فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

سال ۲۶، شمارهٔ ۱، بهار ۱۳۸۶

(تاریخ انتشار: تابستان ۱۳۸۶)

شمارهٔ پیاپی: ۳۸

فهرست مطالب

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی هر سال در دو شماره (بهار و پاییز) منتشر و به اعضای حقیقی، حقوقی و مشترکین انجمن ریاضی ایران ارسال می‌شود.

علاقه‌مندان به عضویت حقیقی و دانشگاه‌ها، مؤسسات و کتابخانه‌ها که تمایل به عضویت حقوقی یا اشتراک سالانه دارند می‌توانند با دبیرخانهٔ انجمن ریاضی ایران تماس حاصل نمایند.

شماره‌های قبلی این مجله با هماهنگی دبیرخانه قابل فروش می‌باشند.

روی جلد: تندیس استفان باناخ

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۸ (بهار ۱۳۸۶) صص. ۱

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی یکی از یاران خود را از دست داد

ستاره مرد، شمع فرو خفت، شب گذشت
ای وای من که قصهٔ دل ناتمام ماند.

ستاره‌ای درخشان در آسمان علم و دانش به خاموشی گرائید ستاره‌ای که به‌سان شهابی مدت کوتاهی درخشید و چه خوش درخشید، اما همان دم کوتاه کافی بود تا آثار ماندگارش را بر جای گذارد. دکتر سید محمد حسن نجومی، از دانشکدهٔ ریاضی دانشگاه صنعتی شریف، همان ستارهٔ دنباله داری بود که هر چند سال یک بار پدیدار می‌شود و همه را متوجه خود می‌کند. افسوس که عمرِ لحظه‌ها کوتاه است و شکار لحظه‌ها سخت! کاش می‌شد چنین لحظه‌هایی را نگه داشت، زمان را متوقف کرد و از وجود انسان‌هایی چون دکتر نجومی بیشتر بهره برد. شاید او می‌دانست که بودنش دیری نمی‌پاید و باید خیلی زود بار سفر بربندد و به دیار باقی بشتابد و به همین خاطر سخت کار می‌کرد و فرصت‌ها را از دست نمی‌داد و الحق که در عمر کوتاهش آثار ارزنده‌ای از خود به یادگار گذاشت. علاوه بر کارهای علمی در دوستان و همکاران و دانشجویان اثر مثبتی داشت، نظم و انضباط و دقتش مثال زدنی بود و نوع ارتباطش با دانشجویان از جنسی بود که به دل می‌نشست. وقتی که به آنها اختصاص می‌داد و با عشق و علاقه یادگیری آنها را دنبال می‌کرد در نوع خود بی‌نظیر بود. عشق به خانواده و عشق به وطن، عشق به کار و تدریس، عشق به ریاضی، عشق به آموختن و آموخته‌ها را به کار بردن، عشق به موسیقی، عشق به مردم و عشق به همهٔ خوبی‌ها در وجودش نهادینه شده بودو شاید قلبش تحمل این همه عاشقی را نداشت! اگر گلچین اجل مهلتش می‌داد بی‌شک یکی از بهترین و برجسته‌ترین افراد در زمینهٔ فرآیندهای تصادفی و ریاضیات مالی می‌شد. جامعهٔ ریاضی کشور به او امید فراوان داشت اما افسوس که مرگ نابهنگامش این امید را به یأس تبدیل کرد. کوچ این استاد جوان ضایعه‌ای اسف بار است که امید می‌رود وجود دانشجویان مستعد و جوانان علاقه‌مند به ایشان بتواند جای خالی او را پر نماید. این واقعهٔ تأسف‌انگیز را به خانوادهٔ محترمش و جامعهٔ ریاضی کشور تسلیت می‌گوییم و آرزوی تداوم راهش را داریم.

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۸ (بهار ۱۳۸٦) صص. ۳ تا ۳۵

جنبه‌های هندسی آنالیز تصادفی (بخش اول)

ک. دیوید اِلورثی

ترجمه: روح‌الله جهانی‌پور

مقدمه

شمارهٔ اول مجلهٔ Nagoya Math. Journal در سال ۱۹۵۰ منتشر شد و در همین شماره بود که مقالهٔ ک. ایتو[1] با عنوان «معادلات دیفرانسیل تصادفی روی خمینه‌های دیفرانسیل‌پذیر» به چاپ رسید. البته مقالهٔ قبلی ایتو که عنوانش «حرکت براونی روی گروه‌های لی» بود، پیش از آن در Proc. of the Japan Academy چاپ شده بود. واقعیت این است که پیش از ایتو افراد دیگری از جمله پرن[2] در سال ۱۹۲۸، فرآیندهای خمینه ـ مقدار و به‌طور کلی‌تر فرآیندهای گروه لی ـ مقدار را مورد بررسی قرار داده بودند و خود ایتو هم به این موضوع اذعان دارد. لکن ایتو توانست نظریهٔ انتگرال تصادفی را که خود او در دههٔ ۴۰ ارائه کرده بود، جهت توصیف دینامیک فرآیندهای نفوذ به‌کار بندد. با این همه، در واقع ایتو در سخنرانی سال ۱۹٦۲ در کنفرانس بین‌المللی ریاضیدان‌ها در استکهلم امکان ترکیب کردن ابزارهای هندسهٔ دیفرانسیل و آنالیز تصادفی را مطرح کرد، ولی عملاً این موضوع را هیچ کس تا انتهای دههٔ ٦۰ و اوایل دههٔ ۷۰ به‌طور جدی دنبال نکرد.

برای این که وضعیت را برای افرادی که تخصصی در نظریهٔ احتمال ندارند توصیف کنیم، ابتدا لازم است یادآوری کنیم که یک فرآیند تصادفی با فضای حالت M (که در بحث پیش‌گفتهٔ ما یک خمینهٔ هموار است)، خانواده‌ای است از مسیرهای $t \longrightarrow z_t(\omega)$ که پرمایشی با متغیر $\omega \in \Omega$ دارد و $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ یک فضای احتمال است طوری که تابع $z_t : \Omega \longrightarrow M$ به ازای هر t اندازه‌پذیر است. بر مبنای الگوی کلموگروف[3] از نظریهٔ احتمال، اساساً «احتمال این‌که یک فرآیند به‌طور معینی رفتار کند» به کمک اندازهٔ (برحسب قانون احتمال $\mathbb{P}$) مجموعهٔ همهٔ مسیرهای $t \longrightarrow z_t(\omega)$ که بدان‌گونه

1) K. Itô 2) Perran 3) V. I. Kolmogorov

رفتار می‌کنند، محاسبه می‌شود. ردهٔ مهمی از فرآیندهای تصادفی آن‌هایی هستند که از دستگاه‌های دینامیکی عادی ناشی می‌شوند که نوعی اختلالات تصادفی بر آن‌ها حاکم است.به‌ویژه اختلالات از نوع به‌اصطلاح «نوفهٔ سفید»، به فرآیندهای نفوذ منجر می‌شوند. حقیقت ریاضی مهم دربارهٔ فرآیندهای نفوذ (و به‌طور کلی‌تر نیمه مارتینگل‌ها) که مطالعهٔ آنالیز تصادفی را هم اجتناب‌ناپذیر می‌کند و هم مملو آن را از قضیه‌های مهم می‌سازد، این است که به‌طور کلی نه تنها مسیرها دیفرانسیل‌پذیر نیستند، حتی به‌طور موضعی با تغییر کراندار هم نیستند. به همین دلیل است که معادلات عادی را نمی‌شود برای توصیف دینامیک آن‌ها به‌کار بست. باز درست به همین دلیل بود که ایتو حسابان خاص خود را ابداع نمود. (مقدمهٔ مرجع [SV] را ملاحظه کنید.)

انگیزه‌های متعددی در گسترش آنالیز تصادفی هندسی نقش داشته است. یکی از آشکارترین آنها این است که محیط زندگی دستگاه‌های دینامیکی تصادفی همچون دستگاه‌های دینامیکی عادی، خمینه‌ها هستند و این در عمل هم غالباً رخ می‌دهد. برای مثال، کارِ پرن که در بالا به آن اشاره شد، مربوط است به حرکت براونی روی گروه‌های دوران‌ها. حتی بیش از این‌ها می‌توان گفت و آن این که فرآیندهای نفوذ و نیمه مارتینگل‌ها، موجب ظهور اشیاء هندسی مرتبهٔ دومی می‌شوند (رجوع کنید به [Em]) که دست کم در مورد اولی، کار به هندسهٔ ریمانی و زیرریمانی ختم می‌شود که بهترین زبان هندسی برای توصیف رفتار این نوع فرآیندها است. در واقع ارتباط نزدیکی بین معادلات دیفرانسیل تصادفی و هموستارهای مُستوی روی زیرکلاف‌های کلاف مماس وجود دارد که هندسهٔ این موضوع نقش مهمی در تحلیل جواب‌های معادلات تصادفی بازی می‌کند.

به‌علاوه، روش‌های احتمالاتی ارتباط نزدیک‌تری بین جواب‌های معادلات حرارت، مثلاً معادلهٔ حرارت روی فرم‌ها، با هندسه به نمایش می‌گذارند که از روش‌های آنالیزی صرف مفیدترند. مثال ملموس در این مورد مسألهٔ تسلط نیمگروهی برای نیمگروه حرارت روی فرم‌ها است که تقریباً به سرعت از فرمول «فاینمن ــ کاتس[1]» نتیجه می‌شود. برای شرح بیشتر رجوع کنید به بخش ۳. به تعبیری، دیدگاه احتمالاتی در این زمینه فراگیرتر از برخی رویکردهای آنالیزی است، زیرا بعضی فرآیندهای نفوذ از قبیل حرکت براونی، در یک آن، روی کل خمینه پخش می‌شوند. به همین خاطر، فرض‌هایی از قبیل مثبت بودن انحناء یک خمینه می‌بایست «به‌طور متوسط» برقرار باشند؛ برای مثال اگرعملگر لاپـلاسی به عـلاوهٔ یک پتانسیل که کران پایینی برای انحنای ریچی[2] به دست می‌دهد، به عنوان عملگری روی L^2ی یک خمینهٔ فشرده M، مثبت باشد، آن‌گاه $\pi_1 M$ متناهی است [Li95]. این تعمیمی است از قضیهٔ کلاسیک میرز[3].

به‌طور کلی، روش‌های تصادفی خیلی طبیعی‌تر از دیگر روش‌ها، رفتار دستگاه‌های پیچیده را به ویژگی‌های پتانسیلی (در مورد معادلات عددی) بر روی خمینه‌های وابسته به آن‌ها ربط می‌دهند. مثالی دیگر از این گونه، کاری است که کندال در اواخر دههٔ ۷۰ آغاز نمود. او رویکرد احتمالاتی را

1) Feynman – Kac 2) Ricci 3) Myers

Kiyoshi Itô, 1982

در مطالعهٔ توابع همساز برگزید تا مسألهٔ عدم وجود تابع همساز غیرثابت $f : M \longrightarrow N$ را که در اینجا N خمینهٔ کارتان ـ آدامار[1] است به عدم وجود توابع همساز غیرثابت روی M مرتبط سازد. بخش ۶ را ببینید. در مورد نظریهٔ پتانسیل روی خمینه‌ها نظیر مسألهٔ دیریکله در بی‌نهایت یا شرایط مرزی مارتین، شهودی که از شناخت رفتار حرکت براونی روی خمینه‌ها در زمان‌های طولانی به دست می‌آید، اهمیت فراوان دارد[Ki95]. این جریان با کار ج. ج. پرات[2] در سال ۱۹۷۵ آغاز شد که ثابت کرد وقتی زمان به بی‌نهایت میل کند، حرکت براونی روی خمینه‌های کارتان ـ آدامار (که انحنایشان به دور از صفر و $-\infty$ کراندار است)، قریب به یقین به نقطه‌ای روی کره در بی‌نهایت، همگرا می‌شود. یکی از بهترین نمونه‌های کاربرد آنالیز تصادفی در این گونه مسائل، اثباتی است که د. مایکل[1] در ۱۹۷۶ ارائه کرد مبنی بر این‌که برای خمینه‌های فشردهٔ همبند ساده، همساز بودن سرتاسری، همساز بودن قوی را نتیجه می‌دهد [E181]. با این همه مشخص شده است که معمولاً روش‌های آنالیزی پیشرفته، بسیار مؤثرند.

ولی خوب! دو جای خاص هم وجود دارد که روش‌های تصادفی در آن‌ها تأثیر ویژه‌ای گذاشته‌اند. یکی آنجا که خمینه‌ها هموار نیستند یا این که ضرایب معادلات مورد بحث، غیرهموارند؛ و دیگری آنجا است که تلاش می‌کنیم فضاهای مسیری یا حلقوی روی خمینه‌های ریمانی را با ابزارهای نامتناهی ـ بعد بررسی کنیم. مورد اول را می‌توان بخشی از مطالعاتی دانست که در آن‌ها شرط هموار‌ی به‌عمد کنار گذاشته می‌شود. مثلاً وقتی هدف، بررسی ویژگی‌هایی است که تحت شبه ـ طولپایی‌ها ناوردا هستند[Ly91]؛ یا نتیجه‌ای که پ. لی[4] و کارپ[5] راجع به کار گافنی[6] به‌دست آوردند. او وجود حرکت براونی را روی خمینه‌های ریمانی کامل (معادلاً اگر P_t نیمگروه حرارت باشد، $P_t 1 = 1$ برای هر $t \geq 0$)ی بررسی کرده بود که به جای شرط استاندهٔ

1) Cartan – Hadamard 2) J. J. Perat 3) D. Michel 4) P. Li 5) Karp 6) Gaffney

Wilfried Kendall, 1993

یائو[1] یعنی از پایین کراندار بودن انحنای ریچی، شرایطی روی رشد حجمی آنها، جایگزین شده بود. البته روشی که فوکوشیما[2] برای بررسی فرم‌های دیریکله در اواخر دههٔ ٦٠ و دههٔ ٧٠ ارائه کرد نیز می‌تواند در این مورد مناسب باشد. رجوع کنید به $[FOT]$. آنالیز روی فضاهای بی‌نهایت بعدی به‌طور طبیعی در حوزه‌های گوناگونی از فیزیک ـ ریاضی مورد استفاده است. برای مثال در $[ADK]$ حاصل‌ضرب بینهایت فضای فشرده به عنوان فضای حالت در نظر گرفته شده است. همچنین رویکردی که بیسموت[3] در اوایل دههٔ ٨٠ در قضیه‌های شاخص انتخاب می‌کند، حاوی انگیزه‌های زیادی در استفاده از ابزارهای آنالیز نامتناهی ـ بعد روی فضاهای مسیری و حلقوی است. البته، محرک تحقیق دربارهٔ این موضوع فرمول انتگرال جزء به جزء درایور[4] است که آن را در اوایل دههٔ ٩٠ ارائه کرد[Dr92]. آنالیز نیمگروه‌ها نیز که اساساً به بِیکری[5] منتسب است، تأثیر زیادی در پیشرفت آنالیز نامتناهی ـ بعد داشته است (البته مطالب این حوزه به پرسش‌های متناهی ـ بعد هم پاسخ می‌دهد) [Tan94]. از این‌ها بگذریم، یکی از مسائل مشهور، نحوهٔ ارتباط آنالیز تصادفی با ساختارهای توپولوژیک بوده است که شرحی از آن را می‌توان مثلاً در [BGV] یا [Bud89] (یا برعکس) یافت.

در باقیماندهٔ این مقاله، هدف این است که بعضی از جنبه‌های آنالیز تصادفی هندسی را که از زمان سخنرانی ایتو در کنفرانس بین‌المللی ریاضیدانان به این طرف، بسط و گسترش یافته است با جزئیات بیشتری شرح دهیم.

حرکت براونی و معادلات دیفرانسیل تصادفی

الف. اگر بخواهیم به فلسفه‌ای که در پس این همه تحقیقات در حوزهٔ معادلات دیفرانسیل تصادفی

1) T. T. Yau 2) fukushima 3) Bismut 4) Driver 5) Bakry

در دوران ما، نهفته است پی ببریم، می‌بایست به برخی از جنبه‌هایی که ساختار غنی اندازهٔ وینر روی $\mathbb{R}^m$ یا به‌طور کلی‌تر اندازه‌های گاوسی دارند، اشاره کنیم. یادآوری می‌کنیم که حرکت براونی m ـ بعدی ($BM(\mathbb{R}^m)$) فرآیندی تصادفی $t \longrightarrow B_t(\omega)$ است با فضای حالت $\mathbb{R}^m$ و روی یک فضای احتمال داده شدهٔ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ که مسیرهای پیوسته دارد و نقطهٔ شروع آن معمولاً مبدأ است. ویژگی مشخصهٔ این فرآیند این است که اگر زمان‌های $t_\circ < t_۱ < \cdots < t_k$ و زیرمجموعه‌های برل $A_۱, A_۲, \cdots, A_k$ از $\mathbb{R}^m$ داده شده باشند، احتمال این‌که ذرهٔ براونی در زمان t_j در مجموعهٔ A_j واقع شود برابر است با

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{B_{t_j} \in A_j, \quad \forall j\} &= \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : B_{t_j}(\omega) \in A_j, \quad \forall j\}\\ &= \int_{\mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m} \Pi_{i=۱}^k p_{t_j - t_{j-۱}}(x_{j-۱}, x_j) dx_j \qquad (۱)\end{aligned}$$

که در آن $x_\circ = \circ$ و $p_t(x,y) = (۲\pi t)^{-m/۲} \exp\left(-\frac{۱}{۲t}|x-y|\right)$. نسخهٔ متداول $BM(\mathbb{R}^m)$ به این ترتیب ساخته می‌شود که فضای Ω عبارت است از $C_\circ([\circ, \infty); \mathbb{R}^m)$ یعنی فضای همهٔ مسیرهای پیوسته در $\mathbb{R}^m$ که از مبدأ آغاز می‌شوند و اندازهٔ احتمال $\mathbb{P}$، اندازه‌ی برل $\mathbb{W}$ است که به اصطلاح اندازهٔ وینر نامیده می‌شود. خوب است که فقط تا یک زمان متناهی کار کنیم و از این رو Ω را فضای باناخ $C_\circ([\circ, T]; \mathbb{R}^m)$ در نظر می‌گیریم همراه با اندازهٔ وینر $\mathbb{W}$. در این صورت $B_t(\sigma) = \sigma(t)$ برای هر $\sigma \in C_\circ([\circ, T]; \mathbb{R}^m)$ یک حرکت براونی روی $\mathbb{R}^m$ است. در واقع به کمک ویژگی (۱) می‌توان $\mathbb{W}$ را طوری تعریف کرد که این مطلب خود به خود برقرار باشد. اندازهٔ وینر، نمونه‌ای از یک اندازهٔ گاوسی روی یک فضای باناخ است. اگر E یک فضای باناخ حقیقی جدایی‌پذیر باشد، یک اندازهٔ برل اکیداً مثبت γ روی E را گاوسی می‌نامیم اگر تبدیل فوریهٔ آن $\hat{\gamma} : E^* \longrightarrow \mathbb{R}$ به شکل زیر باشد:

$$\hat{\gamma}(l) = e^{-\frac{۱}{۲}|l|_H^۲} \qquad (۲)$$

که در آن $|.|_H$ نرم ناشی از ضرب داخلی $\langle . , . \rangle$ است که روی فضای دوگان E یعنی E^* تعریف می‌شود. کامل شدهٔ E^* با این نرم، یک فضای هیلبرت H است که موجب پیوستگی تابع شمول خطی $i : H \longrightarrow E$ می‌شود و نگاشت دوگان آن j نیز یک شمول $j : E^* \longrightarrow H$ است. در دههٔ ٦۰ ، گراس[1] فضای E همراه با شمول $i : H \longrightarrow E$ و اندازهٔ گاوسی متناظر آن‌ها، γ را فضای وینر مجرد نامید و بر مبنای آن نظریهٔ پتانسیلی را وضع کرد که در اواخر دههٔ ٦۰ و اوایل دههٔ ۷۰ توسط خود او و شاگردانش مورد مطالعه قرار گرفت. این‌طور به نظر می‌آید که اندازه‌های گاوسی علاوه بر این‌که در نظریهٔ احتمال و فیزیک ـ ریاضی اهمیت دارند بهترین جایگزین برای اندازهٔ لبگ در آنالیز نامتناهی ـ بعد باشند. در مورد اندازهٔ وینر، ساختار فضای مجرد وینر $\mathbb{W}$ با نگاشت شمول طبیعی فضای هیلبرت $H = L_\circ^{۲,۱}([\circ, T]; \mathbb{R}^m)$ در فضای باناخ مذکور در فوق، معلوم می‌شود.

1) L. Gross

این فضای هیلبرت مرکب است از همهٔ مسیرهای $\sigma : [\circ, T] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ که مشتقشان تقریباً همه جا موجود است و در $L^{\text{۲}}([\circ, T]; \mathbb{R}^m)$ قرار دارد. به عبارت دیگر $\sigma(t) = \int_\circ^t \sigma'(s)ds$ که $|\sigma|_H = \sqrt{\int_\circ^T |\sigma(t)|^{\text{۲}} dt}$، یعنی مسیرهایی با انرژی متناهی. فضای هیلبرت H نقشی اساسی ولی مرموز در تحلیل‌های متضمن γ بازی می‌کند؛ مثلاً خود γ را براساس (۲) معلوم می‌کند، زیرا هر اندازه‌ای با تبدیل فوریه‌اش مشخص می‌شود. با این حال

(i) γ ـ اندازهٔ مجموعهٔ $i(H)$ در E صفر است.

(ii) گردایهٔ همهٔ مجموعه‌های اندازه صفر در E تحت انتقال به موازات عنصری چون v از E ناوردا است اگر و فقط اگر v در تصویر H قرار گیرد.

Lenard Gross, 1983

در مورد حرکت براونی کلاسیک، (i) مبین این حقیقت است که مسیرهای براونی انرژی متناهی ندارند و (ii) هم برگردانی است از قضیهٔ کامرون ــ مارتین[1]. به همین دلیل معمولاً H را فضای کامرون ــ مارتین منسوب به γ می‌نامند. نکتهٔ مهم در اینجا این است که دنباله‌ای از افکنش‌های متناهی ــ بعد $\{P_n : n = \text{۱}, \cdots, \infty\}$ روی E وجود دارد که بردشان در $ij(E^*)$ واقع است و تحدیدشان به افکنش‌های متعامد روی H، به‌طور قوی به نگاشت همانی روی H همگرا است. به‌علاوه به عنوان نگاشت‌هایی روی E در احتمال به نگاشت همانی همگرا هستند. در مورد فضای وینر کلاسیک، این افکنش‌ها را می‌توان از خانوادهٔ تقریب‌های قطعه‌ای خطی $\{P_\pi : \pi$ افرازی از بازهٔ $[\circ, T]$ است$\}$، انتخاب کرد که در آن $P_\pi(\sigma) = \sigma_\pi$ و به ازای $t_{j-\text{۱}} \leq t \leq t_j$،

$$\sigma_\pi(t) = (t_{j+\text{۱}} - t_j)^{-\text{۱}}((t - t_j)\sigma(t_{j+\text{۱}}) + (t_{j+\text{۱}} - t)\sigma(t_j))$$

و البته π افرازی است به شکل $\{\circ = t_\circ < t_\text{۱} < \cdots < t_k = T\}$ برای بازهٔ $[\circ, T]$. انتگرال‌گیری از تابعی از یک مسیر به کمک تقریب‌های $f \circ P_\pi$ درست همتای «برش زمانی» در تعریف انتگرال‌های

1) Cameron – Martin

مسیری فاینمن است که در آن به‌طور صوری به جای t در (۱)، «it» قرار گرفته است.

ب. برای خمینهٔ ریمانی M از ردهٔ C^∞، حرکت براونی $BM(M)$ روی M فرآیند M ـ مقداری است که مسیرهای پیوسته دارد، از نقطه‌ای چون $x_\circ$ روی M آغاز می‌شود و در ویژگی‌های مشخصه‌ای درست مشابه با آنچه دربارهٔ $BM(\mathbb{R}^m)$ در بالا گفتیم صدق می‌کند. به عبارت دیگر

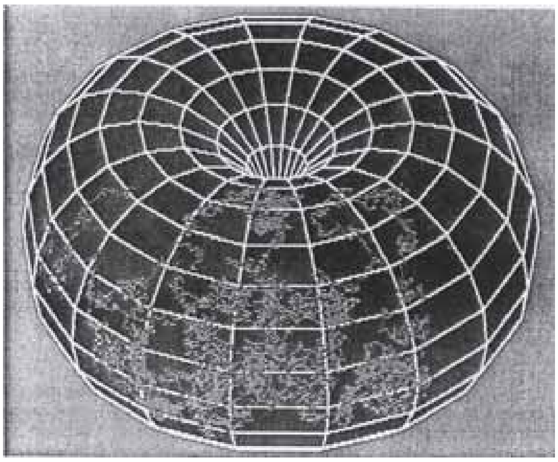
$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = -\frac{۱}{۲}\Delta f_t \tag{۳}$$

(۱) برقرار است (البته A_j زیرمجموعهٔ برل M است) و $p_t(x,y)$ در اینجا جواب اساسی معادلهٔ حرارت است که توابع در این معادله روی M تعریف می‌شوند و Δ عملگر لاپلاس ـ بلترامی[۱] روی M است (البته Δ را به شکل $-\operatorname{div}\operatorname{grad}$ تعریف می‌کنیم تا بعداً با قواعد علامت‌گذاری هندسه‌دانان هم‌خوانی داشته باشد). به ویژه اگر $\{\xi_t(x_\circ) : t \geq \circ\}$ حرکت براونی روی M باشد که از نقطهٔ $x_\circ$ آغاز می‌شود، آن‌گاه نیمگروه $\{P_t : t \geq \circ\}$ که به صورت زیر روی توابع اندازه‌پذیر کراندار تعریف می‌شود:

$$P_t f(x_\circ) = \mathbb{E} f(\xi_t(x_\circ)) \tag{۴}$$

دقیقاً نیمگروه حرارت است که مولد آن هم بستار عملگر $-\Delta$ است. معادلاً حرکت براونی روی M فرآیندی است مارکوف با مسیرهای پیوسته (یک فرآیند نفوذ) و توسط عملگر لاپلاس ــ بلترامی تولید می‌شود. ایرادی که بلافاصله می‌شود بر این تعریف $BM(M)$ وارد کرد این است که خوب ممکن است $BM(M)$ برای همهٔ زمان‌ها وجود نداشته باشد: در صورتی‌که M فشرده نباشد مثل یک گوی باز در $\mathbb{R}^m$، یا این‌که اگر انحنای خمینه از پایین کراندار نباشد، چنین وضعی رخ می‌دهد. این امکان، از دیدگاه آنالیزی این‌گونه رخ می‌نماید که برای نیمگروه حرارت داریم $P_۱ ۱ < ۱$؛ یعنی ممکن است فرآیند، ناپایستار یا زیرمارکفی باشد. در این صورت حرکت براونی روی M یک زمان انفجار مثبت $\zeta(x_\circ, \omega)$ خواهد داشت که پس از آن یا دیگر وجود خارجی ندارد یا در نقطه‌ای خیالی در بی‌نهایت به خواب ابدی خواهد رفت. نمود آنالیزی دیگر برای چنین وضعیتی در فقدان یکتایی نیمگروه و جواب اساسی انعکاس می‌یابد (مثلاً، می‌توانستیم روی گوی شرایط مرزی نویمان را قرار دهیم که معادل با انعکاس حرکت براونی پس از برخوردش به مرز است). این جواب اساسی به تعبیری جواب می‌نیمال منسوب به مسألهٔ دیریکله در بی‌نهایت است. در [Az74] پاسخ به این سؤالات در مورد حرکت براونی و فرآیندهای نفوذ بیضوی کلی‌تر، به‌طور جامع داده شده است. به‌علاوه، محک‌هایی نیز برای بازگشتی یا گذرا بودن حرکت براونی ارائه شده است که منبعث از کارهای اولیه‌ای است که خازمینسکی[۲] روی فرآیندهای نفوذ یک‌بعدی انجام داد.

1) Laplace–Beltrami 2) Khasminskie



حرکت براونی روی چنبره از دید سه بعدی

محک بنیادی مربوط به حرکت براونی روی خمینه‌های کاملی که انحنای ریچی آن‌ها از پایین کراندار است، این است که $t \geq 0$، $P_t 1 = 1$ (و بنابر این $BM(M)$ انفجاری ندارد و این به کمال تصادفی موسوم است). اثبات آنالیزی این مطلب را یائو[1] در سال ۱۹۷۸ ارائه داد. این نتیجه، از جنبهٔ احتمالاتی واضح به نظر می‌رسد: اگر $r_t = d(p, x_t)$ که در آن $x_t = \xi_t(x_\circ)$ و $d(p, .)$ تابع فاصله از نقطهٔ ثابت p، $p \neq x_\circ$ روی M است، در این صورت دست‌کم از اواسط دههٔ ۷۰ به این طرف معلوم شده است که (مثلاً رجوع کنید به $[DGM]$) بنابر فرمول ایتو

$$r_t = d(p, x_\circ) + \beta_t - \frac{1}{2}\int_\circ^t \Delta(d(p, .))(x_s)ds \qquad (5)$$

در اینجا $\{\beta_t : t \geq \circ\}$ حرکت براونی استانده روی $\mathbb{R}$ است که لااقل تا زمان $\zeta(x_\circ)$ امتداد دارد و $d(p, .)$ تابعی است از ردهٔ C^2. از اینجا به‌سادگی نتیجه می‌شود که اگر $\Delta(d(p, .))$ از پایین کراندار باشد، r_t نمی‌تواند در زمان متناهی بی‌نهایت شود و همتای هندسی این شرط، از پایین کراندار بودن انحنای ریچی است. در این زمینه مرجع [Pin78] را ببینید. اما مسأله این است که تابع $d(p, .)$ خارج مجموعهٔ نقاط برش $C(p)$ از ردهٔ C^2 است و پس از آن که حرکت براونی وارد این مجموعه می‌شود، دیگر رابطهٔ (۵) برقرار نیست.

