به خوبی از عهدهٔ کار برآمد» [۶۸]. در واقع، فیسک در پایان‌نامه‌اش که در زمان حضور روبین در دانشگاه ایالتی میشیگان، تحت نظر او نگاشته شد، چیزی را معرفی می‌کند که امروزه به انتگرال استراتونوویچ موسوم است [۲۷]. به‌علاوه نظریهٔ جدید شبه‌مارتینگل‌ها را (با همین نام) ارائه کرد که بعدها ک. م. رائو[1] آن را به‌کار گرفت و به طرز هوشمندانه‌ای ثابت کرد که هر شبه‌مارتینگل برابر است با تفاضل دو زیرمارتینگل [۶۷]. س. اوری[2] نیز در مقاله‌ای، ایده‌های فیسک را تعمیم داد و توانست نظریهٔ تازهٔ نیمه‌مارتینگل‌ها را تحت تأثیر قرار دهد [۶۲]. هرمان روبین در [۶۸]. اشاره می‌کند که فیسک پایان‌نامه‌اش را برای چاپ ارسال کرد ولی ویراستار اعتقاد نداشت که انتگرال‌گیری تصادفی مورد اقبال فراوانی است و به همین دلیل فیسک آن بخش از پایان‌نامه‌اش را که در این‌باره بود حذف کرد و به جای آن، فقط قسمت مربوط به شبه‌مارتینگل‌ها را چاپ کرد[۲۸].

اکنون باز می‌گردیم به روند تاریخی انتگرال‌گیری تصادفی و یادآوری می‌کنیم که نظریهٔ انتگرال تصادفی که پ. آ. میر در مرجع [۵۱] ارائه داد، چارچوب مناسبی بود که پس از آن در سال ۱۹۶۳ به‌طور سازمان‌یافته‌تری با کارهای فیلیپ کارژ[3] نمود پیدا کرد [۱۰]. در فعالیت‌های کارژ هم رد پای نظریهٔ پتانسیل به‌روشنی دیده می‌شود و مقالهٔ او نه تنها در یک مجله، بلکه در مجموعه سخنرانی‌های سمینار برلو ــ شوکه ــ دنای[4] (نظریهٔ پتانسیل) که شهرت فراوانی داشت، به چاپ رسید. بسیاری از فرآیندهای مارکف آشنا به‌ویژه آن‌هایی که هانت مورد بررسی قرار داده بود ([۳۱]، [۳۲]، [۳۳]) شبه پیوستهٔ چپ هستند، یعنی مسیرهایی دارند که قریب به یقین از راست پیوسته‌اند و حد چپ دارند و اگر در زمان توقف T دارای پرش باشند، آن‌گاه زمان T باید کلاً دسترس‌ناپذیر باشد. معنای شهودی این مطلب این است که T باید کاملاً غیر منتظره رخ دهد. شرط شبه پیوستگی را می‌توان بر حسب صافی $\sigma-$جبرهای زمینه در فرآیند مارکف نیز صورت‌بندی کرد که این ویژگی در مورد صافی مربوط به فرآیندهای مارکف همگن زمانی، معقول به نظر می‌آید و مثال‌های بسیاری وجود دارد که در این شرط صدق می‌کنند. فرضِ شبه پیوسته بودن صافی از طرف کسی که در نظریهٔ پتانسیل کار می‌کرد، طبیعی بود و اتفاقاً نتیجهٔ چنین فرضی این شد که اگر X یک زیرمارتینگل و $X = M + A$ تجزیهٔ دوب ــ میر آن باشد، آن‌گاه فرآیند A مسیرهای نمونه‌ای پیوسته دارد و به همین دلیل در معادلهٔ یکمتری

$$E((\int_0^t H_s dM_s)^2) = E(\int_0^t H_s^2 dA_s),$$

1) K. M. Rao 2) S. Orey 3) Philippe Courrege 4) Séminaire Brélot-Choquet-Dény (théorie du potetiel)

که در آن A فرآیند صعودی متناظر با نیمه مارتینگل $X = M^2$ است، می‌توان روش ایتو ـ دوب را به L^2–مارتینگل‌های کلی گسترش داد و حاصل کار این است که فرآیند تصادفی صعودی A مسیرهای پیوسته دارد. معلوم شد که این مطلب منجر به سادگی زیادی در نظریهٔ انتگرال تصادفی می‌شود و این دقیقاً همان فرضی بود که کارژ اتخاذ کرده بود. کارژ با انتگرالده‌هایی که مسیرهای از چپ پیوسته دارند نیز کار کرد و فضای فرآیندهایی را در نظر گرفت که نسبت به σ–جبری که روی $\mathbb{R} \times \circ\Omega$ تولید می‌کنند، اندازه‌پذیرند و این دست فرآیندها را «از پیش سازگار» نامید. بنابراین کارژ در واقع اولین کسی بوده است که σ–جبرهای حدس‌پذیر را معرفی کرد هرچند همانند میر از آن‌ها استفاده نکرد. ثابت می‌شود که اگر dA_t قریب به یقین نسبت به dt پیوستهٔ مطلق مسیری باشد، آن‌گاه اساساً فرقی نمی‌کند که چه σ ـ جبری مورد استفاده قرار گیرد: σ ـ جبر حدس‌پذیر، σ ـ جبر پیشرونده[۱]، یا حتی σ ـ جبر تولید شده توسط یک فرآیند سازگار توأماً اندازه پذیر. بااین حال اگر A صرفاً پیوسته باشد و قریب به یقین مسیرهای پیوستهٔ مطلق نداشته باشد، آن‌گاه دست کم به σ ـ جبر پیشرونده نیاز داریم. اکنون می‌دانیم که انتگرال تصادفی فرآیندی که برابر است با تفاضل فرآیندی از این دست و تصویر حدس‌پذیرش، فرآیند صفر خواهد شد و به همین دلیل، نوع σـ جبر به‌کار رفته اهمیت ندارد (جزئیات این مطلب را لیپستر و شریایف در مرجع [۴۵] آورده‌اند. می‌توانید چانگ و ویلیامز [۹] را هم ببینید).

با این همه، کار مهمی که کارژ انجام نداد، اثبات فرمول تغییر متغیر درست مشابه با فرمول ایتو برای انتگرال تصادفی نسبت به حرکت براونی بود که این وظیفه را ه. کونیتا[۲] و س. واتانابه در مقالهٔ تأثیرگذاری به سال ۱۹۶۷ به انجام رساندند. در حالی که رویکرد کارژ به شدت تحت تأثیر سنّت ایتو و دوب یعنی اثبات یک L^2 ـ یکمتری بود، دو سال قبل در سال ۱۹۶۵ موتو و واتانابه رویکرد جدیدی را برگزیده بودند، آن‌ها انتگرال تصادفی را به چشم عملگری روی مارتینگل‌هایی با ویژگی‌های خاص می‌نگریستند و با به کار گیری ساختار فضای هیلبرت L^2 و استفاده از فرآیند صعودی دوب ـ میر، یک ضرب داخلی روی تغییرات مرتبهٔ دوم مارتینگل‌ها تعریف کردند [۶۰]. موتو و واتانابه در همان مقاله، یک قضیهٔ نمایش مارتینگلی را ثابت کردند که خط و خطوط پیشرفت‌های آتی را معلوم می‌کرد: آن‌ها ثابت کردند که همهٔ L^2 ـ مارتینگل‌هایی که روی یک فضای احتمال تعریف شده‌اند، از طریق ساختن نوعی فرآیند مارکف به نام فرآیند هانت (به افتخار مقالات اساسی که هانت در این باره نگاشت و پیش از این به آن اشاره کردیم)، به‌دست می‌آیند که با گردایه‌ای از تابعک‌هایی تولید می‌شود که خودشان L^2 ـ مارتینگل هستند، و این کار را به روشی انجام دادند که امروزه به «فرمول دینکین و مسألهٔ مارتینگل» موسوم است. با این حال، مقالهٔ مهم موتو و واتانابه، به سرعت تحت الشعاع مقالهٔ بسیار زیبای ه. کونیتا و واتانابه قرار گرفت که در سال ۱۹۶۷ منتشر

---

۱) σـ جبر پیشرونده در نظریهٔ انتگرال تصادفی تعریف می‌شود و ویژگی آن این است که اگر فرآیند H_s اندازه‌پذیر پیشرونده، و τ یک زمان توقف متناهی ـ مقدار باشد، آن‌گاه H_τ نسبت به $\mathcal{F}_\tau$ اندازه‌پذیر است.

2) H. Kunita

شد[۴۲]. در آن مقاله، کونیتا و واتانابه، ایده‌های مربوط به تعامد مارتینگل‌ها را که میر، موتو و واتانابه، پایه‌ریزی کرده بودند، گسترش داده، نظریهٔ فضاهای مارتینگلی پایدار را ارائه دادند که معلوم شده است در نظریهٔ نمایش مارتینگل‌ها نقشی اساسی دارد و در ریاضیات مالی به «کامل بودن بازار» شهرت دارد. تغییرات مرتبهٔ دوم را به صورت یک شبه ضرب داخلی نگریستند و یک فرمول تغییر متغیر کلی ثابت کردند که فرمول ایتو دربارهٔ مارتینگل‌های براونی را گسترش می‌داد. این فرمول در مورد مارتینگل‌هایی که مسیرهای پیوسته دارند، ساده و روشن بود، ولی برای حالت کلی یعنی وقتی مسیرهای مارتینگل دارای ناپیوستگی‌های جهشی بود، مؤلفین به ساختار غنی متوسل شدند که در بستر فرآیند هانت در اختیارشان بود و پرش‌ها را برحسب دستگاه لویِ فرآیند مارکف زمینه بیان کردند(دستگاه لوی برای فرآیندهای مارکف، ساختاری غنی است برای توصیف رفتار پرش‌های یک فرآیند هانت و چند سال پیش از آن در ۱۹۶۴ توسط واتانابه ارائه شده بود [۸۴] و بعدها بنونیست[1] و ج. جاکود[2] آن را به پیش راندند [۳]). به‌کار گیری چنین ابزارهایی در آن زمان امری طبیعی بود، زیرا همان‌طور که قبلاً اشاره کردیم، انتگرال تصادفی از همان ابتدا با فرآیندهای مارکف درآمیختگی داشت. علاوه بر این‌ها، کونیتا و واتانابه توانستند به کمک فرمول تغییر متغیر، اثبات‌های ساده و هوشمندانه‌ای برای قضیهٔ لوی ارائه دهند که حرکت براونی را در میان همه مارتینگل‌های پیوسته، با فرآیند تغییرات مرتبهٔ دومش مبرّز می‌سازد. همچنین قضیه‌ای از ل. دوبین[3] و جی. شوارتز[4][۱۸] و ک. ای. دامبیس[5][۱۴] را که بر مبنای آن ردهٔ وسیعی از مارتینگل‌های پیوسته را می‌شود به صورت تغییر زمان در حرکت براونی نشان داد، از حالت یک بُعدی به بُعد N گسترش دادند.

مقالهٔ جالب کونیتا و واتانابه، بلافاصله مورد توجه میر قرار گرفت که در آن زمان در استراسبورگ بود. او تلاش کرد به کمک انتشارات اشپرینگر، مجموعهٔ سمینار احتمالات را در سری متون سخنرانی‌های ریاضی[6] راه‌اندازی کند که یکی از طولانی‌ترین مجموعه‌های مکتوب سمینار است که تاکنون منتشر شده است. او در شمارهٔ نخست این مجموعه سمینارها که مجلد ۳۹ در سری مذکور بود، چهار مقاله منتشر کرد[7] که در آن‌ها از ایده‌های کونیتا و واتانابه الهام گرفته بود ([۵۳]، [۵۴]، [۵۵] و [۵٦]). در این مقالات او دو نوآوری مهم انجام داد: یکی این که به جای ضرب داخلی $\langle X,Y\rangle$ ابداعی کونیتا و واتانابه که برمبنای تجزیهٔ دوب ـ میر بنا شده بود، با بسط ایدهٔ آستین برای مارتینگل‌های با پارامتر گسسته، مفهوم شبه ضرب داخلی $[X,Y]$ را به وجود آورد. برخلاف ضرب داخلی $\langle X,Y\rangle$ که فقط برای مارتینگل‌های به‌طور موضعی مربع ـ انتگرال پذیر (و به‌خصوص مارتینگل‌های پیوسته) وجود دارد، این شبه ضرب داخلی، فرآیندی است که برای همهٔ مارتینگل‌ها و بلکه مارتینگل‌های موضعی هم قابل تعریف است. بعدها مشخص شد که این موضوع در

---

1) A. Benveniste 2) J. Jacod 3) L. Dubin 4) G. Schwartz 5) K. E. Dambis

6) Lecture Notes in Mathematics

۷) تعداد زیادی از کارهای مهم دربارهٔ انتگرال تصادفی در سری سمینار احتمالات چاپ شد که أخیراً همراه با کمی یادداشت‌های اضافی در مجلدی مستقل چاپ مجدد شده است [۲۳].

پیشرفت‌های آتی نظریهٔ انتگرال تصادفی، به‌ویژه در ابداع نیمه‌مارتینگل‌ها و توسعهٔ تعریف انتگرال تصادفی به همهٔ مارتینگل‌های موضعی و نه فقط آن‌هایی که موضعاً مربع ـ انتگرال پذیرند، مؤثر بوده است.

دومین بصیرت مهم میر در این مجموعه مقالات، درک اهمیت σ ـ جبر حدس پذیر بود. او متوجه شد که اگر یک مارتینگل مسیرهای با تغییرات کراندار نیز داشته باشد (که در مورد مارتینگل‌های پرشدار لزوماً چنین است) در این صورت، انتگرال تصادفی باید همانی شود که از طریق انتگرال‌گیری مسیروار لبگ ـ اشتیلیس به‌دست می‌آید. او نشان داد که این مطلب صحت دارد اگر و فقط اگر انتگرالده یک فرآیند حدس پذیر باشد. به‌علاوه، او ملاحظه کرد که اگر انتگرالده اندازه پذیر حدس پذیر باشد، رفتار پرش‌های انتگرال تصادفی مانند انتگرال لبگ ـ اشتیلیس است و از این طریق توانست پرش‌های انتگرال تصادفی را تحلیل کند. این‌ها همگی زمینه‌ساز نظریهٔ نیمه‌مارتینگل‌ها شد که چند سال پس از آن، پا به عرصه گذاشت. در اینجا باید اشاره کنیم که میر در دو مقالهٔ نخست از چهار مقالهٔ مزبور، چارچوب فرآیندهای مارکف را که کونیتا و واتانابه از آن سودجسته بودند به کناری نهاد و فرمول تغییر متغیر را در حالت کلی اثبات کرد که در آن از دستگاه لوی استفاده نمی‌شود. پس از آن در دو مقالهٔ بعدی نتایج کلی جدید خود را در جهت تحلیل فرآیندهای مارکف به‌کار گرفت. البته این کار نیز طبیعی بود، زیرا یکی از علایق اولیهٔ میر حل مسائل باز بسیاری بود که در مقالات پیاپی هانت مطرح شده بودند. در حالی که از زمان ایتو به این طرف، همواره تحقیق در زمینهٔ فرآیندهای مارکف بوده که علاقه به مطالعهٔ انتگرال تصادفی را هم برانگیخته است ولی دوب، ویژگی مارتینگلی فرآیندها را مستقل از فرآیندهای مارکف مورد بررسی قرار می‌داد و میر در مقالات کلاسیک خود در سال‌های ۱۹۶۲ و ۱۹۶۳ که پیش از این تشریح کردیم، می‌خواست از روش‌های نظریهٔ پتانسیل فرآیندهای مارکف برای اثبات نتایج مارتینگلی خالص سود برد ([۵۱] و [۵۲]).

تا اینجا به نظر می‌رسد سیر پیشرفت نظریهٔ انتگرال تصادفی عمدتاً در ژاپن و فرانسه متمرکز بوده است. اما به موازات این‌ها، فعالیت‌هایی نیز در اتحاد شوروی سابق در حال شکل‌گیری بود. کتاب‌های دینکین دربارهٔ فرآیندهای مارکف ابتدا در سال ۱۹۶۰ و سپس به زبان انگلیسی توسط انتشارات اشپرینگر در سال ۱۹۶۵ به چاپ رسیدند ([۱۹] و [۲۰]). همچنین می‌توان به سمینار مشهور مسکو اشاره کرد (که دست کم یک بار دیگر در ۱۸ و ۱۹ اکتبر ۱۹۹۶ در ایست لنسینگ ایالت میشیگان به همراهی دینکین، اسکروخود[1]، ونتزل، فریدلین، کریلف[2] و دیگران تشکیل شد)، و کارهای گرسانف دربارهٔ تبدیل‌های حرکت براونی که به ۱۹۶۰ و پیش از آن برمی‌گردد [۲۹][3].

1) Skorohod   2) Krylov

۳) کاری که گرسانف انجام داد، توسیع کار اولیهٔ کامرون و مارتین در این زمینه بود که در سال ۱۹۴۹ انتقال تعینی و تصادفی مسیرهای حرکت براونی را با حفظ معادل بودن توزیع‌های قدیمی و جدید فرآیندها به این ←

استراتونوویچ[1] صورتی از انتگرال ایتو را ارائه داد که از قواعد تغییر متغیر متداول در انتگرال ریمان ـ اشتیلیس تبعیت می‌کند، لکن ویژگی مارتینگلی و نیز کلیت انتگرال ایتو را ندارد [۷۹][2].

انتگرال استراتونوویچ، در عین حال که در مجامع مهندسی متداول بود، ولی برای ریاضیدانان عجیب می‌نمود، تا این‌که بعداً معلوم شد که وقتی مسیرهای حرکت براونی را با خم‌های مشتق پذیر تقریب می‌زنیم، انتگرال‌های حاصل به انتگرال استراتونوویچ همگرا هستند و این باعث شد تا این شیء، ذاتی هندسهٔ دیفرانسیل تصادفی شود [۲۲].