معادلهٔ (۵) مبنای تحقیقات اولیهٔ بسیاری در دههٔ ۷۰ بوده است؛ مراجع [DGM]، [Pin78]، و [E181] را ببینید. از طرفی، خمینه‌های کارتان ـ آدامار (یعنی خمینه‌های همبند ساده با انحنای مثبت) نقاط برش ندارند و لذا می‌شد آن‌ها را در اثبات قضیهٔ پرات در سال ۱۹۷۵ دربارهٔ واگرایی حرکت براونی به بی‌نهایت به‌کار برد [Pin78].

1) S. T. Yau

با این حال مسألهٔ ضعیف‌تر کردن شرط مربوط به کران انحناء ماند تا این که هسو و کیفر[1] در [Corn87] و کرانستون و دیگران در [Greg95] صورت مجردی از آن را برای خمینه‌هایی که در شرایط هذلولوی گروموف صدق می‌کنند، تشریح کردند. در ۱۹۸۷، کندال[2] نشان داد که اگر یک «زمان موضعی[3]» روی مکان برش هم به سمت راست رابطهٔ (۵) بیفزاییم صحت آن همچنان برقرار است. این جملهٔ اضافی، ناصعودی است تا این‌که مسیرها به مکان برش برخورد کنند که از آنجا به بعد نزولی می‌شود. در واقع این جمله، رشد r_t را کند می‌کند. شرح این مطلب در [Ken87] آمده است.

یک ویژگی خمینه‌های ریمانی کامل که از انحنایشان «کلی‌تر» است، رشد حجمی است. یعنی رفتار حجم گوی شعاع r، $V(r)$ حول نقطهٔ $x_\circ$ روی M، وقتی $r \longrightarrow \infty$. این رفتار با انحنای ریچی کنترل می‌شود لکن فقط برای متریک‌های غیرهموار معنی پیدا می‌کند. ارتباط بین رشد حجمی با رفتار حرکت براونی روی M (یا دست کم با مفاهیم همتای آنالیزی خودش) را یک وقتی گافنی در [Gaf59] بررسی کرده بود. او نشان داد که اگر همهٔ توان‌های $\exp(-d(p, .))$ روی M انتگرال‌پذیر باشند، هیچ انفجاری رخ نخواهد داد. از آن سو، چنگ و یائو[4] نشان دادند [ChY75] که اگر رشد $V(r)$ حداکثر درجه دوم باشد، حرکت براونی روی M بازگشتی خواهد بود. در اواسط دههٔ ۱۹۸۰، کارپ و لی[5]، رابطهٔ بین رشد حجمی و عدم انفجار را در یک مقالهٔ منتشر نشده، شرح دادند که به دنبال آن تاکدا[6] اثبات هوشمندانه‌ای برای آن به کمک فرآیندهای دیریکله، ارائه داد. به علاوه گریگوریان[7] نشان داد [Grig86] که تصادفی ــ کامل بودن به شرطی برقرار است که $\int_\circ^\infty \frac{r}{\log V(r)} dr = \infty$.

Elton P. Hsu, 1992

1) Hsu and Kifer 2) W. Kendall 3) Local time 4) Cheng and Yau 5) Karp and Li 6) Takeda 7) Grigoryan

تحقیقات در زمینه‌هایی از قبیل عدم‌انفجار، بازگشتی بودن، گذرا بودن یا رفتار در بی‌نهایت دربارهٔ حرکت براونی روی M یا فرآیندهای نفوذ کلی‌تر، همچنان ادامه یافته است، البته نه صرفاً به خاطر رابطه‌ای که این موضوعات با نظریهٔ پتانسیل دارند. برای مثال رجوع کنید به [Az74]، [Corn95] و آنچه کیفر در [War85]، و واروپولوس در [Corn87] انجام داده‌اند. کار پرات همراه با کیفر و به دنبال آن سولیوان[1] منجر به حل مسألهٔ «دیریکله در بی‌نهایت» برای رده‌ای از خمینه‌های کارتان ــ آدامار شد (ساختن توابع همساز کراندار). قدم مهم دیگر را اندرسن و شوئن[2] در سال ۱۹۸۵ برداشتند که نشان دادند مرز مارتین (یا به عبارتی توصیف توابع همساز مثبت) با کره در بی‌نهایت برای خمینه‌های فوق یکی است. سپس آنکونا[3] این نتیجه را تعمیم داد، ساده ساخت و آن را در بستر هندسهٔ هذلولوی قرار داد[St-F188]. کیفر نیز دیدگاه احتمالاتی را برگزید[War85]. در مورد حرکت براونی روی فضاهای متقارن نیز کارهایی انجام شده است: از جمله دینکین[4] در دههٔ ۱۹۶۰ و به دنبال آن نوریس[5]، راجرز و ویلیامز[6] در سال ۱۹۸۶ و مالیوان[7] در سال ۱۹۷۴ که جی. سی. تیلور[8] آن را در دههٔ ۸۰ ادامه داد. می‌توانید مقالات پاول و راجرز و تیلور را در [Corn87] ملاحظه کنید. در واقع بررسی رفتار طولانی مدت حرکت براونی روی فضاهای متقارن گروه‌های لی نه تنها از غنای ذاتی برخوردار است، بلکه ارتباط نزدیکی با مبحث مهم مجانب‌های ماتریس‌های تصادفی و شارهای تصادفی و همچنین نظریهٔ ارگودیگ ضربی وابسته به آن دارد. مقالهٔ م. لیائو[9] در [Corn93] و مراجع مورد اشاره در آن را ببینید.

از اوایل دههٔ ۸۰ به این طرف، تحقیقات در زمینهٔ نظریهٔ ارگودیک ارتباط عمیقی با رفتار حرکت براونی و اندازه‌های پتانسیل وابسته به آن روی کره‌های در بی‌نهایت خمینه‌های کارتان ــ آدامار، به ویژه پوشش‌های خمینه‌های فشرده داشته است.

Michael Cranston, 1994

1) Sullivan 2) Anderson–Shoen 3) Ancona 4) Dynkin 5) Norris 6) Rogers and Williams 7) Malliavin and Malliavin 8) J. C. Taylor 9) M. Liao

در این زمینه می‌توانید به لدراپیر[۱] در [Corn93] و [Kai90] رجوع کنید. این موضوع ارتباط نزدیکی با ویژگی‌های گروه‌های گسسته نیز دارد. رجوع کنید به واروپولوس در [Corn87]. رفتار کوتاه مدت حرکت براونی و هندسهٔ دیفرانسیل موضعی، عمدتاً در دههٔ ۸۰ در سلسله مقالاتی که پینسکی[۲] و همکارانش نوشتند، ظاهر شد. آن‌ها بسط‌های مجانبی برای کمیت‌هایی از قبیل میانگین زمان خروج حرکت براونی از یک گوی ژئودزیک کوچک یا مقدار ویژهٔ اصلی همسایگی‌های لوله‌وار زیرخمینه‌ها، ارائه دادند. در این باره کارپ و پینسکی را در [Crn87] ببینید. معلوم شد که در حالت‌های معینی، جملات این بسط‌ها، هندسهٔ موضعی خمینه‌ها را مشخص می‌کند: پینسکی در [Dur90] را ببینید.

پ. ساختن حرکت براونی روی M، یا معادلاً اندازهٔ وینر متناظرش روی فضای مسیرهایی که از نقطهٔ $x_\circ \in M$ آغاز می‌شوند، یعنی فضای $C_\circ([\circ,\infty);M)$ یا $C_\circ([\circ,T];M)$ مشکل نیست. به فرض برقراری ویژگی بیان شده در معادلهٔ (۱)، وجود چنین حرکت براونی بلافاصله از قضیهٔ توسیع کلموگروف و خواص پیوستگی فرآیندهای مارکفی که دارای عملگر مولد دیفرانسیل‌پذیر هستند، نتیجه می‌شود. این مطلب حتی در مورد فرآیندهایی که مولد نیمه بیضوی کلی‌تری دارند برقرار است، منتهی این بار ممکن است جواب اساسی به صورت یک تابع وجود نداشته باشد و لذا در معادلهٔ (۱) می‌بایست به‌جای جملهٔ $p_t(x,y)dy$ اندازهٔ (احتمال گذر) $p_t(x,dy)$ را قرار دهیم. در پرداختن به متریک‌های ریمانی غیرهموار یا مولدهایی که ضرایب غیرهموار دارند، از یک طرف رویکرد «مارتینگلی» منتسب به استروک[۳] و وارادان[۴] وجود دارد که در اواخر دهه‌های ٦۰ و ۷۰ عرضه شد و در این باب می‌توانید فصلی را که د. ویلیامز در [Dur80] با عنوان « پنجاه سال معادلهٔ پیشرو[۵] » نگاشته است یا مرجع [Az74] را مطالعه کنید. از طرف دیگر به‌خصوص دربارهٔ فرآیندهای نفوذ متقارن مثل حرکت براونی، نظریه‌ی فرم‌های دیریکله را داریم که فوکوشیما در دههٔ ۷۰ ارائه داد که روش مستقیمی برای ساختن حرکت براونی روی خمینه‌های M که ساختار ریمانی صرفاً پیوسته دارند، به‌دست می‌دهد[FOT]، [MR]؛ دربارهٔ فرآیند نفوذ روی خمینه‌های لیپشیتزی آنچه ژنگ[٦] در [Corn93] نگاشته است و دربارهٔ فرآیندهای نفوذ روی رده‌ای از فضاهای متریک کار استورم در [Crete97] را ملاحظه کنید.

به کارگیری نظریهٔ معادلات دیفرانسیل تصادفی نه تنها رویکردی پویاتر در مطالعهٔ فرآیندهای نفوذ فراهم می آورد و در الگوسازی دستگاه‌های دینامیکی عادی هم دارای اهمیت است، بلکه ساختن مستقیم ساختارهای هندسی زیادی را از قبیل آن‌چه که ایتو در سخنرانی ۱۹٦۲ خود دربارهٔ انتقال‌های موازی تشریح کرد، بدون استفاده از تقریب‌ها امکان‌پذیر می‌سازد و به‌علاوه ارتباط مستقیمی هم بین فضای وینر تخت $C_\circ([\circ,T];\mathbb{R}^m)$ و مسیرهای واقع در M ایجاد می‌کند. به یاری رویکرد استراتونویچ[۷] در حسابان تصادفی بود که پیچیدگی‌های هندسی ناشی از مشتقات مرتبهٔ دوم موجود در فرمول ایتو برطرف شد: با فرض این‌که شرایط همواری کافی برقرار است، انتگرال

1) Ledrappier 2) Pinsky 3) Stroock 4) Varadan 5) Fifty years of the forward equation
6) Zheng 7) Stratonovich

L. C. G. Rogers, 1993

ایتوی یک فرآیند $\mathbb{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ ـ مقدار $\{a_t \,:\, t \geq 0\}$ نسبت به حرکت براونی $BM(\mathbb{R}^m)$ با نماد $\{B_t \,:\, t \geq 0\}$ عبارت است از

$$\int_0^t a_s(.)dB_s(.) \;=\; L^2 - \lim \sum_j a_{t_j}(.)(B_{t_{j+1}}(.) \;-\; B_{t_j}(.)) \;:\; \Omega \to \mathbb{R}^p$$

که در اینجا حد وقتی طول بزرگترین زیربازهٔ افراز $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t$ به صفر میل کند محاسبه می‌شود. فرمول ایتو مربوط است به ترکیب این فرآیند با یک نگاشت $\phi : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ از ردهٔ C^2، به این ترتیب که اگر قرار دهیم $z_t = \int_0^t a_s dB_s$ و با حذف نمایش وابستگی به $\omega \in \Omega$ داریم

$$\phi\left(\int_0^t a_s dB_s\right) = \phi(0) + \int_0^t D\phi(z_s)(a_s dB_s) + \frac{1}{2}\int_0^t D^2\phi(z_s)(a_s dB_s \,,\, a_s dB_s)$$

که در اینجا بر مبنای قاعدهٔ ضرب ایتو $dB_s^i dB_s^j = \delta_{ij} ds$، تعبیر جملهٔ مرتبهٔ دوم به صورت $\frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{trace} D^2\phi(z_s)(a_s- \,,\, a_s-)ds$ است که البته وجودش به این خاطر این است که مسیرهای حرکت براونی با تغییر کراندار نیستند. از طرف دیگر نظیر همین دستور در مورد انتگرال استراتونویچ به این صورت است:

$$\int_0^t a_s(.) \circ dB_s(.) \;=\; L^2 - \lim \sum_j a_{(t_j+t_{j+1})/2}(.)(B_{t_{j+1}}(.) \;-\; B_{t_j}(.)) \;:\; \Omega \to \mathbb{R}^p$$

و همچنین

$$\phi\left(\int_0^t a_s \circ dB_s\right) = \phi(0) + \int_0^t D\phi(z_s)(a_s \circ dB_s)$$

که در اینجا z_s انتگرال استراتونویچ است.

معادلهٔ استراتونویچ روی یک خمینهٔ M که از حرکت براونی $BM(\mathbb{R}^m)$ ناشی می‌شود، عبارت است از

$$dx_t = X(x_t) \circ dB_t + A(x_t)dt \tag{٦}$$

که در آن A یک میدان برداری است و برای هر x در M، $X(x) \in L(\mathbb{R}^m; T_x M)$، یعنی فضای نگاشت‌های خطی از $\mathbb{R}^m$ به‌توی فضای مماس بر M در نقطهٔ x. جواب این معادلهٔ دیفرانسیل فرآیند Mــ مقدار x_t است به طوری که در هر نقشهٔ موضعی در معادلهٔ انتگرالی استراتونویچ حاصل از به‌کاربردن نمایش‌های X و A در آن نقشه، صدق می‌کند. این مطالب نخستین بار در ۱۹۷۳ مطرح شد [Cl] و تا سال ۱۹۹۴ مخصوصاً در بین فیزیکدانان نظری که به انتگرال‌گیری‌های مسیری روی فضاهای خمیده علاقه‌مندند، رایج بود [Cumb74].

Daniel Stroock, 1988

معادلات استراتونویچ از نوع (٦) را می‌توان به کمک تقریب‌های قطعه‌ای خطی P_π که پیش از این معرفی کردیم نیز توصیف نمود. به ازای هر $\omega \in \Omega$ فرض کنید $B_t^\pi(\omega) = P_\pi(B_\cdot(\omega))(t)$. معادلهٔ دیفرانسیل زمان ــ وابستهٔ زیر را در نظر می‌گیریم که با $\omega \in \Omega$ پرمایش می‌شود:

$$\frac{dx_t^\pi}{dt}(\omega) = X(x_t^\pi(\omega))\frac{dB_t^\pi}{dt}(\omega) + A(x_t^\pi(\omega)) \tag{٧}$$

در اینجا $x_0^\pi(\omega) = x_0$ به ازای یک $x_0 \in M$ داده شده. با فرض این‌که X از ردهٔ C^2، A از ردهٔ C^1 و M خمینه‌ای فشرده است یا با فرض کرانداری مشتقات X و A در حالتی که $M = \mathbb{R}^m$، معادلات (٧) جواب دارند و حد در احتمال

$$x_t = \lim_\pi x_t^\pi : \Omega \longrightarrow M$$

به طور یکنواخت نسبت به t روی بازه‌های کراندار وجود دارد و جواب معادلهٔ (۶) است. استفاده از این دست تقریب‌ها برمی‌گردد به کارهای وانگ و ذاکایی[1] در ۱۹۶۵ که پس از آن‌ها مک‌شین[2] و استروک و وارادان این روش‌ها را گسترش دادند. این مطالب را ایلز[3] و الورثی به روی خمینه‌ها هم منتقل کردند [NWest78]، [El] و مالیوان با اصلاحاتی آن‌ها را مورد استفاده قرار داد [Mal78]. به زبان فضای کامرون ـ مارتین $H = L^{2,1}_{x_0}([0,T];\mathbb{R}^m)$ که قبلاً معرفی شد، هر h در H یک معادلهٔ دیفرانسیل عادی روی بازهٔ $0 \leq t \leq T$ به صورت زیر به‌دست می‌دهد:

$$\frac{d}{dt}\tilde{I}_t(h) = X(\tilde{I}_t(h))h'(t) + A(\tilde{I}_t(h)), \qquad \tilde{I}_0(h) = x_0. \tag{۸}$$

به این ترتیب، یک نگاشت $\tilde{I} : H \longrightarrow L^{2,1}_{x_0}([0,T];M)$ از فضای H به توی فضای $L^{2,1}$ همهٔ مسیرهایی در M که از نقطهٔ x_0 شروع می‌شوند، به‌دست می‌آید. اگر X و A هموار باشند این نگاشت، نگاشتی C^∞ بین خمینه‌های هیلبرتی خواهد بود. اکنون با به‌کار بردن قضیه‌های مربوط به تقریب، ترکیب نگاشتی

$$C_0([0,T];\mathbb{R}^m) \xrightarrow{P_\pi} H \xrightarrow{\tilde{I}} L^{2,1}_{x_0}([0,T];M) \longrightarrow C_{x_0}([0,T];M)$$

را به‌دست می‌آوریم که وقتی نرمِ افراز Π به صفر میل می‌کند، در احتمال به حد I_0 همگرا می‌شود که در اینجا $\{I_t : t \geq 0\}$ جواب معادلهٔ (۸) است با انتخاب صورت کانونی برای حرکت براونی $BM(\mathbb{R}^m)$. در حالت کلی نگاشت I اندازه‌پذیر است و خارج یک مجموعهٔ اندازه ـ صفر تعریف شده است و جز در موارد خاص مثل حالت $m = 1$ نمی‌تواند پیوسته باشد. این را نگاشت ایتو وابسته به معادلهٔ (۶) می‌نامند.

اکنون فرض کنیم که X و A از ردهٔ C^∞ باشند. در این صورت برای هر x_0، معادلهٔ (۶) جوابی دارد که خارج یک مجموعهٔ اندازه ـ صفر تعریف شده، نسبت به زمان پیوسته است و سازگار است به این معنی که برای هر t، x_t نسبت به σـ جبر تولید شده توسط $\{B_s : 0 \leq s \leq t\}$ اندازه‌پذیر است اما ممکن است صرفاً تا یک زمان انفجار $\zeta(x_0) : \Omega \longrightarrow (0,\infty]$ تعریف شده باشد که در ضمن اگر $\zeta(x_0)(\omega) < \infty$ آن‌گاه وقتی $t \uparrow \zeta(x_0)(\omega)$ داریم $x_t(\omega) \to \infty$. اگر برای تقریباً هر $\omega \in \Omega$ داشته باشیم $\zeta(x_0)(\omega) = \infty$، آن‌گاه معادله را کامل یا پایستار(با شروع از x_0) می‌خوانیم. به کمک این جواب‌ها، نیمگروه $\{P_t : t \geq 0\}$ ساخته می‌شود که روی توابع اندازه‌پذیر کراندار $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ اثر می‌کند به صورت

$$P_t(f)(x_0) = \mathbb{E}f(x_t)$$

تعریف می‌شود. عملگر مولد $\mathcal{A}$ برای این نیمگروه که روی توابع از ردهٔ C^2 تعریف می‌شود، عبارت است از

$$\mathcal{A}(f)(x) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\mathcal{L}_{X^j}\mathcal{L}_{X^j}f + \mathcal{L}A(f). \tag{۹}$$

---

1) Wong & Zakai   2) McShane   3) Eells

که در اینجا $X^{1},\cdots,X^{m}$ عبارت‌اند از میدان‌های برداری $X^{j}(x)=X(x)e_{j}$ و $e_{1},\cdots,e_{m}$ یک پایهٔ متعامد یکه برای $\mathbb{R}^{m}$ است. به علاوه $\mathcal{L}$ عملگر مشتق‌گیری لی است، یعنی مشتق‌گیری در جهت میدان برداری داده شده: $\mathcal{L}_{A}(f)(x)=df(A(x))$ برای هر $x\in M$. در واقع تعریف انعطاف‌پذیرتر دیگری که برای جواب‌های (۶) وجود دارد و در $[IW]$ از آن استفاده شده است، این است که $\{x_{t}\,:\,0\leq t<\rho\}$ جواب است اگر برای هر تابع C^{2} مانند $f\,:\,M\longrightarrow\mathbb{R}$ داشته باشیم

$$f(x_{t})=f(x_{0})+\int_{0}^{t}df(X(x_{s})dB_{s})+\int_{0}^{t}\mathcal{A}(f)(x_{s})ds, \qquad (10)$$

تقریباً همه جا برای $0\leq t<\rho$. براحتی می‌توان دید که $\mathcal{A}$ یک عملگر دیفرانسیل مرتبهٔ دوم نیمه‌ــ بیضوی است و بیضوی است در صورتی که میدان برداری X ناتبهگون باشد به این معنی که برای هر $x\in M$، نگاشت $X(x)\,:\,\mathbb{R}^{m}\to T_{x}M$ پوشا باشد. در چنین صورتی یک متریک ریمانی روی M مشخص می‌شود که ضرب داخلی آن عبارت است از $\langle\,,\rangle_{x}=\langle\,,\rangle_{x}^{X}$ که همان ضرب داخلی استانده روی $\mathbb{R}^{m}$ است تقسیم بر $X(x)$. عملگر $\mathcal{A}$ را برحسب هموستار لوی ــ چیویتا ∇ برای این متریک می‌توان به صورت

$$\mathcal{A}=-\frac{1}{2}\Delta+\mathcal{L}_{A^{x}},$$

نوشت که در آن $A^{x}=A+\frac{1}{2}\sum_{j}\nabla_{X^{j}}X^{j}$. به‌ویژه، جواب‌ها نسبت به این متریک، حرکت براونی خواهند بود اگر وفقط اگر $A^{x}\equiv 0$.

چند مثال: اصلی‌ترین مثال‌های هندسی در مورد مطالب پیش‌گفته از این قرارند:

۱. دستگاه‌های گرادیانی: فرض کنید خمینه‌ی M در $\mathbb{R}^{m}$ غوطه‌ور شده باشد. نگاشت $X(x)\,:\,\mathbb{R}^{m}\longrightarrow T_{x}M$ را افکنش متعامد تعریف می‌کنیم. در این صورت $X^{j}(x)=\mathrm{grad}\alpha^{j}(x)$ که در آن $\alpha=(\alpha^{1},\cdots,\alpha^{m})\,:\,M\longrightarrow\mathbb{R}^{m}$ غوطه‌ورسازی مربوطه است. با فرض $A\equiv 0$ جواب معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی حاصل حرکت براونی روی M است. در این باره و صورت‌های دیگر آن رجوع کنید به [El]، [El87] و [RW].

۲. دستگاه‌های چپ (راست) ــ ناوردا روی گروه‌های لی: فرض کنید $M=G$ یک گروه لی باشد و X چپ ــ ناوردا است به این معنی که $X(gx)e=TL_{g}(X(x)e)$ به ازای هر $e\in\mathbb{R}^{m}$، $x\in G$، $g\in G$، که در آن L_{g} عمل ضرب از چپ در g و TL_{g} نگاشت مشتق القایی روی فضاهای مماس است. در این وضعیت، X با مقدارش در عنصر همانی به‌طور کامل معین می‌شود. اگر X ناتبهگون باشد و متریک چپ ــ ناوردایی که القاء می‌کند، راست ــ ناوردا هم باشد، آن‌گاه $A\equiv 0$ و جواب‌های معادله دوباره حرکت براونی خواهند بود. این، طبیعی‌ترین روشی است که می‌توان برای ساختن حرکت براونی روی گروه‌های لی فشرده به‌کار برد. جواب‌های معادله‌ای از این دست معمولاً به‌عنوان انتگرال ضربی تصادفی در نظر گرفته می‌شوند[۱۶]. مثال مهم تبهگون در این زمینه معادله‌ای است

روی گروه هایزنبرگ[1] که در [Gav77] مطالعه شده است. این مثال از نوع غیر بیضوی است. بخش ۵ مقالهٔ حاضر را نیز نگاه کنید.

۳. توسعهٔ تصادفی: برای یک خمینهٔ ریمانی M هیچ معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی کانونی که جواب‌هایش حرکت براونی باشند وجود ندارد. با این حال روی کلاف OM متشکل از همهٔ چارچوب‌های متعامد یکه روی M، هموستار لوی ـ چیویتا، یک معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی به شکل

$$du_t = X(u_t) \circ dB_t \tag{11}$$

به دست می‌دهد که برای هر چارچوب متعامد یکه u (یعنی طولپایی $u : (\mathbb{R}^m, \langle\rangle) \longrightarrow (T_xM, \langle\rangle)$) در نقطهٔ $x \in M$، $X(u)e$ انتقال افقی $u(e)$ به توی T_uOM است (در اینجا $m = n = \dim M$). اگر $x_\circ \in M$ و یک چارچوب $u_\circ$ را در $x_\circ$ تثبیت کنیم، می‌توانیم معادلهٔ (۱۱) را حل کنیم و u_t را به دست آوریم. سپس با تصویر کردن روی M، فرآیند $\{x_t : \circ \leq t < \rho(u_\circ)\}$ به دست می‌آید که گرچه به $u_\circ$ وابسته است لیکن همواره یک حرکت براونی روی M خواهد بود. این مطلب، صورت تصادفی قضیهٔ گسترش کارتان است که غلطیدن یک جسم صلب را در امتداد یک خم، بدون سُر خوردن یا هرزگردی توصیف می‌کند. در واقع، جریان از این قرار است که اگر در (۱۱) به جای $B_\circ(\omega)$، مسیر هموارتری مثل $h \in H$ را قرار دهیم، آن‌گاه جواب $\tilde{I}_\circ(h)$ مسیر حرکت نقطه‌ی تماس M را با $\mathbb{R}^m$ نشان می‌دهد وقتی که M در امتداد خم h پس از «افتادن روی $\mathbb{R}^n$»، می‌غلطد. البته این عمل با دخالت چارچوب $u_\circ$ که $T_{x_\circ}M$ را با $\mathbb{R}^n$ یکی می‌کند، صورت می‌پذیرد. این مسأله‌ای در علم حرکت شناسی بود که الی کارتان[2] آن را حل کرد. مطالعهٔ شکل تصادفی این مسأله برمی‌گردد به سال ۱۹۶۴ [Gan] و همچنین ایلز و الورثی در اوایل دههٔ ۷۰ آن را به کمک معادلهٔ (۱۱)، صورتبندی کردند. فرآیند $\{u_t : t \geq \circ\}$ را می‌توان انتقال افقی حرکت براونی روی M دانست که از اوایل دههٔ ۷۰ به این طرف، مالیوان و شاگردانش آن را به‌طور سازمان‌یافته‌ای فی‌المثل در توصیف معادلهٔ حرارت برای فرم‌ها، به خدمت گرفته‌اند [Mall74]، [Air76] و [Mer]. وقتی که u_t را داشته باشید، انتقال موازی $// : T_{x_\circ}M \longrightarrow T_{x_t}M$ در امتداد مسیر x را هم دارید که به این صورت تعریف می‌شود: $//. = u_t \circ u_\circ^{-1}$. استفاده از صورت‌بندی مسأله به شکل (۱۱) این امکان را فراهم می‌آورد که این ساختارها را بدون توسل به فرآیند تقریب که ایتو در سال ۱۹٦۲ معرفی کرد، به انجام برسانیم. به‌کارگیری نتایج تقریب مزبور به این معنی است که می‌توانیم از تمامی قواعد حسابان کوواریان سود جوییم حتی اگر به‌جای مسیرهای هموار روی M از مسیرهای نمونه‌ای حرکت براونی یا فرآیندهای نفوذ کلی‌تر و یا حتی نیم‌مارتینگل‌های پیوسته استفاده کنیم، مشروط بر این‌که جملات مشتمل بر مشتق‌های این مسیرها را بر حسب دیفرانسیل‌های استراتونویچ بیان کنیم: این همان «اصل انتقال» مالیوان است.

گسترش تصادفی، یک نگاشت حافظ اندازه از فضای وینر کلاسیک روی $\mathbb{R}^m$ به توی فضای وینر مرکب از همهٔ مسیرهای پیوسته‌ای که از $x_\circ$ روی M آغاز می‌شوند همراه با اندازهٔ ناشی از

1) Heisenberg 2) E. Cartan

حرکت براونی روی M، به دست می‌دهد:

$$\mathcal{D} \,:\, C_\circ([\circ,T];\mathbb{R}^m) \longrightarrow C_{x_\circ}([\circ,T];M)$$

این نگاشت، به تعبیری یک یکریختی بین این فضاها است و تعریفش طوری است که صرفاً نگاشتی است اندازه‌پذیر که خارج یک مجموعه اندازه صفر اعتبار دارد. به علاوه به یک معنی توسیعی است از گسترش کارتان و یک وابرریختی[1] C^∞ را بین فضای هیلبرت $H = L^{\text{۲},\text{۱}}_\circ([\circ,T];\mathbb{R}^m)$ و خمینهٔ هیلبرتی متناظرش $H = L^{\text{۲},\text{۱}}_{x_\circ}([\circ,T];M)$ ارائه می‌دهد. با این حال، اندازهٔ این زیرفضاها صفر است. یکی از اصلی‌ترین مسائل در گسترش آنالیز تصادفی این بوده که چگونه بین این واقعیات یا چیزهایی شبیه آن‌ها در حوزه‌های گوناگون ارتباط ایجاد کنیم.

شرحی از تقریب‌های متناهی ــ بعد اندازهٔ وینر روی $C_{x_\circ}(M)$ در مرجع $[AnDr]$ یافت می‌شود. در $[Str]$ هم توصیفی شهودی از این مطالب ارائه شده است.