نخستین کارهای جالب در زمینهٔ انتگرال تصادفی در اتحاد شوروی، سری مقالاتی بود که اسکروخود نوشت. اسکروخود، کاملاً به موازات کارژ و کونیتا و واتانابه، انتگرال ایتو را عمدتاً با الهام از روش‌های مربوط به نظریهٔ فرآیندهای مارکف، توسعه داد. در سال ۱۹۶۳، اسکروخود درست در چارچوب فرآیندهای مارکف و تحت تأثیر کار دینکین، نظریهٔ انتگرال تصادفی را برای مارتینگل‌ها ارائه داد که مشابه با نظریهٔ کارژ در فرانسه بود هرچند از تغییر زمان استفاده کرده بود [۷۵]. در سال ۱۹۶۶، حین مطالعهٔ تابعک‌های جمعی فرآیندهای مارکف پیوسته، ایدهٔ تغییرات مرتبهٔ دوم مارتینگل‌ها و نیز آنچه اکنون به نامساوی کونیتا ـ واتانابه شهرت دارد و همان فرمول تغییر متغیری را که کونیتا و واتانابه اثبات کرده بودند، ارائه کرد [۷۶]. او در سال ۱۹۶۷، این نتایج و به‌علاوه فرمول تغییر متغیر خود را به مارتینگل‌های پرشداری که همواره روی یک فرآیند مارکف تعریف شده‌اند تعمیم داد [۷۸]. جملات مربوط به پرش در فرمول تغییر متغیر، به کمک هستهٔ دستگاه لوی که

← معنی (که مجموعه‌های اندازه صفرشان یکسان است) مورد بررسی قرار دادند[۸]؛ پس از آن مارویاما در سال ۱۹۵۴ [۴۸]، و سپس گرسانف در سال ۱۹۶۰ این ایده‌ها را به فرآیندهای مارکف نیز تسرّی دادند. بعدها در سال ۱۹۷۴ ون شوپن به همراه وانگ [۸۱]، نتایج مزبور را به مارتینگل‌ها هم گسترش دادند و به دنبال آن میر در ۱۹۶۷ و لنگلارت در ۱۹۷۷ صورت امروزی به نتایج مربوط به تبدیلات حرکت براونی بخشیدند ([۵۷] و [۴۳]). در این باره می‌توانید مثلاً صفحات ۱۳۶—۱۲۳ مرجع [۶۶] را مطالعه کنید تا با نتایج جدید در این باب، آشنا شوید.

1) Stratonovich

۲) در واقع انتگرال استراتونوویچ چندان تعجب برانگیز نبود. اسکروخود در نقدی بر یک کتاب در همان زمان می‌نویسد: «این انتگرال اگر وجود داشته باشد، خیلی ساده‌تر از انتگرال ایتو قابل بیان است. با این حال ردهٔ توابعی که این انتگرال برای آن‌ها وجود دارد، بسیار محدود و گاهی مصنوعی است. هر چند ممکن است با به کار گیری این انتگرال متقارن بعضی از فرمول‌ها ساده‌تر شوند (که البته بعداً روشن می‌کنیم که بسیاری از آن‌ها هم پیچیده‌تر می‌شوند)، کاربردش به واسطهٔ حوزهٔ تعریف کوچکی که دارد، محدود است. از این رو این نوآوری اصلاً توجیه پذیر نیست» [۷۷]. انتگرال استراتونوویچ را همزمان فیسک در اتحاد شوروی به عنوان بخشی از پایان نامهٔ دکتری خود گسترش بخشید لکن برای چاپ مورد پذیرش واقع نشد به‌خاطر این‌که برای داور بیش از اندازه بدیهی می‌نمود. البته نیمهٔ دوم پایان نامهٔ او مربوط به ابداع شبه‌مارتینگل‌ها بود که آن نیمه چاپ شد [۲۸].

واتانابه معرفی کرده بود، قابل بیان است.[۱]

در پایان، مجدداً بازمی‌گردیم به فرانسه. پس از مقالهٔ کونیتا و واتانابه و چهار مقالهٔ میر که طی آن نتایج ایشان را تعمیم داد، یک وقفهٔ سه ساله رخ داد تا این‌که مقالهٔ دولن ــ داد[۲] و میر ظاهر شد [۱۵]. پیش از این مقاله، پیشرفت انتگرال تصادفی بیشتر بر مبنای فرآیندهای مارکف بود و گاهی به نظر می‌رسید که اصولاً انتگرال تصادفی ابزار سودمند و مؤثری در بررسی مباحث مربوط به فرآیندهای مارکف است. فرض اساسی که در کارهای قبلی کونیتا، واتانابه و میر دیده می‌شد، این بود که صافی σ ــ جبرها، از چپ پیوسته است، به عبارت دیگر صافی، هیچ زمان ناپیوستگی تثبیت شده‌ای ندارد. دولن ــ داد و میر توانستند این فرض را حذف کرده، یک نظریهٔ مارتینگلی خالص ارائه دهند که در آن ردپایی از وابستگی به فرآیندهای مارکف به چشم نمی‌خورد. اکنون می‌توان ادعا کرد که این قدم مهم، منجر به رشد روزافزون نظریهٔ انتگرال تصادفی در دههٔ ۱۹۷۰ و پیدایش مقالات بنیادی هریسون ــ کرپس[۳] و هریسون ــ پلیسکا[۴] در نزدیکی‌های پایان این دهه شد. سرانجام، در همان مقاله دولن ــ داد و میر مفهوم جدید نیمه‌مارتینگل را به عنوان کلی‌ترین ردهٔ فرآیندهایی که می‌شود برای آن‌ها انتگرال تصادفی را تعریف کرد، عرضه کردند[۵].

تشکر و قدردانی

نویسندگان مقاله از هـ. فولر، ک. ایتو، ج. جاکود، ج. پیتمن، هـ. رابین، آ. ن. شریایف، س. واتانابه، م. یور و م. زاکای به خاطر کمک‌هایی که برای تهیهٔ این تاریخچه ارائه نمودند، سپاسگزارند.

مراجع

[1] Bachelier, L. *Théorie de la Spéculation*, *Annales Scientifiques de l'École Normale supérieure* (1900), 21-86.

---

۱) میر در چهار مقالهٔ خود [۵۳]، [۵۴]، [۵۵] و [۵۶] که تأثیر زیادی در غرب داشت، به کارژ، موتو، واتانابه و کونیتا ارجاع می‌دهد لکن هیچ رجوعی به اسکروخود ندارد. بی‌شک میر از کارهای او آگاهی نداشته است که خود همین به ناشناخته ماندن کارهای اسکروخود کمک کرد.

2) Doleans-Dade 3) Harrison-Kreps 4) Harrison-Pliska

۵) همانطور که در ادامهٔ این مقاله خواهیم دید، تعریفی که دولن ــ داد و میر از نیمه‌مارتینگل‌ها در سال ۱۹۷۰ ارائه دادند بسیار عالمانه بود و در اواخر دههٔ ۱۹۷۰، دلاچری و بیچلر همزمان یک ویژگی مشخصهٔ نیمه‌مارتینگل‌ها را ثابت کردند: آن‌ها نشان دادند که اگر فرآیند از راست پیوسته X که حد چپ دارد داده شده و انتگرال تصادفی به روش معمول برای فرآیندهای حدس‌پذیر ساده تعریف شده باشد و صورت خیلی ضعیف قضیهٔ همگرایی کراندار را هم در اختیار داشته باشیم، آن‌گاه X به طریق اولی یک نیمه مارتینگل است.

[2] Bachelier, L. *Théorie de la Spéculation*, Gauthier-Villars, Paris (1900). {Note: This book has been reprinted by the Paris Publisher Éditions Jacques Gabay (1995).

[3] Benveniste, A. and Jacod, J. Systèmes de Lévy des processus de Markov, Invent. Math., **21**, (1973) 183-198.

[4] Bernstein, P. L.*Capital Ideas: The Improbable Origins of Modern Wall Street*, The Free Press, New York (1992).

[5] Bernstein, S. Equations différentielles stochastiques, *Actualités Sci. Ind.*, **738** (1938), 5-31.

[6] Bru, B. and Yor, M. *La vie de W. Doeblin et le Pli cacheté 11 668, La Lettrede L'Académie des Science*, **2**, (2001) 16-17.

[7] Bru, B. and Yor, M. Comments on the life and mathematical legacy of Wolfgang Doeblin, *Finance and Stochastics* **6** (2002), 2-47.

[8] Cameron, R. H. and Martin, W. T. Transformation of Wiener integrals by non-linear transformations, *Transaction of the American Math. Society* **66** (1949), 253-283.

[9] Chung, K. L. and Williams, R. *Introduction to Stochastic Integration*, Second Editition, Birkhäuser, Boston (1990).

[10] Corrège, Ph. Intégrales stochastiques et martingales de carré intégrable, *Séminaire Brélot-Choquet-Dény* (Théorie du Potential),**7e année, 1962/63** (1963), 7-01-7-20.

[11] Courtault, J. M., Kabanov, Y., Bru, B., Crépel, P., Lebon, I., and Le Marchand, A. Louis Bachelier: On the Centenary of Théorie de la Spéculation, *Mathematical Finance* **10** (2000), 341-353.

[12] Cox, J. and Ross, S. A. The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes, *Journal of Financial Economics*, **3** (1/2) (1976), 145-166.

[13] Csörgo. Random walking around financial mathematics, Random walks (Budaapest), edited by Pál Révész, Bálint Tóth. Boliai Soc. *Math. Stud.*, **9** (1998), 59-111.

[14] Dambis, K. E. On the decomposition of continuous martingales, *Theor. Proba. Applications*, **10** (1965), 401-410.

[15] Doléans-Dade, C. and Meyer, P. A. Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales, *Séminaire de Probabilités IV*, Lecture Notes in Mathematics, **124** (1970), 77-107.

[16] Doob, J. L. *Stochastic Processes*, John Wiley end Sons, New York (1953).

[17] Doob, J. L. The Development of Rigor in Mathematical Probability (1900-1950), in J.-P. Pier, ed., *Development of Mathematics* 1900-1950, Birkhauser Verlag AG, Basel (1996).

[18] Dubins, L. and Schwarz, G. On continuous martingales, *Proc. National Acad. Sciences USA*, **53** (1965), 913-916.

[19] Dynkin, E. *Theory of Markov Processes*, Pergamon Press, Oxford (1960).

[20] Dynkin, E. *Markov Processes* (two volumes), Springer-Verlag, Berlin (1965).

[21] Einstein, A. *On the movement of small particles suspended in stationary liquid demanded by the molecular-kinetic theory of heat*, Ann. d. Physik **17** {In *Investigations of the theory of Brownian movement*, ed. R. Fürth, Dover, New York, 1956} (1905).

[22] Emery, M. *Stochastic calculus in manifolds, with an appendix by P. A. Meyer*, Springer-Verlag, Berlin (1989). .

[23] Emery, M. and Yor, M., eds. *Séminaire de Probabilités 1967-1980: A Selection in Martingale Therory*, Lecture Notes in Mathematics (2002), **1771**.

[24] Fama, E. The Behavior of Stock Prices, *Journal of Business*, **38** (1965), 34-105.

[25] Fama, E. Market Efficiency, Long Term Returns, and Behavioral Finance, *Journal of Financial Economics,* **49**, (1985) 283-306.

[26] Feller, W. Zur Theorie der Stochastichen Prozesse (existenz-und Eindeutigkeitssatze), *Math. Ann.* **113** (1936).

[27] Fisk, D. *Quasi-martingales and stochastic integrals*, Ph.D. thesis, Michigan State University, Department of Statistics (1936).

[28] Fisk, D. Quasimartingales, *Transactions of the American Math. Soc.*, **120** (1965), 369-389.

[29] Girsanov, I. V. On transforming a certain class of stochastic processes by absolutely continuous changes of measures, *Theory Probab. Appl.*, **5** (1960), 285-301.

[30] Hald, A. T. N. Thiele's contributions to Statistics, *International Statistic Review*, **49** (1981), 1-20.

[31] Hunt, G. A. Markoff processes and potentials I, *Illinois J. Math.* **1** (1957), 44-93.

[32] Hunt, G. A. Markoff processes and potentials II, *Illinois J. Math.* **1** (1957), 316-369.

[33] Hunt, G. A. Markoff processes and potentials III, *Illinois J. Math.* **2** (1958), 151-213.

[34] Itô, K. *Stochastic Integral*, Proc. Imp. Acad. Tokyo, **20** (1944), 519-524.

[35] Itô, K. On a formula concerning stochastic differentials, *Nagoya Math. J.*, **3** (1951), 55-65.

[36] Itô, K. Multiple Wiener integral, *J. Math. Society of Japan* **3** (1951), 157-169.

[37] Itô, K. *Foreword, K. Itô Collected Papers*, Springer-Verlag, Heidelberg, xiii-xvii (1987).

[38] Itô, K. and McKean, H. P., Jr. Diffusion Processes and Their Sample Paths, Springer-Verlag (1965), New York; new edition by Springer-Verlag, 1996.

[39] Itô, K. and Watanabe, S. Transformation of Markov processes by multiplicative functionals, *J. Math.* Kyoto Univ. **4** (1965), 1-75.

[40] Johnson, G. and Helms, L. L. (1963). Class (D) Supermartingales, Bull. *American Math. Society* **69**, 59-62.

[41] Kolmogorov, A. N. (1931). *On Analytic Methods in Probability Theory, in A. N. Shiryaev, ed., Selected Works of A. N. Kolmogorov; Volume II: Probability Theory and Mathematical Statistics*, Kluwer, Dordrecht, 1992, 62-108. [Original: Uber die Analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, *Math. Ann.* **104**, 1931, 415-458.]

[42] Kunita, H. and Watanabe, S. On Square Integrable Martingales, *Nagoya Math.* J. **30** (1967), 209-245.

[43] Lenglart, E. *Transformation des martingales locales par changement absolument cotinu de probabilités*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **39** (1977), 65-70.

[44] Lévy, P. *W. Dŏblin (V. Doblin) (1915-1940)* Revue d'Histoire des Sciences et de leurs Applications, **8** (1955), 107-115.

[45] Liptser, R. Sh., and Shiryaev, A. S.; A. B. Aries, translator, 1977,1978, (2nd, revised and expanded edition, 2001) *Statistics of Random Processes*, Two volumes, Springer-Verlag, Heidelberg.

[46] Malkiel, B. G. *A Random Walk Down Wall Street*, 7th edition, WW Norton, New York (2003).

[47] McKeen, H. P., Jr. *Stochastic Integrals*, Academic Press, New York (1969).

[48] Maruyama, G. *On the transition probability functions of Markov processes*, Nat. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. **5** (1954), 10-20.

[49] Maruyama, G. *Continuous time processes and stochastic equations*, Rend. Circ. Math. Palermo **4** (1955), 1-43.

[50] Merton, R. C. *Continuous Time Finance*, Basil Blackwell, Cambridge, Massachusetts (1990).

[51] Meyer, P. A. A decomposition theorem for supermartingales, Ill. *J. Math.* **6** (1962), 193-205.

[52] Meyer, P. A. Decomposition of supermartingales: the uniqueness theorem, Ill. *J. Math.* **7** (1963), 1-17.

[53] Meyer, P. A. Intégrales Stochastiques I, *Séminaire de Probabilités I, Lecture Notes in Mathematics,* **39** (1967), 72-94.

[54] Meyer, P. A. *Intégrales Stochastiques II*, Séminaire de Probabilités I, Lecture Notes in Mathematics, **39** (1967), 95-117.

[55] Meyer, P. A. Intégrales Stochastiques III, *Séminaire de Probabilités I*, Lecture Notes in Mathematics, **39** (1967), 118-141.

[56] Meyer, P. A. Intégrales Stochastiques IV, *Séminaire de Probabilités I*, Lecture Notes in Mathematics, **39** (1967), 142-162.

[57] Meyer, P. A. Un cours sur les intégrales Stochastiques, *Séminaire de Probabilités X*, Lecture Notes in Mathematics, **511** (1976), 246-400.

[58] Meyer, P. A. *Les Processus Stochastiques de 1950 à Nos Jours*, in Development of Mathematics 1950-2000, edited by Jean-Paul Pier; Birkhäuser, Boston (2000), MA. 813-848.

[59] Modigliani, F. and Miller, M. H. The Cost of Capital, Corporation Finance, and the Theory of Investment, *American Economic Review,* **48**, 261-297.

[60] Motoo, M. and Watanabe, S. *On a class of additive functionals of Markov process*, J. Math. Kyoto Univ. **4**, 429-469.

[61] Osborne, M. F. M. Brownian motion in the stock market, *Operations Research*, **7** (1959), 145-173.

[62] Orey, S. *F-processes*, Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, **2**, 301-303, University of California Press, Berkeley.

[63] Pais, A. (1982). *'Subtle is the Lord...' The Science and Life of Albert Einstein,* Oxford University Press, Oxford.

[64] Petit, M. (2003). *L'équation de Kolmogroff*, Editions Ramsay, Paris.

[65] Protter, P. A new prize in honor of Kiyosi Itô, *Stochastic Processes and their Applications*, **108** (2003), 151-153.

[66] Protter, P. *Stochastic Integration and Differential Equations*; Second Edition, Springer Verlag, Heidelberg (2004).

[67] Rao, K. M. Quasimartingales, *Math. Scand.*, **24** (1969), 79-92.

[68] Rubin, H. Personal communication by electronic mail (2003).

[69] Rubin, H. (1956). *Quasi-martingales and stochastic integrals*,title of an invited talk at the Seattle Meeting of the IMS, August 21-24, 1956; see page 1206 of the Annals Math. Statist., **27**, 1198-1211.

[70] Samuelson, P. Rational Theory of Warrant Pricing, *Industrial Management Review,* **6** (1965), 13-39.

[71] Samuelson, P. Proof That Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly, *Industrial Management Review,* **6** (1965)., 41-49.

[72] Samuelson, P. Mathematics of Speculative Price, *SIAM Review,* **15** (1973), 1-42.

[73] Samuelson, P. *Modern finance theory within one lifetime*, Mathematical Finance - Bachelier Congress 2000, eds. Geman, H., Madan, D., Pliska, S. R., and T. Vorst; Springer-Verlag, Heidelberg (2002), 41-46.

[74] Samuelson, P. and Merton, R. C. A Complete Model of Warrant Pricing that Maximizes Utility, *Industrial Management Review*, **10**(2) (1969), 17-46.

[75] Skorokhod, A. V. *On homogeneous continuous Markov proceses that are martingales, Theory of Probability and its Applications*, **8** (1963), 355-365.

[76] Skorokhod, A. V. *On the local structure of continuous Markov processes, Theory of Probability and its Application*, **11** (1966), 336-372.

[77] Skorokhod, A. V. Review of R. L. Stratonovich, Conditional Markov Processes and Their Application to the Theory of Optimal Control, *Theory of Probability and its Applications*, **12** (1967), 154-156.

[78] Skorokhod, A. V. *Homogeneous Markov processes without discontinuities of the second kind, Theory of Probability and its Applications*, **12** (1967), 222-240.

[79] Stratonovich, R. L. *Conditional Markov Processes and Their Application to the Theory of Optimal Control Izd.* Moskow University Press, Moskow (1966).

[80] Thiele, T. N. (1880). *Sur la compensation de quelques erreurs quasisystématiques par la méthod des moindres carrés*, Reitzel, Copenhagen. {Note: This article was published simultaneously in Danish and French; for the Danish reference see [30].}

[81] Van Schuppen, J. H. and Wong, E. *Transformations of local martingales under a change of law, Annals of Probability* **2** (1974), 879-888.

[82] Varadhan, S. R. S. and Stroock, D. W. *Introduction, K. Itô Collected Papers*, Springer-Verlag, Heidelberg, vii-xii (1987).

[83] Ville, J. (1939). *Étude critique de la notion de collectif*, Gauthier-Villars, Paris.

[84] Watanabe, S. (1964). *On discontinuous additive functionals and Lévy measures of a Markov process, Japanese J. Math.*, **36**, 53-70.

ترجمه: روح‌الله جهانی‌پور
بخش ریاضی، دانشکدهٔ علوم، دانشگاه کاشان
jahanipu@kashanu.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۶ (بهار ۱۳۸۵) صص. ۳۹ تا ۵۵

در بهار اتفاق می‌افتد!

احسان ممتحن

بعد از ظهر یک سه‌شنبهٔ بهاری در دفتر کارم مشغول گشت و گذار در منزلگاه‌های ریاضی بودم که کسی درب اتاقم را باز کرد و وارد شد. خلوتم را به هم زده بود و این عمل را، به خودی خود، گناهی نابخشودنی تلقی می‌کردم. نخست کمی عصبانی شدم، اما این عصبانیت به سرعت جایش را به حیرتی توأم با وحشت داد. امکان نداشت. آخر چطور؟ یعنی چه؟ شاید کابوس بود، نمی‌توانست واقعیت داشته باشد ــ یک بار در مجلهٔ فیزیک قصه‌ای علمی تخیلی خوانده بودم که در آن نیوتن وارد اتاق فیزیکدان جوانی شده بود و به او گفته بود که نیروی جاذبه با معکوس مکعب فاصلهٔ دو جرم متناسب است نه با مربع آن، یکبار هم در کتاب «دنیای سوفی» فیلمی از آتن باستانی را به سوفی نشان داده بودند، اما اینها همه افسانه بودند حال آن که این یکی به هیچوجه به توهم شبیه نبود. راه می‌رفت و بدون اجازه وارد اتاق کار آدم می‌شد و از همه عجیب‌تر شبیه به کسی بود که سال‌ها در باره‌اش مطلب خوانده بودم. شبیه سقراط. واقعاً شبیه بود، بینی کوفته‌ای، کلّهٔ تاس (باید اذعان کنم که حجم کلّه‌اش باور نکردنی بود!)، شانه‌هایی پهن، تنومند، یک ریش بلند و نامرتب و صدایی نرم و روحانی. لباسی بسیار عادی به تن داشت. پیراهن و شلوار سفید و کفشی کتانی. هوا کمی سرد بود و هنوز این لباس مناسب چنان هوایی نبود اما چیز غیر عادیی نیز تلقی نمی‌شد. سلام کرد و گفت که آموزگار دبستانی است در همین نزدیکی‌ها! قدری ترسم فرو نشست. عمری رساله خوانی باید هم آدم را خیالاتی کند. نه، معلوم است که آن چیزهاباید فقط در قصه‌ها اتفاق بیافتد و بس.

گفتم: امری داشتید.

گفت: خواهش می‌کنم، بله، می‌خواهم گفتگو کنم.

گفتم: در چه موردی؟

گفت: اصل انتخاب.

باز خون به چهره‌ام دوید و منقلب شدم. آموزگار دبستان را با اصل انتخاب چه کار؟ این که جزء موضوعات درسی آن‌ها نیست. این آدم چه می‌گوید. خنده‌ای کرده و گفتم جالب است که به

اصل انتخاب علاقه دارید، نباید با شغلتان ارتباطی داشته باشد، حتماً کنجکاوی شخصی باعث شده به این موضوع علاقه پیدا کنید.

گفت: اصل عجیبی است. پذیرفتنش یک مصیبت است و نپذیرفتنش هم یک مشکل. از مدیر گروه پرسیدم گفتند شما مبانی ریاضی درس می‌دهید و به این موضوعات علاقه‌مندید. من قدری نظریهٔ مجموعه‌ها خوانده‌ام و به غیر از بعضی ایرادات منطقی قابل اغماض، اصل انتخاب مرا واقعاً به حیرت انداخته و در عین حال بر سر شوق آورده است. دوست دارم کمی با شما در مورد این اصل صحبت کنم. به نظر شما چه چیز این اصل بیش از همه برای یک ریاضیدان جالب است؟

گفتم: شاید کنجکاوی برانگیزترین نکته در بارهٔ اصل انتخاب آن باشد که چه موقع از آن استفاده می‌کنیم. یعنی ردّپای اصل انتخاب را در هر کجا که به کار گرفته شده است، ببینیم. این کار همیشه آسان نیست به ویژه اگر بیاد بیاوریم که بسیاری از ریاضیدانان بزرگ اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم، یعنی در اوج شکل گیری و توجه به نظریهٔ مجموعه‌ها و اصل انتخاب، با وجود مخالفت با اصل انتخاب، بارها ندانسته و نخواسته از این اصل استفاده کرده بودند. و چرا چنین چیزی باید تااین حد مهم باشد؟ چرا دانستن این که در فلان قضیه اصل انتخاب به کار گرفته شده است یا نه مهم است؟ پاسخی که فوراً به ذهن می‌رسد این است که اصل انتخاب از بقیهٔ اصول نظریهٔ مجموعه‌ها مستقل است (یکی از کارهای مهم گودل). یعنی نمی‌توان اصل انتخاب را از دیگر اصول نظریهٔ مجموعه‌ها مانند اصل تصریح، اصل زوج سازی، اصل اجتماع و $\cdots$ نتیجه گرفت، یا به طور معادل به این معنی است که می‌توان مدلی ساخت که دیگر اصول نظریهٔ مجموعه‌ها در آن صدق کنند و راست باشند اما این اصل راست نباشد و هم چنین می‌توان مدلی ساخت که این اصل و دیگر اصول نظریهٔ مجموعه‌ها راست باشند...

همینطور که داشتم حافظه‌ام را تخلیه می‌کردم وسط حرفهایم دوید و گفت: بله بله متوجهم. اما اگر موافق باشید نخست راجع به موضوع پایه‌ای‌تری صحبت کنیم. یعنی خود اصل انتخاب. من در فهم معنای این اصل مشکلاتی دارم. نمی‌دانم کلمهٔ **انتخاب** در این میان به چه معناست. اصولاً نمی دانم چه وقت در حال انتخاب کردن هستیم و چه وقت نه. برای این کار اجازه دهید موضوع را با حالتی آغاز کنم که در آن فقط یک مجموعه وجود دارد. اگر قصد *انتخاب* یک عضو از مجموعه‌ای ناتهی چون A را داشته باشیم چه می‌کنیم؟

گفتم: منطق به این پرسش چنین پاسخ می‌دهد که A ناتهی است $:= \exists\, x \in A$. پس **همان** x را انتخاب می‌کنیم.

گفت: اما همان x یا یکی از همانها را؟. زیرا ممکن است A یک مجموعهٔ نامتناهی باشد، پس بینهایت از این «همان xها» وجود دارند. آیا اصولاً در اینجا نیز موضوع **انتخاب** قابل طرح است؟ آیا در این زبان مرتبهٔ اول، سور وجودی، $\exists$، از میان متغیرها عضوی را انتخاب می‌کند؟

گفتم: درست مانند آن است که دست کنیم در یک جعبه و چیزی در دستمان قرار گیرد. مهم نیست چه چیزی، تنها کافی است دست ما خالی بر نگردد. البته این هیچگاه در مورد یک جعبهٔ

خالی اتفاق نمی‌افتد. هر چقدر هم جستجو کنیم چیزی در دستمان قرار نمی‌گیرد. بنابراین در اینجا **انتخابی** در میان نیست. تنها، بودن یا نبودن عضوی در آنجا مطرح است. در جعبه دست میکنی و چیزی (همان x) هست که مأیوست نکند و دستت را خالی از جعبه بیرون نیاوری.

گفت: موضوع این است که در زبان مرتبهٔ اول که برای نمایش بخش بزرگی از ریاضیات مناسب است به لحاظ منطقی فرقی میان $\exists x \in A$ و $\exists y \in A$ نیست. هر دو می‌گویند «A تهی نیست»، یعنی هر دو را وقتی به یک زبان طبیعی مانند زبان فارسی بر می‌گردانیم به نظر می‌رسد که به این معنی است. اما مشکل اینست که اگر در یک مجموعه زندگی کنید بین متغیرهای x و y فرق می‌نهید، زیرا اگر این دو یکی بودند دیگر هیچ انسانی قادر نبود تفاوتی میان آنها قائل شود.

گفتم: ایرادتان مرا به یاد گفته‌ای از ویتگنشتاین می‌اندازد. او نیز معتقد بود اگر مدعی هستیم که زبانی صوری طراحی کرده‌ایم که از مشکلات زبان‌های طبیعی در امان است پس چه معنی دارد که هر بار به زبان طبیعی باز گردیم و بگوییم این جملهٔ صوری در واقع فلان چیز را در زبان طبیعی می‌گوید؟ پس اصولاً چه نیازی بود که فرگه و بعد راسل و وایتهد و دیگران اینهمه وقت صرف ساختن چنین زبانی کنند؟ گویی گریزی از این نیست که برای فهمیدن هر چیزی نهایتاً آن را به زبان طبیعی باز گردانیم [۵].

گفت: من نیز متوجه چنین مشکلی شده‌ام. در درک ریاضیات، زبان طبیعی به شدت دخالت می‌کند. هیچ ریاضیدانی، حتی منطقدان‌ترین آنها یعنی گودل، نمی‌تواند از زبان‌های طبیعی استفاده نکند، برای همین هم گودل در مقالهٔ خود «دربارهٔ گزاره‌های تصمیم‌ناپذیر در نظام پرینکیپیا ماتماتیکا» نوشت: جمله‌ی $\neg Bew[R(q), q]$ در واقع می‌گوید که «$R(q)$ اثبات پذیر نیست». چرا باید به ما یادآوری کند که گزاره‌اش دارد چنین حرفی می‌زند اگر موضوع واضح است [۸]؟ اما این دقیقاً آن چیزی نبود که می‌خواستم در باره‌اش بحث کنم. بیایید با یکدیگر پیمان ببندیم که بر اصل انتخاب تمرکز کنیم و آن را بهتر بفهمیم.

نمی‌دانم چرا دلم شور می‌زد، با خود گفتم اگر آموزگار است پس چطور مقالهٔ گودل را خوانده و به این چیزها فکر کرده است؟ اصلاً من چرا باید با این آدم عجیب و غریب که در این هوای خنک یک پیراهن پوشیده است و با سر عظیمش به طرف من ... دوباره رشتهٔ افکارم را پاره کرد. لبخند می‌زد و از همه عجیب‌تر برای خودش لیوانی چای ریخته بود و چشمانش دنبال قندان می‌گشت. قندان در زیر توده‌ای از کاغذهای کاهی پنهان شده بود در حالی که آن را بیرون می‌آوردم و کنار دستش می‌گذاشتم به بحث بازگشت.

گفت: نخست مشخص کنیم که چه فرقی بین انتخاب یک عضو از یک مجموعه که ممکن است بینهایت عضو هم داشته باشد با انتخاب بینهایت عضو از بینهایت مجموعه (از هر مجموعه یک عضو) وجود دارد؟ کمی قبل البته مشخص شد که انتخاب یک عضو از یک مجموعه اصولاً **انتخاب** نیست. زیرا فرقی نمی‌کند که کدام عضو را، x یا y را، *انتخاب* کنید (این را که می‌گفت لبخند عجیبی بر لبانش نشست، گویی می‌خواست بگوید اینجا نیز ناگزیریم از کلمهٔ انتخاب استفاده

کنیم)، به سرعت افزود: اجازه دهید برای این حالت به جای انتخاب از واژهٔ برداشت استفاده کنیم. مهم این است که عضوی آنجا هست و در عین حال مهم نیست که کدامیک. هر چه پیش آید خوش آید. وضع با مقولهٔ مورد علاقهٔ احتمال‌دانان هم فرق دارد. آنها در جعبه تعدادی گلوله‌های آبی، زرد و قرمز می‌ریزند و بعد از احتمال بیرون آمدن مهرهٔ زرد سؤال می‌کنند. درست است؟

گفتم: بله، برای احتمال‌دان موضوع مهم محاسبهٔ احتمال وقوع یک پیشامد، مثلاً زرد بودن مهرهٔ بیرون آمده از جعبه است. بدین معنی احتمال وجود عضوی در یک مجموعهٔ ناتهی یک است. شاید وضع شبیه این است که جعبه‌ای مالامال از مهره‌های سفید رنگ باشد و بپرسیم احتمال بیرون آمدن مهرهٔ سفید چقدر است؟ معلوم است که یک.

گفت: بسیار خوب. و اگر بخواهیم از دو یا سه یا بطور کلی تعداد متناهی مجموعه عضوهایی انتخاب کنیم (از هر مجموعه یک عضو) وضع کم و بیش به همین نحو است. درست مانند حالت انتخاب یک عضو از یک مجموعه. بعد گویی که با خودش گفتگو می‌کند ادامه داد: گاه از خودم می‌پرسم آیا برداشت یک عضو از یک مجموعه با برداشت **هم‌زمان** میلیاردها عضو از میلیاردها مجموعه یکسان است؟ در عین حال احساس منطقی ریاضیدانان را نیز درک می‌کنم. سپس وضعیتی دیگر پیش می‌آید: فرض کنیم تعداد شمارایی مجموعه‌های غیرتهی مانند A_1، A_2، ...، A_n، ... داده شده باشند. می‌خواهیم از هر یک از مجموعه‌ها عضوی انتخاب کنیم. اگر از A_1 عضو x_1، از A_2 عضو x_2 و به همین ترتیب از مجموعه‌های بعدی به ترتیب و تک تک عضو انتخاب کنیم آیا خواهیم توانست نهایتاً مجموعهٔ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ را تشکیل دهیم یا خیر؟

گفتم: به نظر نمی‌رسد که بتوانیم به چنین هدفی نائل شویم. منظور من این است که به ازای هر n، البته می‌توانیم x_n را داشته باشیم ولی همهٔ x_n ها را با هم خیر. نمی‌دانم منظورتان را از تشکیل درست فهمیده‌ام؟

گفت: بله، کم و بیش. منظورم از تشکیل مجموعه در واقع یافتن خاصیتی است چون $P(x)$ به نحوی که $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\, x \in \cup_{n=1}^{\infty} A_n \mid P(x)\}$. بدین ترتیب معتقدید که تشکیل دنباله‌ها به چیزی بیش از این نیاز دارد؟

گفتم: کاملاً. در آنجا شما یک تابع دارید: مثلاً $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ و تابع (هر تابعی) یکبار برای همیشه بر روی همه‌ی اعضای دامنه‌اش تعریف می‌شود. نه این که f نخست ۱ را به $f(1) = x_1$ می‌برد و بعد ۲ را به $f(2) = x_2$ و الی آخر. خیر، از همان آغاز شما مقدار f را به ازای همهٔ اعداد طبیعی می‌دانید.

گفت: بنابراین برای انتخاب یک عضو از بینهایت مجموعه نیاز به یک تابع داریم. *انتخاب یعنی وجود یک تابع*. تابعی که امکان انتخاب هم‌زمان یک عضو از هریک از مجموعه‌ها را فراهم آورد. راستی عجیب نیست که در ریاضیات هم، زمان ولو به این شکل وارد می‌شود؟ اگر $\mathfrak{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای نامتناهی از مجموعه‌های غیر تهی باشد برای این که از هریک از A_iها عضوی انتخاب کنیم نیاز به یک تابع داریم. تابعی با دامنهٔ I و برد $\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup \mathfrak{A}$. تابعی که

برای تکمیل انتظاراتمان از آن باید داشته باشیم $\forall i \in I,\ f(i) \in A_i$. می‌دانیم که چنین تابعی را تابع انتخاب می‌نامند. چقدر از این دیدگاه همه چیز طبیعی به نظر می‌رسد. همه چیز سر جای خودش است.