ت. یکی از پیشرفت‌هایی که اخیراً صورت گرفته رویکردی است که لیونز[2] در مطالعهٔ معادلات از نوع استراتونویچ به‌کار گرفته است. در این رویکرد جواب‌های مسیروار با این شرط به‌دست می‌آیند که نوفهٔ موجود در معادله (در اینجا مسیرهای براونی) به همراه «انتگرال‌های مساحت[3]» که در شرایط طبیعی معینی صدق می‌کنند، داده شده باشد. در این وضعیت، احتمالات فقط به مثابه ابزاری برای ساختن این انتگرال‌ها رخ می‌نماید. اساساً نگاشت‌های ایتو (یعنی نگاشت‌های جواب) توابعی پیوسته از این مسیرها وانتگرال‌های مساحت وابسته به آن‌ها هستند. در حالت کلاسیک مسیرهای براونی، مساحت لوی است که مورد استفاده قرار می‌گیرد، لیکن برای مسیرهایی کلی‌تر از مسیرهای براونی، مثل آن‌هایی که پیوستهٔ هلدر هستند، از انتگرال‌های مساحت مرتبهٔ بالاتری متضمن انتگرال‌های مکرر استفاده می‌شود. جزئیات کامل در $[Ly]$ آمده است.

Mark Freidlin, 1994

1) diffeomorphism 2) Lyons 3) area integrals

شار جواب برای معادلات دیفرانسیل تصادفی

الف. در قیاس با دستگاه‌های دینامیکی عادی، می‌توان انتظار داشت که معادله‌ای نظیر (٦)، شار جوابی چون $\xi_t(x)(\omega)$ داشته باشد که تا یک زمان تصادفی $\zeta(x) : \Omega \to (\circ, \infty]$، $x \in M$، تعریف شده است؛ به این معنی که $\{\xi_t(x) : \circ \leq t < \zeta\}$ جوابی برای معادلهٔ (٦) با شرط اولیهٔ $\xi_\circ(x) = x$ باشد و $\xi_.(\,.\,)(\omega)$ به ازای تقریباً هر $\omega \in \Omega$ نسبت به (t,x) پیوسته و شاید هم نسبت به $x \in D_t(\omega) = \{y \in M : t < \zeta(y)(\omega)\}$ که زیرمجموعهٔ بازی از M است، هموار باشد. در ۱۹٦۱، بلاگوویشنسکی[1] و فریدلین[2] توانستند با استفاده از محک پیوستگی کلموگروف نشان دهند که اگر $M = \mathbb{R}^n$ و مشتقات X و A کراندار باشند، آن‌گاه چنین حکمی برقرار است. در این حالت، شار به ازای تمامی زمان‌ها وجود دارد، یعنی می‌توان آن را طوری انتخاب کرد که $\zeta(x)(\omega) = \infty$ برای هر x و تقریباً هر $\omega \in \Omega$. در صورتی که چنین شاری موجود باشد معادلهٔ (٦) را قویاً کامل یا اکیداً پایستار می‌نامیم. توجه کنید که جوابی از معادلهٔ (٦) که از نقطهٔ x آغاز می‌شود تنها در حد تغییرات روی یک مجموعهٔ اندازه ــ صفر یکتا است. به خاطر همین برای ساختن شار می‌بایست برای هر x یک برگردان از جواب را انتخاب کنیم (و خوب تعداد ناشمارایی از این برگردان‌ها وجود دارند، چون تعداد ناشمارا x داریم). ولی یکی از ویژگی‌های بارز این واقعیت وجود معادلاتی (مثلاً روی $\mathbb{R}^2$) است که کامل‌اند اما قویاً کامل نیستند و لذا $\zeta(x) = \infty$ تقریباً همه‌جا برای هر x اما نمی‌توان ζ را طوری انتخاب کرد که $\zeta(x) = \infty$ تقریباً همه‌جا برای تمامی xهامعتبر باشد. دراین باره می‌توانید مراجع [El]، و [Kun] را ملاحظه کنید و همچنین سری هم بزنید به [Li94] که در آن محک‌هایی برای قویاً کامل بودن ارائه شده است. پس می‌بینید که هنوز هم درک کاملی از این مسأله وجود ندارد. از میانهٔ دههٔ ۱۹۷۰ تا انتهای آن، روش‌های بلاگوویشنسکی و فریدلین را افرادی چون مالیوان و بکسندیل[3] مجدداً کشف کردند. برای این منظور، مالیوان از روش منظم‌سازی حرکت براونی سود جست. از سوی دیگر، الورثی با به‌کارگیری رویکردی که ابین و مارسدن[4] در بالابری معادلات دیفرانسیل عادی به گروه وابرریختی‌ها استفاده کرده بودند، توانست بر مسألهٔ انتخاب برگردان برای جواب فائق آید (در واقع جواب معادلهٔ بالا برده شده عبارت است از شار جواب برای معادلهٔ (٦)) و با به‌کار بردن حسابان تصادفی روی خمینهٔ هیلبرتی سوبولف H^sــ وابرریختی‌های M، به ازای s به اندازهٔ کافی بزرگ، نتایج گوناگون مربوط به تقریب‌ها و ترکیب‌ها را روشن سازد. پس از آن بیسموت[5] و کونیتا[6] [Dur80] جریان کار را به پیش راندند: ویژگی وابرریختی شارهای جواب برای معادلات روی $\mathbb{R}^n$ با شرایط لیپشیتز سراسری را ثابت کردند و به علاوه نشان دادند که این ویژگی لزوماً در حالت کلی برقرار نیست حتی اگر معادله، قویاً کامل باشد. گذشته از این‌ها وجود شارهای موضعی برای خمینه‌های نافشرده را نیز ثابت نمودند [Kun].

---

1) Blagoveschenskii 2) Freidlin 3) Baxendale 4) Ebin & Marsden 5) Bismut 6) Kunita

Yves Le Jan, 1999

کنفرانس درام[1] در ۱۹۸۰ [Dur80] تأثیر بسزایی بر تحقیقات در این زمینه و حوزه‌های متعدد دیگر گذاشت و این به خاطر ارتباطی بود که مطالب آن با حسابان مالیوان داشت.

ب. اکنون فرض کنید که M خمینه‌ای است فشرده. بکسندیل در [Bax84] نشان داد که «حرکت‌های براونی» روی گروه وابرریختی‌های M، شارهای جواب معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی روی Mاند. به علاوه او با گسترش دادن نتایجی که هانت[2] در همان موقع‌ها دربارهٔ رده‌بندی این دست از فرآیندها روی گروه‌های لی متناهی ـ بعد به دست آورده بود، نشان داد که اساساً این‌ها شارهای جواب یک معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی‌اند لیکن نوفهٔ موجود در معادله ممکن است یک حرکت براونی نامتناهی ـ بعد متناظر با یک اندازهٔ گاوسی روی فضای میدان‌های برداری روی M (فضای مماس بر $\mathrm{Diff}\, M$ در عنصر همانی) باشد، درست همان‌طور که $BM(\mathbb{R}^m)$ با اندازهٔ گاوسی استاندهٔ $\mathbb{R}^m$ در تناظر است. در این وضعیت، به جای $\mathbb{R}^m$ در معادلهٔ (۶) فضای میدان‌های برداری و به جای $X(x)$ ارزیابی در نقطهٔ x قرار می‌گیرد. پیشرفت‌های بیشتر را در این زمینه لی جان و واتانابه[3][Tan82] و کونیتا[Kun] به کمک معادلات دیفرانسیل تصادفی ناشی از مارتینگل‌های فضایی ـ تعمیم‌یافته، صورت دادند.

پ. مطالعهٔ توان‌های لیاپانوف برای معادلات دیفرانسیل تصادفی خطی و ویژگی‌های پایداری مربوط به آن را خازمینسکی در اواخر دههٔ ۶۰ آغاز نمود. سپس از اواخر دههٔ ۷۰ به این طرف، آرنولد و همکارانش پایدارسازی و ناپایدارسازی به کمک نوفه را با استفاده از قضیهٔ ارگودیک ضربی اسلدتس[4] شرح و بسط دادند. از میانهٔ دههٔ ۷۰ تا انتهای آن پسین[5] و روئل[6] بر روی نظریهٔ ارگودیک هموار کار کردند که در حالت تعینی روش‌های اسلدتس در مطالعهٔ دستگاه‌های دینامیکی غیرخطی را به‌کار می‌برد: توان‌های لیاپانوف منفی پایداری را نتیجه می‌دهند و توان‌های مثبت

1) Durham 2) Hunt 3) Le Jan & Watanabe 4) Oseledec 5) Pesin 6) Ruelle

«وابستگی حساس نسبت به شرایط اولیه» را، که این همان رفتار آشوبی است. پس از آن در ۱۹۸۰ آرنولد مسألهٔ توسیع این نتایج به معادلات دیفرانسیل تصادفی غیرخطی را مطرح ساخت که چند سال بعد، کارورهیل[1] آن را با موفقیت حل نمود و از آن نتایج مستقیمی دربارهٔ معادلات ناتبهگون روی خمینه‌های فشرده به‌دست آورد. برای مثال در این حالت بزرگترین توان لیاپانوف λ_1 قریب به یقین به ازای تقریباً هر $x_0 \in M$ از دستور

$$\lambda_1 = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log |T_{x_0}\xi_t|$$

به‌دست می‌آید که در آن $T_{x_0}\xi_t : T_{x_0}M \longrightarrow T\xi_t(x_0)M$ مشتق شار جواب معادلهٔ (٦) است. این توان، مستقل از x_0 و $\omega \in \Omega$ است. اگر λ_1 منفی باشد، خمینهٔ پایدار $U(x_0,\omega)$ با تعریف

$$U(x_0,\omega) = \{y \in M \ : \ \lim_{t\to\infty} \log d(\xi_t(x_0,\omega), \xi_t(y,\omega)) \le \lambda_1\}$$

که همسایگی باز تصادفی از x_0 وجود دارد، (مجدداً برای تقریباً هر (x_0,ω) در مجموعهٔ $M\times\Omega$). مجموعه مقالات کنفرانس ۱۹۸۴ برمن، حاوی مروری تاریخی بر این مطالب و مقالات مربوط به آن است [Brem84].

توان‌های لیاپانوف برای معادلاتی که به‌طور هندسی تعریف می‌شوند، ناورداهای هندسی‌اند. در حالت کلی محاسبه یا حتی برآورد آن‌ها آسان نیست. با این حال چاپل[2] نشان داد که مثلاً در مورد خمینهٔ فشردهٔ M که در $\mathbb{R}^m$ غوطه‌ور شده است، میانگین این توان‌ها برای دستگاه گرادیانی القایی از بالا به مقدارویژهٔ پیشرو عملگر $-\Delta\frac{1}{2}$ کراندار است. در این باب می‌توانید مقالهٔ او در [Brem84] و یا مرجع [El87] را ملاحظه کنید. همهٔ توان‌های لیاپانوف مربوط به شار کانونی روی کلاف چارچوبی S^n برابر صفرند در حالی که توان‌های لیاپانوف مربوط به خمینه‌هایی که انحنای ثابت منفی دارند، مشابه است با توان‌های شار ژئودزیکی روی آن‌ها. شارهای کانونی برای این دست خمینه‌های با انحنای ثابت در واقع شارهای دستگاه‌های چپ ـ ناوردا روی گروه‌های لی‌اند و توان‌ها توضیح می‌دهند که چگونه عمل ضرب از راست در جواب $u_t(\omega)$، فضا را به کمک اندازه‌ای ناشی از یک متریک چپ ـ ناوردا، منبسط یا منقبض می‌کند. این مطالب با مطالعاتی که فورستنبرگ[3] و دیگران روی ضرب ماتریس‌های تصادفی انجام داده‌اند و همچنین با رفتار مجانبی حرکت براونی بر روی گروه‌های لی و فضاهای متقارن در ارتباط است. مطالعهٔ موضوع اخیر را دینکین در ۱۹٦۸ آغاز نمود و مالیوان و مالیوان [MMall75] و اخیراً تیلور، بابیلو و لیائو آن را ادامه داده‌اند.

---

1) Carverhill 2) Chappell 3) Furstenberg

Martine. Babillot, 1998

یکی از مسائل مهم در این زمینه عبارت است از همگرایی توان‌های لیاپانوف وقتی ضریب نوفه به سمت صفر میل می‌کند. مشکل اصلی مربوط است به رفتار اندازه‌ی ناوردا برای معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی (که با فرض ناتبهگون بودن، اساساً یکتا است). این اندازه یا اندازه‌های حدی می‌بایست اندازه‌های ناوردای دستگاه‌های دینامیکی عادی حدی با ویژگی‌های خاصی باشند: اندازه‌های بون ـ روئل ـ سینایی[1]. این مسأله را کیفر برای رده‌ای از معادلات حل کرد، منتهی هنوز هم به‌عنوان یکی از مسائل سخت و مهم در این حوزه، باقی مانده است [Kif].

توان‌های گشتاوری، ارتباط نزدیک‌تری با توپولوژی و هندسهٔ خمینهٔ زمینه دارد تا توان‌های لیاپانوف نمونه‌ای. توان‌های گشتاوری برای هر $p \in \mathbb{R}$ و هر زیرمجموعهٔ K از M به صورت

$$\mu_K(t) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log \sup_{x\in K} \mathbb{E}|T_x \xi_t|^p$$

تعریف می‌شود. آرنولد[2] در تحقیقات اولیه‌ای که روی این توان‌ها انجام داد نشان داد که به‌عنوان تابعی از p نسبت به p محدب است و برای M های فشرده تحت شرایط هذلولوی معینی داریم $\mu_x(p) = \mu_M(p)$ برای هر $x \in M$ و به‌علاوه مشتق این تابع برابر است با بزرگترین توان لیاپانوف نمونه‌ای λ_1.

اگر M فشرده باشد، پایداری قوی در گشتاور مرتبهٔ p ـ ام، به این معنی که $\mu_M(p) < 0$، روی خمینه‌هایی که در قیود معینی صدق می‌کنند، تنها وقتی رخ خواهد داد که $p \geq 1$. برای مثال اگر $p \in \{1, \cdots, n-1\}$، آن‌گاه گروه‌های هموتوپی $\pi_j(M)$ می‌بایست به ازای $j = 1, \cdots, p$ برابر با صفر باشند. اگر این نتایج و محک‌های وابسته به آن را در مورد دستگاه‌های گرادیانی به‌کار ببریم، قضایایی دربارهٔ صفر شدن گروه‌های هموتوپی و همولوژی زیرخمینه‌های غوطه‌وری بر حسب

---

1) Bowen–Ruelle–Sinai 2) L. Arnold

شرایطی روی فرم‌های اساسی مرتبهٔ دوم آن‌ها به‌دست می‌آوریم که مشابه با نتایجی‌اند که پیش از این‌ها لاوسن وسیمونز[1] به‌دست آورده بودند، منتهی تحت شرایطی ضعیف‌تر[ElRo96]. همچنین به الورثی ولی در [Corn93] نگاه کنید. در مرجع [Tan82] لی‌جان و واتانابه به این مطلب اشاره کردند که کوواریانس اندازهٔ گاوسی روی میدان‌های برداری را که با حرکت براونی روی گروه وابرریختی‌های M مشخص می‌شود، می‌توان برای به‌دست آوردن نمادهای کریستوفل برای هموستار مستوی $\check{\nabla}$ روی M به‌کار برد که مولد فرآیند مارکف وابسته به آن صورت زیر را به خود می‌گیرد:

$$\mathcal{A}f = \frac{۱}{۲} trace \check{\nabla} df + \mathcal{L}_A f$$

در اینجا A میانگین اندازهٔ گاوسی است. اگر به معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی (٦) برگردیم نتیجه این خواهد بود که

$$\sum_j \mathcal{L}_{X^j} \mathcal{L}_{X^j} = \frac{۱}{۲} trace \check{\nabla} df. \qquad (۱۲)$$

این هموستار، متریکی است برای متریک ریمانی القاشده روی TM. اخیراً معلوم شده است که این هموستار لی جان ــ واتانابه ابزار مطالعاتی سودمندی در جاهای گوناگون است. اگر میدان‌های برداری W را به‌سان میدان‌های تصادفی بنگریم، به زبان اندازهٔ گاوسی γ روی میدان‌های برداری با میانگین صفر، داریم

$$\check{\nabla}_v Z = \frac{d}{dt} \mathbb{E}\{W(x_\circ) | W(a(t)) = Z(a(t))\}|_{t=\circ}$$

که در آن $v \in T_{x_\circ} M$، Z یک میدان برداری روی M است و $a : (-۱, ۱) \to M$ خم همواری است که در شرط $\dot{a}(\circ) = v$ صدق می‌کند. دقت در این نکته مهم است که این هموستار با مولد $\mathcal{A}$ مشخص نمی‌شود بلکه با عبارت A برحسب فرم‌های هرماندر[1] یا به عبارت دیگر برحسب معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی (٦) یا شار جواب $\{\xi_t : t \geq \circ\}$ معلوم می‌گردد. در واقع یکی از نتایج قضیهٔ وجودی این است که اگر $n > ۱$ آن‌گاه به هر معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی (٦)، یک معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی به شکل

$$dx'_t = X'(x'_t) \circ dB'_t$$

نظیر می‌شود که متضمن حرکت براونی روی فضای $\mathbb{R}^{m'}$ به ازای m'ی است و مولدش همان مولد معادلهٔ اصلی است. به عبارت دیگر می‌توان بخش غیرخطی را نادیده گرفت و لذا هنگامی که معادلهٔ (٦) را به‌عنوان اختلال تصادفی برای دستگاه دینامیکی عادی

$$\frac{dx_t}{dt} = A(x_t)$$

1) Simons and Lawson   1) Hörmander

در نظر می‌گیریم، باید خیلی محتاط باشیم. هموستار لی جان ــ واتانابه برای دستگاه‌های گرادیانی دقیقاً همان هموستار لوی چیویتا است و برای دستگاه‌های چپ ــ ناوردا روی گروه‌های لی دقیقاً هموستار چپ ــ ناوردای تخت است. معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی ما، نیمگروه $\tilde{P}_t^q$ روی q ــ فرم‌ها را با دستور

$$\tilde{P}_t^q(\phi) = \mathbb{E}\xi_t^*\phi = \mathbb{E}\phi \circ \Lambda^q T\xi \qquad (۱۳)$$

مشخص می‌کند که مولدش $\mathcal{A}^q$ مجدداً با مشتق‌گیری‌های لی در فرمول مربوط به $\mathcal{A}$ در (۹) به‌دست می‌آید. در حالت ناتبهگون داریم

$$\mathcal{A}^q = \frac{۱}{۲}\mathrm{trace}\hat{\nabla}^۲ - \frac{۱}{۲}(\breve{\mathbb{R}}^q)^* + \mathcal{L}_A$$

که در آن $\hat{\nabla}$ هموستار الحاقی هموستار لی جان ــ واتانابه به معنایی است که درایور[1] در [Dr۹۲] معرفی می‌کند و $(\breve{\mathbb{R}}^q)^*$ الحاقی نگاشت $\Lambda^q TM \to \Lambda^q TM$ است که دقیقاً مانستهٔ $\breve{\nabla}$ در جملهٔ مربوط به انحنای ویتزنباک[2] در هموستار لوی چیویتا است. در حالت $q = ۱$ این، تبدیل می‌شود به Ric یعنی انحنای ریچی $\breve{\nabla}$. به‌ویژه، در مورد دستگاه‌های براونی گرادیانی، $\mathcal{A}$ دقیقاً لاپلاسی دورام ــ هاج[3] برای خمینهٔ M است.

در حالت کلی، $X(x) : \mathbb{R}^m \longrightarrow T_xM$ یک به یک نخواهد بود و لذا نوفهٔ اضافی خواهیم داشت. نمود ریاضی این واقعیت این است که زیر σــ جبر $\mathcal{F}^{x_\circ}$ که با فرآیند $\{\xi_t(x_\circ) : t \geq ۰\}$ به ازای هر $x_\circ \in M$ تولید می‌شود، کوچکتر از آنی است که فرآیند $\{B_t : t \geq ۰\}$ تولید می‌کند (در حالتی که نوفهٔ موجود در معادله، حرکت براونی کانونی روی میدان‌های برداری است، این زیر σ ــ جبر تولید شده‌ی دومی عبارت است از σ ــ جبر تولید شده توسط فرآیندهای و ابرریختی ــ مقدار $\{\xi_t : t \geq ۰\}$). نوفهٔ اضافی را معمولاً می‌شود صافی کرد به این معنی که امید شرطی نسبت به $\mathcal{F}^{x_\circ}$ را می‌توان محاسبه نمود. مثلاً اگر برای سادگی M فشرده و ناتبهگون باشد، و اگر

$$V_\circ \in \Lambda^q T_{x_\circ}M, \qquad V_t = \Lambda^q T\xi_t(V_\circ) \in \Lambda^q T_{\xi_t x_\circ}M.$$

امید شرطی آن

$$\bar{V}_t := \mathbb{E}\{V_t \mid \mathcal{F}^{x_\circ}\}$$

در معادلهٔ کوواریان زیر صدق می‌کند:

$$\frac{\hat{D}\bar{V}_t}{dt} = -\frac{۱}{۲}\breve{\mathcal{R}}^q + \breve{\nabla}\mathcal{A}(\bar{V}_t); \qquad (۱۴)$$

در این باب رجوع کنید به الورثی، لی جان و لی در [Tan94] و نیز بخش ۴ مقالهٔ حاضر. این، تعمیمی است از نتیجه‌ای که پیش از این الورثی و یور[4] دربارهٔ دستگاه‌های گرادیانی به دست

1) Drive 2) Weitzenbock 3) de Rham - Hodge 4) Yor

آورده بودند و در مطالعهٔ نماهای گشتاوری در [ElRo 96] و آنالیز فضاهای مسیری و حلقوی مورد استفاده قرار گرفت. به‌عنوان مثالی ساده، مشتق $P_t f$ را به ازای تابع $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ از ردهٔ C^1 در جهت بردار $v_\circ \in T_{x_\circ} M$ در نظر بگیرید. با جابه‌جا کردن مشتق‌گیری با امید ریاضی به‌دست می‌آوریم

$$d(P_t f)(v_\circ) = d(\mathbb{E}f(\xi_T(\,.\,)))(v_\circ) = \mathbb{E}df(T\xi_t(v_\circ)) = \mathbb{E}df(\bar{v}_t)$$

که در آن بنابر (۱۴) داریم

$$\frac{\hat{D}\bar{v}_t}{dt} = -\frac{1}{2}Ric(\bar{v}_t) + \check{\nabla}_{\bar{v}_t} A \tag{۱۵}$$

برای شرح بیشتر در این باب، می‌توانید بخش‌های ۴ و ۸ مقالهٔ حاضر را هم ببینید. ساختارهای مشابهی را برای معادلات دیفرانسیل تصادفی تباهیده هم می‌توان به دست آورد، به این شرط که نگاشت $X(x) : \mathbb{R}^m \to T_m M$ رتبهٔ ثابت داشته باشد.

معادلهٔ حرارت برای فرم‌ها و قضیهٔ شاخص

الف. فرض کنید که ϕ یک q ـ فرم روی خمینهٔ ریمانی M باشد، یعنی برای هر $x \in M$ یک نگاشت q ـ خطی متناوب به صورت

$$\phi_x : T_x M \times \cdots \times T_x M \longrightarrow \mathbb{R}$$

داریم که آن را می‌توان عضوی از $\Lambda^q T_x^* M$ نیز تلقی کرد. در مورد حرکت براونی روی M، اگر قرار باشد نیمگروه $\bar{P}_t \,:\, t \geq 0$ روی qـ فرم‌ها را به صورت

$$\bar{P}_t \phi_{x_\circ}(v^1, \cdots, v^q) = \mathbb{E}(/\,/_t v^1, \cdots, /\,/ v^q)$$

تعریف کنیم، که در آن $/\,/_t$ انتقال موازی در امتداد مسیرهای براونی است که در بخش ۲ توصیف شد، آن‌گاه این نیمگروه در معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{P}_t \phi = \frac{1}{2}\, trace\, \bar{P}_t \phi$$

صدق خواهد کرد. در ۱۹۶۲، ایتو مشاهده کرد که با اندکی اصلاحات می‌توان نیمگروه حرارت $P_t^q, t \geq 0$ را روی q ـ فرم‌ها به دست آورد که در معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{\partial}{\partial t}P_t^q \phi = -\frac{1}{2}\Delta^q P_t^q \phi \tag{۱۶}$$

صدق می‌کند. در اینجا Δ^q لاپلاسی هاج ـ دورام

$$\Delta^q = (d\delta + \delta d) \tag{۱۷}$$

است که با دستور ویتزنباک به $\nabla^۲$ مرتبط می‌شود:

$$\Delta^q = -trace\nabla^۲ + (\mathbb{R}^q)^* \qquad (۱۸)$$

به‌علاوه جملهٔ ویتزنباک $(\mathbb{R}^q)^*$ الحاقی عملگر مرتبهٔ صفری است که نقطه‌وار روی q ــ بردارهایی که در بخش ۳ به آن اشاره کردیم اثر می‌کند که وقتی $q \geq ۱$ تبدیل می‌شوند به انحنای ریچی.

به ازای q ــ بردار $V_\circ$ در $x_\circ$، فرم $V_t \in \Lambda^q T_{x_t} M$ را با معادلهٔ کوواریان زیر در امتداد مسیرهای $\{x_t : t \geq \circ\}$ تعریف می‌کنیم که خود حالت خاصی است از (۱۴):

$$\frac{DV_t}{dt} = -\frac{۱}{۲} R^q_{x_t}(V_t) \qquad t \geq \circ \qquad (۱۹)$$

این معادله، نشان دهندهٔ یک معادلهٔ دیفرانسیل عادی روی $\Lambda^q T_{x_t} M$ برحسب $//_t^{-۱} V_t$ به شکل زیر است:

$$\frac{d}{dt}//_t^{-۱} = -\frac{۱}{۲}(//_t^{-۱} R^q_{x_t}//)(//_t^{-۱} V_t).$$

به کمک توسیع فرمول فاینمن ــ کاتس می‌توان نشان داد که مثلاً اگر R^q روی M از پایین کراندار باشد، نیمگروه حرارت P^q_t عبارت است از

$$P^q_t(\phi_{x_\circ})(V_\circ) = \mathbb{E}\phi_{x_t}(V_t). \qquad (۲\circ)$$

از اینجا فوراً برآورد زیر را به‌دست می‌آوریم

$$|V_t| \leq e^{-\frac{۱}{۲}\int_\circ^t \underline{R}^q(x_s)ds}|V_\circ|$$

که در آن

$$\underline{R}^q(x) = \inf_{|V|=۱} \langle R^q_x(V), V\rangle, \qquad x \in M, \qquad (۲۱)$$

و ضرب داخلی در فضای $\Lambda^q T_x M$ صورت می‌گیرد. از اینجا نتیجهٔ «تسلطی نیمگروهی»

$$|P^q_t \phi|_{x_\circ} \leq \mathbb{E} e^{-\frac{۱}{۲}\int_\circ^t \underline{R}^q(x_s)ds}|\phi|_{x_s}$$

به‌دست می‌آید که P^q_t را به نیمگروه شرودینگر با مولد $-\frac{۱}{۲}\Delta - \frac{۱}{۲}\underline{R}^q$ که روی فضایی از توابع اثر می‌کند، ربط می‌دهد. این نتیجه را آیرو[1] و مالیوان و همکارانش در اواسط دههٔ ۷۰ به‌کار گرفتند تا قضایای پوچ‌سازی از نوع بوخنر[2] را به‌دست آورند؛ در این باره می‌توانید رجوع کنید به [Mer] که این نتایج را برای خمینه‌ها لبه‌دار به‌کار برده است؛ یا [Mall 78] را ببینید که صورت‌های تحلیلی‌اش را دونلی و لی[3] در سال ۱۹۸۲ ارائه دادند. برای مطالعهٔ کارهایی که اخیراً انجام شده است هم می‌توانید نگاشته‌های روزنبرگ را در [Corn87] و [ELR] ملاحظه کنید.

این نمایش، ارتباط تنگاتنگی با دستور بیسموت برای مشتق لگاریتمی هستهٔ حرارت روی توابعی که در بخش ۷ شرح خواهیم داد، دارد. به‌علاوه یکی از مراحل اساسی اثبات هسو را برای نابرابری

1) Airault 2) Bochner 3) Donelly & Li

سوبولف لگاریتمی دربارهٔ اندازه وینر روی فضای مسیرهای یک خمینهٔ ریمانی، تشکیل می‌دهد. نمایش فاینمن ــ کاتس (۲۰) در مورد دیگر معادلات کوواریان روی کلاف‌های برداری نیز قابل استفاده است. برای مثال درباره عملگر شرودینگر در حضور میدان مغناطیسی یا برای مربع عملگرهای دیراک که روی اسپینورهایی عمل می‌کند که در قضایای کلاسیک شاخص ظاهر می‌شوند [El82]. اثبات‌های احتمالاتی و «فوق تقارنی» وابسته به آن برای قضیهٔ شاخص آتیا ــ سینگر که از اوایل دههٔ ۸۰ به‌ویژه با سلسله مقالات بیسموت آغاز شد، علایق جدیدی را برانگیخت. در مرجع [Bis84] شرحی دربارهٔ محتوای این اثبات‌ها هم از دیدگاه تاریخی و هم از جنبهٔ پیشرفت‌های آتی آمده است.

مراجع

Monographs

[Arn] L. Arnold, *Random Dynamical Systems*. Springer, 1998.

[Bell] D. Bell, *The Malliavin Calculus*. Pitman Monographs and Surveys in P. & A. Maths. **34**, Longman, 1987.

[BelDa] Ya. I. Belopolskaya & Yu. L. Dalecky, *Stochastic Processes and Differential Geometry*, Kluwer 1989.