گفتم: آری ولی از آنسو هم قضیهٔ باناخ ــ تارسکی را داریم که از یک کره به کمک اصل انتخاب دو کرهٔ همنهشت با آن به‌دست می‌آورید. نتیجه‌ای که با شهود یا به عبارتی بهتر با عقل سلیم همخوانی ندارد. از سوی دیگر اگر آن را کنار گذاریم حلقه‌های واحدداری یافت خواهند شد که ایده‌آل ماکسیمال ندارند، فضاهای برداری بدون پایه خواهیم داشت، مجموعه‌های نامتناهی که فاقد زیرمجموعه‌های شمارا هستند (که این یکی هم با عقل سلیم همخوانی ندارد) و حاصل ضربی از فضاهای فشرده که فشرده نیستند و هزار و یک چیز بزرگ و کوچک. به قول خودتان پذیرفتنش مصیبتی است و نپذیرفتنش مشکل. در مورد وارد شدن مفهوم زمان هم باید بگویم که امری قابل صرف نظر کردن است. آنچه باید گفت وجود یک تابع انتخاب است. عبارت «هم زمان» به خاطر دخالت زبان بشری مطرح می‌شود.

نمی‌دانم سر بزرگش را به نشانهٔ تأیید تکان داد یا حیرت. چند لحظه که به نظر چند ساعت آمد سکوت کرد. و ای کاش سکوت نمی‌کرد چون دوباره به من فرصتی داد تا در مغزم شروع به راه رفتن کنم. این واژه‌ای است که برای اندیشیدن بی نتیجه انتخاب کرده‌ام. شاید بهتر باشد تا از او دربارهٔ فلسفهٔ افلاطون بپرسم، مثلاً نظرش را دربارهٔ مُثُل افلاطونی جویا شوم یا موضوع بحث را عوض کنم و راجع به فضیلت، دینداری، یا زیبایی بپرسم. کم‌کم داشتم به خود شجاعت می‌دادم که موضوع بحث را تغییر دهم که دیدم با دقت در حال نگریستن به من است.

گفت: می‌دانید، داشتم فکر می‌کردم که نیاز به اصل انتخاب از همان اول احساس می‌شود وگرنه چطور برای تابع پوشای $f : A \longrightarrow B$، وجود وارون راست را ثابت می‌کردیم: یعنی تابعی مانند $g : B \longrightarrow A$ که $f \circ g = 1_B$. برای همین نیز گاه از برتراند راسل تعجب می‌کنم که چرا به این اصل تا این حد بدبین بود. شاید حق با هاردی بود که می‌گفت اگر این اصل را کنار بگذاریم باید با بخش قابل توجهی از ریاضیات وداع کنیم. با این همه، انصافاً صورتبندی راسل از این اصل، یعنی وجود مجموعه‌ای که از هریک از اعضای $\mathfrak{A}$ تنها یک عضو داشته باشد، صورتبندی روشنی است. صورتبندی راسل به وضوح نشان می‌دهد که اصل، یک حکم وجودی است. و همانطور که منطق‌دانان می‌گویند تصدیق احکام وجودی، یعنی بحث از بود و نبود، کار منطق نیست [۱۲]. به همین دلیل هم راسل و وایتهد مجبور شدند نظریهٔ مجموعه‌ها را به نظام صوری خود بیفزایند تا بتوانند ریاضیات را از آن استخراج کنند.

گفتم: به نظر من راسل به هر چه که دست می‌زد آن را از ابهام بدر می‌آورد. مثلاً آن عبارت معروفش را دربارهٔ اصل انتخاب بیاد دارید؟ «برای انتخاب یک جوراب از بینهایت جفت جوراب به اصل انتخاب نیاز است اما برای انتخاب یک چکمه از بینهایت جفت چکمه به اصل انتخاب نیازی نیست» [۴]، زیرا می‌توانید از هر جفت چکمه، لنگهٔ چپ را انتخاب کنید. به هر حال فرقی بین

لنگه‌های یک جفت چکمه وجود دارد. اما در مورد جوراب‌ها چنین فرقی وجود ندارد. جوراب‌ها را می‌توان لنگه به لنگه پوشید اما چکمه‌ها را نه. به نظر من همین کلید درک این نکته است که چه وقت از اصل انتخاب استفاده می‌کنیم و چه وقت نمی‌کنیم.

گفت: درست است. در غیاب یک قانونمندی ذاتی که برای انتخاب اعضا بدان تکیه کنیم به اصل انتخاب نیاز داریم اما در حضور چنین قانونمندی به اصل انتخاب نیازی نیست. در مثال راسل، می‌توانید جفت‌های چپ یا راست را انتخاب کنید زیرا چپ و راست بودن بر کفش‌ها حاکم است اما بر جوراب‌ها حاکم نیست. اگر $\mathfrak{A}$ شامل زیرمجموعه‌های ناتهی $\mathbb{N}$ باشد، برای انتخاب یک عضو از هر یک از اعضای $\mathfrak{A}$ بازهم به اصل انتخاب نیازی نیست زیرا همهٔ آن مجموعه‌ها بنا به خاصیت خوشترتیبی اعداد طبیعی عضو ابتدا دارند و می‌توانیم به راحتی از هر یک از آنها عضو ابتدایشان را انتخاب کنیم. این کاری است که در مورد زیر مجموعه‌های ناتهی $\mathbb{R}$ نمی‌توان انجام داد. روشن نیست که چطور باید از هر یک از آنها عضوی انتخاب کرد. یا دیگر روشن نیست که به عبارتی چطور باید تابعی مناسب برای این منظور یافت، هیچ کس تاکنون تابعی مناسب برای این منظور نیافته است و استدلال‌های متقاعد کننده‌ای در نظریهٔ مدل‌ها وجود دارند که هیچکس از این به بعد هم نخواهد توانست چنین تابعی بیابد (البته برای اثبات این موضوع باید تعریف دقیقی از «یافتن» ارائه کنم. بگذریم!). راستی ما مدتی است که از اصل انتخاب صحبت می‌کنیم بی آنکه آن را رسماً تعریف کرده باشیم، هر چند بارها به آن اشاره کرده‌ایم: *فرض کنید $\mathfrak{A}$ رده‌ای از مجموعه‌های ناتهی باشد. آنگاه می‌توانیم عضوی از هر یک از مجموعه‌ها انتخاب کنیم. به عبارتی دیگر، تابعی چون $f : \mathfrak{A} \longrightarrow \bigcup \mathfrak{A}$ وجود دارد با این ویژگی که برای هر S در این رده، $f(S)$ عضوی از S می‌باشد.* آیا با این تعریف به عنوان مبنایی برای ادامهٔ بحث موافقید؟

گفتم: اصل انتخاب به شکل‌های مختلفی بیان شده است که البته همگی منطقاً با یکدیگر معادلند. بله، چرا که نه، من نیز این صورتبندی را برای بحث کاملاً مناسب می‌دانم. اما برگردیم به بحث، اگر به جای همهٔ زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$، $\mathfrak{A}$ را مجموعهٔ همهٔ بازه‌های با طول مثبت و متناهی در نظر بگیریم آنگاه برای هر $S \in \mathfrak{A}$ می‌توان $f(S)$ را نقطهٔ میانی بازهٔ S تعریف کرد. لذا با این که در اینجا نیز با زیر مجموعه‌های $\mathbb{R}$ (هر چند زیر مجموعه‌های ویژه‌ای از آن) سر و کار داریم به اصل انتخاب نیازی نیست. به راحتی می‌توانیم تابع انتخاب را تعریف کنیم.

گفت: برای همین نیز وقتی با خانواده‌های نامتناهی از گروه‌ها یا حلقه‌ها یا مدول‌ها سروکار داریم برای انتخاب عضوی از هر یک از آنها به این اصل نیازی نیست. کافی است عضو خنثی را از هر یک از آنها انتخاب کنیم. درست می‌گویم؟

گفتم: بله، لازم نیست برای غیر تهی بودن حاصل‌ضرب نامتناهی گروهها، حلقه‌ها و مدولها به اصل انتخاب متوسل شویم. در مورد حلقه‌ها، اگر واحددار باشند، به غیر از عضو خنثای جمعی، می‌توان عضو خنثای ضربی آنها را نیز انتخاب کرد. اما برای اطمینان از ناتهی بودن حاصلضرب بینهایت نیمگروه به اصل انتخاب نیاز داریم.

گفت: با این حال، گاه فکر جنون‌آمیزی به ذهنم خطور می‌کند. چطور عضو خنثی را در یک گروه از بقیهٔ اعضا تمیز دهیم؟ با کدام محک می‌توانیم عضو خنثی را بیابیم؟ تنها می‌دانیم عضوی در G وجود دارد که از ترکیبش با هر عضو دیگر چیزی بجز همان عضو بدست نمی‌آید. آیا این کافی است تا در میان اعضای گروه به راحتی عضو خنثی را بیابیم؟ فکر نمی‌کنم که چنین بحثی به ریاضیات مربوط باشد، شاید به روانشناسی یا فلسفه مربوط باشد، ولی حداقل ابهامی است که برای من وجود دارد.

گفتم: بله، اما در مورد عضو خنثی نشان می‌دهیم که عضو خنثی در گروه منحصر بفرد است و همین اجازه می‌دهد به آسانی به آن ارجاع دهیم.

گفت: اما وارون هر عضو در گروه نیز منحصر بفرد است، چرا به آن ارجاع نمی‌دهید؟ اگر تنها منحصر بفرد بودن کافی است، باید بتوانید به وارون یک عضو هم به همان آسانی ارجاع دهید چرا که آن نیز منحصربه‌فرد است.

گفتم: در یک گروه برای هر عضو تنها یک وارون وجود دارد، اما عضو خنثی در سراسر گروه یکی است. گویی در گله‌ای اسب تنها یک اسب سفید باشد و بقیهٔ گله قهوه‌ای باشند و سیاه. آیا آن اسب سفید در تمام گله منحصر به فرد نیست؟ ممکن است هر اسب قهوه‌ای جفتی سیاه رنگ داشته باشد و آن را به راحتی در گله تشخیص دهد اما اگر شما بخواهید به اسبی سیاه در گله اشاره کنید خواهند پرسید کدام اسب سیاه؟ اسب سیاه برای جفت قهوه‌ای رنگش منحصر به‌فرد است نه برای ما. ولی اسب سفید نزد ما نیز مشخص است. نظر شما چیست؟

گفت: چرا، چرا، درست می‌گویید. حرفم را پس می‌گیرم. اما این ملاحظات که فرمودید در ریاضیات هم لحاظ شده است؟ به نظر می‌رسید داشتید کمی فلسفه ورزی می‌کردید. همینطور به نظر می‌رسید که یافتن یک عضو در یک مجموعه (یادمان باشد که مفهوم مجموعه تعریف نشده است) از شخصی به شخص دیگر متفاوت است. اگر به جای شما (این را که می‌گفت لبخند می‌زد) یکی از اسبان قهوه‌ای به مجموعهٔ اسبان بنگرد بی شک جفت خود را بر خواهد گزید نه اسب سفید رنگ را. می‌دانم که اینگونه تأملات در ریاضیات محملی ندارند اما وقتی بخواهیم مفهوم انتخاب را نیک دریابیم به ذهن می‌رسند. دست خود آدم نیست. اندیشه‌ها می‌آیند و به اشتباه در ذهن من مأوا می‌گزینند، برای تشخیص ایرادشان تأکید مطلقی دارند بر بیرون آمدن. نمی‌دانم از کجا می‌آیند، یا این که ارزشی دارند یا نه، اما هر اندازه که ابلهانه یا مخاطره آمیز باشد، فکر نمی‌کنم حق داشته باشم از این عمل جلوگیری کنم [۲]. برای همین نیاز شدیدی به گفتگو پیدا می‌کنم. گاه گفتگو به همان اندازه برای من حیاتی است که تنفس برای دیگران.

راست می‌گفت، دو موضوع بحث برانگیز دربارهٔ اصل انتخاب، «انتخاب» و «وجود» است. می‌دانستم که طبق نظر ساختگرایان «وجود داشتن» به معنی ساختن است، لذا اصل انتخاب نادرست است چرا که ما نمی‌توانیم تابع انتخابی برای زیر مجموعه‌های غیر تهی $\mathbb{R}$ بسازیم. بعضی دیگر از ساختگرایان نیز وجود داشتن را به معنی «یافتن» می‌دانند و در این حالت نیز چون نمی‌توانیم تابع

انتخابی بیابیم اصل نادرست است [نک توضیح].

با این وجود، اغلب ریاضیدانان «وجود» را به معنی ضعیفتری در نظر می‌گیرند و اصل را درست می‌دانند: کافی است تعریف کردن $f(S)$ را به مثابهٔ «انتخاب کردن عضوی از» S بدانیم.

وقتی اصل را می‌پذیریم پیشاپیش با این قرارداد موافقت کرده‌ایم که به خودمان اجازه دهیم که از تابع انتخاب f در اثبات‌هایمان استفاده کنیم چنانکه گویی به یک معنی «وجود دارد»، حتی اگر نتوانیم نمونه یا الگوریتم دقیقی برایش ارایه دهیم. در این اندیشه بودم که صدای آهنگین و زیبای او برخاست. صدایش چون صوت داوود بود.

گفت: «وجود» f یا هر شیء ریاضی دیگر، حتی «۳»، کاملاً صوری است. به نظر می‌رسد مانند میز و صندلی اتاق شما صلب و محکم نیست. نمی‌توانی آن را لمس کنی، بو کنی، وزن کنی، بچشی یا گوش کنی یا ببینی. اما افلاطون وجود آنها را مستدام و بی‌تغییر و مستقل از ما آدمیان می‌دانست. به هر حال صندلی اتاق شما در اثر باد و باران و گذشت روزگاران به ذرات چوب تبدیل خواهد شد اما اشیاء ریاضی به نظر او تغییرناپذیر و جاودان هستند. عجیب آن است که با این که هیچ ارتباط حسی با اشیاء ریاضی نداریم ولی آنها را دقیق‌تر از میز تعریف می‌کنیم [۱۰]. راستی تا به حال تلاش کرده‌اید از میز کار خود تعریفی ارائه دهید؟

فکر کردم می‌خواهد که پاسخی دهم: راستش خیر.

گفت: اشیاء ریاضی، به زعم شهودگرایان، تنها در دنیای ذهنی ریاضیات وجود دارند. دنیاهای ریاضی بسیاری قابل تصورند. وقتی اصل را می‌پذیریم یا انکار می‌کنیم در حقیقت داریم مشخص می‌کنیم که قصد داریم در کدام دنیای ریاضی کار کنیم. پذیرفتن یا انکار این اصل، همان گونه که مدل‌های گودل و کوهن نشان می‌دهند هیچکدام به تناقضی منجر نمی‌شود.

گفتم: بعضی ریاضیدانان از خود پرسیده‌اند که آیا باید از همهٔ قدرت این اصل استفاده کرد؟ آیا اصل انتخاب در حالت شمارا (یعنی انتخاب از رده‌ای شمارا از مجموعه‌ها) برای بیشتر مقاصد ما کافی نیست؟

گفت: به نظر نمی‌رسد که در ریاضیات کاربردی همهٔ قدرت اصل انتخاب به کار آید. ممکن است همین اصل انتخاب شمارا کفایت کند. زیرا کاربردها بر اندازه‌گیری مبتنی هستند و بشر تنها می‌تواند تعداد متناهی اندازه را محاسبه کند. ما برون‌یابی می‌کنیم یا حدود را محاسبه می‌کنیم. اما حتی آن حدود نیز اغلب دنباله‌وار هستند. ما حتی در عالم نظر هم بیش از تعداد شمارایی اندازه بکار نمی‌بریم. بگذریم که حتی تعریف پیوستگی نیز با دنباله‌ها ممکن است. بعد با سر به کتاب «اصول آنالیز ریاضیِ» رودین اشاره کرد و ادامه داد: حتی در اینجا هم بسیاری از قضایا تنها از اصل انتخاب شمارا استفاده می‌کنند، هرچند این نویسنده چندان در قید تصریح موارد استعمال این اصل نیست. به عنوان مثال در اثبات شمارا بودن نقاط ناپیوستگی یک تابع یکنوا از اصل انتخاب در حالت شمارا بهره می‌گیرد اگرچه به هیچوجه به آن اشاره‌ای نمی‌کند. بیشتر فضاها جدایی‌پذیر هستند. کارهایی که می‌کنیم اغلب در زیر فضاهای جدایی‌پذیر اتفاق می‌افتند. البته گاه یافتن آن

زیر فضاها کمی زحمت دارد. لذا به یک معنی فضاهای جدایی‌ناپذیر تنها در خیال ریاضیدانان وجود دارند. اگر خودمان را به فضاهای جدایی‌پذیر محدود کنیم بیشتر آنالیز معمولی را تنها به کمک اصل انتخاب شمارا می‌توان بازتولید کرد. هر چند که در آن صورت توصیف آنچه که بدست آورده‌ایم پیچیده‌تر خواهد شد، بنابراین چنین کاری تنها توسط ریاضیدانانی که نگرش فلسفی بسیار بدبینانه‌ای نسبت به اصل دارند انجام می‌شود [۴].

گفتم: تعداد کمی از ریاضیدانان محض و تعداد به نسبت بیشتری از ریاضیدانان کاربردی با این اصل مشکل دارند. با این که این اصل بخش‌هایی از ریاضیات را ساده‌تر می‌کند نتایجی هم به دست می‌دهد که با تجارب روزمرهٔ ما همخوانی ندارد یا حتی با آن متناقض است. مانند همان پارادوکس باناخ ــ تارسکی که در آغاز به آن اشاره کردم. باناخ و تارسکی اصل را به کار گرفتند تا ثابت کنند که ممکن است کرهٔ واحد ۳ ـ بعدی $B = \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^{۳} \mid x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = ۱\}$ را گرفت و به تعداد متناهی پاره افراز کرد و این پاره‌ها را حرکت داد (تنها با دوران و انتقال) و از آنها دو نسخه از B ساخت.