[Bis] J.-M. Bismut, *Large Deviations and the Malliavin Calculus*. Progress in Maths. **45**, Birkhäuser, 1984.

[BGV] N. Berline, E. Getzler, & M. Vergne. *Heat Kernels and Dirac Operators*. Grundl. Math. Wiss. **298**, Springer, 1991.

[El] K.D. Elworthy, *Stochastic Differential Equations on Manifolds*. LMS Lecture Note Series **70**, Cambridge University Press 1982.

[Em] M. Emery, *Stochastic Calculus on Manifolds*, Springer Universitext 1989.

[FOT] M. Fukushima, Y. Oshima & M. Takeda, *Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes*. Walter de Gruyter 1994.

[FW] M.I. Friedlin & A.D. Wentzell, *Random Perturbations of Dynamical Systems*. Springer, 1984.

[Glik] Yu. Gliklikh, *Global Analysis in Mathematical Physics: Geometric and Stochastic Methods*, Applied Math. Sciences **22**, Springer 1997.

[IW] N. Ikeda & S. Watanabe, *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*. Maths. Library **24**, North-Holland/Kodansha 1981, Second Ed. 1989.

[Kif] Yu. Kifer, *Random Perturbations of Dynamical Systems*, Progress in Probability and Statistics **16**, Birkhäuser 1988.

[Kun] H. Kunita, *Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations*. Cambridge Stud. in Adv. Maths. **24**, C.U.P. 1990.

[Mall] P. Malliavin, *Stochastic Analysis*, Grundlehren der math. Wiss. **313**, Springer 1991.

[MR] Z. Ma & M. Röckner, *Introduction to the Theory of (non-symmetric) Dirichlet Forms*, Springer Universitext 1992.

[PS] A. Pressley & G. Segal. *Loop Groups*. Oxford Math. Monographs. Oxford University Press 1986.

[RW] L.C.G. Rogers & D. Williams, *Diffusions, Markov Processes and Martingales, Vol. 2: Itô Calculus*. Wiley 1987.

[Schw] L. Schwartz, *Semi-martingales sur les variétés et martingales conformes sur les variétés analytiques complexes*. Lecture Notes in Math. **780**, Springer-Verlag 1980.

[Sim] B. Simon, *Functional Integration and Quantum Physics*, Academic Press 1979.

[SV] Itô, Kiyosi, *Selected papers*. Edited and with an introduction by S.R.S. Varadhan and Daniel W. Stroock. Springer-Verlag, 1987.

Collections

[Brem84] L. Arnold & V. Wihstutz (Eds.). *Lyapunov Exponents*: Workshop Bremen, Nov. 1984. Lecture Notes in Math. **1186**. Springer 1986.

[Bud89] L. Fehér et al. (Eds.). *Lecture Notes of the Conference on Topological Quantum Field Theories and Geometry of Loop Spaces*, Budapest, June/July 1989, World Scientific, 1992.

[Corn87] R. Durrett & M.A. Pinsky (Eds.). *Geometry of Random Motion: Summer Research Conference*, Cornell University, July 1987. Contemporary Mathematics **73**, A.M.S.

[Corn93] M.C. Cranston & M.A. Pinsky (Eds.). *Stochastic Analysis: Summer Research Institute*, Cornell University: July, 1993. Proc. of Symp. in Pure Math. **57**, A.M.S. 1995.

[Crete97] J. Jost et al. (Eds.). *Dirichlet Forms and their Applications in Geometry and Stochastics*: Euroconference, Crete, June 1997. AMS/IP Studies in Adv. Math. **8**, 1998.

[Cumb74] A.M. Arthurs (Ed.). *Functional Integration and its Applications*: Int. Conf., Cumberland Lodge, Windsor Great Park, April 1974. Oxford University Press, 1975.

[Dur80] D. Williams (Ed.), *Stochastic Integrals*: Lecture Notes in Math. **851**. Springer 1981.

[Dur90] M.T. Barlow & N.H. Bingham (Eds.). *Stochastic Analysis*: LMS Durham Symposium, July 1990. LMS Lecture Note Series **167**. Cambridge University Press 1991.

[Greg95] I.M. Davies et al. (Eds.). *Stochastic Analysis and Applications*. Proc. of 5th Gregynog Symp., Gregynog, Powys, July 1995. World Scientific 1996.

[Itô@80] N. Ikeda et al. (Eds.). *Itô's Stochastic Calculus and Probability Theory*: A Tribute to K. Itô on his 80th Birthday, September 7, 1995. Springer 1996.

[NWest78] A. Friedman & M. Pinsky (Ed.). *Stochastic Analysis*: Int. Conf. Northwestern University, April 1978. Academic Press 1978.

[Par81] R. Azencott et al. *Géodésiques et diffusions en temps petit*: sém. de probabilités, Université de Paris VII. Astérisque **84-85**. Soc. Math. de France, 1981.

[Par87] M. Métivier & S. Watanabe (Eds.). *Stochastic Analysis*: Japanese-French Seminar, June 1997. Lecture Notes in Math. **1322**. Springer 1988.

[SémXVI] S. Azéma & M. Yor (Eds.). *Séminaire de Probabilités* XVI 1980/81. Lecture Notes in Math. **921**. Springer 1982.

[St-Fl88] A. Ancona et al. *Ecole d'Été de Probabilités de Saint-Flour* XVIII – 1988, ed. P.L. Hennequin. Lecture Notes in Math. **1427**, Springer 1990.

[Tan82] K. Itô (Ed.). *Stochastic Analysis*: Taniguchi Int. Symp., Katata & Kyoto, July 1982.

[Tan90] K.D. Elworthy & N. Ikeda (Eds). *Asymptotics problems in probability theory*: Vol. 1, Limiting Behaviour of Stochastic Models; Analysis and Diffusion on Fractals. Vol. 2, Wiener Functionals and Asymptotics Proc. 26th Taniguchi Workshop and Symp. Sanda and Kyoto, August/Sept. 1990. Pitman Research Notes in Math. **282, 283**, Longman 1993.

[Tan94] K.D. Elworthy, S. Kusuoka & I. Shigekawa (Eds). *New Trends in Stochastic Analysis*: Taniguchi Int. Workshop, Charingworth Manor, Glos., Sept. 1994. World Scientific 1997.

[War85] K.D. Elworthy (Ed.). *From Local Times to Global Geometry, Control & Physics*: Warwick Symposium in S.D.E. & Appl. 1985/85. Pitman Research Notes in Math. **150**, Longman 1986.

Articles

[ADK97] Albeverio, S., Daletskii, A., & Kondratiev, Yu. (1997). Infinite systems of stochastic differential equations and some lattice models on compact Riemannian manifolds. *Ukrainian J. of Math.* **49**, no. 3.

[AHo78] Albeverio, S. & Hoegh-Krohn, R. (1978). The energy representation of Sobolev Lie groups. *Compositio Math.* **36**, 37–52.

[Aid95] Aida, S. (1995). Sobolev spaces over loop groups. *J. Funct. Anal.* **116**, 83–110.

[Air76] Airault, H. (1976). Subordination de processus dans le fibré tangent et formes harmoniques. *C. R. Acad. Sci. Paris*, Sér. A, **282** (14 juin 1976), 1311–1314.

[AnDr97] Andersson, L. & Driver, B.K. (1997). *On a finite dimensional approximation to Wiener measure on a compact manifold.*

[Arn97] Arnold, L. (1997). The unfolding of dynamics in stochastic analysis. *Comput. Appl. Math.*, V. **16**, 3–25.

[ArTh] Arnaudon, M. & Thalmaier, A. (1997). Complete lifts of connections and stochastic Jacobi fields. *J. Math. Pures Appl.* **77**, 283–315.

[At95] Atsuji, A. (1995). Nevanlinna theory via stochastic calculus. *Jour. Functional Anal.* **132**, 473–510.

[Az74] Azencott, R. (1974). Behaviour of diffusion semigroups at infinity. *Bull. Soc. Math. France* **102**, 193–240.

[Az80] Azencott, R. (1980). Grandes déviations et applications. In *École d'Été de Probabilités de Saint-Flour* VIII-1978, ed. P.L. Hennequin, pp. 2-176. Lecture Notes in Math. **774**. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag.

[BAG98] Ben Arous, G. & Gradinaru, M. (1998). Singularities of hypoelliptic Green functions. *Potential Analysis* **8** No. 3, 217–258.

[BaSt] Baxendale, P. & Stroock, D.W. (1988). Large deviations and stochastic flows of diffeomorphisms. *Probab. Th. Rel. Fields* **81**, 521–554.

[Bax84] Baxendale, P. (1984). Brownian motions in the diffeomorphism group I. *Compositio Math.* **53**, 19–50.

[Bax86] Baxendale, P.H. (1986). Asymptotic behaviour of stochastic flows of diffeomorphisms: two case studies. *Probability theory and related fields* **73**, 51–85.

[BenA97] Ben Arous, G. (1988). Développement asymptotique du noyau de la chaleur hypoelliptique hors du cut-locus. *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup.* (4), **21**, no. 3, 307–331.

[BFr61] Blagoveschenskii, Ju. N. & Freidlin, M.I. (1961). Some properties of diffusion processes depending on a parameter. DAN 138, *Soviet Math.* **2**, 633–636.

[Bis84] Bismut, J.-M. (1984). The Atiyah-Singer theorems: a probabilistic approach. I & II, *J. Funct. Anal.* **57**, 56–99 & 329–348.

[CaE83] Carverhill, A.P. & Elworthy, K.D. (1983). Flows of stochastic dynamical systems: the functional analytic approach. *Z. f. Wahr. verw. Geb.* **65**, 245–267.

[CaE86] A.P. Carverhill & K.D. Elworthy (1986). Lyapunov exponents for a stochastic analogue of the geodesic flow. *Trans. A.M.S.* **295**, 85–105.

[Cas93] Castell, F. (1993). Asymptotic expansion of stochastic flows. *Probab. Theory Related Fields* **96**, 225–239.

[CHL97] Capitaine, M., Hsu, E.P. & Ledoux, M. (1997). *Martingale representation and a simple proof of logarithmic Sobolev inequalities on path spaces.*

[ChY75] Cheng, S.Y. & Yau, S.T. (1975). Differential equations on riemannian manifolds and their geometric applications. *Comm. Pure Appl. Math.* **28**, 333–354.

[CL73] Clark, J.M.C. (1973). An introduction to stochastic differential equations on manifolds. In *Geometric Methods in Systems Theory*, ed. D.Q. Mayne & R.W. Brockett, Dordrecht, Boston, London: Reidel.

[DGM76] Debiard, A., Gaveau, B. & Mazet, E. (1976). Théorèmes de comparaison en géométrie riemannienne. *Publ. RIMS. Kyoto Univ.* **12**, 391–425.

[DR92] Driver, B. (1992). A Cameron-Martin type quasi-invariance theorem for Brownian motion on a compact Riemannian manifold. *J. Funct. Anal.* **100**, 272–377.

[DR97] Driver, B.K. (1997). Integration by parts for heat kernel measures revisited. *J. Math. Pures Appl.* **76**, 703–737.

[EEl71] Eells, J. & Elworthy, K.D. (1971). Wiener integration on certain manifolds. In *Problems in Non-Linear Analysis*, ed. G. Prodi. pp. 67–94. Centro Internazionale Matemat. Estiva, IV Ciclo. Rome: Edizioni Cremonese.

[El81] Elworthy, K.D. (1981). "Stochastic methods and differential geometry". In *Séminaire Bourbaki* vol. 1980/81, Exposés 561–578, pp. 95–110. Lecture Notes in Math. **901**.

[El87] Elworthy, K.D. (1987). Geometric aspects of diffusions on manifolds. In *École d'Été de Probabilités de Saint-Flour*, XV–XVII. 1985–1987, P.L. Hennequin, ed. pp. 276–425. Lecture Notes in Math. **1362**, Springer-Verlag.

[ELJL98] Elworthy, K.D., Le Jan, Y. & Li, Xue-Mei. (1998). On the geometry of diffusion operators and stochastic flows. MSRI preprint.

[ELR98] Elworthy, K.D., Li, X.-M. & Rosenberg, S. (1998). Bounded and L^2 harmonic forms on universal covers. *Geom. and Funct. Anal.* **8**, 283–303.

[ElRo96] Elworthy, K.D. & Rosenberg, S. (1996). Homotopy and homology vanishing theorems and the stability of stochastic flows. *Geom. and Funct. Anal.* **6**, No. 1, pp. 51–78.

[EMa97] Elworthy, K.D. & Ma, Z.-M. (1997). Vector fields on mapping spaces and related Dirichlet forms and diffusions. *Osaka J. Math.* **34**, 629–651.

[Fan97] Fang, S. (1997). *Girsanov theorem and quasi-invariance on the path space over loop groups*. Preprint: Dept. de Math. Univ. de Bourgogne.

[Gaf59] Gaffney, M.P. (1959). The conservation property of the heat equation on riemannian manifolds. *Comm. Pure Appl. Math.* **12**, 1–11.

[Gan] Gangolli, R. (1964). On the construction of certain diffusions on a differentiable manifold, *Z. f. Wahr. verw. Geb.* **2**, 406–419.

[Gav77] Gaveau, B. (1977). Principe de moindre action, propagation de la chaleur et estimées sons-elliptiques sur certains groupes nilpotents. *Acta Math.* **139**, 95–153.

[Ge86] Getzler, E. (1986). A short proof of the local Atiyah-Singer index theorem. *Topology* **25**, no. 1, 111–117.

[Grig86] Grigoryan, A.A. (1986). On stochastically complete manifolds, Dokl. Akad. Nuak CCCP, **290** no. 3, English translation: *Soviet math. Dokl.* **34**, (1987), no. 2, 310–313.

[Gr67] Gross, L. (1967). Potential theory on Hilbert space. *J. Functional Anal.* **1**, 123–181.

[Ib76] Ibero, M. (1976). Intégrales stochastiques multiplicatives et construction de diffusions sur un groupe de Lie. *Bull. Sci. Math.*, 2e série, **100**, 175–191.

[JMS81] Jona-Lasinio, G., Martinelli, F. & Scoppola, E. (1981). New approach to the semi-classical limit of quantum mechanics, I: Multiple tunnelings in one dimension. *Comm. Math. Phys.* **80**, 223–254.

[Kac66] Kac, M. (1966). Can you hear the shape of a drum. *Amer. Math. Monthly* **73**, 1–23.

[Kai90] Kaimanovich, V.A. (1990). Invariant measures of the geodesic flow and measures at infinity on negatively curved manifolds. *Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. Théorique* **53**, 361–393.

[Ken87] Kendall, W.S. (1987). Stochastic differential geometry: an introduction. *Acta Applicandae Math.* **9**, 29–60.

[Ki95] Kifer, Y. (1995). Spectrum, harmonic functions, and hyperbolic metric spaces. *Israel J. Math.* **89**, 377–428.

[Kus88] Kusuoka, S. (1988). Degree theory in certain Wiener-Riemannian manifolds, In [Par87], 13–108.

[Kus92] Kusuoka, S. (1992). Analysis on Wiener spaces, II. Differential forms. *J. Funct. Anal.* **103**, 229–274.

[Lé97] Léandre, R. (1997). Invariant Sobolev calculus on the free loop space. *Acta Appl. Math.* **46**, 267–350.

[Lé98] Léandre, R. (1998). Cover of the Brownian bridge and stochastic symplectic action. *Reviews in Math. Phys.* To appear.

[LéNo97] Léandre, R. & Norris, J.R. (1997). Integration by parts and Cameron-Martin formulas for the free path space of a compact Riemannian manifold. *Sém. de Prob., XXXI*, Lecture Notes in Math. **1655**, Springer, 16–23.

[Li94] Li, X.-M. (1994). Strong *p*-completeness of stochastic differential equations and the existence of smooth flows on noncompact manifolds. *Prob. Theory Relat. Fields* **100**, No. 4, 485–511.

[Li95] Li, X.-M. (1995). On extensions of Myers' theorem, *Bull. London Math. Soc.* **27**, 392–396.

[Ly91] Lyons, T. (1991). Instability of the conservative property under quasi-isometries. *J. Diff. Geom.* **34**, 483–489.

[Ly98] Lyons, T. (1998). Differential equations driven by rough signals. *Revista Matematica Iberoamericana.*

[Ma78] Malliavin, P. (1978). *Géométrie Différentielle Stochastique.* Séminaire de Mathématiques Supérieures. Université de Montréal.

[Mall74] Malliavin, P. (1974). Formule de la moyenne pour les formes harmoniques. *J. Funct. Anal.* **17**, 274–291.

[Mall76] Malliavin, P. (1976). *Stochastic calculus of variation and hypoelliptic operators.* Report no. **13**, Institut Mittag-Leffler.

[Mall77] Malliavin, P. (1977). Un principe de transfert et son application au Calcul des Variations, *C. R. Acad. Sci. Paris* **284**, série A, 187–189.

[MMal75] Malliavin, M.-P. & Malliavin P. (1975). Holonomie stochastique au-dessus d'un espace riemannien symétrique. *C. R. Acad. Sci. Paris* **280**, Série A, 793–795.

[MMall90] Malliavin, M.-P. & Malliavin, P. (1990). Integration on loop groups. I. Quasi-invariant measures. *J. Funct. Anal.* **93**, 207–237.

[McK60] McKean, H.P.M., Jr. (1960). Brownian motions on the 3-dimensional rotation group. *Mem. Coll. Sci. Kyoto Univ.* **33**, 25–38.

[Mér79] Méritet, A. (1979). Théorème d'annulation pour la cohomologie absolue d'une variété riemannienne à bord. *Bull. Sci. Math.* **103**, 379–400.

[Mol75] Molchanov, S.A., (1975). Diffusion processes and Riemannian geometry. *Usp. Math. Nauk* **30**, 3–59. English translation: *Russian Math. Surveys* **30**, 1–63.

[MS67] McKean, H.P. & Singer, I. (1967). Curvature and eigenvalues of the Laplacian. *J. Diff. Geom.* **1**, 43–69.

[Pin78] Pinsky, M. (1978). Stochastic Riemannian geometry. In *Probabilistic Analysis and Related Topics*, 1, ed. A.T. Bharucha Reid. London, New York: Academic Press.

[Prat75] Prat, J.-J. (1975). Étude asymptotique et convergence angulaire du mouvement brownien sur une variété à courbure négative. *C. R. Acad. Sci. Paris* **280**, Sér. A, 1539–1542.

[Rog92] Rogers, A. (1992). Stochastic calculus in superspace. II. Differential forms, supermanifolds and the Atiyah-Singer index theorems. *J. Phys. A.* **22**, 6043–6062.

[SUW89] Shigekawa, I., Ueki, N., & Watanabe, S. (1989). A probabilistic proof of the Gauss-Bonnet-Chern theorem for manifolds with boundary. *Osaka J. Math.* **26**, 897–930.

[Str96] Stroock, D. (1996). Gaussian measures in traditional and not so traditional settings. *Bull. Amer. Math. Soc.* (N.S.) **33**, 135–155.

[TW98] Thalmaier, A. & Wang, F.-Yu. Gradient estimates for harmonic functions on regular domains in Riemannian manifolds. *J. Funct. Anal.* **155**, 109–124.

[VF70] Ventsell, A.D. & Freidlin, M.I. (1970). On small random perturbations of dynamical systems. *Russian Math. Surveys* **25**, 1–55.

ترجمه: روح‌الله جهانی‌پور
بخش ریاضی، دانشکدهٔ علوم، دانشگاه کاشان
jahanipu@kashanu.ac.ir

.

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۸ (بهار ۱۳۸٦) صص. ۳۷ تا ۴۸

فلسفهٔ ریاضی کانت

احسان ممتحن

ایمانوئل کانت (۱۸۰۴-۱۷۲۴)، فیلسوف دشوارنویسی بود. نقل می‌کنند که یکی از دوستان او، از ترس آن که مبادا دیوانه شود، خواندن «سنجش خرد ناب» شاهکارِ کانت را نیمه کاره رها کرد. با وجود این، برای آموختن فلسفهٔ ریاضی به‌ویژه درک اندیشه‌های شهودگرایان آشنایی با فلسفهٔ ریاضی کانت ضروری به نظر می‌رسد [یادداشت ۱].

۱ دیباچه

معرفت‌شناسی کانت و فلسفهٔ ریاضی او ارتباط تنگاتنگی با یکدیگر دارند. بنابراین ضروری است که پیش از شرح فلسفهٔ ریاضی کانت قدری دربارهٔ معرفت‌شناسی او بدانیم. اطلاع از فلسفهٔ کانت در واقع پیش فرض فهمِ معرفت‌شناسی مدرن است. به علاوه، مکتب مهم شهودگرایی در ریاضی نیز سخت تحت تأثیر کانت است، در حقیقت براوئر، هیتینگ، وایل و دیگر شهودگرایان را می‌توان فرزندان معنوی کانت دانست [یادداشت ۲]. زندگی ایمانوئل کانت به آرامی در همان شهرِ زادگاه خودش کونیسبرگ گذشت. وی نیز چون حافظ هیچگاه موطن خود را ترک نکرد. کانت در اخلاق مطلق‌گرا بود [یادداشت ۳]، و در همهٔ عمر تلاش کرد تا به این پرسش پاسخ دهد که آیا می‌توان متافیزیک را بر چنان پایه‌هایی استوار ساخت که استحکامی چون فیزیک نیوتنی و هندسهٔ اقلیدسی بیابد؟ تلاش سترگ او در پاسخ به این سئوال و سئوالاتی از این دست، به نوشتنِ شاهکارش، «سنجش خردِ ناب»[1] منجر شد. کانت دو سال پس از «سنجش خرد ناب»، چکیدهٔ این کتاب دشوار را در کتاب کوچک دیگری با نامِ «پیش درآمدی بر هرگونه متافیزیک آینده که خواهد توانست چون دانش به میان آید» یا به اختصار Prolegomena آورد[2]. «نقد خرد عملی» کتاب مهمِ دیگری از کانت است که فلسفهٔ اخلاق او را شرح می‌دهد. «نقد قوهٔ داوری» نیز مجموعه نظرات کانت در باب

1) Kritik der reinen Vernunft

۲) این کتاب با نام «تمهیدات» توسط غلامعلی حداد عادل به فارسی برگردانده شده است.

هنر و زیباشناسی است. مجموعهٔ این آثار فلسفهٔ نقدی کانت را تشکیل می‌دهد. خوشبختانه «سنجش خرد ناب» و «نقد قوهٔ داوری» به زبان فارسی برگردانده شده‌اند. در بخش بعد با چکیدهٔ آنچه در قسمتهایی از «سنجش خرد ناب» بیان شده آشنا می‌شویم.

۲ معرفت‌شناسیِ کانت

کانت به جهان خارج، مستقل از ما آدمیان، اعتقاد داشت. او اشیاء چنین جهانی را شیء فی‌نفسه[1] می‌نامید. ما آدمیان از طریق حواس خود برداشت‌هایی از شیء فی‌نفسه داریم که ممکن است کاملاً با آنچه در خود هست متفاوت باشد. به هرحال ما به درک شیء فی‌نفسه آنچنان که هست نخواهیم رسید و باید به درک آنچه از طریق داده‌های حسی خود از آن برداشت می‌کنیم قانع باشیم. کانت، آنچه بر داده‌های حسی ما پدیدار می‌شود را پدیده می‌نامد و آنچه در برابر حواس ما بایستد و محل شناسایی واقع شود را برابر ایستا[2] یا Objeckt. تأثرات حسی یا داده‌های حسی[3] بطور خام محلِ فهم ما نیستند. داده‌های حسی خود ماده نگرش[4] را تشکیل می‌دهند. نگرش، دومین مرحله در فرآیندِ فهم[5] است. نگرش، «تصویر بی‌واسطهٔ برابرایستاهاست»[6]. در عین حال نگرش، انعکاسِ آینه‌وارِ صرفِ تأثرهای حسی نیست، بلکه چیزی در این میان افزوده می‌شود. تأثرهای حسی تنها ماده نگرش را تشکیل می‌دهند اما صورتِ آن مکان و زمان است. داده‌های حسی را در قالب زمان و مکان می‌ریزیم، آنچه از این قالب بیرون می‌آید نگرش خواهد بود. بنابراین، صدق، مطابقِ نظر کانت، دیگر مطابقت با امر واقع نیست بلکه این وسط چیزهایی نیز از خودمان (زمان، فضا، علیت) بر داده‌های حسی اضافه می‌کنیم. پس صدق بر خلاف نظرِ پیشینیان کانت، هم به آنچه هست و هم به افزودهٔ ذهنِ متفکر بستگی تام دارد (مراجع [۱۱] و [۱۲]، گفتگوهای برایان مگی با وارنوک و پاتنام را ملاحظه فرمایید). این مطلب الهام بخش اینشتین و بسیاری از فیزیکدانان و فلاسفهٔ بعد از کانت بوده است. نظریه‌های علمی را امور واقع صرفاً به ما دیکته نمی‌کنند بلکه در این میان چیزی انسانی یا مفهومی نیز به آن افزوده می‌شود. ورنر هایزنبرگ در [۱۳] گفتگوی بسیار مهمی را به خاطر می‌آورد که ضمن آن اینشتین می‌گوید:

> نظریه است که حکم می‌کند چه چیزی مشاهده‌پذیر است. باید توجه داشته باشید که مشاهده، فرآیندی بسیار پیچیده است. پدیده‌ای که در دست مشاهده داریم رویدادهایی را در دستگاه اندازه‌گیری ما ایجاد می کند. در نتیجه، فرآیندهای دیگری در دستگاه رخ می‌دهند، که سرانجام از راههای پیچیده‌ای ایجاد تأثرات حسی می‌کنند و به ما کمک می‌کنند که پدیده‌ها را در آگاهی خود تثبیت کنیم.

---

1) Ding an sich/thing in itself 2) Gegenstand 3) Impressions 4) Anschauung
5) Begriff 6) Unmittelbare Vorstellung des Gegenstandes

> در سراسرِ طولِ این مسیر ــ از پدیده تا تثبیت آن در حافظهٔ ما ــ باید بتوانیم بگوییم که طبیعت چگونه رفتار می کند، دست کم باید به طور عملی قوانینِ طبیعت را بشناسیم، تا اصلاً بتوانیم ادعا کنیم که چیزی را مشاهده کرده‌ایم.

خلاصه آن که «برای شناخت هر پدیده‌ای نیاز به یک نظریه است». برای خواننده دشوار نخواهد بود تا در لابلای این سطور حضور نامرئی کانت و معرفت‌شناسی‌اش را تشخیص دهد. اما تأثیرگذاری معرفت‌شناسی کانت از این هم فراتر می‌رود. ارسطو، صدق را مطابقت با امر واقع می‌دانست؛ مطابق با این برداشت از صدق، گزارهٔ «برف سپید است» درست است اگر و تنها اگر در عالم واقع برف سپید باشد. این تعریف از صدق با درک طبیعی ما همخوانی دارد و به طور طبیعی به آن قائل هستیم. برای تعیین صدقِ شعار تبلیغاتی «صادرات نشانهٔ کیفیت کالاست» به کالاهای صادراتی توجه می‌کنیم و از کیفیت آنها می‌پرسیم. علاوه براین یکی از مهمترین نظریه‌های صدق معاصر، یعنی نظریهٔ صدق تارسکی نیز عملاً ادامه و تعمیم نظریهٔ صدق ارسطو است. دامنهٔ نفوذ نظریهٔ صدق تارسکی تا آن اندازه است که پال بناسراف، فیلسوف ریاضی معاصر در مهمترین مقاله‌اش «صدق ریاضی»، (مرجع [۸]) می‌نویسد:

> ...بنابراین هر تحلیل مقبولی از صدق ریاضی باید تحلیل از مفهومی باشد که دستِ کم به معنای تارسکی مفهوم صدق باشد.

اکنون پرسشی به شکل طبیعی مطرح می‌شود؛ آیا ایجاد نظریهٔ صدقی منطبق با معرفت‌شناسی کانت، یعنی یک نظریهٔ صدق کانتی ناممکن است؟ به نظر می‌رسد که پاسخ بناسراف به این پرسش مثبت باشد، او قائل به چنین نظریه‌ای نیست اما این که از میان نظریه‌های صدق موجود کدامیک با معرفت‌شناسی کانت امکان آشتی دارد پرسشی است که همچنان بر روی ما گشوده است.