گفت: در نگاه اول ممکن است این به اصطلاح پارادوکس باناخ ــ تارسکی با شهود فیزیکی ما یا دقیقتر گفته باشیم، با قانون بقای جرم در فیزیک نیوتنی، هماهنگی نداشته باشد. اما این نتیجه فقط کمی پیچیده است نه متناقض. اگر چگالی یکنواخت را بپذیریم، تنها یک مجموعه با یک حجم مشخص می‌تواند جرم معینی داشته باشد. مفهوم حجم برای زیرمجموعه‌های بسیاری از $\mathbb{R}^{۳}$ قابل تعریف است و افراد مبتدی نظیر من، ممکن است انتظار داشته باشند که این مفهوم برای همهٔ زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}^{۳}$ قابل تعریف باشد، اما این‌طور نیست. کمی دقیق‌تر گفته باشم، اندازهٔ لبگ روی بعضی از زیر مجموعه‌های $\mathbb{R}^{۳}$ قابل تعریف است اما نمی‌توان آن را به همهٔ زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}^{۳}$ چنان تعمیم داد که بتواند دو خاصیت عمده از خواص اندازه را همچنان حفظ کند: اندازهٔ اجتماع دو مجموعهٔ مجزا از هم برابر مجموع اندازه‌های آنها است و اندازهٔ تحت انتقال و دوران دست نخورده باقی می‌ماند. یکی یا چندتایی از مجموعه‌ها در تجزیهٔ باناخ ــ تارسکی باید به معنی لبگ، اندازه‌ناپذیر باشند؛ لذا یک نتیجه از قضیهٔ باناخ ــ تارسکی این واقعیت است که مجموعه‌هایی وجود دارند که به معنی لبگ، اندازه‌ناپذیر هستند. هر چند راه‌های ساده‌تری برای ساختن مجموعه‌های اندازه‌ناپذیر وجود دارد. ولی هر اثباتی برای این منظور از اصل انتخاب استفاده می‌کند.

بعد همینطور که لیوان چای را از روی میز برمی‌داشت، گفت: می‌توانید در بدنهٔ این لیوان بینهایت سوراخ تصور کنید اما امکان تجسم یک لیوان اندازه‌ناپذیر بسیار مشکل می‌نماید. هر چند فکر کردن به آن خالی از لطف هم نیست. شاید اگر چنین لیوانی را یکبار از چای پر کنیم دیگر تا آخر عمر به دم کردن مجدد چای نیازی نداشته باشیم و این برای کسی چون من می‌توانست خبر مسرت‌بخشی باشد.

سخنانش مرا به یاد مقاله‌ای انداخت که مدتها پیش خوانده بودم [۱۳]. در آن مقاله گفته شده بود: «*شناخته‌شده‌ترین مثالِ اندازه، حجم یک جسم صلب A، در فضای اقلیدسی n بعدی معمولی*

است» و کمی بعد اضافه شده بود که: « *هنوز خیلی‌ها عقیده دارند که حجم تنها اندازهٔ ناوردا در فضای n بعدی اقلیدسی است»*. نظرش را جویا شدم. مقاله را خوانده بود.

گفت: نویسندهٔ مقاله سعی می‌کند به غیر از حجم، اندازه‌های دیگری در فضاهای n بعدی اقلیدسی بیابد که تحت گروه‌های تبدیلات هندسی (به ویژه دوران و انتقال) ناوردا بمانند و در قسمتی از سخنرانی می‌گوید: *اما در واقع اندازه‌های ناوردای دیگری وجود دارند که روی تمام زیرمجموعه‌های* **معقول** *فضای اقلیدسی تعریف شده‌اند، و دارای معنای هندسی قابل توجهی هستند.* و در بقیهٔ سخنرانی سعی در تشریح چنین اندازه‌هایی دارد. منتها منظور خود را از *معقول و معنای هندسی* هیچگاه مشخص نمی‌کند. می‌بینید اگر این چند سطر را نمی‌نوشت مقاله ناقص می‌بود و حال که نوشته، مقاله مبهم شده است. معقول از نظر که؟ از نظر براور یا هیلبرت؟ و معنای هندسی یعنی چه؟ امروزه شما ریاضیدانان به طیف وسیعی از مطالب صفت «هندسی» می‌دهید که هیچ شباهتی با یکدیگر ندارند.

کمی ناراحت بودم. برای چه از ابتدا خودش را درست معرفی نکرده است؟ گفتم باید مدرسه‌ی ابتدایی جالبی باشد که شما آموزگارش هستید. با حیرت به من نگریست و بعد از ته دل خندید: من کی گفتم که آموزگار مدرسهٔ ابتدایی هستم؟ من گفتم که آموزگار دبستانم، آیا اینطور نیست؟ و دبستان که لزوماً مدرسهٔ ابتدایی نیست و هر آموزگاری که معلم کودکان نیست. هر چند که اگر معلم اطفالی را هم دیدید که به این امور علاقه دارد نباید تعجب کنید. بیاد بیاورید که کارل پوپر هم مدتی معلم کودکان بوده است یا حتی ویتگنشتاین مدتی معلم روستای تراتنباخ در اتریش بود، هر چند این دومی معلم بسیار بدی بود. خجالت کشیدم، چرا خودم این را حدس نزده بودم. معلوم بود متوجه شده است چون با خنده گفت تقصیر شما نیست مشکل از سرشت زبانهای طبیعی است. اینطور است دیگر و کاری هم نمی‌شود کرد. حال که کار به اینجا کشیده بود میخواستم کنجکاوی شعله‌ور شده‌ام را فرو نشانم و آنچه را که از آغاز رنجم داده بود بیرون بریزم. پرسیدم: پس آموزگار کدام دبستان هستید؟

گفت: آنجا که من آموزگارم تنها یک دبستان وجود دارد (و بعد با مهربانی مرا نگریست). ببینید دوست عزیز، برای شما چه فرق می‌کند که من کیم. مهم اینست که هردوی ما به موضوعی علاقه داریم و برای فهمیدن آن گفتگو می‌کنیم. چه تضمین بیشتری برای ادامهٔ بحث لازم است.

گفتم: آخر شما به سقراط شبیه هستید. آیا سقراط نیستید؟

از جایش بلند شد و از ته دل خندید: فرمودید سقراط؟ کمی به جلو خم شد و ناگهان دستم را در میان پنجه‌های نیرومندش اسیر کرد و فشرد. و ضمن اینکار از من پرسید فکر می‌کنید سقراط تاریخی که حتی بعضی از مورخان فلسفه او را ساخته و پرداختهٔ ذهن افلاطون می‌دانند می‌توانست چنین دستان شما را بفشارد. آیا من زنده نیستم؟ سرشار از کنجکاوی و پرسش؟ آیا یک مرده می‌توانست چنین باشد؟ مگر فراموش کرده‌اید که آتنیان سقراط را با جامی از شوکران به کام مرگ فرستادند. کمی صبر کرد و سپس گفت: آیا شکّتان برطرف شد؟ این را گفت و دستم را که سرخ و داغ شده بود

رها کرد.

گفتم: لااقل بگویید در این دبستان چه چیزهایی به شاگردانتان می‌آموزید؟ بسیار مایلم که این را بدانم.

گفت: خوب بعضی چیزهای مهم را. مانند افزایش نیروی دقت و توجه [۱۱]. چون اگر بتوانند با همهٔ وجود بر موضوعی متمرکز شوند آن را هر چقدر هم دشوار باشد درخواهند یافت. دیرزمانی است که پی برده‌ام حقیقت خاصّ نوابغ نیست. دانستن حق همهٔ ماست و همیشه این جملهٔ معروف هیلبرت «ما باید بدانیم، ما خواهیم دانست» را همینطور تفسیر می‌کنم. در روزگار جوانی گمان می‌کردم که بارگاه حقیقت مخصوص نوابغ است و دیگران را بدان راهی نیست و از این فکر زجر می‌کشیدم. ترجیح می‌دادم بمیرم تا آن که به قلمرو حقیقت راه نیابم. آنچه که پس از آن آموختم مرا قانع ساخت که هر انسانی حتی اگر به ظاهر از توانایی‌ها و استعدادهای ویژه محروم است می‌تواند به قلمرو حقیقت که خاص نوابغ است راه یابد و در آن مقیم شود. به شرط آن که با همهٔ وجود و از اعماق قلب این را بخواهد و همهٔ توجهش را بر آن متمرکز کند. چنین کسی نیز در حقیقت برای خودش نابغه‌ای خواهد شد، هر چند ممکن است دیگران نتوانند نبوغ او را به سبب فقدان استعدادی خاص تشخیص دهند [۲]. و حال که پرسیدید بگذارید بگویم که من به هیچوجه با این سخنان کلیشه‌ای که «ریاضیات بازی جوانان است» یا «خاصّ تیزهوشان است» کنار نیامده‌ام. حقیقت ملکِ شخصی هیچ کس نیست.

بعد گویی از این که ناخواسته به این عرصه کشانده بودمش پریشان شده باشد دستش را در فضا حرکت داد و سکوت کرد. کمی بعد سرش را برافراشت و توانستم همان لبخند مهرآمیز را در چهره‌اش ببینم، دوباره آن آرامش ملکوتی در چشمانش خانه کرده بود.

گفت: برگردیم به سروقت کار اصلی خود. می‌دانید علیرغم نظر بیشتر افراد، فکر می‌کنم که حیرت‌انگیزی این اصل در موضوعات پیچیده‌ای چون قضیهٔ باناخ ــ تارسکی یا مجموعه‌های اندازه‌ناپذیر نیست بلکه در جاهایی است که به هیچوجه توقع آن را ندارید. مثل وقتی که سروکلّهٔ اصل هنگام کار با اعداد صحیح پیدا می‌شود. یک پالایه[1] را در نظر بگیرید. از تعریف آن می‌توان نتیجه گرفت که یک مجموعه و متمم آن نمی‌توانند در پالایه قرار گیرند. لذا نمی‌توان پالایه‌ای روی مجموعهٔ اعداد صحیح چنان تعریف کرد که اعضایش همهٔ زیر مجموعه‌های نامتناهی باشند. زیرا مجموعه‌ی اعداد زوج و فرد هردو نامتناهی هستند و اشتراکی ندارند. در عوض می‌توان پالایه‌ای روی $\mathbb{Z}$ در نظر گرفت که اعضایش همهٔ مجموعه‌هایی باشند که متمم آنها متناهی است. اگر چه که چنین پالایه‌ای ابرپالایه نیست. گفتم: زیرا ابرپالایهٔ F یک پالایه است با این خاصیت اضافی که برای هر زیر مجموعهٔ S از $\mathbb{Z}$ باید یا S یا متمم آن در F قرار داشته باشد. برای این که یک ابرپالایه بسازیم کافی است عددی صحیح چون $x_\circ$ برداریم و همهٔ مجموعه‌هایی را که شامل $x_\circ$ باشند

1) filter

در نظر بگیریم. چنین خانواده‌ای از مجموعه‌ها تشکیل یک ابرپالایه می‌دهد. به چنین ابرپالایه‌ای، اصلی، گوییم. گفت: دربارهٔ ابرپالایهٔ غیراصلی چه می‌گویید؟ منظورم ابرپالایه‌ای است که شامل هیچ مجموعهٔ متناهی نباشد. عنایت دارید که ابرپالایهٔ شما حتی شامل مجموعهٔ تک عضوی $\{x_\circ\}$ نیز می‌شد.

گفتم: بله، کاملا متوجهم. برای به‌دست آوردن چنین ابرپالایه‌ای باید از اصل انتخاب استفاده کنید. زیرا بنا به لم تسورن ـ کوراتوفسکی هر پالایه‌ای در یک ابرپالایه قرار می‌گیرد. کافی است با پالایهٔ مجموعه‌های متمم متناهی شروع کنیم و به کمک لم مذکور آن را در یک ابر پالایه قرار دهیم. این ابرپالایه به وضوح ابرپالایه‌ای غیراصلی خواهد بود.

گفت: مسأله اینجاست که نمی‌توانیم مثال مشخصی از یک ابرپالایهٔ غیر اصلی ارائه دهیم یا پیدا کنیم. این نتیجه، ساده‌تر از پارادوکس باناخ ـ تارسکی به نظر می‌رسد اما به واقع ما را از دست نظریهٔ اندازه نجات نمی‌دهد. یک ابرپالایهٔ غیراصلی همان چیزی است که ما آن را اندازهٔ احتمال دو ارزشی می‌نامیم، اندازه‌ای که متناهی ـ جمع‌پذیر است اما شمارا ـ جمع‌پذیر نیست [۴].

گفتم: بحث ما بدون اشاره‌ای به معادل‌های اصل انتخاب ناقص می‌ماند. ریاضیدان خوبی را می‌شناسم که معتقد است هر جا که اصل انتخاب به کار رفته است نتیجهٔ حاصل با اصل انتخاب معادل است.

گفت: بر این اساس محک بِر[۱] در مورد مدول‌های انژکتیو، قضیهٔ هان ــ باناخ و قضایای بسیاری که معادل بودنشان با اصل انتخاب هنوز به اثبات نرسیده است با اصل انتخاب معادلند؟ ادعای متهورانه‌ای است اما بی شک نادرست است. به عنوان مثال ثابت شده که **قضیهٔ رسته‌ای بئر**[۲] ضعیفتر از اصل انتخاب است، هر چند برای اثبات آن به اصل انتخاب نیاز داریم [۳]. زمانی ریاضیدانی گفته بود: «اصل انتخاب به وضوح درست است، اصل خوشترتیبی به وضوح نادرست است و که می‌تواند راجع به لم تسورن نظری دهد؟»

گفتم: شوخی بامزه‌ای است. همهٔ این‌ها با هم معادلند.

گفت: آری، منطقاً چنین است ولی شهود آدمی همیشه از آنچه که به لحاظ ریاضی درست است پیروی نمی‌کند. اصل انتخاب با شهود بیشتر ریاضیدانان موافقت دارد، اصل خوشترتیبی مخالف شهود بیشتر ریاضیدانان است و لم تسورن آنچنان پیچیده است که بیشتر ریاضیدانان قادر نیستند اندیشه‌ای شهودی دربارهٔ آن داشته باشند. هر چند در دبستان ما چنین احساس شهودیی وجود دارد. بعد قدری با ریش انبوهش بازی کرد و به اندیشه فرو رفت. مثل این که چیزی به یادش آمده بود.

---

۱) R. Baire ریاضیدان فرانسوی که قضایای رسته‌ایش در توپولوژی نام او را بلند آوازه کرد.

۲) R. Baer ریاضیدان آلمانی که معرّف مدول‌های انژکتیو است و محک انژکتیو بودن را گاه به افتخار او محک بِر می‌نامند.

گفت: ما دربارهٔ اصل انتخاب سخن گفتیم اما به پهلوان بزرگ این میدان هیچ اشاره‌ای نکردیم. منظورم تسرملو است. همان طور که می‌دانید پس از آن که وی در ۱۹۰۴ نشان داد که «هر مجموعه‌ای را می‌توان خوشترتیب کرد» مخالفت‌های بسیاری به پا خاست. مرکز مخالفت‌ها در فرانسه بود؛ لبگ، بورل و پوانکاره احساس خوشایندی به اصل نداشتند ولی آدامار از اصل حمایت می‌کرد [۱]، [۹].

گفتم: و در انگلستان هم راسل در جبههٔ مخالفان بود و هاردی با این اصل موافق بود. طبیعی به نظر می‌رسد که این اصل مولود ذهن ایده‌آلیست آلمانی باشد تا ذهن تجربه‌گرای انگلیسی [۹].

گفت: چهار سال بعد در ۱۹۰۸، تسرملو برای آن که به غائله خاتمه دهد مقالهٔ دیگری با عنوان «امکان یک خوشترتیبی» منتشر کرد [۱] و در آن به منتقدان پاسخ داد. پس از این مقاله سر و صداها تا حدودی خوابید. تسرملو ضمن پاسخ به منتقدان هفت مطلب مهم را برشمرد که بدون اصل انتخاب فراهم آوردن پاسخ برای آنان میسر نبود. البته به بعضی از آنها تا به حال اشاره کرده‌ایم اما چندتایی بررسی نشدند. اجازه می‌دهید دربارهٔ آنها نیز گفتگو کنیم.

گفتم: با کمال میل. راستش را بخواهید آن مقاله را نخوانده‌ام (به گمانم هنگام اقرار به این واقعیت گونه‌هایم سرخ شده بود)، اما یادآوری آنها از این جهت جالب است که ببینیم شخص تسرملو به چه مسائلی توجه کرده است.

گفت: دوست عزیز می‌دانید چیست، من وسواس عجیبی دارم که مطالب را تا سرچشمه‌هایشان دنبال کنم. با آن که کتاب‌های بسیار زیادی تقریباً هر روزه در زمینهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها انتشار می‌یابند اما همیشه باز می‌گردم و مقالات کانتور و تسرملو و دیگر بازیگران این عرصه را با دقت می‌خوانم و در هر بار خواندن چیزهای تازه‌تری در می‌یابم.

گفتم: خوش به حالتان که می‌توانید چنین کنید. آخر می‌دانید زندگی حرفه‌ای مجال این کار را نمی‌دهد. به عنوان یک ریاضیدان حرفه‌ای مجبورم و سعی می‌کنم که همهٔ مقالات مهم شاخهٔ تخصصی‌ام را بخوانم و این بخش قابل توجهی از وقتم را پر می‌کند. راستی شما برای نوشتن مقاله در فشار نیستید؟ ما مجبوریم مدام تولید کنیم.