انواع داوری‌ها از نظر کانت

شناخت ما از جهان، مجموعهٔ داوری‌ها و قضاوت‌های ما در بارهٔ جهان است. پس بسیار بجاست که بدانیم داوری‌های ما چگونه‌اند. نخست باید فرق قضاوت یا داوری[1] را با قضیه توضیح دهیم. اگر بگوییم «قو سپید است» یعنی آن که همهٔ قوهای عالم سپیداند. اگر بگوییم «به اعتقاد من قو سپید است» یعنی آن که همهٔ قوهایی که من در طول عمر خود دیده‌ام سپید بوده‌اند. داوری ما امکان آن که در سرزمینی دوردست، چون قصهٔ «جوجه اردک زشت»، قویی سیاه رنگ زندگی کند را نفی نمی‌کند حال آن که در مورد اول چنین نیست. تا پیش از کانت، فلاسفه قضاوت‌های ما را به دو نوع تقسیم می‌کردند؛ داوری‌های تحلیلی[2] و داوری‌های ترکیبی[3]. اگر بگوییم «هر آدم قدبلندی، آدم است» چیز تازه‌ای نگفته‌ایم به این معنی که «آدم بودن» در «آدم قد بلند بودن» مستتر است. داوری تحلیلی آن است که همه محمول در موضوع مستتر باشد. مثل آن که بگوییم «باران خیس

1) Das Urteil/Judgement 2) Analytic 3) Synthetic

است»)، واضح است که خیس بودن در باران نهفته است. هر داوری که تحلیلی نباشد ترکیبی است. لایب‌نیتس سنخ گزاره‌های ریاضی را تحلیلی می‌دانست.(نک [۳]) یعنی پیچیده‌ترین گزاره‌های ریاضی چیزی از سنخ «حسن، حسن است» بوده و به این معنی درون تهی است، زیرا چیزی راجع به خارج از خود به ما نمی‌گوید. این نظر در میان فیلسوف‌های علم معاصر، به ویژه اصحاب حلقهٔ وین نیز طرفداران سرسختی چون کارناپ، رایشنباخ و دیگران یافت. حتی ویتگنشتاین نیز در «رسالهٔ منطقی ـ فلسفی» (تراکتاتوس) خود ریاضیات را از «نوع معادله و منطق را همانگویی» می‌دانست [یادداشت ۴]. کانت این تقسیم‌بندی را دگرگون ساخت. او علاوه بر تقسیم گزاره‌ها به تحلیلی و ترکیبی، گزاره‌های ترکیبی را نیز به گزاره‌های ماقبل تجربه یا پیشین[1] و پسین یا پس از تجربه[2] تقسیم کرد. این که «آب در صد درجه سلسیوس به جوش می‌آید» گزاره‌ای پسین است و مواد آن از تجربه ناشی می‌شود؛ یک گزارهٔ پسین به برداشت‌های حسی وابسته است و اگر درست باشد، یا باید یک برداشت حسی محتمل را توصیف کند (خودکار من سیاه است) یا آن که منطقاً گزاره‌هایی را ایجاب کند که توصیفگر برداشتهای حسی باشند (همه کلاغ‌ها سیاه هستند). پیشتر هیوم در کتابش «رساله دربارهٔ فهم بشری» نشان داده بود که «اصل علیت»)، این که «هر معلولی علتی دارد» از تجربه به‌دست نمی‌آید. اگر کودکی توپی را به زمین زند و هر بار شاهد به زمین خوردن و برخاستن توپ باشد چنین نتیجه نمی‌شود که توپ همواره همین رفتار را خواهد داشت. ما تنها به این شکل از نظام علت و معلولی پدیده‌ها عادت می‌کنیم. هیوم روی کلمه عادت خیلی تأکید می‌کرد. احتمال این که یک بار توپ رفتار دیگری داشته باشد صفر نیست. ما تنها به مرور چنین دیده‌ایم که پدیدهٔ A، همواره پس از پدیدهٔ B رخ می‌نماید و عادت کرده‌ایم B را علت A بنامیم. اما این ترتیب (اول علت بعد معلول) از تجربه قابل استنتاج نیست. حتی اگر علت و معلول هم در عالم باشند علّیت در عالم نیست بلکه در ذهن ماست. کانت می‌گفت که هیوم با این کار مرا از خواب دگماتیزم بیدار کرد.

قضایای ریاضی به مثابهٔ گزاره‌های ترکیبی پیشین

کانت قضایای ریاضی را از سنخ گزاره‌های ترکیبی پیشین می‌دانست. یعنی اگر چه محمول آنها در موضوعشان مستتر نیست اما از تجربه نیز به دست نمی‌آیند. به یاد بیاوریم که فیلسوف ما فضا و زمان را صورت‌های نگرش می‌دانست. برای کانت هندسه و حساب به ترتیب، توصیفات ضروری این صورت‌ها یعنی فضا و زمان بودند. به نظر او احکام ریاضیات محض تحلیلی نیستند زیرا که حامل معرفت‌هایی دربارهٔ جهان هستند و ترکیبی پسین نیز نیستند چرا که توصیفات فضا و زمان هستند و فضا و زمان نیز به نوبهٔ خود مفاهیم (یا صورت‌های) پیشین‌اند یعنی آن که از داده‌های حسی به دست نمی‌آیند. آنچه در پی می‌آید توضیح بیشتر همین معناست. یک شرط ضروری برای ممکن شدن دریافت، یا آنگونه که کانت عادت داشت بگوید دریافت بشری، بودنِ در فضا و زمان است.

1) A priori 2) A posteriori

یکی از پرسش‌های بنیادی دربارهٔ فضا و زمان آن است که آنها به چه چیز شبیه‌اند؟ به اشیاء فیزیکی، به ویژگی‌های این اشیاء یا آن که به روابط بین اشیاء؟ کانت آنها را به اشیاء فیزیکی شبیه‌تر می‌دانست (یعنی زمان و مکان شبیه به مفاهیم خاص هستند تا مفاهیم کلی). استدلال اساسی کانت بر تمایز بین تقسیم‌پذیری اشیاء خاص و تقسیم‌پذیری مفاهیم کلی استوار است. برای تقسیم یک مفهوم کلی آن را به «زیر ـ مفاهیم» تقسیم می‌کنیم اما اشیاء خاص را به قطعات یا تکّه‌ها. مفهوم «رنگ شده» را می‌توان به رنگ‌های مختلف تقسیم کرد اما یک سیب را به قطعه‌های کوچک‌تر (و نه سیب‌های کوچک‌تر). کانت می‌گفت فضا و زمان قابل تقسیم‌اند اماهمانگونه که سیب تقسیم می‌شود تقسیم می‌شوند. فضا به جعبه شبیه است و زمان به جوی.

با این حال این «زمان ـ جوی» و «فضا ـ جعبه» به معنای بسیار ویژه‌ای شبیه به اشیاء خاص هستند. آنها همانند ظروف تغییرناپذیری هستند که در آنها مادهٔ دریافت بنیاد نهاده می‌شود. آنها جزیی از مادهٔ مبتنی بر تجربه و تغییرپذیرِ دریافت نیستند. این تغییرناپذیر بودن فضا و زمان به مثابهٔ اشیاء خاص، ما را به یاد مُثُل (ایده‌های) افلاطونی می‌اندازد. اما شباهت فضا و زمانِ کانتی به مُثُل افلاطونی چندان زیاد نیست. فرض کانت این است که این دو به‌طور مطلق (فرارونده ـ استعلایی) واقعی نیستند، بلکه تا آنجا واقعی هستند که به عنوان شرایطی نگریسته شوند که در آنها موجوداتی که قادر به دریافت و اندیشهٔ کلی هستند بتوانند تجربه‌های عینی داشته باشند.

کانت نمی‌پذیرفت که ریاضیات محض صرفاً مجموعه‌ای از تعاریف و اصول موضوعه است و از این نظر فلسفهٔ ریاضی او با آموزه‌های راسل و بخشی از آموزه‌های هیلبرت مخالف است. او گزاره‌های ریاضیات محض را تحلیلی نمی‌دانست. اما اگر کانت در همین‌جا متوقف شده بود دیگر قادر به توضیح غنا و تنوع ریاضیات نمی‌بود. توصیف فضا ـــ البته فضای دریافت‌پذیر[1] ـــ نمی‌توانست بیش از این باشد که فضا سه بعدی است و توصیف زمان نیز چیزی بیش از این نمی‌توانست باشد که زمان یک بعدی و جهت‌دار است. پس وجود این همه قضایای ژرف چطور توضیح داده می‌شد؟ به نظر می‌رسد که نفوذ کانت بر متفکرین پس از او به دلیل گسترش بیشتر آموزه‌هایش دربارهٔ این که ریاضیات توصیف فضا و زمان هست می‌باشد. برای ترسیم اندیشه‌های بعدی کانت در این باب پیش از هر چیز باید گفت که او اجازه نمی‌داد که توصیف تمام و کمال ساختار فضا و زمان تنها با تأملات صرف (منفعلانه؟) صورت گیرد بلکه این کار «عمل ساختن» را پیش فرض داشت. «ساختن یک مفهوم» چیزی فراتر از بیان کردن یا به‌یاد آوردن تعریف آن است، ساختن یک مفهوم مستلزم فراهم آوردن چنین مفهومی به صورت شیئی پیشین است. چیزی که کانت در این باب می‌گوید ممکن است دشوار باشد ولی به هیچوجه مبهم یا گمراه‌کننده نیست. شاید بیان یک مثال بر بحث ما نوری بیافکند: مفهوم کرهٔ پانزده بعدی، $\{(x_1, x_2, ..., x_{15}) \mid \sum_{i=1}^{15} x_i^2 = 1\}$، کاملاً خودسازگار است اما نمی‌تواند ساخته شود. اما قادریم کرهٔ سه بعدی را در فضای سه بعدی بسازیم (یا دایره، یعنی کرهٔ دوبعدی را) و نه آن که تنها تعریف

1) Perceptual Space

اصل موضوعی آن را بیان کنیم. امکان ساختن کرهٔ سه بعدی نه تنها به‌واسطهٔ خودسازگاری این مفهوم بلکه به خاطر آن است که فضای دریافتپذیر این‌گونه است. نباید ساختمانِ پیشینِ یک کرهٔ سه بعدیِ فیزیکی را با ساختمان فیزیکی یک کرهٔ به‌طور مثال آهنی یا چوبی اشتباه کرد. توجه کنیم که امکان ساختن یک کرهٔ سه بعدی از جنس چوب یا آهن به دلیل امکان ساخت پیشینِ کرهٔ سه‌بعدی در فضا است. این که نمی‌توان کرهٔ پانزده بعدی از جنس چوب یا آهن ساخت به‌خاطر این مواد سازنده نیست بلکه به علت عدم **امکان ساختِ از پیشی** کره‌ای با پانزده بعد است.

تمایزی که کانت در مقدمهٔ «سنجش خرد ناب» بین یک مفهوم ریاضی (که تنها به سازگاری درونی نیاز دارد) با ساختن آن مفهوم که لازم دارد تا فضای دریافتپذیر ساختار معینی داشته باشد قائل می‌شود برای فهم فلسفهٔ ریاضی او ضروری به نظر می‌رسد. کانت منکر امکان هندسه‌های خودسازگار دیگری سوای هندسهٔ اقلیدسی نبود؛ و به این معنی فلسفهٔ ریاضی او در اثر پدید آمدن چنین هندسه‌هایی باطل نمی‌شود زیرا کانت نگفته است که چنین هندسه‌هایی ناممکن‌اند که اکنون با ظهور آنها آموزه‌های او مردود شود، آنچه او گفته است ناممکن بودن این هندسه‌ها در مقام توصیفگر فضای دریافت‌پذیر است.

گاه گفته می‌شود که کاربرد فضای اقلیدسی چهار بعدی در نسبیت خاص، یا کاربرد هندسهٔ نااقلیدسی در نظریهٔ نسبیت عام نشان داده است که کانت در پندارِ اقلیدسی بودن فضای دریافتپذیر بر خطا بوده است. مسأله‌ای است به غایت دشوار و ظریف. نفسِ پیدایش هندسه‌های نااقلیدسی یا نظریهٔ نسبیت عام اندیشه‌های کانت را باطل نمی‌کنند آنچه در اندیشه‌های او ایجاد تزلزل کرد اصرار او بر اقلیدسی بودن فضای دریافت‌پذیر بود. علاوه بر این، بعضی فلاسفه چون کورنر (مرجع [۳] صفحهٔ ۲۹) می‌گویند که هرچند کانت در بیان این که فضای دریافتپذیر تنها با هندسهٔ سه بعدی اقلیدسی قابل توصیف است مرتکب اشتباه شده است ولی این بدان معنا نیست که فضای دریافتپذیر نااقلیدسی [۱] است، ممکن است فضای دریافت‌پذیر نه با هندسهٔ اقلیدسی و نه با هندسه‌های نااقلیدسیِ شناخته شده، با هیچکدام قابل توصیف نباشد.

اگرچه که کانت مکان و زمان را مفاهیم پیشین می‌دانست اما بین این دو فرق می‌گذاشت. درک این فرق برای فهم اندیشهٔ او دربارهٔ مکان و زمان (و لذا هندسه و حساب به مثابهٔ توصیف‌های مکان و زمان) ضروری است. کانت بین حس خارجی که با آن اشیاء خارج از خود را ادراک می‌کنیم (یا به قول او اشیاء را به نحو خارج از خود در خود تصویر می‌نمائیم) و حس درونی یا داخلی که به‌وسیلهٔ آن حالات درونی خود را ادراک می‌کنیم فرق می‌گذاشت. مکان «صورت همهٔ تصویرهای حواس خارج است، یعنی شرط ذهنی احساس است که نگرش خارجی تنها در پرتو آن ممکن است»([۲] یا [۹]، B۴۲). کلیهٔ اشیاء خارجی در مکان ادراک می‌شوند. اما «زمان صورت حواس داخلی است، یعنی نگرش خودمان و حالات درونی آن» ([۲] یا[۹]، B۴۹). حالات نفسانی ما، یا پشت سر هم یا

---

۱) منظور هندسه‌های نااقلیدسی بیضوی و هذلولوی شناخته شده است. هر چند اینشتین معتقد بود که هندسهٔ جهان بیضوی است و جهان بیکران و نامتناهی است (مرجع [٦]).

در کنار هم، در زمان ادراک می‌شوند اما در مکان ادراک نمی‌شوند. کانت این گفتهٔ هیوم را باور داشت که ما نمی‌توانیم بگوئیم یک حالت درونی شده است. در طرف راست یا چپ یک حالت درونی دیگر است. کانت کمی بعد می‌افزاید که زمان صورت پیشینی همهٔ نمودها است حال آن که مکان تنها صورت پیشینی نمودهای خارجی است. منظور او این است که همهٔ تصورات چه مربوط به عالم خارج باشد و چه نباشد چیزهایی ذهنی هستند و از این لحاظ به حالات درونی ما متعلق‌اند. لذا همهٔ تصورات باید تابع پیش شرط نگرش درونی یعنی زمان باشند. بدین ترتیب زمان شرط با واسطهٔ نمودهای خارجی است حال آن که شرط بی‌واسطهٔ نمودهای درونی است. براوِر در مقالهٔ خود، «شهودگرایی و صورتگرایی» (مرجع [۴]) می‌نویسد که هرچند از اعتقاد به پیشینی بودن مکان دست برداشته است اما بیش از گذشته به پیشینی بودن زمان اعتقاد پیدا کرده است. به زعم براور با آن که لحظات حیات دارای کیفیت متفاوت و مستقل از یکدیگرند، چیزی آنها را به هم پیوند می‌دهد و به شکل تمامیت یافته‌ای آنها را در پیشگاه فهم و «نگرش» آدمی حاضر می‌نماید که وی آن را به پیروی از کانت «نگرش زمان» می‌نامد. بدینسان حساب (و به یمن ابداع دکارت هندسه) می‌تواند بر بنیاد «نگرش زمان» استوار گردد. بیاد بیاوریم که دکارت به ما آموخت که چگونه می‌توان هندسه را به حساب تحویل کرد: از اعداد طبیعی به طرق مختلف (چه روش وایرشتراس و چه برش ددکیند) می‌توان به $\mathbb{R}$ رسید و از آنسوی همهٔ مفاهیم هندسه چون نقطه، خط و صفحه نیز می‌توانند به مفاهیمی در $\mathbb{R}^3$، که مجموعهٔ سه‌تایی‌های مرتبی از اعداد حقیقی است، مبدل شوند. دیدیم که نگرش زمان (به نحوی که در بالا توضیح داده شد) مقدم بر نگرش مکان است، تبدیل دکارتی هندسه به حساب نیز شاید شاهدی بر همین مدعا باشد که هندسه (به عنوان توصیفگر مکان) قابل تحویل به حساب (به عنوان توصیفگر زمان) است، این نکته‌ای است که براور نیز بر آن تأکید می‌کند (مقالهٔ «شهودگرایی و صورتگرایی»، [۴]).

اما حساب به عنوان توصیف کنندهٔ زمان چگونه ممکن است؟ کانت در «سنجش خرد ناب» می‌نویسد: «زمان‌های مختلف صرفاً بخش‌هایی از یک زمانند» و «نمی‌توان هیچ ادراکی را تخیل کرد که در زمان نباشد» (مرجع [۱۰]، فصل ۲). از طرفی او متذکر می‌گردد که «ساختن یک مفهوم به معنای تصویر کردن ادراکی است که به شکل پیشین با آن مطابقت دارد» (همان مرجع). ساختن عدد ۲ یا تصویر کردن آن به طرز پیشین، مانند آن است که یک شیء مادی را کنار شیء مادی دیگر بگذاریم. به این صورت مفاهیم حساب، یعنی اعداد طبیعی را، در زمان و مکان می‌توان ساخت. از اینرو شهود عدد طبیعی ۲ آسان به نظر می‌رسد: دو یکی دوتاست، همانطور که دو تا یک سیب، دو سیب است. بقیهٔ اعداد طبیعی نیز به همین نحو ساخته می‌شوند، به عنوان مثال عدد ۳، در واقع تصویر از پیشی در کنار هم نهادن یک «دو چیز» و یک «یک چیز» است. بدین‌ترتیب می‌توان اعداد طبیعی را ساخت و لذا حساب ممکن می‌گردد.

نظر کانت در باب احکام حساب شبیه به نظر او دربارهٔ هندسه است. این حکم که با افزودن ۵ به ۷ عدد ۱۲ را تولید می‌کنیم می‌تواند توصیف این مطلب باشد که چیزی به طور ترکیبی و پیشین در

فضا و زمان ساخته شده است، یعنی تالی‌های بعدی یک و جمع آنها[1]. کانت متذکر می‌شود که ۵ و ۷ باید با هم جمع گردند تا عدد ۱۲ حاصل شود، ایدهٔ ۱۲ نه مستتر در آنها است و نه در ایدهٔ جمع آنها با یکدیگر نهفته است. هیچ تحلیلی از موضوع نمی‌تواند به ما محمول یعنی عدد ۱۲ را نشان دهد. بازهم امکانِ منطقی حساب‌های دیگر نفی نمی‌شود. آنچه که گفته می‌شود آنست که این نظام‌ها، توصیفات زمانِ دریافتپذیر نخواهند بود.

اکنون، پاسخ کانت در باب سرشت ریاضیات محض و کاربردی می‌تواند تا حدی صورتبندی شود. احکام حساب و هندسهٔ محض احکام ضروری هستند. با این وجود، این احکام ترکیبی پیشین هستند نه تحلیلی. ترکیبی هستند زیرا دربارهٔ ساختار فضا و زمان‌اند زیرا با آنچه که در آنها ساخته می‌شود نموده می‌شوند. پیشین هستند چرا که فضا و زمان از شرایط همیشگی و پایای هر دریافتی از اشیاء فیزیکی هستند. احکام ریاضیات کاربردی تا آنجا که دربارهٔ مادهٔ خام دریافت‌های حسی باشند پسینی هستند [یادداشت ۵]. ریاضیات محض از امور تجربی به سبب موضوع خود که مطالعهٔ ساختار فضا و زمان است، مستقل می‌باشد. موضوع ریاضیات کاربردی ساختار فضا و زمان است همراه با دنیای تجربی که آنها را پر ساخته است.

نظر کانت در باب بی‌نهایت بالفعل و بالقوه یادآور نظر ارسطو است صرف نظر از این که صراحت و وضوح بیان کانت بیشتر است. در یک دنبالهٔ ریاضی آنچه که به ما می‌گوید چطور از یک مرحله به مرحلهٔ بعد برویم یک قاعده است. ولی کانت نمی‌پذیرد که وقتی چنین قاعدهٔ پیشروی ارائه شود تمامیت آنچه که باید ساخته شود نیز به نوعی داده شده است. کانت این را نمی‌پذیرد. موضوع بویژه در حالتی که گام آخر یا اول وجود ندارد بسیار مهم است. به عنوان مثال، دنبالهٔ اعداد طبیعی از صفر آغاز می‌شود و مابقی اعضای دنباله با افزودن یک به گامِ قبل، به ترتیب ساخته می‌شوند. فرض می‌شود که ضمن این کار اعداد دیگری به جز اعضای دنباله وجود ندارند. دنباله‌ای که در حال ساخت و رشد کردن است با دنباله‌ای که کامل شده است و به تمامیت خود رسیده به‌کلی متفاوت است. صرفِ بیان این مطلب که بنابر این قاعده و قانون، تولید اعضای دنباله تا بی‌نهایت میتواند ادامه یابد، وجود دنبالهٔ کامل شده، در تمامیت خود را تضمین نمی‌کند (نک [۳]).

تفاوت ارسطو و کانت در آن است که ارسطو منطقاً وجود بی‌نهایت بالفعل را نفی می‌کرد. نه به دلیل این که هیچ بی‌نهایت بالفعلی در جهان تجربه‌های حسی وجود ندارد بلکه چنین بی‌نهایتی به لحاظ منطقی نمی‌تواند وجود داشته باشد. ارسطو (و همینطور آکویناس) با این مقدمه، حتی به اثبات وجود علت اولی (علت نخستین) پرداخت بدین شکل که: علت نخستین وجود دارد وگرنه باید وجود یک بی‌نهایت بالفعل را بپذیریم که منطقاً محال است (نک [۳]).

کانت معتقد نیست که وجود بی‌نهایت بالفعل منطقاً محال است و از این نظر ابداع جسورانهٔ کانتور در به خدمت گرفتن بینهایت‌های بالفعل در نظریهٔ مجموعه‌ها با اندیشهٔ کانت در تضاد نیست.

---

۱) کتاب «تمهیدات»، بخش دهم

این چیزی است که کانت آن را «ایدهٔ خرد» می‌نامید[1]؛ یعنی مفهومی با سازگاری درونی‌اگرچه غیر قابل کاربرد در تجربهٔ حسی، چون نمونه‌های این مفهوم نه قابل مشاهده‌اند و نه قابل ساخت. به نظر کانت ما می‌توانیم ۲ را بسازیم، و ۲ تا چیز (مثل ۲ تا اسب) را مشاهده کنیم، می‌توانیم $10^{10^{10^{10}}}$ را بسازیم هرچند از مشاهده و فراهم آوردن مجموعه‌ای با این همه عضو ناتوانیم. و سرآخر این که یک مجموعه بی‌نهایت بالفعل را نه میتوانیم مشاهده کنیم و نه این که بسازیم.

تفاوت مابین بی‌نهایت بالفعل که نمی‌تواند ساخته شود ولی بدان نیاز ناگزیر داریم و بی‌نهایت بالقوه (که در حال ساخته شدن است) اغلب توسط کانت مورد تأکید قرار می‌گیرد. به زعم او، در تخمین‌های ریاضی و ساختپذیر از اندازه، «فهم هر یک از واحدهایی را که تخیل برای تخمین زدن اندازه انتخاب کند به خوبی به کار می‌گیرد و با آن اقناع می‌شود....در هر حال تخمین منطقی اندازه تا بی‌نهایت و بی‌توقف به پیش می‌رود». هرچند کانت چنین ادامه می‌دهد که «ذهن اکنون به آوای خرد گوش فرا می‌دهد که، برای همهٔ اندازه‌های داده شده ... نیازمندِ تمامیت است ... و حتی بی‌نهایت را نیز از این نیاز معاف نمی‌کند... اما کم و بیش ما را ناگزیر می‌سازد تا به این بی‌نهایت ... چون [چیزی] کاملاً داده شده (یعنی داده شده در تمامیت خود) توجه کنیم[1].»

پایان سخن

در سال ۱۹۱۹ کتاب راسل، که حاصل روزگار محبس بود، با عنوان «مقدمه‌ای بر فلسفه ریاضی» منتشر شد. در دیباچهٔ این کتاب راسل نوشت که پس از کانت تقریباً همه چیز بر خلاف نظر وی پیش رفته است. این گفته در آن زمان موجه بود چرا که منطق‌گرایی به یمن کارهای عظیم فرگه، راسل و وایتهد نوید روزهای خوشی را می‌داد و صورتگرایی نیز برای اثبات سازگاری ریاضیات امیدهای بسیار داشت. اما کمی بیشتر از یک دهه بعد اوضاع به کلی دگرگون شد. گودل ثابت کرد که تمامیت و سازگاری اصول پئانو یا هر توسیع متناهی آن نمی‌تواند برقرار باشد، اگر سازگاری حساب را بپذیریم همواره در آن گزاره‌های درست ولی غیرقابل اثبات وجود خواهند داشت. امروز تقریباً همهٔ فلاسفهٔ ریاضی این قضیهٔ گودل را همچون «پرچم شکست دائم» این دو مکتب می‌دانند. زیاده‌روی نیست اگر بگوئیم که بعد از کارهای گودل اوضاع، چه در عالم ریاضی و چه در بیرون آن، در جهت تأیید بعضی از آموزه‌های کانت سیر کرده است.

شاید نظریات چامسکی، زبانشناس بزرگ معاصر، برگ برندهٔ دیگری در این بازگشتِ به کانت باشد. با پژوهش‌های چامسکی در زبان‌شناسی، آموزه‌های رفتارگرایان متزلزل شد. رفتارگرایان ذهنِ آدمی را در آغاز تولد چون لوحی سپید می‌دانستند که حکّ کردن هر چیزی بر آن امکان داشت، حال آن که

1) The idea of reason

۱) از کتاب «نقد قوهٔ داوری» بخش ۲۶، نقل شده در مرجع [۳].

چامسکی نشان داد که نوعی «دستور زبان» با آدمی متولد می‌شود که هم بر زبان‌های بشری محدودیت‌هایی تحمیل می‌کند و هم (در عین حال) عامل آموختن سریع زبان و استفادهٔ کارآمد از زبان در توصیف عالم است (گفتگوی برایان مگی با چامسکی را در [۱۱] ملاحظه فرمائید). اگر اینگونه باشد و ما با نوعی دستور زبان متولد شویم، آنگاه می‌توان گفت که چنین دستور زبانی امری پیشین است و از تجربه حاصل نمی‌شود، چرا که کودک در آغاز تولد هنوز تجربه‌ای ندارد. این امر شاید تأییدی باشد بر نظر کانت که مفاهیم ترکیبی و پیشین ممکن‌اند و این «دستور زبان» یکی از آنها است.

کانت فیلسوف جامعی بود و در زیباشناسی و اخلاق به همان وسعتِ معرفت‌شناسی، کارهای جدی و اثرگذار از خود بجای نهاد. او در زندگی پارسا و بسیار منظم بود. گویا اهالی شهر وقت خود را باگردش‌های روزانهٔ کانت (در ساعت ۳ بعد از ظهر) تنظیم می‌کردند. تلاش کانت در بر پای ساختن متافیزیک به اینجا ختم شد که «شناخت شیء فی‌النفسه یا چیز در خود، یعنی یک واقعیت در خود و آن سوی پدیداری، ناممکن می‌شود: شناخت محدود می‌شود به پهنهٔ مشاهده یا بینش و دریافت حسی، و بیرون از احساس (اندریافت حسی) به گفتهٔ کانت «مقولات تهی‌اند» و این که برای مسائل عمدهٔ هستی و نیز زندگی انسانی هیچ گونه حل معرفت‌آمیزی یافت نمی‌شود: متافیزیک ناممکن است» (مرجع [۷]). ولی کانت به مسألهٔ وجود خدا، جاودانگی روح و آزادی هم پرداخت ــ که به اعتقاد او سه مسألهٔ بنیادی فلسفه‌اند ــ و آنها را از راهی بیرون عقلی و به وسیلهٔ مفروض‌های «ارادهٔ» انسانی حل کرد.

یادداشت‌ها

۱ ــ «سنجش خرد ناب» توسط دکتر میرشمس‌الدین ادیب سلطانی به فارسی برگردانده شده است (مرجع [۹]). این ترجمه دقیق و امانتدار است، هرچند این مترجم و محقق عالیقدر در ترجمهٔ این اثر، زبان ویژه‌ای اختیار کرده است که خواندن را برای خواننده (اگر پر حوصله نباشد) دشوار می‌نماید. برابر نهاد زیبای «برابر ایستا» در مقابل «Gegenstand» از ساخته‌های ماندگار ادیب سلطانی است. در معرفی کانت از این ترجمه، از نسخهٔ آلمانی اثر (مرجع [۲]) و از درسگفتارهای دکتر محمود هومن استفاده شده است. نگارنده امکان دسترسی به منبع اخیر را که تاکنون به زیور طبع آراسته نگردیده مدیون استاد عبدالعلی دستغیب است. من در برابر واژه کلیدی «Anschauung» واژه «نگرش» را به کار برده‌ام که پیشنهاد مرحوم دکتر هومن بوده است (پیشنهاد ادیب سلطانی «سِهِش» است). از کتاب «فلسفهٔ ریاضی» اثر استفان کورنر (منبع [۳]) خصوصاً در توصیف هندسه از دیدگاه کانت استفادهٔ بسیار برده‌ام. فهرست آثاری که در تهیهٔ متن حاضر مورد استفاده قرار گرفته‌اند در قسمت مراجع آمده است.

۲ ــ براوِر در مقالهٔ «صورتگرایی و شهودگرایی» (مرجع [۴]) متذکر می‌شود که «در کانت شکلی کهنه از شهودگرایی را می‌یابیم که اکنون به کلی فراموش شده است، که در آن، زمان و فضا،

صورت‌های ضروری و طبیعی خرد آدمی گرفته می‌شوند. برای کانت اصول موضوعهٔ حساب و هندسه داوری‌های ترکیبی پیش از تجربه بودند؛ یعنی داوری‌هایی مستقل از تجربه و حاصل نیامده از برهان‌های تحلیلی، و این مطلب دقت آنها را هم در دنیای تجربه و هم در تجرید توضیح می‌داد. بنابراین برای کانت امکان رد کردن قوانین حسابی و هندسی به‌طور تجربی نه تنها بنا به اعتقادی محکم طرد می‌شد بلکه چنین چیزی اساساً غیر قابل اندیشیدن بود». این مقاله توسط دکتر محمد اردشیر ترجمه و در نشر ریاضی، سال ۹، شمارهٔ ۱ منتشر شده است.

۳ ــ مثال هوشمندانهٔ کانت خود روشنگرتر از هر چیز است: «اگر کسی که از جانبِ یک آدمکش دنبال می‌شود به نزد من آید و از من بخواهد که آدمکش را با اطلاعات غلط منحرف کنم بناچار باید مأیوسش سازم چراکه من اجازهٔ دروغ گفتن ندارم»(مرجع [۵] بند پنجم از فصل هشت را ببینید).