گفت: (با خنده) بله من وقت بسیار دارم ([٦]، رسالهٔ تئتوس) و برای نوشتن چیزهای جدید نیز به هیچوجه تحت فشار نیستم. اصولاً چیزی نمی‌نویسم. مثل یک قاطر عقیم و درست مثل همان موجود چهارپا لجباز هستم. بیشتر ترجیح می‌دهم حقایق زیبای اطرافم را دریابم. می‌دانید من تولید مصرف می‌کنم یا اگر بیشتر دوست بدارید باید بگویم مصرف تولید می‌کنم.

گفتم: واقعاً هیچ چیز ننوشته‌اید؟ باید اسمتان را جایی دیده باشم.

گفت: خیر، من نمی‌توانم چیزی بیافرینم، اما چون آموزگارم وظیفه دارم به شاگردانم کمک کنم تا آنها «تولید» کنند. و آنقدر از این کار لذت می‌برم که فکر می‌کنم این لذت با لذت آفرینندگی نزد شما یا هنرمندان برابری کند. دیدن اینکه جوانی که در آغاز سردرگم و گیج می‌نمود چگونه پس از کمی هدایت و پرسش و پاسخ، اندیشه‌هایش پی در پی شروع به زایش می‌کنند مسرت بخش‌ترین

صحنهٔ عالم است. راستی که جهان بسیار حیرت انگیز است اما در این میان انسان شگفت‌انگیزترین چیزی است که دیده‌ام.

دلم میخواست همینطور حرف می‌زد، طنین صدایش به من آرامش می‌داد. گویی در کنار این «غریبهٔ آشنا» از تمامی اضطراب‌های حرفه‌ای و مشکلات زندگی در امانم. گویی در کنار او تهدیدی در میان نبود. همه امانت بود و سلامت. دیگر نگران تصویب نشدن طرح تحقیقاتی‌ام، طولانی شدن داوری آخرین مقاله‌ام، قطع شدن بورس ملی سازمان ملی علوم و نائل نشدن به افتخار سخنران مدعو کنگرهٔ سال آینده نبودم. از این جا چقدر این چیزها کودکانه می‌نمود... دوباره رشتهٔ افکارم گسسته شد.

گفت: دوست عزیز، لطفاً از ابرهای خیال تشریف بیاورید پائین. نمی دانم با این ذهن بازیگوش چگونه ریاضیدان شدید. داشتم از مقالهٔ تسرملو می‌گفتم. نخستین مسأله‌ای که تسرملو مطرح می‌کند اینست که اگر مجموعهٔ M را به مجموعه‌های مجزای A، B، C، ... افراز کنیم عدد اصلی مجموعهٔ این مجموعه‌های مجزا کمتر یا مساوی عدد اصلی M می‌باشد. بار نخست که این مسأله را می خواندم سؤالی نامربوط به ذهنم رسید: آیا می‌توان $\mathbb{R}$ را به شکل اجتماعی از مجموعه‌های شمارای تو در تو نوشت؟ به عبارتی دیگر آیا زنجیری چون C از زیرمجموعه‌های شمارای $\mathbb{R}$ وجود دارد به طوری که $\mathbb{R} = \cup C$ ؟ آیا مسأله را تا به حال دیده‌اید؟

گفتم: خیر. ولی حالا درک می‌کنم که چرا بارها به سروقت مقالات کلاسیک می‌روید.

گفت: و اما دومین مسأله، اگر $A_\alpha \sim B_\alpha$ و A_αها و B_αها دو به دو مجزا باشند، در آن صورت $\cup A_\alpha \sim \cup B_\alpha$، مطلبی که به زعم تسرملو همهٔ حساب عددهای اصلی بر آن مبتنی است.

گفتم: شاید ذکر نکته‌ای در مورد این مسأله لازم باشد. در نگاه اول ردّ پای اصل انتخاب در اینجا دیده نمی‌شود.

گفت: بله همین طور است. در اینجا بین A_α و B_α ممکن است بینهایت تابع دوسویی وجود داشته باشد. برای تعریف تابعی از $\cup A_\alpha$ به روی $\cup B_\alpha$، به ازای هر α، تنها باید یکی از بینهایت توابعی را که متذکر شدم انتخاب کرد.

گفتم: گاه اصل انتخاب را باید چنین دید «انتخاب هم زمان بینهایت تابع از بینهایت مجموعه از توابع». چنین نیست؟

گفت: چقدر خوب گفتید. در بسیاری از حالات مهم چنین است. من از بیان مسألهٔ سوم تسرملو در می‌گذرم چون خود در گفتگوهایمان به آن اشاره کرده‌ایم. اما مسألهٔ چهارم تسرملو را باید جدّی گرفت: مجموعه‌ای را که با هیچ یک از زیر مجموعه‌های سره‌اش در تناظر یک به یک نباشد همواره می‌توان به گونه‌ای مرتب کرد که هر زیر مجموعهٔ آن عضو اول و آخر داشته باشد.

گفتم: جالب است. با زبان امروزی‌تر کتاب‌های مبانی ریاضی، در واقع مسألهٔ چهارم تسرملو می‌گوید که «هر مجموعهٔ متناهی با قطعه‌ای از اعداد طبیعی یعنی $\mathbb{N}_k = \{۱, ۲, ..., k\}$ هم عدد

است». یعنی قضیه‌ای که نظریهٔ مجموعه‌های متناهی بر آن استوار است به اصل انتخاب نیاز دارد!

گفت: دقیقاً و این موضوع را ما از قلم انداخته بودیم اما تسرملو توجه ما را بدان معطوف ساخت. میدانید که در همان سال‌ها، ددکیند صورتبندی دیگری از این مسأله ارائه داد که شهرت بیشتری دارد: هر مجموعهٔ نامتناهی زیر مجموعه‌ای شمارا دارد. پس از آن تسرملو مسألهٔ پنجم را مطرح می‌کند «اجتماع شمارش‌پذیری از مجموعه‌های شمارا، شمارا است»، قضیه‌ای که ستون فقرات مجموعه‌های شمارا است.

گفتم: و دوباره مانند مسألهٔ دوم تسرملو، اصل انتخاب برای انتخاب بینهایت تابع به کار می‌آید.

گفت: آفرین، ظاهراً شما ردّ پای اصل انتخاب را فوراً تشخیص می‌دهید. مسأله‌های ششم و هفتم تسرملو به هم مربوطند. در واقع مسألهٔ ششم می‌گوید که $\mathbb{R}$ به عنوان فضای برداری روی $\mathbb{Q}$ پایه دارد و مسألهٔ هفتم مدعی است که تابع ناپیوسته‌ای وجود دارد که در معادلهٔ تابعی کوشی $f(x+y) = f(x) + f(y)$ صدق می‌کند. می‌دانیم که همل[1] به مسأله‌های ششم و هفتم جواب مثبت داد.

گفتم: مرا به یاد تابعی انداختید که همه جا خاصیت مقدار میانی داشته باشد و هیچ جا پیوسته نباشد. برای نشان دادن وجود چنین تابعی نیز به اصل انتخاب نیاز داشتیم.

گفت: (در حالی که با سر تأیید می‌کرد) اما جالب است که مثال وایرشتراس از تابع همه جا پیوستهٔ هیچ جا مشتق‌پذیر به اصل انتخاب نیاز ندارد. اینطور نیست؟

اثبات وایرشتراس به خاطرم نیامد، او نیز اصرار نکرد. خورشید رفته رفته غروب می‌کرد و تپه‌های مشرف به دانشگاه را نارنجی رنگ می‌ساخت. اشعه‌ای بدرون می‌تابید و به اتاق من حالتی رویایی داده بود. سر بزرگ دوباره برافراشته شد و بر روی پاهای خویش ایستاد. بهار بود و گنجشکان آوازخوانان تا فردا با خورشید خداحافظی می‌کردند. گویی دانشگاه در همهمهٔ آنان فرورفته بود.

گفت: می‌بخشید؛ ممکن است برای من یک تاکسی صدا کنید؟ قدری دیرم شده است.

دلم نمی‌خواست برود. تازه بعد از مدتها از یک بحث جدی لذت برده بودم. دلم می‌خواست بماند و همینطور حرف بزند. دیگر گذشت زمان برایم مهم نبود. با خود می‌اندیشیدم که در کنار او، برای لحظاتی هم که شده می‌توان جاودانگی را تجربه کرد. اما مصمم بود که برود. لیوان خالی چای را که در سراسر بحث در دست داشت روی میز گذاشت. به اکراه تقاضای یک تاکسی کردم و او را تا محوطهٔ دانشکده همراهی نمودم. به انتظار ایستادیم تا تاکسی برسد. جرأت نداشتم که دوباره موضوع سقراط را مطرح کنم. دلم میخواست حرفی زده باشم تنها به آن دلیل که او چیزی بگوید.

گفتم: راستی جالب است که چنین موضوعات و ابهاماتی در ریاضیات متناهی پیش نمی‌آید. ریاضیات متناهی خیلی واضح‌تر است، نه؟

---

1) Hamel

گفت: ظاهرش اینطور است. اما گاه خیلی دشوارتر از ریاضیات نامتناهی است. زمانی از رهگذری شنیدم که می‌گفت: «ریاضیات نامتناهی سرزمینی است که ریاضیدانان متوسط‌تر برای گریز از دشواریهای ریاضیات متناهی آفریده‌اند». نمی‌دانم درست می‌گفت یا نه، اما می‌دانم شمارش گاه بسیار دشوار است.

تاکسی در حال رسیدن بود و می‌دانستم که چند ثانیه‌ای بیشتر به رفتن او باقی نمانده است. پرسیدم آیا ممکن است دوباره ببینمتان؟

گفت: من همیشه دلم برای گفتگوهای صمیمی دو نفره تنگ می‌شود. هیچ چیز بهتر از بحث‌های کریدوری آموزنده نیست. با اینحال اجازه دهید قولی ندهم. اجازه دهید که این خود به خود اتفاق افتد. هروقت که تشنهٔ دانستن باشیم.

یادم آمد که عبارت «بحث کریدوری» را قبلاً از یکی از استادانم شنیده بودم. شنیده بودم که در طبقهٔ فوقانی گروه ریاضی دانشگاه برکلی جایی است که اساتید و دانشجویان می‌نشینند، چای و قهوه می‌نوشند و گپ می‌زنند. آن استاد می‌گفت که «آنجا آموزنده‌ترین قسمت ساختمان ریاضی برکلی است».

سوار تاکسی شده بود. آخرین تلاشم را کردم، گفتم: با این حال شباهت شما به سقراط به معجزه شبیه است، که تاکسی حرکت کرد و کمی فاصله گرفته بود که ناگهان از پنجره سر کشید بیرون و گفت: معجزه‌ها در بهار اتفاق می‌افتند!

توضیح

دربارهٔ ساختگرایی و شهودگرایی: در ساختگرایی برای اثبات وجود یک شیء ریاضی باید آن را ساخت و یا یافت. اگر فرض کنیم که چنین شیء ریاضی وجود ندارد و به تناقضی برسیم و نتیجه بگیریم که وجود شیئی لازم می‌آید از نظر یک ساختگرا کافی نیست. گاهی اوقات ساختگرایی را با شهودگرایی مکتبی مشابه تصور می‌کنند حال آن که چنین نیست. شهودگرایی نوع خاصی از ساختگرایی است. شهودگرایی بنیادهای ریاضی را ساختمان‌های ریاضی ذهنی می‌داند که در ذهن ریاضیدان وجود دارند و از این جهت ریاضیات را نوعی فعالیت ذهنی می‌داند اما همهٔ ساختگرایان لزوماً چنین نمی‌اندیشند و عده‌ای از آنها با واقع‌گرایی در ریاضیات (دیدگاه غالب ریاضیدانان) توافق کامل دارند.

مراجع

[1] Jean van Heijenoort, *FROM FREGE TO GÖDEL, A source Book in Mathematical Logic*, 1879-1931. Harvard University Press (1967).

[2] Simone Weil, *Waiting for God*, translated by Emma Craufurd, Perennial classics Publications (2001).

[3] John. Oxtoby, *Measure and category*, Second Edition, Springer - Verlag, (1980).

[4] Eric Schechter, *A home page for axiom of choice*, Vanderbilt University.

[5] Ludwig Wittgenstein, *Remarks on the foundations of Mathematics*, Editted by G. H. von Wright, R. Rhees, G. E. M. Anscombe, translated by G. E. M. Anscombe, Basil Blackwell, Oxford, (1967).

[۶] افلاطون، مجموعهٔ رسائل افلاطون، ترجمهٔ محمد حسن لطفی، انتشارات خوارزمی (۱۳۷۴).

[۷] تئودور گمپرتس، متفکران یونانی، ترجمهٔ محمد حسن لطفی، انتشارات خوارزمی (۱۳۷۵).

[۸] کورت گودل، تصمیم ناپذیری در نظام پرینکیپیا ماتماتیکا، نشر ریاضی، سال ۲، شمارهٔ ۱، فروردین (۱۳۶۸).

[۹] رابرت بون، اصل موضوع انتخاب، نشر ریاضی، سال ۲، شمارهٔ ۳، (آذر ۱۳۶۸).

[۱۰] آلفرد رنی، گفت و شنودهایی در ریاضیات، ترجمهٔ سعید قهرمانی، انتشارات دانشگاه صنعتی شریف.

[۱۱] سیمون وی، تأملاتی دربارهٔ استفادهٔ درست از تحصیلات در راستای عشق به خدا، ترجمهٔ احسان ممتحن، ماهنامهٔ ناقد، سال اول شمارهٔ سوم، (خرداد ــ مرداد ۱۳۸۳).

[۱۲] حمید وحید، گرایش‌های موجود در فلسفهٔ ریاضیات، نشر ریاضی، سال ۱۰، شمارهٔ ۲، (شهریور ۱۳۷۸).

[۱۳] جیان کارلو روتا، احتمال هندسی، نشر ریاضی، سال ۱۰، شمارهٔ ۲، (شهریور ۱۳۷۸).

احسان ممتحن
گروه ریاضی ــ دانشگاه یاسوج
پست الکترونیک: momtahan_e@hotmail.com

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۶ (بهار ۱۳۸۵) صص. ۵۷ تا ۶۰

تحقیق و نوشتن مقاله

رامین تکلو بیغش

تحقیق در ریاضی به روش مدرن در ایران سابقهٔ خیلی طولانی ندارد، و به این دلیل این امر هنوز تبدیل به یک مؤلفهٔ فرهنگی خودجوش سیستمِ دانشگاهیِ ایران نشده است. در نتیجه برای تضمین بقای فعالیت‌های تحقیقی اساتید ضوابطی از سوی دست‌اندرکاران دانشگاه‌ها طرح‌ریزی شده‌اند که قرار است کارهای تحقیقی اساتید را تشویق و ترغیب نموده، و عدم انجام چنین فعالیت‌هایی را تنبیه. از سوی دیگر با فراگیرشدنِ دوره‌های دکتریِ ریاضی در دانشگاه‌های کشور این سؤال پیش آمده است که چگونه می‌توان تضمین کرد که کیفیت تربیت فارغ‌التحصیلانِ دکتری داخل قابل مقایسه با فارغ‌التحصیلانِ آن دانشگاه‌های خارجی باشد که دهه‌های متمادی به امر تربیتِ دانشجویان دکتری مشغول بوده‌اند. این سؤال نیز به نوبهٔ خود منجر به، به‌وجودآمدنِ بعضی قوانینِ سخت سر سیستمِ دانشگاهی کشور شده است که هدفِ آنها ارتقاء کیفیتِ فارغ التحصیلانِ دوره‌های دکتری است. این مصوبات خیلی بی ربط به قوانینی که هدفشان ترغیبِ تحقیق بینِ اساتید است، نیستند، به این معنی که شرطِ اصلی در هر دو صورت نوشتنِ مقالاتِ تحقیقی و منتشر کردنِ آنها در مجلاتِ علمیِ معتبر است. از آنجا که ضوابطِ اداریِ کیفیت نیازمند به دارا بودنِ شاخص‌های ملموس و قابل اندازه‌گیری هستند، این قوانین نیز چنین شاخص‌هایی را دارند که شامل تعداد مقالات منتشرشده توسطِ یک شخص، و گاهی حتی تعداد صفحاتِ مقالات، می‌باشد. این خود باعثِ به وجودآمدنِ برخی مشکلات شده است که در اینجا به طورِ مختصر به برخی از آنها اشاره می‌کنیم.