۴ ــ رفته رفته بعضی از فیلسوفان علم در روشن بودن مرز بین گزاره‌های تحلیلی و ترکیبی تردید کردند که از جملهٔ آنها کواین و همپل بودند، هرچند بعضی از شاگردان رایشنباخ همچنان به پیروی از استاد به چنین تمایزی قائل بودند. پاتنام در [۱] اظهار می‌دارد که خود شاهد گفتگوی داغی بین کارل همپل و یکی از دانشجویان رایشنباخ بوده است که در آن همپل از نظر کواین دربارهٔ مشخص نبودن مرز بین گزاره‌های تحلیلی و ترکیبی حمایت می‌کرده و دانشجوی رایشنباخ قایل به تمایز بوده است. نهایتاً دانشجوی جوان می‌گوید که «بسیار خوب ممکن است چنین تمایزی در زبان‌های بشری قابل بیان نباشد اما از کجا معلوم که در یک زبان صوری مناسب نتوانیم این تمایز را به دقت نشان دهیم». همپل در جواب می‌گوید، «مشکل آنجاست که سرآخر مجبورید هر آنچه را در آن زبان صوری یافته‌اید به زبان طبیعی برگردانید. چنین مشکلی ارثی است».

۵ ــ در این رابطه همچنین مراجعه شود به مرجع [٦]، مقالهٔ هندسه و تجربه، همانجا که اینشتین اظهار میدارد، «قضایای هندسه تا آنجا که یقینی هستند به تجربه مربوط نمی‌شوند و تا آنجا که در تجربه کاربرد دارند یقینی نیستند».

مراجع

[1] J. Floyed and H. Putnam, *A note on Wittgenestein's notorious paragraph about Gödel's Theorem*, The Journal of Philosophy, 97: 624, 2000.

[2] Immanuel Kant, *Kritik der erinen Vernunft*, Felix Meiner Verlag Hamburg 1998.

[3] Stephan Körner, *The Philosophy Of Mathematics*, An Introductory Essay, Hutchinson and Co. (Publishers) LTD, 1960.

[4] Philosophy of Mathematics, selected readings, edited with an Introduction by

Paul Benaceraf and Hilary Putnam, Basil Blackwell Oxford, Prentice-Hall, 1964.

[5] Roland Simon - Schäfer, *Kleine Philosophie Für Berenike*,Reclam Verlag Leipzig, 2001.

[٦] آلبرت اینشتین، *فیزیک و واقعیت*، ترجمهٔ محمدرضا خواجه‌پور، شرکت سهامی انتشارات خوارزمی، ١٣٦٣.

[٧] ا. م. بوخنسکی، *فلسفهٔ معاصر اروپایی*، ترجمهٔ دکتر شرف‌الدین خراسانی ـ شرف، شرکت انتشارات علمی و فرهنگی، ١٣٧٩.

[٨] پال بناسراف، *صدق ریاضی*، ترجمهٔ ضیاء موحد، نشر ریاضی، سال ١٠، شمارهٔ پیاپی ١٩.

[٩] ایمانوئل کانت، *سنجش خرد ناب*، ترجمهٔ میر شمس‌الدین ادیب سلطانی، مؤسسهٔ انتشارات امیرکبیر، تهران ١٣٦٢.

[١٠] اشتفان کورنر، *فلسفهٔ کانت*، ترجمهٔ عزت‌الله فولادوند، انتشارات خوارزمی، چاپ اول، ١٣٦٧.

[١١] برایان مگی، *مردان اندیشه*، پدید آورندگان فلسفهٔ معاصر، ترجمهٔ عزت‌الله فولادوند، انتشارات طرح نو، چاپ دوم ١٣٧٨.

[١٢] برایان مگی ، *فلاسفهٔ بزرگ، آشنایی با فلسفهٔ غرب*، ترجمهٔ عزت الله فولادوند، ١٣٧٧.

[١٣] ورنر هایزنبرگ، *جزء و کل*، ترجمهٔ حسین معصومی همدانی، مرکز نشر دانشگاهی، ١٣٦٨.

احسان ممتحن
گروه ریاضی، دانشگاه یاسوج
پست الکترونیک: momtahan_e@hotmail.com

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۸ (بهار ۱۳۸٦) صص. ۴۹ تا ٦۲

آشنایی با حساب اعداد فازی

محبوبه حسین‌یزدی، حسن حسن‌پور، ماشااله ماشین چی

چکیده:
کار با اعمال جبری روی اعداد فازی مورد نیاز بسیاری از علاقمندان به موضوع مجموعه‌های فازی می‌باشد که اغلب این محاسبات دارای پیچیدگی خاص هستند. در مقالات بسیاری مانند [۳] و [۴] سعی شده است با تعریف اعمال جدید جمع و ضرب بر روی اعداد فازی، از این مجموعه یک گروه یا میدان بسازد. اما طبیعی‌ترین اعمالی که بر روی مجموعه اعداد فازی تعریف شده‌اند اعمالی هستند که بر روی اعداد حقیقی تعریف شده‌اند سپس با استفاده از اصل گسترش به مجموعه اعداد فازی گسترش داده شده‌اند. برای آشنایی بیشتر با محاسبات بر روی اعداد فازی می‌توان به مراجع [۱] و [۵] مراجعه کرد. در این مقاله سعی شده است که علاوه بر آشنایی با حساب اعداد فازی و ارائه راه‌حل‌های عملی جهت انجام محاسبات در حالت‌های خاص، مشکلات موجود در این راه مشخص شود. به علاوه ضمن ارائه مثال‌های متعدد، تفاوت‌های اعمال روی اعداد فازی و اعداد معمولی بیان شده است. برای آشنایی بیشتر با کاربردهای نظریه مجموعه‌های فازی می‌توان به مراجع [۷] و [۸] و [۹] و [۱۰] و [۱۱] و [۱۲] و [۱۳] و [۱۴] مراجعه کرد.

واژه‌های کلیدی: مجموعه فازی، عدد فازی، αـبرش، اصل تجزیه، اصل گسترش

۱. مقدمه

امروزه استفاده از مجموعه‌های فازی در محاسبات نرم موضوع رایجی است. لذا گسترش چهار عمل اصلی و سایر اعمال روی مجموعهٔ اعداد حقیقی R به اعمالی متناظر با آن روی زیر مجموعه‌های فازی R مطلبی بسیار مهم است. با توجه به اصل گسترش هر تابعی روی اعداد حقیقی را می‌توان به تابعی بر روی مجموعه‌های فازی گسترش داد. بنابراین اگر چهار عمل

اصلی را به عنوان توابعی از $R \times R$ به R در نظر بگیریم می‌توان گسترش یافته این اعمال را در مجموعه‌های فازی روی R بدست آورد. گر چه این اعمال گسترش یافته، اعمال خوشتعریفی هستند اما به‌دست آوردن حاصل این اعمال به راحتی انجام نمی‌پذیرد، زیرا ضابطه‌مند کردن اعمال جمع، تفریق، ضرب و تقسیم دو تابع در حالت کلی امری دشوار است، هر چند در حالت‌های خاص که در این مقاله بحث شده است عملی است. به علاوه چهار عمل اصلی گسترش یافته گرچه دارای بسیاری از خواص اعمال اصلی معمولی هستند (ر.ک.به قضیه (۳.۱)) اما تمام قوانینی که در حساب اعداد معمولی برقرار هستند از جمله $a - a = ۰$، $a/a = ۱$ و $a.a = a^۲$، لزوماً در حساب اعداد فازی برقرار نیستند، در مثال‌های بررسی شده برای اعداد فازی این موارد را توضیح می‌دهیم.

۲. پیش نیازها

در این بخش مفاهیم اولیه برای مطالعه حساب اعداد فازی، همراه با مثال‌هایی برای درک بهتر آنها ارائه می‌شوند.

تعریف ۲.۱. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد. هر زیر مجموعه فازی از X توسط یک تابع A، $A : X \longrightarrow [۰, ۱]$ به نام تابع عضویت مشخص می‌شود که در آن برای هر $x \in X$ عدد حقیقی $A(x)$ میزان عضویت x در آن مجموعه است.

مجموعه تمام زیرمجموعه‌های فازی X را با $F(X)$ نمایش می‌دهیم و بنابراین

$$F(X) = \{A | A : X \longrightarrow [۰, ۱]\}.$$

تعریف ۲.۲. فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی باشد و $A \in F(X)$.

(i) برای هر عدد حقیقی $\alpha \in (۰, ۱]$ مجموعه $A_\alpha = \{x \in X | A(x) \geq \alpha\}$، را مجموعه α-برش A می‌نامیم.

(ii) مجموعه $supp(A) = \{x \in X | A(x) > ۰\}$ را تکیه‌گاه A می‌نامیم.

(iii) $A \in F(X)$ را نرمال گوئیم هر گاه $x \in X$ وجود داشته باشد که $A(x) = ۱$.

تعریف ۲.۳. $A \in F(R)$ را یک عدد فازی می‌نامیم هر گاه در سه شرط زیر صدق کند:

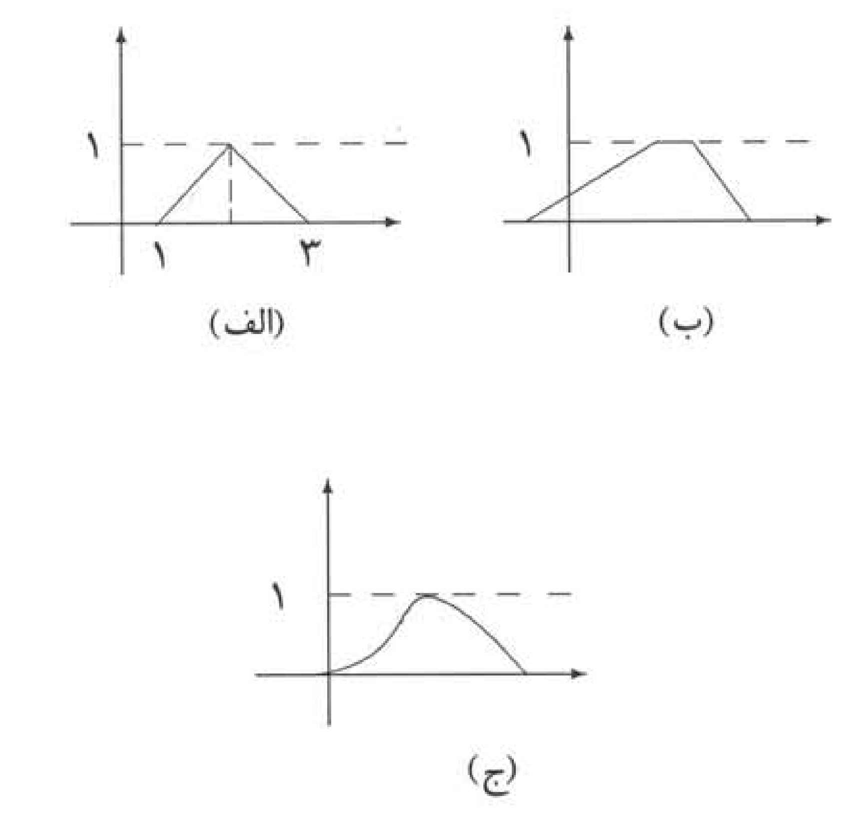
(i) A نرمال باشد،

(ii) $supp(A)$ کراندار باشد،

(iii) A_α برای هر $\alpha \in (۰, ۱]$ یک بازهٔ بسته باشد.

مجموعهٔ تمام اعداد فازی روی R را با $FN(R)$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۲.۴. نمودارهای شکل ۱ نمایش دهندهٔ اعداد فازی هستند.



شکل ۱. اعداد فازی

توجه کنید که در شکل (الف) برای هر $\alpha \in (0, 1]$ داریم $A_\alpha = [1 + \alpha, 3 - \alpha]$. بعلاوه $supp(A) = (1, 3)$.

قضیه ۲.۵. (قضیه (۴.۱) از مرجع [۲]) فرض کنید $A \in F(R)$، یک زیرمجموعه فازی R باشد. در اینصورت A یک عدد فازی است اگر و تنها اگر اعداد حقیقی a, b و ω_1, ω_2 که $\omega_1 \leq a \leq b \leq \omega_2$ وجود داشته باشند به طوری که

$$A(x) = \begin{cases} 1 & x \in [a, b] \\ l(x) & x \in (-\infty, a) \\ r(x) & x \in (b, \infty) \end{cases}$$

که در آن $l:(-\infty,a)\longrightarrow[0,1]$ یک تابع اکیداً صعودی از راست پیوسته است و $l(x)=0$ برای هر $x\in(-\infty,\omega_1)$ و $r:(b,\infty)\longrightarrow[0,1]$ یک تابع اکیداً نزولی از چپ پیوسته است و $r(x)=0$ برای هر $x\in(\omega_2,\infty)$.

تعریف زیر به دلیل اهمیت زیادی که در فرهنگ ریاضیات فازی دارد به اصل گسترش شهرت یافته است.

اصل گسترش: فرض کنید Y و X دو مجموعه ناتهی و $f:X\longrightarrow Y$ یک تابع $A\in F(X)$. در اینصورت $B=f(A)\in F(Y)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$B(y)=\sup_{y=f(x)}A(x).$$

که در آن سوپریمم روی مجموعه تهی صفر تعریف می‌شود.

تعریف ۲.۶. فرض کنید برای $A_i\in F(X_i)$، $i=1,...,n$ و $X=X_1\times\cdots\times X_n$ حاصل‌ضرب دکارتی X_iها باشد. در اینصورت حاصل‌ضرب دکارتی $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ نیز یک زیرمجموعه فازی X است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(A_1\times\cdots\times A_n)(x_1,...,x_n)=\min\{A_1(x_1),...,A_n(x_n)\}.$$

نکته ۲.۷. با توجه به تعریف فوق و اصل گسترش می‌توان اعمال دوتایی R را به $F(R)$ به صورت زیر گسترش داد:

نمادگذاری. به‌جای $\sup$ و $\inf$ به ترتیب از نمادهای $\vee$ و $\wedge$ استفاده می‌کنیم.

تعریف ۲.۸. اگر o یک عمل دوتایی روی R باشد، آنگاه این عمل را روی $F(R)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}AoB(x)&=\sup_{aob=x}\{\inf(A(a),B(b)\},\\&=\vee_{aob=x}\{A(a)\wedge B(b)\}.\end{aligned}$$

که در آن سوپریمم روی مجموعه تهی صفر تعریف می‌شود. به‌عنوان مثال داریم:

$$(A+B)(x)=\vee_{a+b=x}\{A(a)\wedge B(b)\}$$
$$(A.B)(x)=\vee_{a.b=x}\{A(a)\wedge B(b)\}$$

دقت کنید که با توجه به اصل گسترش می‌توان دید که

$$(-A)(x)=\vee_{y=-x}\{A(y)\}=A(-x)$$

نکته ۲.۹. هر عدد حقیقی r را می‌توان به صورت یک عدد فازی در نظر گرفت، زیرا تابع

$$\begin{aligned}\varphi:R&\longrightarrow F(R)\\r&\longmapsto\mathcal{X}_{\{r\}}\end{aligned}$$

یک تابع یک‌به‌یک است و بنابراین می‌توان عدد حقیقی r را با تصویر آن یعنی $\mathcal{X}_{\{r\}}$، تابع مشخصه $\{r\}$، یکی فرض کرد. بدیهی است که $\mathcal{X}_{\{r\}}$ یک عدد فازی است. از این به بعد $\mathcal{X}_{\{1\}}$ را با $\mathbf{1}$ و $\mathcal{X}_{\{0\}}$ را با $\mathbf{0}$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۲.۱۰. (اصل تجزیه یا اتحاد تجزیه)

اگر $A \in F(X)$ آنگاه

$$A(x) = \vee_{\alpha \in [0,1]}(\alpha \wedge \mathcal{X}_{A_\alpha}(x)); x \in X$$

که در آن $\mathcal{X}_{A_\alpha}$ تابع مشخصه A_α است.

نکته ۲.۱۱. از آنجا که

$$\alpha \wedge \mathcal{X}_{A_\alpha}(x) = \alpha \mathcal{X}_{A_\alpha}(x); x \in X$$

و با توجه به اصل تجزیه داریم:

$$A(x) = \vee_{\alpha \in [0,1]} \alpha \mathcal{X}_{A_\alpha}(x) = \vee_{x \in A_\alpha} \alpha.$$

۳. حساب اعداد فازی

در این بخش ابتدا ضمن یک قضیهٔ اساسی کلیهٔ روابط موجود در حساب اعداد فازی را ارائه می‌دهیم و سپس با مثال‌هایی تفاوت‌های حساب اعداد فازی و حساب معمولی اعداد حقیقی را بیان می‌کنیم. در ادامه با استفاده از اصل تجزیه یک راه‌حل عملی برای محاسبهٔ مجموع، تفاضل، حاصل‌ضرب و خارج قسمت اعداد فازی وقتی که محاسبه A_αها بر حسب α امکان‌پذیر باشد ارائه می‌کنیم.

قضیه ۳.۱. اگر $A, B, C \in F(R)$ و $r \in R$ آنگاه:

۱) $\mathbf{0} + A = A$

۲) $\mathbf{0}.A = \mathbf{0}$

۳) $\mathbf{1}.A = A$

۴) $A + B = B + A$

۵) $A + (B + C) = (A + B) + C$

۶) $AB = BA$

۷) $(AB)C = A(BC)$

۸) $r(A + B) = rA + rB$

۹) $A(B + C) \leq AB + AC$

۱۰) $(-r)A = -(rA)$

۱۱) $-(-A) = A$

۱۲) $(-A)B = -(AB) = A(-B)$

۱۳) $A/\mathbf{1} = A$

۱۴) $A/r = (\mathbf{1}/r)A$

۱۵) $A/B = A.\mathbf{1}/B$

۱۶) $A + (-B) = A - B$

برهان. اثبات قضیه آسان است و به‌عنوان مثال اثبات گزاره‌های (۲)، (۹) و (۱۰) را می‌آوریم.
.۲

$$\begin{aligned} \circ.A(u) &= (\mathcal{X}_{\{\circ\}}.A)(u) = \vee_{a.b=u}\{\mathcal{X}_{\{\circ\}}(a) \wedge A(b)\} = \begin{cases} ۱ & u = \circ \\ \circ & \text{در غیر اینصورت} \end{cases} \\ &= \mathcal{X}_{\{\circ\}}(u) = \circ \end{aligned}$$

۹. فرض کنید $(A(B+C))(x) > (AB+AC)(x)$ در اینصورت u و v و y وجود دارند که $y(u+v) = x$ و

$$A(y) \wedge B(u) \wedge C(v) > A(p) \wedge B(q) \wedge A(h) \wedge C(k)$$

برای هر p,q,h,k که $pq+hk=x$ برقرار است. اما اگر $p=h=y$ و $v=k$، $q=u$ انتخاب شوند طرفین نامعادله فوق مساوی خواهند شد. حال اثبات $(A(B+C))(x) \leq (AB+AC)(x)$ به راحتی نتیجه می‌شود.
.۱۰

$$\begin{aligned} -(rA)(u) &= (rA)(-u) = (\mathcal{X}_{\{r\}}.A)(-u) = \vee_{a.b=-u}\{\mathcal{X}_{\{r\}}(a) \wedge A(b)\} \\ &= \vee_{-a.b=u}\{\mathcal{X}_{\{-r\}}(-a) \wedge A(b)\} = \vee_{c.b=u}\{\mathcal{X}_{\{-r\}}(c) \wedge A(b)\} \\ &= ((-r)A)(u). \qquad \square \end{aligned}$$

مثال زیر یکی از تفاوت‌های مهم حساب اعداد فازی و اعداد معمولی را بیان می‌کند.

مثال ۳.۲. اعداد فازی وجود دارند به طوری که:

الف) $A - A \neq \mathbf{0}$،

ب) $A/A \neq \mathbf{1}$.

برای مثال $A \in FN(R)$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$A(x) = \begin{cases} ۱ + x & -۱ \leq x < \circ \\ ۱ - x & \circ \leq x \leq ۱ \\ \circ & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

از

$$A(۱/۲) \wedge (-A)(۱/۲) = A(۱/۲) \wedge A(-۱/۲) = ۱/۲ \wedge ۱/۲ = ۱/۲ \neq \circ$$

نتیجه می‌شود که

$$A + (-A)(۱) = \vee_{a+b=۱}\{A(a) \wedge (-A)(b)\} \neq \circ$$

در نتیجه $A - A \neq \mathcal{X}_{\{0\}}$.

حال $B \in FN(R)$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$B(x) = \begin{cases} 1 + x & -1 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

در اینصورت

$$B/B(0) = \vee_{a/b=0}\{B(a) \wedge B(b)\} = \vee\{B(0) \wedge B(b)\} = \vee B(b) = 1 \Longrightarrow B/B \neq \mathcal{X}_{\{1\}}.$$

قضیه زیر و نتیجه آن راه را برای انجام محاسبه بر روی اعداد فازی هموار می‌کنند:

قضیه ۳.۳. (نتیجه ۳.۱.۱۰ مرجع [٦]) اگر $A, B \in FN(R)$ (اعداد فازی روی R) و o یک عمل دوتایی پیوسته روی R باشد آنگاه

$$(AoB)_a = A_a o B_a$$

نتیجه ۳.۴. اگر $A, B \in FN(R)$، آنگاه برای هر $a \in [0, 1]$

۱) $(A + B)_a = A_a + B_a$

۲) $(A.B)_a = A_a.B_a$

۳) $(A - B)_a = A_a - B_a$

از آنجا که طبق اصل تجزیه

$$AoB(x) = \vee_{a \in [0,1]} a \mathcal{X}_{(AoB)_a}(x)$$

بنابراین برای شناسایی عدد فازی AoB باید $(AoB)_a$ را به‌دست آوریم. چون $(AoB)_a = A_a o B_a$ و α-برش‌های اعداد فازی بازه‌های بسته هستند لازم است که به انجام عملیات بر روی بازه‌های بسته بپردازیم.

تعریف ۳.۵. اگر o هر یک از چهار عمل اصلی جمع، تفریق، ضرب و تقسیم روی R باشد و A و B دو زیرمجموعه از R باشند آنگاه AoB به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$AoB = \{aob | a \in A, b \in B\}$$

می‌دانیم که توابع پیوسته مجموعه همبند را به مجموعهٔ همبند تصویر می‌کنند. حال با توجه به پیوستگی توابع جمع، تفریق، ضرب و تقسیم (به شرط آن که $0 \notin [c, d]$) و تعریف (۳.۵) اگر

$A=[a,b]$ و $B=[c,d]$ با کمی محاسبه داریم:

$$i)\qquad [a,b]+[c,d]=[a+c,b+d]$$

$$ii)\qquad [a,b]-[c,d]=[a-d,b-c]$$

$$iii)\qquad [a,b].[c,d]=[\min(ac,ad,bc,bd),\max(ac,ad,bc,bd)]$$

$$iv)\qquad [a,b]/[c,d]=[\min(a/d,a/c,b/d,b/c),\max(a/d,a/c,b/d,b/c)]$$

به شرط آن که $\circ\notin[c,d]$.

در مثال زیر ضمن محاسبه αـبرشهای اعداد فازی A و B، αـبرش‌های اعداد فازی $A+B$، $A-B$، $A.B$ و A/B را محاسبه و سپس با استفاده از اصل تجزیه خود این اعداد را محاسبه می‌کنیم:

مثال ۳.٦. فرض کنید

$$A(x)=\begin{cases}\frac{x+۱}{۲} & -۱\le x<۱\\ \frac{۳-x}{۲} & ۱\le x<۳\\ \circ & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}\quad,\ B(x)=\begin{cases}\frac{x-۱}{۲} & ۱\le x<۳\\ \frac{۵-x}{۲} & ۳\le x<۵\\ \circ & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

در این صورت

$$\begin{aligned}A_\alpha &=\{x|A(x)\ge\alpha\}=\left\{x|\tfrac{x+۱}{۲}\ge\alpha,\tfrac{۳-x}{۲}\ge\alpha\right\}\\ &=\{x|x\ge ۲\alpha-۱,x\le ۳-۲\alpha\}=[۲\alpha-۱,۳-۲\alpha]\\ B_\alpha &=\{x|B(x)\ge\alpha\}=\left\{x|\tfrac{x-۱}{۲}\ge\alpha,\tfrac{۵-x}{۲}\ge\alpha\right\}\\ &=\{x|x\ge ۲\alpha+۱,x\le ۵-۲\alpha\}=[۲\alpha+۱,۵-۲\alpha].\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}(A+B)_\alpha &=A_\alpha+B_\alpha=[۴\alpha,۸-۴\alpha]\\ (A-B)_\alpha &=A_\alpha-B_\alpha=[۴\alpha-٦,۲-۴\alpha]\\ (A.B)_\alpha &=\begin{cases}[-۴\alpha^۲+۱۲\alpha-۵,۴\alpha^۲-۱٦\alpha+۱۵] & \alpha\in[\circ,۱/۲]\\ [-۴\alpha^۲-۱,۴\alpha^۲-۱٦\alpha+۱۵] & \alpha\in(۱/۲,۱]\end{cases}\end{aligned}$$

و

$$(A/B)_\alpha=\begin{cases}\left[\frac{۲\alpha-۱}{۲\alpha+۱}\ ,\ \frac{۳-۲\alpha}{۲\alpha+۱}\right] & \alpha\in(\circ,۱/۲]\\ \left[\frac{۲\alpha-۱}{۵-۲\alpha}\ ,\ \frac{۳-۲\alpha}{۲\alpha+۱}\right] & \alpha\in(۱/۲,۱]\end{cases}$$

حال اعداد فازی $A+B$، $A-B$، $A.B$ و A/B را محاسبه می‌کنیم:

$$(A+B)(x) = \vee_{\alpha\in[0,1]}\alpha\mathcal{X}_{(A+B)_\alpha}(x) = \vee_{x\in(A+B)_\alpha}\alpha$$

لذا

$$x\in(A+B)_\alpha \Longrightarrow x\in[4\alpha, 8-4\alpha] \Longrightarrow 4\alpha\leq x\leq 8-4\alpha \Longrightarrow \alpha\leq x/4\ ,\ \alpha\leq 2-(x/4)$$

از طرفی اگر قرار دهیم $u=\vee_{x\in(A+B)_\alpha}\alpha$ چون $\alpha\in[0,1]$ پس $u\in[0,1]$. بنابراین اگر $u=x/4$ آنگاه $0\leq x/4\leq 1$ یعنی $0\leq x\leq 4$. بدیهی است که در این بازه $1\leq 2-(x/4)\leq 2$ و u نمی‌تواند $2-(x/4)$ انتخاب شود و اگر $u=2-(x/4)$ آنگاه $0\leq 2-(x/4)\leq 1$، یعنی $4\leq x\leq 8$ و در این بازه $1\leq x/4\leq 2$. در نتیجه

$$(A+B)(x)=\begin{cases} x/4 & 0<x\leq 4\\ 2-(x/4) & 4<x\leq 8\\ 0 & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

به همین ترتیب

$$(A-B)(x)=\begin{cases} \frac{6+x}{4} & -6\leq x<-2\\ \frac{-x+2}{4} & -2\leq x<2\\ 0 & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

برای محاسبه $A.B$، داریم:

$$(A.B)(x)=u=\vee_{\alpha\in[0,1]}\alpha\mathcal{X}_{(A.B)_\alpha}(x)=\vee_{x\in(A.B)_\alpha}\alpha$$

حالت اول: اگر $0\leq\alpha\leq 1/2$، آنگاه

$$\begin{aligned} & x\in(A.B)_\alpha \Longrightarrow x\in[-4\alpha^2+12\alpha-5, 4\alpha^2-16\alpha+15]\\ & \Longrightarrow \begin{cases} -4\alpha^2+12\alpha-5\leq x \Longrightarrow \alpha\leq\frac{3-\sqrt{4-x}}{2}\\ x\leq 4\alpha^2-16\alpha+15 \Longrightarrow \alpha\leq\frac{4-\sqrt{1+x}}{2}\end{cases}.\end{aligned}$$

لذا، اگر $\vee_{x\in(A.B)_\alpha}\alpha=u=\frac{3-\sqrt{4-x}}{2}$، آنگاه

$$0\leq\frac{3-\sqrt{4-x}}{2}\leq 1/2 \Longrightarrow -5\leq x\leq 0.$$

و اگر $\vee_{x\in(A.B)_\alpha} = u = \frac{۴-\sqrt{۱+x}}{۲}$، آنگاه

$$\circ \leq \frac{۴-\sqrt{۱+x}}{۲} \leq ۱/۲ \Longrightarrow ۸ \leq x \leq ۱۵.$$

حالت دوم: اگر $۱/۲ < \alpha \leq ۱$، آنگاه

$$(A.B)_\alpha = [۴\alpha^۲ - ۱, ۴\alpha^۲ - ۱۶\alpha + ۱۵]$$

بنابراین:

$$x \in (A.B)_\alpha \Longrightarrow ۴\alpha^۲ - ۱ \leq x \ , \ x \leq ۴\alpha^۲ - ۱۶\alpha + ۱۵$$

لذا

$$\alpha \leq \frac{\sqrt{x+۱}}{۲} \ , \ \alpha \leq \frac{۴-\sqrt{۱+x}}{۲}$$

حال، اگر $\vee_{x\in(A.B)_\alpha} \alpha = u = \frac{\sqrt{x+۱}}{۲}$، آنگاه

$$۱/۲ < \frac{\sqrt{x+۱}}{۲} \leq ۱ \Longrightarrow \circ < x \leq ۳$$

اگر $\vee_{x\in(A.B)_\alpha} \alpha = u = \frac{۴-\sqrt{۱+x}}{۲}$، آنگاه

$$۱/۲ < \frac{۴-\sqrt{۱+x}}{۲} \leq ۱ \Longrightarrow ۳ \leq x < ۸$$

بنابراین:

$$(A.B)(x) = \begin{cases} \frac{۳-\sqrt{۴-x}}{۲} & -۵ < x \leq \circ \\ \frac{\sqrt{x+۱}}{۲} & \circ < x \leq ۳ \\ \frac{۴-\sqrt{۱+x}}{۲} & ۳ < x \leq ۱۵ \\ \circ & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

به طور مشابه می‌توان عدد فازی A/B را به صورت زیر محاسبه کرد

$$(A/B)(x) = \begin{cases} \frac{۱+x}{۲(۱-x)} & -۱ < x < \circ \\ \frac{۵x+۱}{۲(۱+x)} & \circ \leq x \leq ۱/۳ \\ \frac{۳-x}{۲(۱+x)} & ۱/۳ < x \leq ۳ \\ \circ & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

تعریف ۳.۷. عدد فازی A را مثلثی گوئیم اگر اعداد حقیقی a و b و c وجود داشته باشند به طوری که

$$A(x)=\begin{cases} 0 & x<a \\ \frac{x-a}{b-a} & a\leq x\leq b \\ \frac{x-c}{b-c} & b\leq x\leq c \\ 0 & x>c \end{cases}$$

در این صورت عدد فازی مثلثی A را با سه‌تایی مرتب (a,b,c) نیز نمایش می‌دهند.

قضیهٔ ۳.۸. (قضیه ۳.۲.۵ مرجع [۶]) مجموع دو عدد فازی مثلثی یک عدد فازی مثلثی است. به عبارت دیگر:

$$(a,b,c)+(d,e,f)=(a+d,b+e,c+f)$$

نکتهٔ ۳.۹. گر چه مجموعه اعداد فازی مثلثی نسبت به جمع بسته است اما نسبت به ضرب بسته نیست.

مثال ۳.۱۰. اگر $A=(-1,0,1)$، آنگاه

$$A(x)=\begin{cases} 0 & x<-1 \\ 1+x & -1\leq x<0 \\ 1-x & 0\leq x<1 \\ 0 & 1\leq x \end{cases}$$

در این صورت αـ برش‌های A به صورت زیرند:

$$\begin{aligned} A_\alpha &= \{x|x\geq\alpha\}=\{x|1+x\geq\alpha,1-x\geq\alpha\} \\ &= \{x|x\geq\alpha-1,x\leq 1-\alpha\}=[\alpha-1,1-\alpha] \end{aligned}$$

برای محاسبه αـبرش‌های عدد فازی $A.A$ داریم

$$(A.A)_\alpha=A_\alpha.A_\alpha=[\alpha-1,1-\alpha].[\alpha-1,1-\alpha]=[-(\alpha-1)^2,(1-\alpha)^2]$$

$$(A.A)(x)=u=\vee\alpha\mathcal{X}_{(A.A)_\alpha}(x)$$

لذا

$$x\in(A.A)_\alpha\Longrightarrow\begin{cases} -(\alpha-1)^2\leq x\overset{x\leq 0}{\Longrightarrow}(\alpha-1)^2\geq -x\Longrightarrow\begin{cases}\alpha-1\geq\sqrt{-x} \\ \alpha-1\leq-\sqrt{-x}\Longrightarrow\alpha\leq 1-\sqrt{-x}\end{cases} \\ x\leq(1-\alpha)^2\overset{x\geq 0}{\Longrightarrow}\sqrt{x}\leq 1-\alpha\Longrightarrow\alpha\leq 1-\sqrt{x}\end{cases}$$

بنابراین، اگر $u = 7\alpha = 1 - \sqrt{-x}$، آنگاه

$$0 \leq 1 - \sqrt{-x} \leq 1 \Longrightarrow -1 \leq x \leq 0.$$

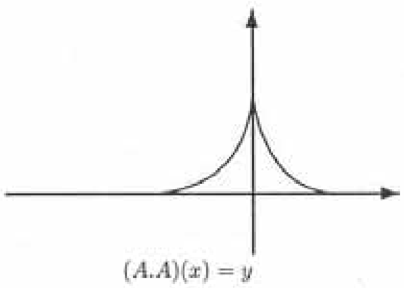
و اگر $u = 1 - \sqrt{x}$، آنگاه

$$0 \leq 1 - \sqrt{x} \leq 1 \Longrightarrow 0 \leq x \leq 1$$

در نتیجه:

$$(A.A)(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{-x} & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - \sqrt{x} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

که به وضوح یک عدد مثلثی نیست و گراف آن در شکل ۲ رسم شده است.



شکل ۲.

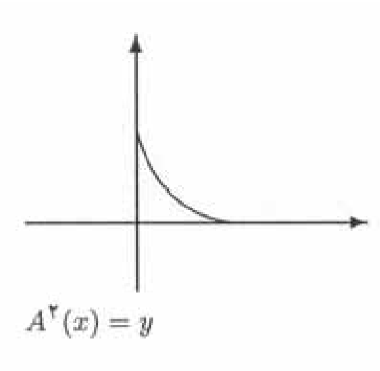
مثال زیر بیانگر یکی دیگر از تفاوت‌های حساب اعداد فازی با حساب اعداد معمولی است.

مثال ۳.۱۱. در حالت کلی $A.A \neq A^2$. عدد فازی A در مثال قبل را در نظر بگیرید. برای محاسبه A^2 طبق اصل گسترش داریم:

$$A^2(y) = \begin{cases} \sup_x A(x) & x^2 = y \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases} = \begin{cases} \sup\{A(\sqrt{y}),\ A(-\sqrt{y})\} & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 - \sqrt{y} & y \geq 0 \\ 0 & y > 0 \end{cases}$$

که گراف آن در شکل ۳ رسم شده است.



شکل ۳.

بدیهی است که این عدد با عدد فازی $A.A$ که در مثال (۳.۱۰) محاسبه شد متفاوت است.

مراجع

[1] D. Dubois, H. Prade, Fuzzy sets and systems, Academic Press, New York, 1980.

[2] G. J. Klir, B. Yuan, Fuzzy sets and fuzzy logic, Prentice-Hall, Upper Saddle Rives NJ, 1995.

[3] M. Mares, Algebra of fuzzy quantities, Int. J. General systems 20(1), 59-65, 1991.

[4] M. Mares, Multiplication of fuzzy quatities, Kybernetika 28 (5), 337-356, 1992.

[5] M. Mares, Computation over fuzzy quantities, CRC-Press, Boca Raton, 1994.

[6] H. T. Nguyen, E. A. Walker, A first course in fuzzy logic-2nd ed Chapman & Hall/CRC, Boca Raton London NewYork, 1999.

[۷] رجبعلی برزوئی (گردآورنده)، مباحثی در نظریه مجموعه‌های فازی (مجموعه مقالات)، دانشگاه سیستان و بلوچستان، سال ۱۳۸۱.

[۸] مرتضی زاهدی، تئوری مجموعه‌های فازی و کاربردهای آن، نشر کتاب دانشگاهی، چاپ اول، سال ۱۳۷۸.

[۹] سید محمود طاهری، آشنایی با نظریه مجموعه‌های فازی، انتشارات جهاد دانشگاهی مشهد، چاپ اول، ۱۳۷۵.

[۱۰] اس. وی. کارتالوپولس، منطق فازی و شبکه‌های عصبی، مفاهیم و کاربردها، مترجمان محمد جورابیان و رحمت‌الله هوشمند، انتشارات دانشگاه شهید چمران اهواز ۶۰، سال ۱۳۸۱.

[۱۱] کازوتاناکا، مقدمه‌ای بر منطق فازی برای کاربردهای عملی، مترجمان علی وحیدی اصل و حمیدرضا طارقین، انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد ۳۲۷، سال ۱۳۸۱.

[۱۲] جی. ج. کلر، یو. اس. کلیر و ب. یوآن، تئوری مجموعه‌های فازی، اصول و کاربردها، ترجمه و تدوین محمد حسین فاضل زرندی، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، سال ۱۳۸۱.

[۱۳] لی‌وانگ، سیستم‌های فازی و کنترل فازی، مترجمان محمد تشنه‌لب و سایرین، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، سال ۱۳۷۸.

[۱۴] ماشاالله ماشین‌چی، مجموعه‌های مشکک، انتشارات دانشگاه شهید باهنر کرمان ۱۳۳، ۱۳۷۹.

ماشاالله ماشین‌چی mashinchi@mail.uk.ac.ir
حسن حسن‌پور hassanpur@graduate.uk.ac.ir
محبوبه حسین‌یزدی myazdi@spnu.ac.ir
دانشکده ریاضی و کامپیوتر
دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۸ (بهار ۱۳۸۶) صص. ۶۳ تا ۶۵

برهان دیگری برای قضیهٔ اساسی جبر

خوزه کارلوس و سوزا الیویرا سانتوز[1]

مترجم: حمیدرضا وهابی

هدف این نوشته اثبات قضیهٔ اساسی جبر است. به عبارت دقیق‌تر، نشان می‌دهیم که درجهٔ یک چندجمله‌ای تحویلناپذیر در $\mathbb{R}[X]$ ۱ یا ۲ است. برای اثبات این که درجهٔ یک چندجمله‌ای تحویلناپذیر در $\mathbb{C}[X]$ مساوی با ۱ است می‌توان از روش مشابهی استفاده نمود.

فرض کنید n یک عدد صحیح بزرگ‌تر از ۱ و P یک چندجمله‌ای تحویلناپذیر درجه n در $\mathbb{R}[X]$ باشد. نشان می‌دهیم $n = ۲$. ایده‌ال تولیدشده توسط P در حلقهٔ $\mathbb{R}[X]$ را با $\langle P\rangle$ نشان می‌دهیم. از آنجایی که P تحویلناپذیر است، حلقهٔ خارج قسمتی $\mathbb{R}[X]$ بر $\langle P\rangle$ یک میدان است. اگر $\psi : \mathbb{R}^n \to \dfrac{\mathbb{R}[X]}{\langle P\rangle}$ را با

$$(a_۰, a_۱, \ldots, a_{n-۱}) \mapsto a_۰ + a_۱X + \ldots + a_{n-۱}X^{n-۱} + \langle P\rangle$$

تعریف کنیم، آنگاه ψ یک یکریختی گروهی از $(\mathbb{R}^n, +)$ به روی $(\dfrac{\mathbb{R}[x]}{\langle P\rangle}, +)$ است. این یکریختی به وضوح یک ساختار میدان روی $\mathbb{R}^n$ القا می‌کند که با ساختار معمولی آن متفاوت است. حاصلضرب دو عضو x و y از $\mathbb{R}^n$ با نماد $x.y$، و عضو همانی ضرب با نماد ۱ نشان داده شده است. این ضرب که یک تابع دو خطی از $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ به توی $\mathbb{R}^n$ است، پیوسته می‌باشد.

فرض کنید $|.|$ نرمی در $\mathbb{R}^n$ (نسبت به ساختار متداول فضای برداری حقیقی) باشد طوری که $|۱| = ۱$ و برای هر x در $\mathbb{R}^n$ تعریف کنید

$$||x|| = \sup_{|y|=۱} |x.y|.$$

1) Jose Carlos and Sousa Oliveira Santos

این نرم دقیقاً نرم مربوط به درونریختی $y \mapsto x.y$ از $\mathbb{R}^n$ است. بنابراین $||۱|| = ۱$ و برای هر x و y در $\mathbb{R}^n$، $||x.y|| \leq ||x||\,||y||$. سری‌های

$$\sum_{n=۰}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad , \qquad \sum_{n=۱}^{+\infty} (-۱)^{n+۱} \frac{(x-۱)^n}{n}$$

هر دو نسبت به این نرم به ترتیب در $\mathbb{R}^n$ و $\{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x-۱|| < ۱\}$ مطلقاً و موضعاً به طور یکنواخت همگرا می‌باشند. مجموع این سری‌ها را، به ترتیب با $\exp(x)$ و $\log(x)$ نشان می‌دهیم. چون عمل ضرب جابجایی است، به سادگی می‌توان نشان داد که برای هر x و y در $\mathbb{R}^n$، $\exp(x+y) = \exp(x).\exp(y)$. به علاوه، هیچگاه $\exp(x) = ۰$ برقرار نیست، زیرا $\exp(x).\exp(-x) = \exp(x-x) = \exp(۰) = ۱$. بنابراین $\exp : (\mathbb{R}^n, +) \to (\mathbb{R}^n \setminus \{۰\}, .)$ به عنوان یک همریختی گروهی پیوسته تعریف می‌شود.

دقیقاً مشابه حالت ماتریسی (نگاه کنید به [۱، بخش ۱.۲] یا [۳، بخش ۴.ب]) می‌توان ثابت کرد برای هر x در $\mathbb{R}^n$ که $||x-۱|| < ۱$،

$$\exp(\log(x)) = x \qquad (۱)$$

و برای هر x در $\mathbb{R}^n$ که $||\exp(x) - ۱|| < ۱$،

$$\log(\exp(x)) = x. \qquad (۲)$$

از (۱) نتیجه می‌شود که اگر V یک همسایگی ۰ باشد، آنگاه $\exp(V)$ یک همسایگی ۱ است. بنابراین، چون exp یک همریختی گروهی است، نگاشتی باز خواهد بود. در نتیجه exp پوشاست. در واقع، اگر $G = \exp(\mathbb{R}^n)$، آنگاه G یک زیرگروه باز از $(\mathbb{R}^n \setminus \{۰\}, .)$ است، و اگر x متعلق به $(\mathbb{R}^n \setminus \{۰\}) \setminus G$ باشد، آنگاه

$$G.x \subset (\mathbb{R}^n \setminus \{۰\}) \setminus G.$$

بدین ترتیب متمم G در $\mathbb{R}^n \setminus \{۰\}$ نیز یک مجموعهٔ باز است. بنابراین، چون $\mathbb{R}^n \setminus \{۰\}$ همبند است، متمم G باید تهی باشد. به عبارت دیگر، $\exp(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \setminus \{۰\}$.

از (۲) نتیجه می‌شود که $\ker(\exp)$ گسسته است و به وضوح (نگاه کنید به [۲، فصل ۷، بخش ۱.۱] یا [۴، بخش ۱۲.۱]) به جز وقتی که $\ker(\exp) = \{۰\}$، بردارهای مستقل خطی $v_۱$، …، v_m در $\mathbb{R}^n$ $(m \geq ۱)$ وجود دارند به طوری که $\ker(\exp) = \bigoplus_{k=۱}^{m} \mathbb{Z}_{v_k}$. با توجه به این که exp یک نگاشت باز است نتیجه می‌گیریم که این نگاشت یک همانریختی از $\frac{\mathbb{R}^n}{\ker(\exp)}$ (که با $(S^۱)^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ همانریخت است) به روی $\mathbb{R}^n \setminus \{۰\}$ القا می‌کند. اما اگر $n > ۲$، فضای $\mathbb{R}^n \setminus \{۰\}$ همبند ساده می‌شود، در حالی که $(S^۱)^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ وقتی $۱ \leq m \leq n$ همبند ساده نیست.

برای اجتناب از تناقض، باید $\ker(\exp) = \{0\}$. بنابراین، $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ باید با $\mathbb{R}^n$ همانریخت باشد. ولی این غیرممکن است. این مطلب را می‌توان با استفاده از گروه‌های همولوژی اثبات کرد. روش دیگر اثبات این مطلب استفاده از این حقیقت است که در $\mathbb{R}^n$ هر مجموعهٔ فشردهٔ K زیرمجموعه‌ای است از مجموعهٔ فشردهٔ دیگری که متمم‌اش همبند است در حالی که $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ چنین نیست (برای مثال، $K = S^{n-1}$، کرهٔ واحد در $\mathbb{R}^n$، را در نظر بگیرید). بنابراین $n = 2$ و قضیه ثابت می‌شود.

مراجع

[1] A. Baker, Matrix Groups: An Introduction to Lie Group Theory, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[2] N. Bourbaki, General Topology, Chapters 5-10, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[3] M.L. Curtis, Matrix Groups, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[4] J.J. Duistermaat and J. A. C. Kolk, Lie Groups, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

مترجم: حمیدرضا وهابی

دانشگاه آزاد اسلامی واحد اسلامشهر

hrvahabi@yahoo.com

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۸ (بهار ۱۳۸٦) صص. ٦۷ تا ۷۴

استفان باناخ

حامد اسماعیل‌زاده و محمد صال مصلحیان

استفان باناخ[۱] در ۳۰ مارس ۱۸۹۲ در شهر کراکو[۲] (لهستان) متولد شد و در ۳۱ اوت ۱۹۴۵ در شهر لوف[۳] (اوکراین) درگذشت. پدرش، استفان گریزک[۴]، کارمند دارایی بود. استفان در یک روستای کوچک به نام استرُسکو[۵] متولد شده بود، که در ۵۰ کیلومتری جنوب کراکو قرار داشت. باناخ دوران طفولیت را با مادر بزرگش در آن جا سپری نمود. بعد از بیماری جدی مادر بزرگ، استفان گریزک پسرش را برای نگهداری به فرانسیسکا پلوا[٦] سپرد که با دخترش ماریا در کراکو زندگی می‌کرد. قیمِ ماریا یک فرانسوی روشنفکر به نام جولیوز میین[۷] بود که به سرعت به استعداد باناخ پی برد. میین به پسر جوان یاد داد که فرانسوی صحبت کند و این امر به باناخ در تحصیلش بسیار کمک کرد.

باناخ دوره دبستان را در کراکو گذراند. در سال ۱۹۰۲ دبستان را برای تحصیلات میانی خود ترک کرد و در مدرسه راهنمایی هنریک سینکیویچ[۸] شروع به تحصیل کرد. بنا به تصادف یکی از هم‌کلاسی‌های باناخ، وایتلد ویلکوز[۹] بود که یک پروفسور ریاضیات شد، مدرسهٔ آنها در خور داشتن چنین شخص عالمی نبود و در ۱۹۰٦ ویلکوز به مدرسه بهتری رفت اما باناخ در هنریک سینکیویچ ماند در حالی که ارتباطش را با ویلکوز حفظ کرد. در طول اولین سالهای مدرسه، باناخ به رتبهٔ اول در ریاضیات و علوم طبیعی رسید. یکی از شاگردان مدرسهٔ باناخ که هم دورهٔ او بود از باناخ و ویلکوز چنین یاد می‌کند:

«باناخ لاغر و رنگ‌پریده بود. او در پاسخ‌دادن به همکلاسی‌هایش گشاده‌رو به نظر می‌رسید. اما به هیچ چیزی خارج از ریاضیات علاقه نداشت. خیلی تند حرف می‌زد درست به همان سرعتی که در مورد ریاضیات می‌اندیشید یا محاسبه می‌کرد. ویلکوز نیز چنین پدیده‌ای بود. بین آنها هیچ مسألهٔ ریاضی نبود که حل نشود. همان‌قدر که باناخ در مسائل ریاضی سریع بود، ویلکوز به طور خارق العاده‌ای در حل مسائل فیزیک سرعت داشت، موضوعی که اصلاً مورد علاقهٔ باناخ نبود.»[۲]

1) Stefan Banach 2) Krakow 3) Lvov 4) Stefan Greczek 5) Ostrowsko 6) Franciszka Plowa 7) Juliusz Mien 8) Henryk Sienkiewicz Gymnasium 9) Witold Wilkosz

گزارش شده است که وی در فلسفه شکاک بوده است؛ چنان که اغلب از پدر پیلکو سؤالاتی می‌پرسیده است مانند این که آیا خداوندِ قادر مطلق می‌تواند سنگی خلق کند که نتواند آن را بلند کند.

کسب بهترین رتبه‌ها توسط باناخ در سال‌های اول به رتبه‌های پایین‌تر در سال‌های بعد تبدیل شد. او امتحاناتش را در سال ۱۹۱۰ به پایان رساند، در هشت درس نمره پایین گرفت، اما با تصمیم مدرسه (و موافقت پدر پیلکو؛ علی‌رغم سؤالات شرمگینانه‌ای که باناخ می‌پرسید!) فارغ‌التحصیل شد. بعد از اتمام مدرسه، باناخ و ویلکوز تصمیم گرفتند به ریاضیات بپردازند. اما هر دو احساس کردند که‌ریاضیات آن‌قدر پیشرفت کرده است که در آن هیچ چیز جدیدی کشف نمی شود. بنابراین تصمیم گرفتند موضوعات دیگری را انتخاب کنند. این دو ریاضی‌دان برجستهٔ آینده می‌توانستند تصمیم بهتری برای آینده بگیرند، اما کسی نبود که آن‌ها را راهنمایی کند. ویلکوز زبان‌های شرقی را برگزید ولی دو سال بعد تغییر رشته داد و در ۱۹۱۹ دکترای ریاضی گرفت. باناخ مهندسی را انتخاب کرد و لذا کراکو را ترک کرد و به پلی‌تکنیک لوف رفت. در این زمان پدر باناخ که فرزندش را پشتیبانی مالی زیادی نمی‌کرد، هزینه‌های زندگی باناخ را به خود او واگذارده بود. سال ۱۹۱۴ جنگ جهانی اول شروع شد ولی باناخ به علت ضعف چشم چپ و چپ‌دستی از سربازی معاف گردید.

در سال ۱۹۱۶ بر حسب اتفاق، مردی به نام هوگو اشتین هاوس[1] زندگی حرفه‌ای و شخصی باناخ را متحول کرد. اشتین هاوس، که همواره باناخ را بزرگ‌ترین کشفش می‌نامید، مسأله‌ای به باناخ داد که خودش مدت‌ها روی آن کار کرده بود ولی به نتیجه‌ای نرسیده بود. بعد از چند روز باناخ آن را حل کرد. مسأله مربوط به همگرایی حاصل جمع‌های جزئی سری فوریهٔ یک تابع انتگرال پذیر بود. حل این مسأله بعد از وقفه‌ای کوتاه در «بولتن آکادمی کراکو[2]» در سال ۱۹۱۸ با عنوان «همگرایی میانگینی سری‌های فوریه[3]» به زبان فرانسه که زبان علمی آن دوره بود منتشر شد. این مقاله بود که او را به عنوان یک ریاضی‌دان معرفی کرد. در سال ۱۹۱۹ باناخ دومین مقالهٔ خود را تحت عنوان «مقدار میانگین توابع متعامد[4]» به چاپ رساند. در این مقاله باناخ این قضیه را ثابت کرده بود که حاصل جمع میانگین یک دنباله از توابع متعامد، همگرا به صفر است؛ یعنی، اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع روی بازهٔ $[a,b]$ باشد که

$$\int_a^b f_i(t)f_k(t)\,dt = \begin{cases} ۱ & i=k \\ ۰ & i\neq k \end{cases}$$

آن‌گاه برای هر $t\in[a,b]$،

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{۱}{n}\sum_{k=۱}^{n} f_k(t)\right) = ۰.$$

1) Hugo Steinhaus 2) Bulletin of the Cracow Academy 3) Sur la Convergance en moyenne de Séries de Fourier 4) Sur la valeur moyenne des fonctions orthogonales

در همان سال مقالهٔ بعدی باناخ تحت عنوان «معادله تابعی $f(x+y)=f(x)+f(y)$»[۱] منتشر شد. مسألهٔ مورد نظر، یافتن تابعی بود که در معادله کوشی $f(x+y)=f(x)+f(y)$ صدق کند. در سال ۱۹۲۰ باناخ با لوسیا براوس ازدواج کرد. این ازدواج موفق بود چرا که بیست و پنج سال این زوج به یکدیگر عشق ورزیدند. در ۱۹۲۰ به باناخ شغلی تحت عنوان منشی در دانشگاه فنی لوف پیشنهاد شد. این اولین شغل دانشگاهی باناخ بود. باناخ پنجمین مقالهٔ خود را تحت عنوان «جواب‌های معادله تابعی ماکسول»[۲] با استانیسلاو روزیویچ[۳] و ششمین آن را تحت عنوان «مشتق توابع در توابع اندازه پذیر»[۴] ارائه کرد. با این که باناخ هیچگاه تحصیلش را در دانشگاه فنی لوف تمام نکرد، ولی به وی اجازه داده شد دوره دکتری را شروع نماید. او رسالهٔ دکترای خود را در ۱۹۲۰ تحت عنوان «عملگرهای روی مجموعه‌های مجرد و کاربرد آن در معادلات انتگرالی[5]» ارائه کرد. این رساله شامل ایده‌های مهمی مانند فضاهای تابعی و تبدیلات خطی روی آنها بود. گرچه اولین مقالهٔ باناخ در زمینه‌ای که هم اکنون آنالیز تابعی نامیده می‌شود منتشر شد، باید گفت که رسالهٔ او آنالیز تابعی را وارد ریاضیات کرد. باناخ به کامل بودن فضا در رسالهٔ خود بسیار تأکید داشت، چون با استفاده از کامل بودن، قضایای مفیدی اثبات می‌شد. دو قضیهٔ بسیار مهمی که در رسالهٔ او به چشم می‌خورد عبارت بودند از «خطی و پیوسته بودن حد نقطه‌ای دنباله‌ای از توابع خطیِ پیوسته» و قضیهٔ نگاشت انقباضی باناخ که به قضیهٔ نقطهٔ ثابت باناخ معروف است. باناخ علاقه‌ای به نوشتن نداشت ولی در عوض متفکر قهاری بود و لذا استاد راهنمایش از یکی از دستیارانش خواست تا او را همه جا حتی در کافه‌ها همراهی کند و رساله باناخ را که در فکرش بود بنویسد. او این کار را کرد و سپس باناخ آن را ویراستاری نمود.

در ۱۹۲۲ دانشگاه جان کازیمیرز در لوف از رسالهٔ باناخ در نظریهٔ اندازه تقدیر کرد. در ۱۹۲۴ باناخ به مرتبهٔ استاد تمام ارتقاء یافت و طی سال‌های ۱۹۲۵—۱۹۲۴ تحصیلات عالی را در پاریس گذراند. سال‌های بین دو جنگ جهانی برای باناخ سال‌های بسیار پر دردسری بود. علاوه بر ادامهٔ نگارش تعدادی مقالهٔ مهم که در آنها دو مفهوم انتگرال باناخ و حد تعمیم‌یافتهٔ باناخ را ارائه کرد، کتاب‌هایی درسی در زمینه حساب، هندسه و جبر را نیز برای دبیرستان‌ها نوشت. در سال ۱۹۲۹ همراه با اشتین هاوس انتشار مجله ریاضی «مطالعهٔ ریاضیات»[۶] را شروع کردند و باناخ و اشتین هاوس اولین ویراستارهای آن شدند. خط مشی تحریریه این بود: «... متمرکز شدن در تحقیقات روی آنالیز تابعی و موضوعات وابسته». تک نگاشت‌های ریاضی از نشریات مهم دیگری بود که در سال ۱۹۳۱ انتشار آن تحت ویراستاری باناخ و اشتین هاوس از لوف و

---

1) Sur léquation fonctionnelle $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 2) Sur les solutions d'une équation fonctionelle de J. Cl. Maxwell 3) Stanislaw Ruziewiez 4) Sur les fonctions dérivécs des fonctions mesurabeles 5) Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrals 6) Studia Mathematica

کناستر[۱]، کوراتفسکی[۲]، مازورکیویچ[۳] و سیرپینسکی[۴] از ورشو شروع شد. مجلد اول تحت نام «نظریهٔ عملگرهای خطی[۵]» توسط باناخ نوشته شد و در سال ۱۹۳۲ چاپ گردید. این مجلد ویرایش فرانسویِ نسخه‌ای بود که وی تحت همین نام در سال ۱۹۳۱ در لهستان نوشته بود، کتابی که به سرعت به یک اثر کلاسیک تبدیل گردید.

ازتأثیرات مهم بر باناخ، استخدام کوراتفسکی در دانشگاه فنی لوف در سال ۱۹۲۷ و ادامه فعالیت وی تا سال ۱۹۳۴ در آنجا بود. باناخ با همکاری کوراتفسکی چند مقالهٔ مفصل در طول این مدت نوشت. باناخ روش غیرمعمولی داشت . او دوست داشت روی ریاضیات با همکارانش در کافهٔ لوف کار کند. اولام او را در جلسات مکرر در کافهٔ اسکاتلندی به خاطر می‌آورد:

مشکل بود از باناخ جلو بزنیم. ما مسائلی را که در آنجا پیشنهاد می‌شد مورد بحث قرار می‌دادیم. اغلب جواب آشکاری نداشتند، حتی بعد از چند ساعت تفکر بدون جواب می‌ماندند. روز بعد باناخ با نشان‌دادن چند صفحهٔ کاغذ کوچک شامل طرح کلی اثباتی که کامل کرده بود، خبر می آورد.[۲]

آندره‌یی تورویچ[۶] پروفسور ریاضیات در دانشگاه کازیمیرز[۷] در لوف نیز روش کار باناخ را بدین صورت شرح می‌دهد:

[باناخ] بیشتر روزهایش را در کافه می گذراند. او موسیقی و سروصدا را دوست داشت، آنها او را از تمرکز کردن و فکر کردن باز نمی‌داشتند. گاهی اوقات، وقتی کافه در شب بسته می‌شد، به طرف ایستگاه راه آهن قدم می‌زد چون کافه تریای اطراف ایستگاه راه آهن در آن ساعت باز بود. آن‌جا ضمن نوشیدن نوشابه، در مورد مسأله‌ها فکر می کرد.[۲]

در سال ۱۹۳۹ درست قبل از شروع جنگ جهانی دوم، باناخ به عنوان رئیس انجمن ریاضی لهستان[۸] انتخاب شد. درابتدای جنگ، نیروهای شوروی شهر لوف را اشغال کردند. این شهر قبل از جنگ جهانی دوم متعلق به لهستان بود. باناخ قبل از جنگ رابطهٔ خوبی با ریاضی‌دانان شوروی داشت. چندین بار به مسکو رفته بود و با دولت جدید شوروی رابطه خوبی داشت. آنها او را به عنوان یک ریاضیدان بزرگ می‌شناختند و لذا به او اجازه دادند که کرسی خود را در دانشگاه حفظ کند. او در آنجا رئیس دانشکدهٔ علوم دانشگاه که نامش به ایوان فرانکو[۹] تغییر یافته بود، شد. زندگی باناخ در حالی که همچنان به تحقیقات خود ادامه می‌داد، کتاب‌های درسی‌اش را می‌نوشت، سخنرانی می‌کرد و در جلسات کافه اسکاتلندی شرکت می‌جست کمی فرق کرده بود. سوبولوف[۱۰] و الکساندر[۱۱]، باناخ را در لوف در سال ۱۹۴۰ ملاقات کردند. هنگامی که آلمان به شوروی هجوم آورده بود باناخ در کی‌یف[۱۲]

1) Knaster 2) Kuratowski 3) Mazurkiewicz 4) Sierpinski 5) Théorie des Opérations linéaires 6) Andrzej Turowicz 7) Kazimierz 8) Polish Mathematical Society 9) Ivan Franko 10) Sobolev 11) Aleksandrov 12) Kiev

شوروی بود و لذا به سرعت به طرف خانواده‌اش در لوف بازگشت. نازی‌ها در ژوئن سال ۱۹۴۱ لوف را اشغال کردند، بدین جهت باناخ تحت شرایط خیلی سختی زندگی می‌کرد. او در این جریان مورد سوء ظن قرار گرفت و بازداشت شد، اما بعد از چند هفته آزاد شد. وی در جریان قتل عام دانشگاهیان لهستانی جان سالم به در برد. دکتر لومینکی[۱] استاد راهنمای دکترای او نیز در شب جانسوز ۳ جولای ۱۹۴۱ در بحبوحهٔ کشتارهای بیرحمانهٔ آن روز، جان سپرد. در این میان، باناخ از اواخر سال ۱۹۴۱ تا جولای ۱۹۴۴ در یکی از مؤسسه‌های آلمانی کار کرد. باناخ به محض این که شوروی لوف را اشغال کرد به آن‌جا برگشت و تمام ارتباطاتش را تجدید کرد. او سوبولوف را در خارج از مسکو ملاقات کرد، اما در این زمان به طور جدی بیمار شده بود. سوبولوف بعدها وقتی در کنفرانس بزرگداشت باناخ صحبت می‌کرد از این ملاقات چنین یاد می‌کند:

علی‌رغم اثرات زیانبار جنگ در سال‌هایی که تحت اشغال آلمان بود و علی‌رغم بیماری سختی که قوای او را به تحلیل می‌برد، چشمان باناخ هنوز شور زندگی داشتند. او همچون قبل خوش‌رو، بشاش و به طور خارق‌العاده‌ای خوش‌نیت مانده بود.[۲]

باناخ تصمیم گرفت بعد از جنگ، در سال ۱۹۴۵، برای اخذ کرسی ریاضی به دانشگاه یاگلونیان[۲] در کراکو برود اما در لوف به علت سرطان ریه درگذشت.

باناخ آنالیز تابعی مدرن را بنیاد نهاد و سهم عظیمی را در نظریهٔ فضاهای برداری توپولوژیک بازی کرد. به علاوه در نظریهٔ اندازه، انتگرال‌گیری، نظریهٔ مجموعه‌ها و سری‌های متعامد کارهای مهمی کرده بود. نام فضای باناخ توسط فرشه ابداع شد. یک فضای باناخ، فضایی برداری روی میدان اعداد حقیقی یا مختلط همراه با یک نرم است به طوری که تحت متر $d(x,y) = \|x-y\|$ القا شده از آن نرم، کامل است. این مفهوم در رسالهٔ باناخ ارائه شد اما همزمان نوربرت وینر[۳] نیز آن را تعریف کرد ولی خودِ نظریه را گسترش نداد. وینر می‌گوید: «من توانستم دستگاه اصل موضوعی کاملی درست کنم که بتواند همهٔ انواع فضاهای برداری ممکن را در بر گیرد. فرشه کار مرا پسندید، ولی معلوم بود که تأثیر خاص و فوق العاده‌ای در او نکرده است. با این وجود، وقتی که بعد از چند هفته، مقالهٔ استفان باناخ را در یک مجلهٔ ریاضی لهستانی دید و معلوم شد که باناخ هم، به همان نتیجه‌گیری من ــ نه بیشتر و نه کمتر ــ رسیده است، به سختی برآشفت. باناخ همان راه مرا دنبال کرده بود، منتهی چند ماه زودتر. تلاش‌های ما به کلی بی‌ارتباط با هم بود و در استقلال کامل هر دو کار، هیچ تردیدی وجود نداشت. به همین دلیل، بعد از مدتی فضاهای مورد مطالعهٔ من و باناخ را اهمیت کار باناخ در این است که او یک نظریهٔ دستگاهمند را برای آنالیز تابعی بسط داد به‌طوری که نتایجی که قبلاً به صورت مجزا وجود داشت در نظریهٔ جدید تطبیق یافتند. این نظریه کارهایی که توسط ولترا، فردهلم و هیلبرت در معادلات انتگرالی انجام شد، را تعمیم داد. باناخ چند نتیجهٔ اساسی در فضاهای نرم‌دار را اثبات کرد. بسیاری از قضایا، بعد از او به نام وی نامگذاری شد.

1) Lomnicki 2) Jagiellonian 3) Norbert Wiener

بعضی از این قضایا عبارتند از:

- قضیهٔ هان ــ باناخ.

فرض کنید X یک فضای نرم‌دار، M یک زیرفضای X، و f یک تابعک خطی کراندار روی M باشد. در این صورت تابعک خطی کراندار F روی X وجود دارد که

$$F(x) = f(x) \ , \ \ x \in M \qquad (۱)$$
$$\|F\| = \|f\| \qquad (۲)$$

به عبارت دیگر توسیعی از f چون F وجود دارد که خطی و کراندار و حافظ نرم است.

- قضیهٔ نگاشت باز باناخ. فرض کنید X و Y فضاهای باناخ و T یک تبدیل خطی کراندار و برو باشد. در این صورت T نگاشتی باز است، یعنی مجموعه‌های باز را به مجموعه‌های باز نقش می‌کند.
- قضیهٔ باناخ ــ اشتین هاوس. فرض کنید X یک فضای باناخ، Y یک فضای نرم‌دار، و $\{T_n\}$ دنباله‌ای از تبدیلات خطی کراندار از X به‌توی Y باشد. دراین صورت $\{\|T_n\|\}$ یک دنبالهٔ کراندار از اعداد حقیقی است؛ یعنی، $\{T_n\}$ دنباله‌ای کراندار‌در فضای نرم‌دار $B(X,Y)$ است.
- قضیهٔ نقطهٔ ثابت باناخ. فرض کنید $T : X \to X$ یک نگاشت انقباضی با ثابت انقباضی $۰ < \alpha < ۱$ بر روی فضای متریک کامل (X,d) باشد. در این صورت نگاشت T دقیقاً شامل یک نقطهٔ ثابت $u \in X$ است به علاوه برای هر $x \in X$ دنبالهٔ

$$x, T(x), T^{۲}(x), \dots, T^k(x), \dots$$

به نقطهٔ u همگراست یعنی داریم

$$\lim_{k\to\infty} T^k(x) = u$$

از کاربردهای این قضیه در آنالیز عددی، حل معادلهٔ $x = g(x)$ است. اگر$g(x)$ در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته و مشتق پذیر باشد و برای هر$x \in [a,b]$ داشته باشیم $g(x) \in [a,b]$ و به ازای $۰ \leq k < ۱$، $|g'(x)| \leq k < ۱$، آن‌گاه g دارای یک نقطهٔ ثابت $\alpha \in [a,b]$ است و به ازای هر $x_۰ \in [a,b]$ دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=۰}^{\infty}$ که $x_n = g(x_{n-۱})$ به α همگراست. در معادلات دیفرانسیل معمولی نیز برای اثبات قضیهٔ وجود و یکتایی از این قضیه استفاده می‌شود.

- قضیهٔ باناخ ــ ال‌اوغلو. فرض کنید X یک فضای برداری نرم‌دار باشد و X^* دوگان آن باشد. در این صورت گوی بسته یکه

$$S_۱^* = \{f \in X^* \mid \|f\| \leq ۱\}$$

در توپولوژی $*$—ضعیف، فشرده است.

- پارادوکس باناخ ـ تارسکی. پارادوکس باناخ ـ تارسکی در مقالهٔ مفصل این دو ریاضی‌دان در سال ۱۹۲۶ در «ریاضیات پایه»[1] تحت نام «تجزیهٔ مجموعه‌ای از نقاط به چند قسمت هم ارز[2]» منتشر شد. این قضیه، به طور ساده، بیان می‌کند که یک گوی، با استفاده از اصل انتخاب، می‌تواند به زیرمجموعه‌هایی تقسیم شود که می‌توانند برای ساختن دو گوی که هر کدام مثل اولی‌اند به کار روند.

کتاب اسکاتلندی[3]

در فاصله سال‌های ۱۹۳۵ تا ۱۹۴۱، گروهی از ریاضی‌دانان لهستانی از جمله اولام[4]، باناخ، کاتس[5]، مازور[6]، اورباخ[7]، اشتین هاوس، ارلیخ[8]، شاودر[9] و چند نفر دیگر در کافهٔ اسکاتلندی[10] یا در کافهٔ رم[11] در شهر لوف دور هم جمع می‌شدند و مسأله‌ای را مطرح و روی آن بحث می‌کردند. روزی به پیشنهاد باناخ دفتری خریداری شد و خدمتکار کافه مأمور شد آن را در جای مناسبی نگهداری کند. بعد از هر مباحثه‌ای پیشخدمت کافه را فرامی‌خواندند، تا این دفتر را بیاورد و بعد از وارد کردن صورت مسأله (با ذکر نام اشخاص مطرح کننده) در صورت رسیدن به جواب، جواب آن را (با ذکر نام اشخاص حل کننده و تاریخ مسائل) به زبان لهستانی می‌نوشتند. سپس این دفتر به پیشخدمت داده می‌شد تا آن را در جای امن قرار دهد، اینجا زمانی بود که آنالیز تابعی و شاخه‌های مربوط به آن $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - ۱\| < ۱\}$ متولد شدند [۵]. آنها برای هر مسأله جایزه‌ای در نظر می‌گرفتند. این جوایز از یک فنجان قهوه تا پنج بطری نوشیدنی یا یک غاز زنده تغییر می‌کرد.
استفن باناخ اولین مسأله را در ۱۷ ژوئیه ۱۹۳۵ وارد این کتاب کرد و آخرین مسأله یعنی مسألهٔ ۱۹۳ام مربوط به هوگو اشتین هاوس در تاریخ ۳۱ می ۱۹۴۱ نگاشته شد.[۴] حدود ربعی از مسأله‌های این کتاب حل نشده ماندند.[۴] بعد از جنگ جهانی دوم این کتاب توسط فرزند باناخ در ورشو یافت شد و او آن را به اشتین هاوس داد. بعداً یک نسخه از آن برای اولام فرستاده شد و وی آن را در سال ۱۹۵۷ به زبان انگلیسی برگرداند و در لوس آلاموس امریکا منتشر نمود.[۶] در بین ریاضی‌دانان، این کتاب به کتاب اسکاتلندی معروف است. بعدها در سال ۱۹۷۷ ویرایشی تصحیح شده از آن به دست آمد و در سال ۱۹۸۱ نسخه‌ای از آن با توجه به سخنرانی‌ها و کنفرانس‌هایی که ریاضی‌دانان از مسائل آن کتاب ارائه داده بودند با عنوان «کتاب اسکاتلندی، ریاضیات کافه اسکاتلندی[12]» توسط انتشارات بیرخاوزر[13] و به ویرایش مالدین[14] چاپ شد.

---

1) Fundamenta Mathematicae 2) *Sur la décomposition des ensembles de points en partiens respectivement congruent* 3) Scottish book 4) S. Ulam 5) M. Kac 6) S. Mazur 7) H. Auerbach 8) W. Orlicz 9) J. Sachauder 10) Cafe Szkocka (scottish cafe) 11) Cafe Roma 12) *The scottish book: Mathematics from scottish café* 13) Birkhauser 14) R. Daniel Mauldin

در اینجا به مسألهٔ شمارهٔ ۴۳ این کتاب که توسط مازور طرح و توسط باناخ حل شد و به بازی باناخ ـ مازور مشهور است اشاره می‌کنیم:
دو بازیکن که آنها را A و B می‌نامیم و یک زیرمجموعهٔ ناتهی E از اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. بازی بدین صورت است که A یک بازهٔ ناتهی $D_۱$ از E را انتخاب می‌کند و B یک زیربازهٔ ناتهی $D_۲$ از $D_۱$ انتخاب می‌کند و A با انتخاب یک زیربازهٔ ناتهی $D_۳$ از $D_۲$ کار را ادامه می‌دهد و سپس B زیربازهٔ $D_۴$ از $D_۳$ را انتخاب می‌کند و ... . بازی بدین صورت ادامه می‌یابد. A در صورتی برنده محسوب می‌شود که اشتراک تمام بازه‌های $D_۱$، $D_۲$، ... و E ناتهی باشد و در غیر این صورت B برنده خواهد بود. مازور مشاهده کرد که اگر متمم E در یک بازه از رستهٔ اول بئر باشد آنگاه A ترفندی دارد که می‌تواند بازی را ببرد و اگر خود E در $\mathbb{R}$ از رستهٔ اول بئر باشد B ترفندی دارد که می‌تواند ببرد. سؤال مازور (با جایزه یک بطری نوشیدنی) این بود که آیا این شرایط، به ترتیب، برای آن که A یا B ببرد لازم هستند؟ این سؤال توسط باناخ حل شد ولی هیچ‌گاه اثباتی از او در جایی دیده نشد.[٦]

باناخ حدود ٦۰ اثر مهم از خود برجای گذاشت و نام او در نوشتارهای ریاضی بیش از ۱۱۰۰۰ بار تکرار شده است. حسن ختام این مقاله سخن زیر از باناخ است:

یک ریاضی‌دان کسی است که می‌تواند قیاس بین قضایا را بیابد، یک ریاضی‌دان خوب کسی است که می‌تواند قیاس بین اثبات‌ها را ببیند، خوب‌ترین ریاضی‌دان کسی است که می‌تواند قیاس بین نظریه‌ها را نقد کند و یک ریاضی‌دان فوق‌العاده خوب را چنین می‌توان تصور کرد که بتواند قیاس بین قیاس‌ها را ببیند. [۱]

خدایش بیامرزاد.

تبصره. این نوشتار اساساً از منابع [۲] و [۳] اقتباس شده است.

منابع

[1] Terry J. Morrison, Functional analysis, an introduction to Banach spaces, John Wiley 2001

[2] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/HistTopics/ Mathematitians/Banach.html

[3] http://www-math.cudenver.edu/ Wcherowi/courses/m4010/s05/Noe.pdf

[4] http://www.icm.edu.pl/home/delta/delta2/dlt0209.html

[5] http://www.univ-ag.fr/aoc/activite/revalski/Banach-Mazur_Game.pdf

[6] http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/ history/HistTopics/ Scottish_Book.html

[۷] نوربرت وینر، من ریاضیدانم، ترجمهٔ پرویز شهریاری ، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳٦۸.

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۳۱ (پاییز ۱۳۸۲) صص. ۷۵ تا ۷۹

مسأله

این قسمت از فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی به طرح و سپس حلِ مسائلی در حدِ دروسِ دوره‌های کارشناسی و کارشناسی ارشدِ ریاضیات اختصاص دارد. این شماره، آخرین شماره‌ای است که زیر نظر اینجانب تدوین و چاپ می‌شود. باید به اطلاع خوانندگان رسانده شود که در طول ۳ سال اخیر فقط ۳ نفر از جامعهٔ علمی کشور اقدام به ارسالِ پاسخِ سؤالاتِ چاپ شده در فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، و تنها ۲ نفر سؤالاتِ پیشنهادی به دفتر مجله ارسال نموده‌اند. این آمارِ تأسف‌انگیز محدود به دورهٔ اخیر نبوده و وضعیت مشابه‌ای نیز در دوره قبلی برقرار بوده است. آمار ایرانیانِ حل‌کنندهٔ مسأله در مورد مجلاتی همچون ماهنامهٔ ریاضی امریکایی از وضعیت بهتری برخوردار نیست. این رخداد در کنار علاقهٔ کمِ جامعهٔ علمی به نگارشِ مقالهٔ خوب، نیاز به تحلیل جدی دارد که مجالی دیگر می‌طلبد.

محمد صال مصلحیان

مسألهٔ ۱: چندجمله‌ای $P(x)$ را که تمام ریشه‌های آن حقیقی هستند، در نظر بگیرید. ثابت کنید برای تمام اعداد حقیقی x،

$$(P'(x))^{۲} \geq P(x)P''(x)$$

حل:
اگر درجه P صفر باشد که چیزی برای اثبات نمی‌ماند. بنابراین مسأله را در حالتی که درجه P غیرصفر است بررسی می‌کنیم. با توجه به این که تمام ریشه‌های $P(x)$ حقیقی هستند، $P(x)$ را به صورت زیر می‌توانیم نشان دهیم:

$$P(x) = A(x - x_{۱})^{m_{۱}}(x - x_{۲})^{m_{۲}} \cdots (x - x_n)^{m_n}$$

که در آن $m_i \geq ۱$ و درجهٔ P برابر است با $m_{۱} + m_{۲} + \ldots + m_n > ۰$. در حالتی که $x = x_i$، نامساوی برقرار است. بنابراین فرض می‌کنیم $x \neq x_i$. بنابراین

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=۱}^{n} \frac{m_i}{x - x_i}, \quad (x \neq x_i)$$

از طرفین تساوی مشتق می‌گیریم

$$\frac{P''(x)P(x)-P'^{۲}(x)}{P^{۲}(x)}=\sum_{i=۱}^{n}\frac{-m_i}{(x-x_i)^{۲}}$$

$$P''(x)P(x)-P'^{۲}(x)=\left(\sum_{i=۱}^{n}\frac{-m_i}{(x-x_i)^{۲}}\right)P^{۲}(x)\leq ۰\,.$$

مسألهٔ ۲: به ازای اعداد مثبت $a_k, b_k (k=۱,\dots,n)$، نشان دهید

$$\sum_{k=۱}^{n}\frac{a_kb_k}{۱+a_k+b_k}\leq\frac{\sum_{k=۱}^{n}a_k\sum_{k=۱}^{n}b_k}{۱+\sum_{k=۱}^{n}a_k+\sum_{k=۱}^{n}b_k}$$

حل: برای $n=۱$ حکم واضح است. اثبات نامساوی را در حالت $n=۲$ بررسی می کنیم، یعنی نشان می‌دهیم برای هر چهار عدد مثبت a,b,c,d،

$$\frac{ab}{۱+a+b}+\frac{cd}{۱+c+d}\leq\frac{(a+c)(b+d)}{۱+a+c+b+d}$$

$$\begin{aligned}
&(a+c)(b+d)-\frac{(۱+a+c+b+d)}{۱+a+b}ab-\frac{(۱+a+c+b+d)}{۱+c+d}cd\\
&=ab+ad+bc+cd-\left(۱+\frac{c+d}{۱+a+b}\right)ab-\left(۱+\frac{a+b}{۱+c+d}\right)cd\\
&=ad+bc-\frac{(c+d)ab}{۱+a+b}-\frac{(a+b)cd}{۱+c+d}\\
&\frac{ad(۱+a+b)+bc(۱+b+c)+(ad-bc)^{۲}}{(۱+a+b)(۱+c+d)}\geq ۰
\end{aligned}$$

حال فرض استقرا را برای حالت n در نظر می‌گیریم. داریم

$$\begin{aligned}
\sum_{k=۱}^{n+۱}\frac{a_kb_k}{۱+a_k+b_k}&=\sum_{k=۱}^{n}\frac{a_kb_k}{۱+a_k+b_k}+\frac{a_{n+۱}b_{n+۱}}{۱+a_{n+۱}+b_{n+۱}}\\
&\leq\frac{\left(\sum_{k=۱}^{n}a_k\right)\left(\sum_{k=۱}^{n}b_k\right)}{۱+\left(\sum_{k=۱}^{n}a_k\right)+\left(\sum_{k=۱}^{n}b_k\right)}+\frac{a_{n+۱}b_{n+۱}}{۱+a_{n+۱}+b_{n+۱}}\qquad\text{(بنا به فرض استقرا)}\\
&\leq\frac{\left(\sum_{k=۱}^{n+۱}a_k\right)\left(\sum_{k=۱}^{n+۱}b_k\right)}{۱+\left(\sum_{k=۱}^{n+۱}a_k\right)+\left(\sum_{k=۱}^{n+۱}b_k\right)}
\end{aligned}$$

به دلیل این که در حالت $n=۲$ داریم $a=\sum_{k=۱}^{n} a_k, b=\sum_{k=۱}^{n} b_k, c=a_{n+۱}, d=b_{n+۱}$. در نتیجه، برای هر n، نامساوی برقرار است.

مسألهٔ ۳: مجموع سری زیر را بیابید

$$\frac{۱}{۴!}+\frac{۴!}{۸!}+\frac{۸!}{۱۲!}+\cdots$$

حل:

$$S=\frac{۱}{۴!}+\frac{۴!}{۸!}+\frac{۸!}{۱۲!}+\frac{۱۲!}{۱۶!}+\cdots=\sum_{k=\circ}^{\infty}\frac{۱}{(۴k+۱)(۴k+۲)(۴k+۳)(۴k+۴)}$$
$$=\sum\left[\frac{۱}{٦(۴k+۱)}-\frac{۱}{۲(۴k+۱)}+\frac{۱}{۲(۴k+۳)}-\frac{۱}{٦(۴k+۱)}\right]$$

حال انتگرال‌های معین زیر را در نظر می‌گیریم

$$\int_\circ^۱ x^{۴k}dx=\frac{۱}{۴k+۱},\int_\circ^۱ x^{۴k+۱}dx=\frac{۱}{۴k+۲},\int_\circ^۱ x^{۴k+۲}dx=\frac{۱}{۴k+۳},\int_\circ^۱ x^{۴k+۳}dx=\frac{۱}{۴k+۴}.$$

$$S=\sum_{k=\circ}^{\infty}\int_\circ^۱\left[\frac{۱}{٦}x^{۴k}-\frac{۱}{۲}x^{۴k+۱}+\frac{۱}{٦}x^{۴k+۳}\right]dx$$
$$=\int_\circ^۱\sum_{k=\circ}^{\infty}\left[\frac{۱}{٦}x^{۴k}-\frac{۱}{۲}x^{۴k+۱}+\frac{۱}{٦}x^{۴k+۳}\right]dx$$
$$=\frac{۱}{٦}\int_\circ^۱\sum_{k=\circ}^{\infty}x^{۴k}(۱-۳x+۳x^۲-x^۳)dx$$
$$=\frac{۱}{٦}\int_\circ^۱\frac{۱}{۱+x^۴}(۱-x)^۳dx=\frac{۱}{٦}\int_\circ^۱\frac{(۱-x)^۲}{(۱+x^۲)(۱+x)}dx=\frac{۱}{٦}\int_\circ^۱\left[\frac{۲}{۱+x}-\frac{x+۱}{۱+x^۲}\right]dx$$

که پس از انتگرال‌گیری داریم

$$S=\frac{۱}{۴}ln۲-\frac{\pi}{۲۴}.$$

مسألهٔ ۴: نشان دهید که برای هر n صحیح مثبت

$$\left(\frac{۲n-۱}{e}\right)^{\frac{۲n-۱}{۲}}<۱.۳.۵\cdots(۲n-۱)<\left(\frac{۲n+۱}{e}\right)^{\frac{۲n+۱}{۲}}$$

حل: با توجه به نمودار $\log x$ و $\log(x-۲)$ و همچنین افراز بازه $[۳,۲n+۱]$ به زیربازه‌هایی به طول ۲، در می‌یابیم که

$$\int_۳^{۲n+۱}\log(x-۲)dx\leq ۲[\log ۳+\log ۵+\cdots+\log(۲n-۱)]<\int_۳^{۲n+۱}\log x dx$$

از این رو با انتگرال‌گیری داریم:

$$(۲n-۱)\log(۲n-۱)-(۲n-۱)+۱<۲[\log ۳+\cdots+\log(۲n-۱)]$$
$$<(۲n+۱)\log(۲n+۱)-(۲n+۱)-۳\log ۳+۳$$

عبارت فوق را به صورت توانی می‌نویسیم

$$\left(\frac{۲n-۱}{e}\right)^{\frac{۲n-۱}{۲}}<\left(\frac{۲n-۱}{e}\right)^{\frac{۲n-۱}{۲}}.e^{\frac{۱}{۲}}<۱.۳.\cdots(۲n-۱)$$
$$<\left(\frac{۲n+۱}{e}\right)^{\frac{۲n+۱}{۲}}.(\tfrac{e}{۳})^{۳۲}<\left(\frac{۲n+۱}{e}\right)^{\frac{۲n+۱}{۲}}.$$

مسألهٔ ۵.

ثابت کنید که $(\tan\frac{۳\pi}{۱۱}+۴\sin\frac{۲\pi}{۱۱})^{۲}$ عدد صحیح است.

حل: قرار می‌دهیم $z=e^{\frac{\pi i}{۱۱}}$. بنابراین

$$(۱+z)(۱-z+z^{۲}-z^{۳}+z^{۴}-z^{۵}+z^{۶}-z^{۷}+z^{۸}-z^{۹}+z^{۱۰})=۱+z^{۱۱}=۰$$
$$۱-z+z^{۲}-z^{۳}+z^{۴}-z^{۵}+z^{۶}-z^{۷}+z^{۸}-z^{۹}+z^{۱۰}=۰$$
$$(۱-z)^{۵}(z-z^{۲}+z^{۳}-z^{۴}+z^{۵})=۱$$

با استفاده از فرمول اویلر

$$z^{k}=\cos\frac{k\pi}{۱۱}+i\sin\frac{k\pi}{۱۱}$$

داریم

$$\sin\frac{k\pi}{۱۱}=Im(z^{k})=\frac{z^{k}-\bar{z}^{k}}{۲i}=\frac{i}{۲}(z^{-k}-z^{k})$$
$$\cos\frac{k\pi}{۱۱}=Re(z^{k})=\frac{z^{k}+\bar{z}^{k}}{۲i}=\frac{i}{۲}(z^{-k}-z^{k})$$
$$\tan\frac{k\pi}{۱۱}=\frac{\sin\frac{k\pi}{۱۱}}{\cos\frac{k\pi}{۱۱}}=i\frac{z^{k}-\bar{z}^{k}}{z^{k}+\bar{z}^{k}}=i\frac{۱-z^{۲k}}{۱+z^{۲k}}$$
$$\tan\frac{۳\pi}{۱۱}=i\frac{۱-z^{۶}}{۱+z^{۶}}=i\frac{z^{۵}-z^{۱۱}}{z^{۵}+z^{۱۱}}=-i\frac{۱+z^{۵}}{۱-z^{۵}}=-i(\frac{۲}{۱-z^{۵}}-۱)$$
$$=-i(۲(z-z^{۲}+z^{۳}-z^{۴}+z^{۵})-۱)=i(۱-۲z+۲z^{۲}-۲z^{۳}+۲z^{۴}-۲z^{۵})$$
$$۴\sin\frac{۲\pi}{۱۱}=۲i(z^{-۲}-z^{۲})=-i(۲z^{۲}+۲z^{۹})$$
$$\tan\frac{۳\pi}{۱۱}+۴\sin\frac{۲\pi}{۱۱}=i(۱-۲z-۲z^{۳}+۲z^{۴}-۲z^{۵}-۲z^{۹})$$

بنابر این با استفاده از معادلات در شروع اثبات داریم:

$$
\begin{aligned}
&(\tan\frac{3\pi}{11} + 4\sin\frac{2\pi}{11})^2 = -4(\frac{1}{2} - z - z^3 + z^4 - z^5 - z^9)^2\\
&= -4((\frac{1}{2})^2 + z^2 + z^6 + z^8 + z^{10} + z^{18} - z^3 + z^4 - z^5 - z^9\\
&+2zz^3 - 2zz^4 + 2zz^5 + 2zz^9 - 2z^3z^4 + 2z^3z^5 + 2z^3z^9 - 2z^4z^5 - 2z^4z^9 + 2z^5z^9)\\
&= -4((\frac{1}{4}) + z^2 + z^6 + z^8 + z^{10} + z^{18} - z - z^3 + z^4 - z^5 - z^9\\
&+2z^4 - 2z^5 + 2z^6 + 2z^{10} - 2z^7 + 2z^8 + 2z^{12} - 2z^8 - 2z^{13} + 2z^{14})\\
&-4(\frac{1}{4} - z + z^2 - z^3 + 3z^4 - 3z^5 + 3z^6 - 2z^7 + 3z^8 - 3z^9 + 3z^{10} + 2z^{12}\\
&-2z^{13} + 2z^{14} + z^{18})\\
&= -4(\frac{1}{4} - z + z^2 - z^3 + 3z^4 - 3z^5 + 3z^6 - 2z^7 + 3z^8 - 3z^9 + 3z^{10} - 2z\\
&+2z^2 - 2z^3 - z^7\\
&= -4(\frac{1}{4} - 3 + 3(1 - z + z^2 - z^3 - z^5 + z^6 - z^7 + z^8 - z^9 + z^{10})) = -4(\frac{1}{4} - 3) = 11
\end{aligned}
$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم.

سید عنایت یزدانی
دانشگاه پیام نور نهریز