تا آنجا که من اطلاع دارم در دورهٔ دکتریِ ریاضی در ایران از دانشجو انتظار می‌رود که ۲ یا ۳ مقالهٔ قبول شده برای چاپ در یک مجلهٔ معتبر داشته باشد، پیش از آن که بتواند مراحلِ پایانیِ فارغ‌التحصیلی را انجام دهد. واقعیتِ امر این است که از یک دانشجوی دکتری نمی‌توان انتظار داشت که در دورهٔ تحصیلش بیش از یک پروژهٔ قابل ملاحظه را به اتمام برساند. به این خاطر برای این که یک دانشجو بتواند به طورِ موفق درسش را تمام کند باید پروژهٔ تزش را در دو بخش منتشر کند و یا پروژه‌های کوچکتری انجام دهد که به چاپِ سریعِ مقاله منجر شوند. در هر حال نتیجه منتشر کردن مقالاتی است که از کیفیتِ مطلوبی برخوردار نیستند. چیزی که اینجا باید مدّ نظر باشد این است که به صرفِ این که یک مقاله در یک مجلهٔ معتبر یا نیم ـ معتبر چاپ می‌شود به این معنی

نیست که کیفیتش بالا است، و در هر حال از دیدگاهِ پیشبردِ علم بهتر است که پروژه‌ها را به طور کامل و در یک محل گردآوری کرد تا انسجامِ کار حفظ شود.
نکتهٔ دیگری که باید در نظر داشت این است که حتی در کشورهای غربی که منتشرکردنِ مقاله شرطِ فارغ‌التحصیلی نیست دورهٔ دکتری عموماً ۵ یا ٦ سال طول می‌کشد و این در حالی است که عموماً دانشجوها دورهٔ دکتری خود را در سن ۲۳—۲۲ سالگی آغاز می‌کند. به این خاطر در زمان فارغ‌التحصیلی اکثریتِ غریب به اتفاق اشخاص زیر ۲۸ سال هستند. در ایران از سوی دیگر به خاطرِ الزامی بودنِ داشتنِ مدرکِ کارشناسیِ ارشد برای ورود به دورهٔ دکتری و طولانی بودنِ دورهٔ کارشناسی ارشد بیشترِ دانشجوها در زمانِ فارغ‌التحصیلی از دورهٔ دکتری سی و چند ساله هستند، و انتظار این که یک شخصِ سی و چند ساله، چه مرد و چه زن، که عموماً دارای همسر و فرزند است با حقوقِ اندکِ مربی‌گری ادارهٔ زندگی کند، نابجا است. الزامی بودنِ انتشارِ مقاله در دورهٔ دکتری که عملاً منجر به طولانی‌شدنِ دورهٔ دکتری می‌شود از این دیدگاه نیز نامعقول است.

از دیدگاه دیگر، آیا قرار است باور کنیم که توصیهٔ داورِ ناشناسِ یک مجلهٔ خارجی که ممکن است حتی تمام جزئیاتِ مقاله را نفهمد از تصمیم استادِ راهنمای دانشجو که تمامِ زیر و بم کار را درک می‌کند مهم‌تر و معتبرتر است؟ وقتی که دانشجو بودم دو مرتبه دعوت به داوریِ دو مجلهٔ خوب را رد کردم چون بعد از مطالعهٔ مقاله‌های مورد داوری به این نتیجه رسیدم که من صلاحیتِ قضاوت در مورد مقاله‌های مورد بررسی را ندارم. این کاری بود که به نظرِ من طبیعی‌ترین کارِ ممکن بود. ولی حتی برای خودِ من اتفاق افتاده است که بر اساسِ نظراتِ داور می‌توانستم به راحتی تشخیص دهم که داور درکِ اندکی در موردِ مسأله و جزئیاتِ تکنیکیِ مطلب داشته است. این که نظرِ استاد راهنما و استاد مشاور از نظر ظاهراً بی طرفِ داورِ ناشناس برتر است معمولاً این اعتراض را به همراه دارد که چون اساتیدِ راهنما در ازای فارغ‌التحصیلیِ هر دانشجویِ دکتر مبلغی قابل توجه دریافت می‌کند، نمی‌تواند به طور بی‌طرف قضاوت کند. این مانند این است که بگوییم که چون سؤالاتِ امتحاناتِ نهایی را می‌توان به بهای خوبی به دانش‌آموزانِ ثروتمند فروخت، پس معلمان صلاحیتِ طرح سؤال ندارند و برای طرح سؤالات باید از معلمانِ خارجی ناشناس کمک گرفت. واقعیت امر این است که همانگونه که معلمان ما شایستگیِ طرحِ سؤالات امتحانی را دارند، اساتید نیز صلاحیتِ تصمیم‌گیری در مورد سرنوشتِ دانشجویانشان را دارند.

نکتهٔ دیگر این است که تربیت دانشجوی دکتری در ایران یک امر خیلی جدید است و هنوز به بلوغ نرسیده است. به همین خاطر سخت‌گیری‌های ضابطه‌ای شاید تا حدی اجتناب ناپذیر باشد. ولی در همین مدت کوتاه تعداد قابل ملاحظه‌ای ریاضی‌دانِ خوب در ایران تربیت شده‌اند که با وجود این که می‌توانسته‌اند برای ادامهٔ تحصیل به خارج بروند تصمیم گرفته‌اند که دکترای خود را در یکی از دانشگاه‌های داخل انجام بدهند و با همهٔ سختی‌های دورهٔ دکتری در ایران بسازند. وجودِ این ریاضی‌دانانِ نخبهٔ محصولِ تربیت ایرانی را باید سمبلِ استاندارد قرار داد و به کمتر از آن راضی نبود.

همانطور که در ابتدای این مقاله اشاره شد ملاکِ ارزیابیِ کارِ ریاضی‌دانان و اساتیدِ کشور را بر

اساسِ تعداد مقالاتِ منتشرشده و نه کیفیت آنها گذاشتن، محدود به دوره‌های دکتری نیست. در این راستا کار حتی به جایی رسیده است که بعضی از جوانانِ با استعداد و بسیار فعالی که در دانشگاه‌های برترِ کشور در حالِ انجامِ فعالیت پربار علمی هستند در معرضِ تصمیماتِ شدیدِ تنبیهی هستند. در دورهٔ دکتری از آنجا که عموماً اساتیدِ راهنما زحمتِ پیشنهاد کردنِ مسأله را به عهده دارند، تکلیف تا حدّ زیادی روشن است، ولی پس از دکتری پیدا کردنِ مسأله و یا حتی جهات مناسب مستلزم سال‌ها کار و اندیشهٔ مستمر و سخت است. به این خاطر اکثرِ ریاضیدانانی که می‌شناسم تعداد خیلی کمی مقاله در پنج یا شش سالِ بعد از اخذِ مدرک دکتریشان نوشته‌اند. واردکردنِ فشار زیاد به اساتید جوان باعث می‌شود که هیچ وقت از مسألهٔ تزشان فاصله پیدا نکنند و در نتیجه نتوانند از استاد راهنمایشان استقلالِ علمی پیدا کنند و یا به مقالاتی بنویسند که در خور ایشان نیست. نتیجهٔ دیگری که ممکن است حاصل شود این است که صرف نظر از پیش زمینهٔ علمیشان اساتید جوان به رشته‌هایی سوق داده می‌شوند که نوشتنِ مقاله در آن رشته‌ها آسان‌تر است و این از گوناگونیِ رشته‌های صحنهٔ ریاضیِ کشور می‌کاهد.

به نظر می‌آید کسانی که به بهترین وجه با فشارِ مقاله‌نویسی موجود در سیستمِ دانشگاهیِ کشور کار می‌کنند فارغ‌التحصیلانِ دکتریِ داخل کشور هستند و دلیلِ طبیعی این امر این است که ایشان در دورهٔ دکتریشان مجبور شده بودند که با این مسأله به شیوه‌هایی که در بخشِ اول توضیح داده شد کنار بیایند. از طرف دیگر کسانی که به هر دلیلی به وسوسهٔ نوشتن مقالهٔ غیر بالغ تن در نمی‌دهند از این بابت مشکل دارند. یک امر واضح این است که نوشتنِ یک مقالهٔ تأثیرگذارِ بالغ کاری است بسیار وقت گیر و توان فرسا مخصوصاً برای افرادی که در سال‌های ابتداییِ بعد از تزشان هستند.

در طیِ مدتی که افراد در حال انجام دادنِ یک پروژهٔ وقت گیر هستند بسته به سلیقه‌شان ممکن است فقط به سخنرانی کردن در کنفرانس‌های مختلف اکتفا کنند، یا مقالهٔ توصیفی در مورد موضوع تحقیقشان بنویسند و یا گزارش‌های کوتاهی روی سایت‌هایی مانند www.arxiv.org برای ملاحظهٔ عموم بگذارند. حتی ممکن است بعضی اشخاصِ رازدار و وسواسی مانندِ اندروو وایلز[1] از پروژه‌شان مانندِ یک رازِ سر به مُهر حفاظت کنند. خلاصه این که افرادِ مختلف چه بسا فعال و زحمتکش در امرِ تحقیق الزاماً روشِ یکسانی برای ارتباط با دنیای خارج و تبلیغ کردن برای کارشان ندارند. به این خاطر واقعاً شاخص مناسبی برای مشخص کردن این که آیا یک شخص خاص در حالِ انجام کارِ مفید علمی است وجود ندارد و واقعاً به جز اعتماد کردن به جوانانی که به طور مرتب به دفتر کارشان می‌آیند و مشغولِ کارِ علمی هستند چارهٔ دیگری نیست. در بعضی دانشگاه‌های آمریکا هر استادیار دو نفر استادِ ارشدِ مشاور دارد که روی کار علمی او نظارت می‌کنند، این که استادیار به درجهٔ دانشیاری ارتقاء پیدا کند، بسته به تصمیم و توصیهٔ استادهای مشاور است.

1) Andrew Wiles

در بعضی از این دانشگاه‌ها نیز یک سیستمِ «رتبه» وجود دارد، به این تعبیر که به یک فارغ‌التحصیل جدید رتبهٔ ۱ داده می‌شود و سپس هر سال ۱ نمره به رتبهٔ او اضافه می‌شود. انتظار این است که وقتی رتبه به عددِ ٦ می‌رسد، اساتیدِ مشاور استادیارِ مزبور را برای دانشیاری توصیه کنند و در غیر این صورت استادیار یک سال وقت دارد که یک شغل دیگر پیدا کند. این سیستم رتبه به شخص این اجازه را می‌دهد که با آرامش به مطالعه و تحقیق بپردازد و کار قابل توجهی عرضه کند.

تا چند سال پیش مقاله نوشتن و کار تحقیقیِ خوب کردن چندان پر طرفدار نبود. به همین خاطر، درست یا غلط، دست‌اندرکاران تحقیق و مقاله نوشتن را در چارچوبِ ضوابطِ دانشگاه‌ها گذاشتند تا به نحوی به زور تولید مقاله را بالا ببرند. شاید الان وقتِ این رسیده باشد که این ضوابط بازنگری شود. کارِ ریاضی یک کار خلاق است، چیزی مثلِ شعر یا نقاشی، و کار خلاق را واقعاً نمی‌توان ضابطه‌ای کرد. مثل این است که بگوییم از امروز تمام شاعران باید روزی یک شعرِ کاملِ بلند بنویسند تا حقوقشان قطع نشود، و اگر تا پایان سال فلان تعداد شعر چاپ شده نداشته باشند شغلِ شاعریشان از آنها گرفته می‌شود. اگر بخواهیم این مثالِ شعر را اندکی بیشتر دنبال کنیم، به قول دکتر سیاوش شهشهانی معیارِ خوب بودنِ یک شاعر تعدادِ شعرهای او نیست، بلکه شعرهای خوبِ اوست. ریاضی نیز از همین گونه است.

تشکر

من برای نوشتنِ این مقاله از مصاحبتِ آقایان دکتر س. شهشهانی، م. شهشهانی، ا. کرمزاده، ع. محمودیان، ی. تابش، م. ممقانی و ب. زنگنه استفاده کرده‌ام. نوشتنِ این متن به دعوتِ دکتر ممقانی و دکتر زنگنه انجام شد. در اینجا از همهٔ این اساتید تشکر می‌کنم.

رامین تکلو بیغش

Ramin Takloo Bighash
Mathematics Department,
Princeton Univ,
Princetone, NJ 08544-1000
rtakloo@math.princeton.edu

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ٣٦ (بهار ١٣٨٥) صص. ٦١ تا ٦٦

... نیوتن و لایب‌نیتس، سپس کیوشی ایتو

روح‌اله جهانی‌پور

کیوشی ایتو در هفتم سپتامبر سال ١٩١٥ در ژاپن متولد شد. ریاضیات را در دانشکدهٔ علوم دانشگاه سلطنتی توکیو تحصیل کرد و در همین دوران بود که جذب نظریهٔ احتمالات شد. خود او جریان را این‌گونه نقل می‌کند:

> از همان زمانی که دانشجو شدم، همواره به این واقعیت می‌اندیشیدم که قوانین آماری بر پدیده‌های تصادفی متوقف هستند. هرچند می‌دانستم که نظریهٔ احتمال ابزاری است برای توصیف اینگونه پدیده‌ها، لیکن مقالاتی که در آن زمان در این باره چاپ می‌شد یا کارهایی که صورت می‌گرفتند، مرا راضی نمی‌کرد زیرا مفهوم متغیر تصادفی که عنصر بنیادین نظریهٔ احتمال بود، به‌روشنی تعریف نمی‌شد. در آن موقع، تعداد اندکی از ریاضیدانان بودند که نظریهٔ احتمال را همچون حساب دیفرانسیل و انتگرال جزء شاخه‌های جدی ریاضی تلقی می‌کردند و حساب دیفرانسیل و انتگرال به‌واسطهٔ تعریف درستی که در اواخر قرن نوزدهم از مفهوم عدد حقیقی صورت گرفت، به‌سان یک دستگاه ریاضی معتبر نسج یافت. در دوران دانشجویی من تعداد محققین در نظریهٔ احتمال خیلی کم بودند که در آن میان می‌توان به آ. ن. کلموگرف در روسیه و پ. لوی در فرانسه اشاره کرد.

در سال ١٩٣٨ ایتو از دانشگاه توکیو فارغ التحصیل شد و یک سال پس از آن به کار در مرکز آمار کشور دعوت شد. او تا سال ١٩۴٣ در آنجا کار کرد و در همین دوره بود که کارهای برجستهٔ خود را در زمینهٔ احتمال انجام داد. خود او می‌گوید[٣]:

> در طول این پنج سال به‌خاطر الطاف ویژه‌ای که رئیس کاواشیما به من داشت، اوقات فراغت زیادی داشتم و توانستم مطالعاتم را در نظریهٔ احتمال با خواندن کتاب کلموگرف با عنوان مبانی نظریهٔ احتمال و یادداشت لوی در باب مجموع متغیرهای تصادفی مستقل ادامه دهم. آن موقع‌ها اعتقاد عموم بر این بود که درک کارهای لوی خیلی مشکل است زیرا لوی که خود از پیشگامان نظریهٔ احتمال بود، احتمال را

> برمبنای شهود خودش توضیح می‌داد. من تلاش کردم ایده‌های لوی را با استفاده از منطق دقیقی که کلموگروف به‌کار می‌گرفت شرح دهم و در این مسیر توانستم به کمک مفهوم منظم‌سازی که دوب معرفی کرده بود، و پس از تلاش‌های طولانی مفهوم معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی را ابداع کنم و به این ترتیب اولین مقاله‌ام را منتشر نمودم. ولی امروزه به‌کارگیری روش‌های ابداعی من در تشریح نظریهٔ لوی امری عادی در بین ریاضیدانان شده است.

در سال ۱۹۴۰ ، ایتو مقاله‌ای با عنوان دربارهٔ توزیع احتمال روی گروه‌های فشرده با همکاری یوکیوشی کاوادا منتشر ساخت. در دیباچهٔ مقالهٔ مشهور ایتو به سال ۱۹۴۲ دربارهٔ فرآیندهای تصادفی و توزیع‌های احتمال بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیر که در مجلهٔ Japanse Journal of Mathematics چاپ شد، آمده است:

> براون، گیاه‌شناس اسکاتلندی، حرکت ذرات معلق در آب را کشف کرد. حرکت براونی را در ابتدای قرن بیستم فیزیکدانانی چون اینشتین، پرن و دیگران مطالعه کردند. در سال ۱۹۲۳ وینر با پیش چشم داشتن این زمینهٔ علمی، اندازهٔ احتمال روی فضای مسیرها را معرفی کرد و با استفاده از مفهوم انتگرال لبگ، مبانی ریاضی آنالیز تصادفی را بنیان نهاد. در سال ۱۹۴۲، ایتو مفهوم انتگرال تصادفی و آنالیز ریاضی وابسته به آن را به وجود آورد. او نظریهٔ معادلات دیفرانسیل تصادفی را ابداع نمود که به کمک آن می‌شود حرکت‌های ناشی از پدیده‌های تصادفی را توصیف کرد.

هرچند امروزه ما این مقاله را بنیادی تلقی می‌کنیم، ولی ریاضیدانانی که در زمان انتشار مقاله می‌زیستند چنین تصوری نداشتند. ایتو که در آن موقع هنوز مدرک دکتری خود را نگرفته بود، می‌بایست چندین سال انتظار می‌کشید تا اهمیت ایده‌های او معلوم شود و ریاضیدانان دیگر هم در توسعهٔ نظریات او شرکت جویند. در سال ۱۹۴۳ ایتو به استادیاری ریاضی در دانشکدهٔ علوم دانشگاه سلطنتی ناگویا استخدام شد. این دوره، جزء پرکارترین بخش‌های زندگی ایتو بود و اگر توجه کنیم که در آن سال‌ها ژاپن با مشکلات عدیدهٔ ناشی از جنگ دوم جهانی رو به رو بود، به اهمیت آنچه ایتو انجام داد پی می‌بریم. در واقع مجلد بیستم مجموعه مقالات آکادمی سلطنتی توکیو شامل شش مقاله از ایتو است*.

*) 1- On the ergodicity of a certain stationary process

2- A kinematic theory of turbulence

3- On the normal stationary process with no hysteresis

4- A screw line in Hilbert space and its application to probability theory

5- Stochastic interal

6- On Student's test

ایتو مدرک دکتری خود را در سال ۱۹۴۵ اُخذ کرد و پس از آن همچنان مطالعات خویش را دربارهٔ آنالیز تصادفی با چاپ مقالات مهم دیگری در این‌باره گسترش داد. از میان این مقالات می‌توان به این موارد اشاره کرد: دربارهٔ معادلهٔ انتگرال تصادفی (۱۹۴٦)، دربارهٔ انتگرال تصادفی (۱۹۴۸)، معادلات دیفرانسیل تصادفی روی خمینه‌های دیفرانسیل پذیر(۱۹۵۰)، حرکت براونی روی گروه لی(۱۹۵۰) و دربارهٔ معادلات دیفرانسیل تصادفی (۱۹۵۱). در سال ۱۹۵۲ به تدریس در دانشگاه کیوتو دعوت شد و یک سال پس از آن کتاب مشهور خود با عنوان نظریهٔ احتمال را منتشر ساخت که در آن فضای احتمال را با استفاده از اصطلاحات و ابزارهای نظریهٔ اندازه ارائه کرده بود. سال‌های ۱۹۵۴ـ۱۹۵٦ را در مؤسسهٔ مطالعات پیشرفته در دانشگاه پرینستون گذراند و در سال ۱۹۵۷ کتاب مهم خود فرآیندهای تصادفی را به چاپ رساند که مشتمل بر پنج فصل بود: در فصل اول مقدمات بحث را معرفی می‌کند و باقی فصل‌ها اختصاص دارد به بررسی فرآیندهای با نمو مستقل، فرآیندهای مانا، فرآیندهای مارکف و نظریهٔ فرآیندهای نفوذ. در سال ۱۹٦۰ از مؤسسهٔ تاتا در بمبئی هند بازدید کرد و در آنجا مجموعه‌ای از سخنرانی‌ها را دربارهٔ کارهای خودش و دیگران بر روی فرآیندهای مارکف، فرایندهای لوی، حرکت براونی و فرآیندهای نفوذ خطی عرضه کرد.

گرچه ایتو تا زمان بازنشستگی خود در سال ۱۹۷۹ همچنان استاد دانشگاه کیوتو باقی ماند، اما جایگاه‌های استادی در دیگر دانشگاه‌ها را نیز داشت؛ برای مثال استاد دانشگاه آریوس از سال ۱۹٦٦ تا ۱۹٦۹ و استاد دانشگاه کُرنل از سال ۱۹٦۹ تا ۱۹۷۵. در خلال سه سال پیش از بازنشستگی در کیوتو، ریاست مؤسسهٔ تحقیقات در علوم ریاضی در این دانشگاه را نیز عهده‌دار بود. پس از بازنشستگی از دانشگاه کیوتو در سال ۱۹۷۹، از ریاضیات بازنشسته نشد و به چاپ مقالات تحقیقاتی خود ادامه داد.

ایتو توصیف زیبایی از زیبایی در ریاضی ارائه می‌دهد و سپس آن را به راه و روش اندیشیدن خود و دیگر ریاضیدانان مرتبط می‌سازد[۳]:

> ریاضیدان در ساختارهای دقیق ریاضی همان زیبایی را مشاهده می‌کند که دیگران در قطعات زیبای موسیقی یا یک معماری مجلل می‌یابند. لکن تفاوت بزرگی بین زیبایی ساختارهای ریاضی با زیبایی در هنر وجود دارد. برای مثال موسیقی موزارت حتی کسانی را که از موسیقی هیچ نمی‌دانند سخت مجذوب می‌کند، یا یک بنای معماری زیبا کسانی را که سررشته‌ای از طراحی ندارند، متحیر می‌سازد، لکن درک زیبایی موجود در ساختارهای ریاضی بدون آگاهی از گروهی از فرمول‌های ریاضی که قوانین منطقی حاکم بر آن ساختار را بیان می‌کنند، امکان پذیر نیست. فقط ریاضیدان است که می‌تواند نت‌های موسیقی را که متضمن فرمول‌های ریاضی‌اند بفهمد و آن قطعهٔ موسیقی را در قلب خویش بنوازد. بنابراین دانستم که بدون به یادگار گذاشتن فرمول‌هایی در ریاضی، نمی‌توانم در نواختن موسیقی‌های لذت‌بخش آن در قلب خویش، شرکت جویم. به این ترتیب بود که «فرمول ایتو» در معادلات

دیفرانسیل تصادفی که امروزه کاربرد گسترده‌ای در توصیف پدیده‌های تصادفی یافته است، شکل گرفت. وقتی اول بار نظریهٔ معادلات دیفرانسیل تصادفی را مطرح کردم، مقاله‌ام مورد استقبال چندانی واقع نشد ولی حدود یک دهه بعد از آن، ریاضیدانان دیگر هم شروع به نواختن نت‌های موسیقی من منتهی با استفاده از آلات موسیقی خودشان نمودند. سپس با ساختن قطعات موسیقی هوشمندانه‌تر ولی با حفظ اصالت حاکم بر نت‌های اولیه، توانستند فرمول ایتو را بسط فراوان دهند.

ایتو به‌خاطر فعالیت‌های ریاضی خود، توانست افتخارات زیادی برای خویش به ارمغان آورد. در سال ۱۹۷۸ جایزهٔ آساهی، جایزهٔ سلطنتی و نیز جایزهٔ آکادمی ژاپن را به‌دست آورد. در سال ۱۹۸۵ جایزهٔ فوجیوارا و در سال ۱۹۹۸ جایزهٔ کیوتو در علوم بنیادی را از طرف بنیاد ایناموری از آنِ خود کرد. علاوه بر این جوایز که همگی ژاپنی بودند، به عضویت آکادمی ژاپن نیز درآمد. با این حال، جوایزی از دیگر کشورها هم دریافت نمود و به‌علاوه برای عضویت در آکادمی علوم ملی ایالات متحده و آکادمی علوم فرانسه هم انتخاب شد. دکتری افتخاری دانشگاه واریک در انگلستان و ETH در زوریخ سوئیس نیز به او اعطا گشت. در مرجع [۲] این‌گونه از او ستایش شده است:

امروزه، نظریهٔ ایتو علاوه بر ریاضی در حوزه‌های متعدد علمی در تحلیل پدیده‌های ناشی از وقایع تصادفی، به‌کار می‌رود. محاسباتی که بر مبنای حسابان «ایتو» انجام می‌شوند نه تنها در فیزیک، جمعیت‌شناسی، و نظریهٔ کنترل تصادفی و علوم طبیعی دیگر کاربرد دارد، بلکه در ریاضیات مالی و اقتصاد نیز به‌کار گرفته می‌شود. در واقع کارشناسان ریاضیات مالی، اصلاً حسابان ایتو را با نام فرمول ایتو می‌شناسند. ایتو را بایستی به‌حق، پدر آنالیز تصادفی دانست که در قرن بیستم متولد شد و شکل گرفت. این گسترش بی‌وقفه را ریاضیدانان زیادی از جمله خود ایتو هدایت نمودند که کارش در این زمینه به‌خاطر عمق ریاضی و اندرکنش فراوان با حوزه‌های علمی دیگر، قابل ستایش است. این کار به این دلیل که بارِ یک نظریهٔ ممتاز ریاضی در قرن بیستم را بر دوش می‌کشد، یقیناً به یادماندنی خواهد بود.

أخیراً تکنگاشتی به مناسبت هشتادمین سالگرد تولد ایتو به چاپ رسیده است [۱] با عنوان نظریهٔ احتمال و حسابان تصادفی از دید ایتو که مشتمل است بر چندین مقاله دربارهٔ بسط ایده‌های ایتو. در بخشی از این تکنگاشت آمده است: «استاد کیوشی ایتو مشهور است به بنیانگذار آنالیز تصادفی. گرچه ایتو این نظریه را که امروزه به آنالیز تصادفی ایتو موسوم است، اول بار حدود پنجاه سال پیش ارائه کرد، ولی ارزش آن در ریاضیات محض و کاربردی روز به روز افزون‌تر می‌گردد. آنالیز ایتو برای درک تقریباً تمامی نظریه‌های جدید مربوط به احتمالات و حوزه‌های وابسته به آن، ابزاری اجتناب ناپذیر است و در آینده هم چنین خواهد بود. برای مثال فرمول زیربنایی ایتو در حوزه‌های مختلفی از فیزیک گرفته تا اقتصاد مورد استفاده است.»

در ۲۲ آگوست سال ۲۰۰۶ در مراسم افتتاحیهٔ کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان در مادرید اسپانیا، نخستین جایزهٔ گاوس به کیوشی ایتو اعطا شد. کارل فریدریش گاوس (۱۷۷۷ـ۱۸۵۵) که به سلطان ریاضیات شهرت دارد، دو جنبهٔ متمایز از ریاضیات را در شخصیت خود کنار یکدیگر آورده بود. او نه تنها در نظریهٔ اعداد که به ملکهٔ ریاضیات مشهور است و تا همین چند دههٔ پیش تصور می‌شد که از هر گونه کاربرد در دنیای واقعی به دور است، چیره‌دست بود، بلکه روش کمترین مربعات را ابداع کرد که اکنون در تقریباً هر نوع مسألهٔ کاربردی که به‌ویژه با اندازه‌گیری میزان خطاها مرتبط باشد، به‌کار می‌رود. جایزهٔ گاوس که أخیراً برپا شده، به آن دسته از تحقیقات ریاضی تعلق می‌گیرد که کاربردی در حوزه‌های علمی دیگر، حتی در صنعت و تجارت و به‌طور ساده در زندگی روزمرهٔ مردم داشته باشد. کارهای نظری ایتو تأثیر بسزایی در علم داشته است و با انجام این تحقیقات بر همه معلوم شد که مسیر حرکت از مسائل دنیای واقعی به سمت ریاضیات محض و سپس بازگشت به دنیای کاربرد، بس مشکل و طولانی است. در مورد ایتو، مسیر حرکت از نقطهٔ نگریستن در میکروسکوپ و مشاهدهٔ ذرات معلق در آب آغاز می‌شود که این همان چیزی است که امروزه به حرکت براونی یا به افتخار وینر که آن را به زبان دقیق ریاضی توصیف نمود، فرآیند وینر نام دارد. پیش از او اینشتین نیز تلاش کرده بود بنیاد ریاضی توصیف این حرکت را مستحکم کند، ولی فیزیکدانان غالباً فرض را بر این می‌گذارند که دنیا به تعبیری، هموار عمل می کند، ولی این فرض در مورد حرکت براونی نقض می‌شود، زیرا مسیرهای این حرکت نه تنها بسیار طولانی‌اند بلکه در همه‌جا تیزی دارند، یعنی هیچ‌جا مشتق‌پذیرند. حدود صد سال پیش ریاضیدانان تلاش کردند با به‌کارگیری ابزارهایی از این وضعیت‌های أسف‌بار رهایی یابند که یکی از آن‌ها انتگرال بود. ایتو در سال ۱۹۴۲ با ابداع مفهوم جدید «انتگرال تصادفی» علاوه بر یافتن قوانینی برای محاسبات دیفرانسیلی متضمن حرکت براونی، راه را برای حل معادلات دیفرانسیل تصادفی نیز گشود. البته انتگرال تصادفی پایان حل مسائل مربوط به پدیده‌های تحت تأثیر نیروهای تصادفی نیست، زیرا فرآیند تصادفی، از پیش دانسته نیست که اگر این‌طور بود، دیگر تصادفی نبود! در واقع نمی‌توان گفت ذره‌ای که حرکتش از یک معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی تبعیت می‌کند، برای مثال پنج دقیقهٔ دیگر در کجاست یا این‌که آیا به نقطهٔ معینی برخورد می‌کند یا نه، با این حال، نظریهٔ ایتو این امکان را فراهم می‌آورد که بتوان احتمال وقوع چنین پیشامدهایی را پیدا کرد.

با این‌که امروز معلوم شده است که یکی از مؤثرترین کاربردهای نظریهٔ ایتو در ریاضیات مالی و اقتصاد است لکن این نظریهٔ آنقدر غنای تجریدی دارد که قابل استفاده در حوزه‌های دیگری از جمله زیست‌شناسی مولکولی، جمعیت‌شناسی و ژنتیک هم باشد، چه در همهٔ آن‌ها مفهوم «شانس» دخالت عمیق دارد. حتی نظریه‌ای داریم که می‌توان با استفاده از آن نقش شانس را در پیشامدهای پیچیده‌تر هم بررسی نمود: برای مثال اگر بخواهید بدانید که یک قطرهٔ جوهر چگونه در آب پخش می‌شود، هم می‌توانید مسیر حرکت یک قطرهٔ جوهر را بسان حرکت براونی دنبال کنید و هم می‌توانید آب و جوهر را با یکدیگر به‌عنوان یک جسم پیوسته تلقی کرده، معادلهٔ دیفرانسیل پاره‌ای به دست آورید که نفوذ و پخش جوهر در آب را تشریح کند. می‌بایست بین این دو روش ارتباطی باشد،

چراکه هر دو یک پدیدهٔ فیزیکی را الگوسازی می‌کنند. ولی مدتی طول کشید تا معلوم شود که این ارتباط در بطن فرمول بلک ـ شولز نهفته است؛ همان فرمول مشهور در ریاضیات مالی! امروزه شکی نیست که آنالیز تصادفی شاخه‌ای پربار، مهم و باطراوت در ریاضیات است که کاربردهای فراوانی در فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی، علوم فنی، اقتصاد و به‌طور کلی زندگی واقعی مردم دارد. به همین دلیل است که عده‌ای، ایتو را نیوتن قرن بیستم نامیده‌اند، که آنالیز ریاضی را بنیادی مجدد نهاد، ولی به تعبیر فولمر، او لایب‌نیتس قرن بیستم است!

مراجع

[1] N. Ikeda, S. Watanabe, M. Fukushima, H. Kunita, *Ito's stochastic calculus and probability theory*, Kyoto , 1996.

[2] *Citation for the Kyoto Prize in Basic Sciences awarded to Kiosi Ito by the Inamori Foundation*, 1998.

[3] K. Itô, *My Sixty Years in studies of probability theory: acceptance speech of the Kyoto Prize in Basic Sciences*, 1998.

[4] Kiyosi Itô, in *Ito's stochastic calculus and probability theory*, Tokyo, 1996, ix-xiv.

[5] Kiyosi Itô, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. Gen. Vie Sci.*, **6**(6), 1998, 496.

روح‌الله جهانی‌پور
بخش ریاضی، دانشکدهٔ علوم، دانشگاه کاشان
jahanipu@kashanu.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ٣٦ (بهار ١٣٨٥) صص. ٦٧ تا ٦٨

مسأله

مسألهٔ ٩٠: فرض کنید (X_1, d_1) و (X_2, d_2) فضاهای متریک و $f : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ تابعی پیوسته باشد. ثابت کنید متر d روی X_1 که معادل d_1 است وجود دارد به طوری که $f : (X_1, d) \to (X_2, d_2)$ پیوسته یکنواخت است. (شیرین حجازیان، دانشگاه فردوسی)

مسألهٔ ٩١: همهٔ ماتریس‌های مربعی A و B را معین کنید به طوری که $AB = \lambda A + \mu B$، که در آن λ و μ اعداد (مختلط) معلومی هستند.

مسألهٔ ٩٢: فرض کنید k یک عدد طبیعی و $n = 2^{k-1}$. در این صورت، ثابت کنید از هر $2n - 1$ عدد طبیعی متمایز، می‌توان n عدد را به گونه‌ای یافت که مجموع آنها بر n بخش‌پذیر باشد. (هانیه میرابراهیمی، دانشگاه فردوسی)

مسألهٔ ٩٣: تعداد متناهی پاره‌خط که مجموع طول آنها ١است، در صفحه داده شده است. ثابت کنید خط مستقیمی وجود دارد که مجموع طول تصویر پاره‌خط‌های داده شده بر این خط کوچکتر یا مساوی $\frac{2}{\pi}$ است. (هانیه میرابراهیمی، دانشگاه فردوسی)

مسألهٔ ٩۴: نشان دهید به ازای هر $a > 0$ و اعداد مختلط w, z, y, x،

$$(1+3a)|x|^2+(1+\frac{3}{a})|y|^2+(1+2a+\frac{1}{a})|z|^2+(1+a+\frac{2}{a})|w|^2 \geq |x+y+z+w|^2$$

مسألهٔ ٩۵: فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ روی $\mathbb{R}$ باشد و $A^2 = 0$. ثابت کنید $\frac{n}{2} \geq$ رتبه A.

مسألهٔ ٩٦: فرض کنید R یک حلقهٔ جابجایی و یکدار باشد و برای هر $x \in R$ عدد طبیعی n موجود باشد که $x^n = x$. ثابت کنید هر ایده‌آل اول در R، یک ایده‌آل بیشین است.

مسألهٔ ۹۷: ثابت کنید برای هر $p > 2$ و بردارهای $u, v \in \mathbb{R}^n$،

$$||x+y||^p + ||x-y||^p \leq 2^{\frac{p}{2}}(||x||^p + ||y||^p)$$

مسألهٔ ۹۸: بی‌نهایت جواب برای معادلهٔ $(x+y+z+t)^2 = xyzt$ در اعداد طبیعی ارائه دهید. (مجید میرزاوزیری، دانشگاه فردوسی)

مسألهٔ ۹۹: فرض کنید f یک تابع تحلیلی از حوزهٔ همبند ساده و کراندار U به خودش باشد و دو نقطهٔ x و y در U موجود باشند که $f(x) = y$ و $f(y) = x$. ثابت کنید f تناظر یک به یک است و $f \circ f$ تابع همانی است.

مسألهٔ ۱۰۰: یک تابع حقیقی روی $\mathbb{R}$ مثال بزنید که همه جا پیوسته باشد ولی فقط در یک نقطه مشتق پذیر باشد.

نشانی: مشهد، دانشگاه فردوسی، صندوق پستی ۱۱۵۹—۹۱۷۷۵، گروه ریاضی، دکتر محمد صال‌مصلحیان

FARHANG va ANDISHE-ye RIYĀZI

An Expository Journal of the

Iranian Mathematical Society

ISSN 1022-6443

Vol. 25, No. 1, spring 2006

P. O. Box 13145-418
Tehran - Iran

Tel: 88808855, 88807795, 88807775

e-mail: iranmath@ims.ir
web: http://www.ims.ir

فهرست مطالب

لیتوگرافی، چاپ و صحافی: