فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

سال ۲۸، شمارهٔ ۱، بهار ۱۳۸۸

(تاریخ انتشار: تابستان ۱۳۸۸)

شمارهٔ پیاپی: ۴۲

فهرست مطالب

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی هر سال در دو شماره (بهار و پاییز) منتشر و به اعضای حقیقی، حقوقی و مشترکین انجمن ریاضی ایران ارسال می‌شود.

علاقه‌مندان به عضویت حقیقی و دانشگاه‌ها، مؤسسات و کتابخانه‌ها که تمایل به عضویت حقوقی یا اشتراک سالانه دارند می‌توانند با دبیرخانهٔ انجمن ریاضی ایران تماس حاصل نمایند.

شماره‌های قبلی این مجله با هماهنگی دبیرخانه قابل فروش می‌باشند.

روی جلد: گریگوری پرلمان (Grigori Perelman)

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۲ (بهار ۱۳۸۸) صص. ۱ تا ۳۸

کسرهای مصری*

مهدی رجبعلی‌پور

با گرامیداشت مقام علمی همکار ارجمند استاد نصرالله سفید بخت

چکیده گفتار

بشر، هم ذهنیت ساده‌ای از کسر ۱/۲ دارد و هم به آسانی می‌تواند کمیت‌های گوناگون فیزیکی را نصف کند. تا آنجا که ما می‌دانیم، مصریان ابداع اولین نماد کسر ۱/۲ را در فهرست افتخارات فرهنگی خود دارند و شاید قرن‌ها طول کشید تا مفهوم این نماد از فرمان «نصف کن» به حالت «نصف» ، تبدیل گشت و در کنار عددهای مصری وارد محاسبات شد. نماد ۱/۲ مصری به شکل طناب یا نانی در حال تا شدن بود. کسر ۱/۴ هم که تکراری از عمل نصف کردن است با نمادی به شکل × نمایش داده می‌شد؛ آن هم احتمالاً نمایش یک قرص نان در حال بریده شدن به چهار قسمت مساوی بود. هیچ یک از این دو نماد، نمایش کسر مربوطه‌شان نیستند بلکه نمایشگر عمل‌هائی هستند که به آن کسرها منجر می‌شود. لذا باور توماس اریک پیت، مصرشناس و مترجم پاپیروس رِیند، تأیید می‌شود که مضرب‌های ۱/۲ و ۱/۴ پیش از آن که یک کمیت باشند، یک «فرمان» هستند. ظاهراً چیزی از عمر نماد ۱/۴ نگذشته بود که کسرهای ۱/۲ و ۱/۴ و به دنبال آنها، کسرهای ۱/۸ و ۱/۱۶ تا ۱/۶۴ به جرگهٔ ریاضیات پیوستند و به جز نماد ۱/۲ که عمیقاً در فرهنگ مصری ریشه دوانیده بود، بقیهٔ این کسرها، نمادی یکنواخت و ریاضی‌گونه پیدا کردند. این نمادگذاری می‌توانست به اختراع بسط دودوئی کسرها (در چارچوب عددنویسی دهدهی) بیانجامد ولی تقدس کسرهای مشهور به اجزاء چشم «هور» (خورشید خدا)، سد راه شد و تا مدت‌ها مانع توزین کمیت‌های کمتر از ۱/۶۴ واحد رایج «هکات» بود. نیاز داروسازان، مصریان را به حیله‌های جدیدی متوسل ساخت که اوزان را تا ۱/۶۴ هکات می‌پیمودند و سپس باقی‌مانده را با واحد جدیدی معادل ۱/۳۲۰ هکات و هر کسر دلخواهی از این واحد جدید وزن می‌کردند. در طول تاریخ مصر باستان، هیچگاه مفهوم کسر از دایرهٔ کسرهای یکین (صورت ۱، مخرج دلخواه) و کسرهای ۲/۳ و ۳/۴ فراتر نرفت و این به خاطر نمادگذاری اولیه‌ای بود که توانائی تعمیم به کسرهای متعارفی دلخواه را نداشت. هیجان کسرهای مصری از همین جا شروع می‌شود: یک کسر متعارفی دلخواه را

---

*) این پژوهش با حمایت کرسی پژوهشی صندوق حمایت از پژوهشگران کشور انجام شده است.
مهدی رجبعلی پور، دانشگاه شهید باهنر کرمان، بخش ریاضی، m_radjab@yahoo.com

چگونه باید نمایش داد تا بتواند در محاسبات رو به رشد فنی و اقتصادی وارد شود؟ در دوران کلاسیک مصر، به ویژه پادشاهی اَمِنِمهِت سوم[1] که پاپیروس‌های مشهور ریاضی در زمان او و دودمان او نوشته شد، اجزای چشم هور از اهمیت افتاده بودند و تکلیف ریاضی‌دانان مصری در مورد کسرها این بود که راه‌های ساده‌ای برای تبدیل کسرهای متعارفی به مجموعی از کسرهای یکین پیدا کنند. کسر ۲/۳ که در اکثر سندهای ریاضی مصری با نمادی مخصوص به خود ظاهر شده است، با توجه به چیستاهای عامیانهٔ مصری، باید دو فصل از سال سه فصلی مصر باشد. رود نیل به مدت ۱/۳ از سال در طغیان بود و تمام مزارع اطراف خود را با گل و لای می‌پوشاند. در ۲/۳ بقیهٔ سال، مصری‌ها به بازسازی زمین‌های کشاورزی و کاشت و برداشت محصولات، مشغول بوداند. کسر ۲/۳ از قدر و عزت خاصی بین مصریان برخوردار بود. نکتهٔ جالب این است که در محاسبه ۱/۳ از یک کمیت، نخست ۲/۳ آن را به دست می‌آوردند و سپس حاصل را نصف می‌کردند! اگر ۴ ماه در گل و لای نیل دست بسته بمانید، اکراه مصریان را از ۱/۳ و علاقهٔ آنها را به کسر ۲/۳ درک خواهید کرد! ریاضی‌دانان یونانی ماب اسکندریه در چنین شرایطی کسرهای مصری را تحویل گرفتند و آنها را بدون تغییرات چندانی، همراه با کسرهای شصت شصتی بابلی، به اروپائیان قرون وسطی انتقال دادند. مسلمانان، به پیروی از امثال خوارزمی، حساب یونانی و از آن جمله کسرهای مصری را به کلی کنار گذاشتند، و برخی هم مانند ماهانی و خیام مدتی را به همگانی‌کردن نافرجام تعریف اودوکسوسی مفهوم نسبت گذراندند. ولی رواج حساب هندی و روش‌های خوارزمی، نه تنها دانشمندان اسلامی، بلکه اروپائیان را نیز به تدریج به خود جلب کرد و چنان شد که در قرن شانزدهم میلادی کسرهای متعارفی و عملیات امروزی کسرها جهان‌گیر شدند؛ کسرهای مصری به تجملات پژوهشی ریاضی پیوستند و کسرهای دهدهی نیز که در سادگی بر کسرهای شصت شصتی و در دقت بر کسرهای دودویی برتری داشتند، جای طبیعی خود را در دستگاه عددنویسی رایج دهدهی باز کردند.

هدف این مقاله تدریس قضیه‌های کهنه یا کشف قضیه‌های نو نیست؛ پژوهشی است در بررسی دگردیسی کسرهای مصری و گمانه‌هایی است در انگیزه‌های یکی از دیرینه‌ترین فرهنگ‌های دنیا برای آفرینش آن کسرها.

۱. پیشگفتار

ارقامی که مصریان برای نوشتن اعداد به کار می‌بردند مانند سکه‌های پول بودند، هر کجا قرار می‌گرفتند تغییری در ارزششان داده نمی‌شد. در عدد ۲۳۲ امروز، دو رقم ۲ ارزش‌های مختلف دارند؛ آن که سمت راست است ۲ واحد است و آن که سمت چپ است ۲۰۰ واحد است. ضمناً رقم ۳ هم گویای ۳۰ می‌باشد. ولی مصریان رقم یک را با یک خط قائم(|) ، عدد ۱۰ را با یک نعل

1) Amenemhet III

∩ ، و عدد ۱۰۰ را با یک پیچک نمایش می‌دادند و نشانک‌های دیگری هم برای ۱۰۰۰، ۱۰۰۰۰، ۱۰۰۰۰۰ و ۱۰۰۰۰۰۰ داشتند. برای نوشتن رقم‌های یکان و دهگان و صدگان، ... نشانک‌های مربوطه را تکرار می‌کردند. مثلاً عدد ۲۳۲ را طبق شکل ۱ می‌نوشتند.

شکل ۱: هیروگلیف عدد ۲۳۲

دبیران مصری، ترتیب را در نوشتن اعداد (طبیعی) مراعات می‌کردند؛ چنانچه مراعات هم نمی‌کردند، اشتباهی رخ نمی‌داد. زیرا دو پیچک را در هر کجای عدد قرار دهند، ارزش مجموعشان (عین دو سکه ۱۰۰ ریالی) تغییری نخواهد کرد؛ همان طور سه نعل هر کجا باشند ارزش مجموعشان (عین ۳ سکه ۱۰ ریالی) ثابت خواهد ماند و غیره.

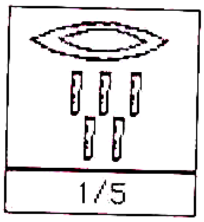
اعداد کسری به مرور در حساب مصر ظاهر شدند. احتمالاً کسر ۱/۲ اولین کسری بود که با نمادی به شکل یک چوب دولا شده یا به احتمال زیاد یک قرص نان تا شده، در حساب مصری پدیدار شد (شکل ۲).

هشدار: ما در این مقاله نماد کسری / را فقط برای علامت کسر متعارفی به کار می‌بریم و از نوشتن عدد ده‌دهی ممیزدار پرهیز می‌کنیم.

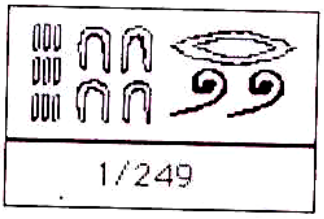
شکل ۲: کسر $\frac{۱}{۲}$

کسر ۱/۴ هم با نماد × (احتمالاً نمایش بریدن یک قرص نان به چهار قسمت مساوی) ظاهر شد. اگر کار به همین منوال پیش می‌رفت هر کسر، شکل خاص خود را پیدا می‌کرد و انگیزه‌ای برای تعمیم نمی‌داد؛ خوشبختانه مصریان تصمیم گرفتند این نمادگذاری را متوقف کنند و نمادهای یکنواختی برای کسرهای با صورت ۱ و مخرج دلخواه به کار گیرند. در این نمادگذاری، یک بیضی (یک جداره یا دو جداره) رسم می‌کردند و زیر آن، مخرج را که عددی طبیعی و بزرگتر از ۲ بود می‌نوشتند. (مصریان نمادگذاری جدید را برای ۱/۲ نپذیرفتند و همان نماد مأنوس قدیم را به کار می‌گرفتند؛ ولی ۱/۴ را تغییر دادند، شاید نماد × هنوز فراگیر نشده بود. به نظر من مصریان تنها ملتی بودند که با ریاضیات، رابطه‌ای عاطفی داشتند و ما در بخش کسرهای نیل به این موضوع باز خواهیم گشت.)

شکل ۳: کسر ۱/۴



شکل ۴: کسر ۱/۵



شکل ۵: کسر ۱/۲۴۹

(در شکل ۳، بیضی نماد کسر، یک منحنی بسته یک جداره است در حالی که شکل‌های ۴ و ۵، آن را دو جداره نمایش می‌دهند؛ ضمناً در مورد کسر ۱/۲۴۹، به علت بزرگ بودن مخرج کسر، نماد مربوطه فقط روی ۲۰۰ را پوشانده است.)

پیش از آن که پیشگفتار را ادامه دهیم، چند اصطلاح مربوط به کسرها را برای استفاده‌های بعدی این مقاله تثبیت می‌کنیم.

آ) **تعریف.** کسری را که صورتش عدد ۱ و مخرجش هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ باشد یک **کسر یکین** و مجموعهٔ متشکل از کسرهای یکین و کسر ۲/۳ را مجموعه **کسرهای پایه** می‌نامیم. در این مقاله کسری را که کوچک‌تر از ۱ باشد یک **کسر متعارفی** و هر دنبالهٔ متناهی اکیداً نزولی از کسرهای پایه را که مجموعش یک کسر متعارفی شود یک **کسر مصری** خواهیم نامید. همچنین مجموع یک کسر مصری و یک عدد صحیح نامنفی را یک **عدد مصری** می‌نامیم.

کسرهای پایه، نقش بلوک‌هائی را بازی می‌کردند که مصریان همهٔ کسرهای مورد نیاز خود را با آنها می‌ساختند. البته کسرهای یکین برای این امر کافی بودند ولی بنا به شواهدی احتمالی که ذکر آن خواهد آمد، مصریان کسر ۲/۳ را هم به این مجموعه اضافه کردند. برای توضیح بیشتر مثالی می‌زنیم. امروزه، یک کسر متعارفی مانند ۵/۹ را به مفهوم تقسیم یک واحد به ۹ قسمت مساوی و اختیار ۵ قسمت از آن، تعریف می‌کنیم. این تعریف برای مصریان ۵۰۰۰ سال پیش قابل هضم نبود و اصولاً مسأله‌ای به نام تعیین ۵/۹ نداشتند؛ آنان از کسر ۱/۹ شروع نکردند که بخواهند ۵ برابر آن

را محاسبه کنند، بلکه از طریق تقسیم ۵ نان بین ۹ کارگر به کسرهای یکین رسیدند و کم‌کم آنها را لمس کردند. آنها برای رسیدن به این سطح از حساب، سه مرحله تاریخی زیر را پشت سر گذاشتند که در این مقاله به تفصیل از آنها صحبت خواهیم داشت.

مرحلهٔ اول (تا ۳۰۰۰ ق.م.): بسط دودوئی کسرها تا جمله ۱/٦۴؛

مرحلهٔ دوم (تا ۲۱۰۰ ق.م.): بسط دودوئی تا ۱/٦۴ و بسط باقیماندهٔ آن با کسرهای پایهٔ متمایز؛

مرحلهٔ سوم (از ۲۱۰۰ ق.م): بسط بر حسب کسرهای پایهٔ متمایز.

این مقاله در ۱۰ بخش تنظیم شده است که بخش اول آن به پیشگفتار گذشت. برای درک بهتر حساب مصری، بخش دوم را به «چهار عمل اصلی» مصریان اختصاص داده‌ایم. بخش ۳، به مرحلهٔ ابتدائی کسرهای مصری، یعنی کسرهای دودوئی، و ارتباط آن با افسانه چشم هور (خورشید خدا) می‌پردازد.

در بخش ۴ کسر ۲/۳ و رابطهٔ احتمالی آن با آرامش سالانهٔ نیل بررسی شده است. بخش ۵ به لوح چوبی اخمیم می‌پردازد که مدرکی بر تجزیهٔ یک کسر به مجموعی از کسرهای دودوئی و مجموعی از کسرهای پایهٔ دیگر است (مرحلهٔ بینابینی کسرهای مصری). بخش ٦، تومار چرمی ریاضیات مصر را بررسی می‌کند که در آن روش‌هایی برای تجزیهٔ یک کسر به کسرهای پایه داده شده است و باور بر این است که این روش‌ها بین ریاضیدانان مصری عمومیت داشته‌اند. پس از مروری بر سرگذشت پاپیروس‌های مسکو و ریند در بخش ۷، عملیات حسابی مصریان را روی کسرها در بخش ۸ مطالعه خواهیم کرد (مرحله نهایی کسرهای مصری). بخش ۹ به سرگذشت کسرهای مصری در یونان، اسکندریه و سرانجام اروپای قرون وسطی می‌پردازد. بخش ۱۰ نیز حاوی یادداشت‌های پراکنده‌ای در جهت تکمیل مقاله و توجیه برخی از نظریات مطرح شده است.

انگیزه. مدت‌ها شیفتهٔ پدیدهٔ کسرهای مصری و تاریخچهٔ آن بودم و مطالبی از این طرف و آن طرف جمع‌آوری می‌کردم. برای هر مطلبی توجیهاتی به نظرم می‌رسید و فرصتی برای تنظیم آنها میسر نمی‌شد تا این که همکاران در فرهنگستان علوم تصمیم گرفتند مقاله‌هایی برای بزرگداشت مقام علمی و خدمات فرهنگی دانشمند محترم جناب آقای دکتر نصراللّه سفیدبخت بنویسند. بهترین بهانه بود که ضمن تقدیم مقاله‌ای در این رابطه، آرزوی دیرین خود را که شناساندن گوشه‌های ناشناخته‌ای از تاریخ، فرهنگ و تمدن مصر باستان بود عملی سازم.

۲. چهار عمل اصلی مصریان

اینک چهار عمل اصلی مصریان را بررسی می‌کنیم.

آ) **جمع و تفریق مصری.** اگر بخواهید دو عدد را با هم جمع کنید، کافی است نشانک‌های هم ارزش را کنار هم بگذارید. مثلاً از جمع ۲۴۹ با ۷۸، تعداد ۱۷ خط، ۱۱ نعل و ۲ پیچک به‌دست می‌آید. ولی حکمت عددنویسی ایجاب می‌کند که هر ۱۰ خط را با یک نعل عوض کنید که تعداد

نعل‌ها ۱۲ می‌شود. همین طور باید هر ۱۰ نعل را با ۱ پیچک عوض کند که حاصل جمع می‌شود ۷ خط و ۲ نعل و ۳ پیچک؛ یعنی ۳۲۷. در تفریق نیز شکل‌های متناظر را از هم کم می‌کنند؛ مثلاً در تفریق ۷۸ از ۲۵۹ اول ۸ خط را از ۹ خط کم می‌کنیم، می‌ماند یک خط؛ بعد باید ۷ نعل از ۵ نعل برداریم که امکان ندارد؛ لذا یک پیچک از مفروق را با ده نعل عوض می‌کنیم تا مفروق صاحب ۱۵ نعل شود و ۷ نعل را از ۱۵ نعل کم می‌کنیم، می‌ماند ۸ نعل. پس یک خط و ۸ نعل و یک پیچک باقی می‌ماند؛ یعنی ۱۸۱.

ب) **ضرب مصری.** ضرب مصری‌ها کاری بس ابتکاری بود؛ آنان، برخلاف سومری‌ها و ایلامی‌ها، جدول ضرب نداشتند و با دو برابر کردن‌های متوالی به جواب می‌رسیدند. مصریان بی آن که از دستگاه دودوئی اطلاع داشته باشند، می‌دانستند که هر عدد طبیعی از مجموع چند تا از عددهای $۲^{۰}$، $۲^{۱}$، $۲^{۲}$، $۲^{۳}$، ... به دست می‌آید (یعنی بسط دودوئی). مثلاً بسط دودوئی ۳۵ می‌شود:

$$۳۵ = ۲^{۵} + ۲^{۱} + ۲^{۰} = ۳۲ + ۲ + ۱$$

حال اگر شما بخواهید ۳۵ را در ۹۲٦ ضرب کنید، کافیست عددهای ۱ و ۲ و ۳۲ را در ۹۲٦ ضرب کنید و حاصل‌ها را با هم جمع کنید. مصریان، با جدولی که برای عملیاتشان ترتیب می‌دادند، با یک تیر دو نشان می‌زدند: هم بسط دودوئی ۳۵ را می‌یافتند، هم حاصل ضرب مطلوب را. جدول عملیاتشان مرکب از دو ستون و چند سطر بود که در سطر اول به ترتیب عددهای ۱ و ۹۲٦ را می‌نوشتند (یعنی در حقیقت عددهای $۲^{۰}$ و ۹۲٦×۲^{۰}). هر سطر بعدی جدول را از دو برابر کردن سطر بالاترش به دست می‌آوردند. (البته، دو برابر کردن یک عدد یعنی جمع آن عدد با خودش، کار آسانی بود.) بدین ترتیب جدول زیر به دست می‌آمد:

ˋ۱	ˋ۹۲٦
ˋ۲	ˋ۱۸۵۲
۴	۳۷۰۴
۸	۷۴۰۸
۱٦	۱۴۸۱٦
ˋ۳۲	ˋ۲۹٦۳۲
٦۴	—

در ستون اول توان‌های ۲ را می‌نوشتند تا به ۳۵ برسند. در ستون چپ، درآیه ٦۴ زائد است و لذا سطر هفتم زائد است. پس بزرگترین توان موجود ۲ در ۳۵ عدد $۳۲ = ۲^{۵}$ است و بنابر این، آن را «اختیار» کرده‌اند. در ذهن خود عدد ۳۲ را با ۱٦ جمع کرده‌اند که ۴۸ شده و نتیجه گرفته‌اند ۱٦ در بسط ۳۵ نیست و لذا آن را «اختیار» نکرده‌اند. (خط موربی که سمت چپ بالای ۳۲ و چند عدد

دیگر جدول ظاهر شده به معنای «اختیار» آن عدد است و دقیقاً همان نمادی است که مصری‌ها به کار می‌بردند.) به همین دلیل اعداد ۸ و ۴ را هم «اختیار» نکرده‌اند. اما ۳۲ و ۲ می‌شود ۳۴ که پذیرفتنی است و لذا ۲ را اختیار کرده‌اند و بالاخره حاصل را با ۱ جمع کرده‌اند و ۳۵ را به دست آورده‌اند، پس ۱ نیز «اختیار» شده است و در نتیجه عددهای ۱ و ۲ و ۳۲ در بسط دودوئی ۳۵ ظاهر می‌شود. در ستون دوم نیز، ۹۲۶ متوالیاً دو برابر شده است تا مقابل ۳۲ رسیده‌اند؛ هر عددی را که از ستون چپ اختیار کرده‌اند، عدد نظیرش در ستون راست نیز اختیار شده است. پس

$$۳۵ \times ۹۲۶ = ۲۹۶۳۲ + ۱۸۵۲ + ۹۲۶ = ۳۲۴۱۰,$$

ابتکار مصریان وقتی درک می‌شود که بدانیم بابلی‌ها و ایلامی‌ها چه جدول‌های ضرب مفصلی در غیاب خوارزمیک‌های کارآمد امروزی به کار می‌گرفتند.

پ) تقسیم مصری با باقیمانده. تقسیم مصریان، کاری تقریباً بر عکس ضربشان بود. مثلاً در تقسیم ۳۲۴۳۱ بر ۹۲۶ جدولی دوستونی با سرستون‌های ۱ و ۹۲۶ تشکیل می‌دادند و هر سطر بعدی را از دو برابر کردن سطر بالاتر به دست می‌آوردند. همان طور که در ضرب، ستون چپ را زیر نظر داشتند تا به مضروب فیه می‌رسیدند، در تقسیم، ستون راست را زیر نظر می‌گرفتند تا به مقسوم برسند. در اینجا مقسوم بین ۲۹۶۳۲ و ۵۹۲۶۴ قرار دارد و لذا در ۲۹۶۳۲ متوقف شده‌اند. (سطر هفتم زائد است.)

`۹۲۶	`۱
`۱۸۵۲	`۲
۳۷۰۴	۴
۷۴۰۸	۸
۱۴۸۱۶	۱۶
`۲۹۶۳۲	`۳۲
۵۹۲۶۴	–

حال عدد ۲۹۶۳۲ (از سطر ششم) اختیار می‌شود. آن را با عدد بالای سرش (در سطر پنجم) جمع می‌کنند از ۳۲۴۳۱ بزرگ‌تر می‌شود و لذا از سطر پنجم چشم می‌پوشند و عدد سطر بالاتر را امتحان می‌کنند که باز هم از ۳۲۴۳۱ بیشتر می‌شود و این امتحان را تکرار می‌کنند.

در سطر دوم به حاصل جمع

$$۲۹۶۳۲ + ۱۸۵۲ = ۳۱۴۸۴$$

می‌رسند که کوچک‌تر از ۳۲۴۳۱ می‌باشد. لذا سطر دوم را اختیار می‌کنند. بالاخره، عدد ۳۱۴۸۴

را با سطر اول جمع می‌کنند که می‌شود:

$$۳۱۴۸۴ + ۹۲۶ = ۳۲۴۱۰$$

و هنوز به عدد ۳۲۴۳۱ نمی‌رسند؛ پس سطر اول نیز اختیار می‌شود. مجموع حاصل، ۲۱ واحد از مقسوم کمتر است. نتیجه می‌گیرند که تقسیم عدد ۳۲۴۳۱ بر ۹۲۶ باقی‌مانده‌ای برابر ۲۱ دارد. برای یافتن خارج قسمت، عددهای اختیار شده از ستون اول را با هم جمع می‌کنند که می‌شود:

$$۳۲ + ۲ + ۱ = ۳۵$$

بنا بر این

$$۳۲۴۳۱ = ۳۵ \times ۹۲۶ + ۲۱$$

و کار تقسیم (با باقیمانده) به همین جا پایان می‌پذیرد.

ت) تقسیم مصری بی باقیمانده. در مثال بالا اگر منظور تقسیم ۳۲۴۳۱ کیسه گندم بین ۹۲۶ کارگر می‌بود، می‌بایست تکلیف ۲۱ کیسه باقیمانده نیز روشن شود؛ در حقیقت به هر کارگر ۳۵ کیسه و ۲۱/۹۲۶ کیسه می‌رسد. یعنی

$$۳۲۴۳۱/۹۲۶ = ۳۵ + (۲۱/۹۲۶)$$

هدف این مقاله، مطالعهٔ نحوهٔ برخورد مصریان با کسری مانند ۲۱/۹۲۶ می‌باشد. امروزه اگر از ما بخواهند حاصل $\frac{۳۲۴۳۱}{۹۲۶}$ را تا یک رقم اعشار حساب کنیم، مقسوم را در ۱۰ ضرب و بر مقسوم علیه تقسیم می‌کنیم تا به خارج قسمت ۳۵۰ و باقیمانده ۲۱۰ برسیم. سپس برای یافتن جواب واقعی باید این دو عدد را بر ۱۰ تقسیم کنیم تا خارج قسمت واقعی ۳۵ و باقیماندهٔ واقعی ۲۱ به دست آید. اگر جواب را تا یکصدم تقریب می‌خواستند، مقسوم را در ۱۰۰ ضرب می‌کردیم و به خارج قسمت ۳۵۰۲ و باقیمانده ۲۴۸ می‌رسیدیم که خارج قسمت واقعی، سی و پنج و دو صدم، و باقیمانده واقعی، دو و چهل و هشت صدم می‌شد. مصری‌ها هم تا زمانی که کسرهای خود را با نصف کردن‌های متوالی به دست می‌آوردند، کاری شبیه ما انجام می‌دادند. مثلاً برای یافتن بسط ۳۲۴۳۱/۹۲۶، مقسوم (یعنی ۳۲۴۳۱) را در ٦۴ ضرب می‌کردند و عدد حاصل (یعنی ۲۰۷۵۵۸۴) را بر مقسوم علیه سابق (یعنی ۹۲۶) تقسیم می‌کردند و خارج قسمت را بر حسب توانهای ۲ می‌نوشتند و باقیمانده را نیز تعیین می‌کردند. آخر سر، این دو عدد را بر ٦۴ تقسیم می‌کردند.

`۹۲۶	`۱
`۱۸۵۲	`۲
۳۷۰۴	۴
۷۴۰۸	۸
۱۴۸۱۶	۱۶
۲۹۶۳۲	۳۲
`۵۹۲۶۴	`۶۴
`۱۱۸۵۲۸	`۱۲۸
۲۳۷۰۵۶	۲۵۶
۴۷۴۱۱۲	۵۱۲
۹۴۸۲۲۴	۱۰۲۴
`۱۸۹۶۴۴۸	`۲۰۴۸
۳۷۹۲۸۹۶	–

در نتیجه

$$\begin{aligned} ۳۲۴۳۱/۹۲۶ &\approx ۲۰۴۸/۶۴ + ۱۲۸/۶۴ + ۶۴/۶۴ + ۱/۶۴ \\ &= ۳۲ + ۲ + ۱ + ۱/۶۴ \end{aligned}$$

که خطای محاسبه دقیقاً ۲۰۹/۲۹۶۳۲ می‌باشد. در لوح چوبی اخمیم (بخش ۴) این خطا [باقی‌مانده] برحسب کسرهای پایه محاسبه شده است. (مصریان علامتی برای جمع نداشتند و عددها و کسرها را پشت سر هم می‌نوشتند.)

۳. اجزای چشم هور

همان گونه که دو برابر کردن ساده‌ترین مثال ضرب است، نصف کردن نیز ساده‌ترین مثال تقسیم است و نبوغ مصریان در این بود که با استفاده از این دو عمل هر نوع ضرب و هر نوع تقسیم با باقیمانده یا با تقریب را انجام می‌دادند. نصف کردن نان و پارچه و نخ و هر چیز متقارن دیگر، به سادگی و بدون ابزار مدرج، فقط با عمل تا کردن، انجام می‌شود؛ هر مقدار از یک مایع یا غله یا سیال و شبه سیال دیگر نیز وقتی در دو کفه ترازو ریخته شود با چند قاشق این ور و آن ور کردن به تعادل می‌رسد و سنگ و پیمانه‌ای لازم نمی‌شود. شما اگر به نماد ۱/۲ مصری در شکل ۱ نگاه کنید به یاد طنابی می‌افتید که دو سرش در حال روی هم قرار گرفتن است تا وسطش مشخص شود.

در اینجا اجازه می‌خواهم خاطره‌ای را که به پنجاه ـ شصت سال پیش (دوران کودکیم) مربوط می‌شود بیان کنم. آن زمان‌ها که در کرمان کیلو و گرم مرسوم نبود و مردم هنوز به مصوبات مورخ ۱۳۰۴/۳/۱۰ مجلس شورای ملی تن در نداده بودند، اجزای «من» به شرح زیر بود: نیم من،

چارک، سی سنگ، پانزده سنگ، هفت درم، و نصف هفت درم. هر یک از این اجزاء نصف جزء قبلی بود و هیچ وزنه‌ای برای یک درم و پنج درم و... و یک سنگ و ده سنگ و غیره در کرمان (زمان کودکی من) وجود نداشت مگر همین وزنه‌های سی سنگ و پانزده سنگ و هفت درم و نصف هفت درم. البته قدیم‌ترها چیزهایی بوده است که مجلس در سال ۱۳۰۴ تعاریف آنها را عوض می‌کند و این تعاریف جدید درم و سنگ نیز همراه با تعاریف قدیم، زیر فشار جهانی شدن کیلوگرم و متر و غیره، به کلی محو می‌شوند (مطمئناً مجلس شورای ملی نیز تعاریف جدید سنگ و درم را فقط برای خالی نبودن عریضه داده بود و نگران محو شدن آنها نبود). غرض از نقل این داستان این بود که مردم کرمان برای راحتی خود چندین دستگاه اندازه‌گیری را مخلوط کرده و وزنه‌هایی ردیف کرده بودند تا هر جزئش نصف جزء دیگر باشد و بقیهٔ وزنه‌ها را از ذهنشان بیرون ریخته بودند. همانطور که گفتیم این نصف کردن‌ها نه تنها از نظر ذهنی کار راحتی بود بلکه از نظر فیزیکی هم بسیار ساده بود.

مصریان برای تقسیم ۵ نان بین ۹ کارگر، از ساده‌ترین کار یعنی نصف کردن نان شروع می‌کردند زیرا همان طور که گفتیم، نصف کردن طناب یا نان یا مایع بدون داشتن ابزار مدرج کار ساده‌ای بود. وقتی که هر یک از ۵ نان نصف می‌شد، ۱۰ نیمه به دست می‌آمد که به هر نفر یک نیمه می‌رسید و یک نیمه هم باقی می‌ماند که دوباره می‌بایست تقسیم شود. نصف نان باقیمانده را متوالیاً نصف می‌کردند تا پس از چهار بار، ۱۶ قطعه نان (هر قطعه معادل ۱/۳۲ نان) به دست می‌آمد و به هر کارگر ۱ قطعه می‌دادند و ۷ قطعه باقی می‌ماند. بالاخره هر یک از هفت قسمت باقیمانده را نیز نصف می‌کردند که ۱۴ قطعه (هر قطعه معادل ۱/۶۴ نان) به دست می‌داد و به هر کارگر یک قطعه می‌دادند. بدین ترتیب، هر کارگر سه قطعه نان به اندازه‌های ۱/۲ و ۱/۳۲ و ۱/۶۴ دریافت می‌کرد (و مقدار کمی هم برجای می‌ماند که سهم مرغان هوا بود!)؛ یعنی

$$۵/۹ \approx ۱/۲ + ۱/۳۲ + ۱/۶۴$$

همانطور که در تقسیم بی‌باقیماندهٔ بخش ۱ دیدیم، مصریان ۵۰۰۰ سال پیش هر تقسیمی را تا سقف خطای ۱/۶۴ تقریب می‌زدند. البته ممکن بود تقسیم، قبل از رسیدن به ۱/۶۴، بدون هیچ خطائی پایان پذیرد؛ مثلاً

$$۵/۸ = ۱/۲ + ۱/۸$$

و یا بعد از ۱/۶۴ ادامه یابد ولی متناهی باشد مانند:

$$۳۷/۱۲۸ = ۱/۴ + ۱/۳۲ + ۱/۱۲۸$$

که البته مصریان ۵۰۰۰ سال پیش، فراتر از ۱/۶۴ نمی‌رفتند و با صرف نظر از لقمه‌های کوچک‌تر از ۱/۶۴ نان، به تقریب زیر قناعت می‌کردند:

$$۳۷/۱۲۸ \approx ۱/۴ + ۱/۳۲$$

ما نمی‌دانیم که آیا مصریان به پایان ناپذیری بسط‌های دودوئی بعضی از کسرها آگاه بودند یا نبودند؛ ولی می‌دانیم بابلیان که جانشین سومری‌ها شدند از این امر در مورد بسط‌های شصت شصتی آگاه بودند. قوم اخیر برای تقسیم مثلاً ۳۱ بر ۱۰، نخست وارون ۱۰ (یعنی کسر یکین ۱/۱۰) را در مبنای شصت شصتی به صورت ٦ دقیقه (یعنی ٦۰/ ٦) می‌نوشتند و آنگاه ۳۱ را در آن ضرب می‌کردند که می‌شد ۱۸٦ دقیقه، یعنی ۳ درجه و ٦ دقیقه (٦/٦۰+۳). اما اگر به جای ۱۰ عدد ۱۱ بود می‌گفتند ۱۱ وارون ندارد (به زبان ریاضیات امروزی یعنی بسط پایان پذیر ندارد). ولی به هر حال ۱/۱۱ درجه را با تقریب مثلاً ۵ دقیقه و ۲۷ ثانیه و ۱٦ ثالثه محاسبه و حاصل را در ۳۱ ضرب می‌کردند که می‌شد ۲ درجه و ۴۹ دقیقه و ۵ ثانیه و ۱٦ ثالثه. همین دو تقسیم را مصریان اولیه، بدون نگرانی از طول بسط دودوئی، به روش خود پیش می‌رفتند تا به جمله ۱/٦۴ برسند:

$$۳۱/۱۰ \approx ۳ + ۱/۱٦ + ۱/۳۲$$

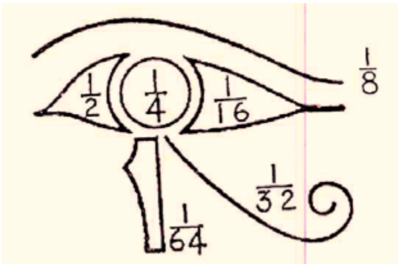
$$۳۱/۱۱ \approx ۲ + ۱/۲ + ۱/۴ + ۱/۱٦$$

این چشم پوشی آنچنان رایج شد که عوام فرض می‌کردند (و به مرور باورشان شد) که مجموع پیمانه‌های ۱/۲ و ۱/۴ و ... و ۱/٦۴ مساوی واحد می‌شود؛ یعنی:

$$۱ = ۱/۲ + ۱/۴ + ۱/۸ + ۱/۱٦ + ۱/۳۲ + ۱/٦۴$$

کاهنان مصری هم که می‌بایست به زبان عوام صحبت کنند، گاهی برای چاشنی کلام خود از این باورها استفاده می‌کردند. به ویژه در یکی از افسانه‌های تعبیه شده برای حفظ اتحاد دو مصر بالا و پائین، از این مطلب هم استفاده شده است. یکی از مشکلات اتحاد دو مصر، تنوع خدایانشان بود که برای حفظ اتحاد، مجبور شدند به بندگی حداقل ۲۰۰۰ خدا تن دردهند. به ویژه اعلام کردند که «ست» خدای اصلی مصر بالا عمو (و همزمان دائی) «خورشید خدا» یا هور [هوروس] خدای اصلی مصر پائین بوده است. (لابد شاعران ایرانی هم که دارا و اسکندر را برادر یکدیگر می‌دانستند، از این ترفندها با اطلاع بودند.) ضمناً واژهٔ «هوروس»، یونانی شده واژهٔ «هور» به‌معنای «خورشید» است که احتمال می‌رود این واژه همراه با پرستش مهر توسط بازرگانان سومری یا جنگجویان میاندورود به مصر رفته باشد. از آنجا که شاهین از همهٔ پرندگان بلند پروازتر بود، مظهر و رابط خورشید خدا محسوب می‌شد و گهگاه جای او را می‌گرفت؛ به ویژه، چشم هور (که چشم یک شاهین است) در داستان کسرهای مصری نقش جالبی بازی می‌کند. کاهنان مصری برای تسکین کینه‌های گذشته، منکر هر گونه جنگی بین مصریان بالا و پائین شدند و همهٔ اختلافات را به گردن خدایان انداختند: در جنگ بین خدایان، «ست» چشم راست «هور» را از حدقه درآورد و به شش قطعه کرد و برای این که کسی نتواند علاجی برای خدای یک چشم پیدا کند، تکه‌های چشم هور را در نیزارهای سراسر نیل پراکنده ساخت. خوشبختانه مصری‌ها هم، مانند اقوام دیگر، یک خدای مقتدر داشتند که هر وقت صلاح می‌دانست در امور خرده ــ خدایان دخالت می‌کرد؛ در اینجا هم به نفع خدای «خوب» وارد ماجرا شد و با پیدا کردن تکه‌های گمشده چشم هور، تندرستی او را به حالت اول برگرداند و وی را پادشاه دو مصر بالا و پائین کرد. اصولاً خورشید خدا یک امر وارداتی بود و برای کسانی که به خط

استوا نزدیک بودند، خدائی بهتر از ماه و ستارگان پیدا نمی‌شد؛ سراسر تاریخ مستند مصر، در نزاع بین ماه (آمون) و خورشید (آتون) می‌گذرد. حتی سومری‌های ساکن «اور» هم که احتمالاً خورشید خدا را در شمال مصر رواج دادند با توجه به زیستگاه داغشان لذتی از خورشید نمی‌بردند مگر این که این نظریه را بپذیریم که آنان آخرین موج انسان‌های آفریقایی بودند که در ۱۳۰ هزار سال گذشته به دنبال مهاجران قبلی به آسیای مرکزی رفتند و اولین قومی بودند که مشکلات یخبندان و فشار جمعیت آنها را وادار به بازگشت کرد و از این رهگذر عشق به مهر (یا خور یا هور) را در ضمیر ناخودآگاهشان به سرزمین‌های جنوب شرقی آسیا و شمال مصر انتقال دادند. کاهنان مصری در کنار داستان «ست» و «هور»، علاوه بر توجیه خدایی فرعون‌ها، دکانی هم برای خودشان باز کردند و قطعات چشم هور (شاهین) را بر یک کاغذ دعا ترسیم می‌کردند تا مردم به بازوی خود ببندند و از چشم زخم و بیماری در امان باشند. یعنی همان طور که خدای خدایان، چشم هور را کامل کرد، تن دارنده این دعا را نیز در کمال تندرستی نگه‌داری کند. ظاهراً این دعا یک چیز کم داشت و آن ریاضیات بود؛ برای جاذبهٔ بیشتر دعا، در کنار هر قطعه از چشم هور، یکی از کسرهای ۱/۲ و ۱/۴ و۱/۸ و ۱/۱٦ و ۱/۳۲ و ۱/٦۴ را هم نوشتند تا ایمان به کمال این شش کسر که مظهر قطعات چشم هور هستند، هر نوع نقص جسمی و روحی را از وجود مؤمنان مجهز به این دعا دور کند (شکل ٦). این داستان به روایت‌های مختلف در پاپیروس‌های مصری ظاهر شده که طی دو هزار سال یا بیشتر مرتباً عوض شده است. این روایت را که چاشنی ریاضی دارد از کتاب ایفراه [۳] برداشته‌ایم.



شکل ٦: چشم هور

ظاهراً کاهن جوانی (چند سال یا چند قرن بعد) به کمال این شش کسر شک می‌کند و با ضرب ٦۴ (مخرج مشترک شش کسر) در دو طرف تساوی عوامانه

۱ = ۱/۲ + ۱/۴ + ۱/۸ + ۱/۱٦ + ۱/۳۲ + ۱/٦۴

به غلط واضح ٦۳ = ٦۴ می‌رسد. او پی می‌برد که دو طرف تساوی اولیه به اندازهٔ ۱/٦۴ با هم اختلاف داشته‌اند و مورد را به کاهن اعظم گزارش می‌کند. البته کاهن اعظم هم برای رفع نگرانی طلبهٔ جوان، جواب می‌دهد رحمت وسیع خدا ۱/٦۴ کمبود را جبران می‌کند.

پیشرفت‌های سریع فنی و اقتصادی مصر، ریاضی‌دانان را وادار می‌کرد که اولاً خطای محاسبات خود را کمتر کنند و ثانیاً چهار عمل اصلی را به کسرها گسترش دهند. کاهنان هم که خود را با پیشرفت علوم تطبیق می‌دادند، خطای ۱/٦۴ را به انحاء مختلف توجیه کردند؛ مثلاً گفتند ما خودمان از خطای ۱/٦۴ آگاه بودیم و به همین دلیل، مردمک چشم هور را سفید گذاشته بودیم، و یا می‌گفتند در این دنیا هیچ چیزی قرار نیست کامل باشد و ...

برای مطالعهٔ تحولات بعدی کسرهای مصری، لوح‌ها، طومارها و پاپیروس‌های مربوطه را به ترتیب زمانی بررسی می‌کنیم. همهٔ این اسناد متعلق به سال‌های ۲۰۰۰ ق.م. به این طرف هستند که بیش از ده قرن از اتحاد مصر گذشته بود. (اولین بار که مصرهای بالا و پائین متحد شدند حدود ۳۱۰۰ ق.م. بود.)

۴. نیل آرام

گرچه مصریان از همان آغازِ تمدن خود، پایهٔ دهدهی را برای عددنویسی برگزیده بودند، اما تفکر دودوئی بر ضرب و تقسیم عددها و همچنین اجزاء و اضعاف واحدهای اندازه‌گیری آنان غالب بود. با این که مصر پائین (شمالی)، به باور برخی از باستان شناسان، از نظر مذهبی و مهندسی، تأثیر فراوانی از بازرگانان یا مهاجمان میاندورود گرفته بود ولی در ریاضیات از دستگاه شصت شصتی آنان پیروی نکرد. البته ایلام، همسایهٔ دیوار به دیوار سومر نیز که شدیداً تحت تأثیر هنر، ادب و فناوری آنان قرار داشت، هرگز حاضر نشد دستگاه دهدهی خود را رها کند. سومری‌ها به هر دلیلی تجربه‌ای از سال‌های چهار فصل با اختلافات زیاد شب و روز در طول سال داشته‌اند که احتمال می‌رود به سابقهٔ زندگی نیاکانشان در سرزمین‌های سرد و کوهستانی مربوط باشد. (در داستان پر رمز و راز گیل گمِش از سرزمین رویایی سبز و خرمی به نام دیلمان گفتگو می‌شود که برخی آن را نشانی از خاطرات دیرینهٔ سومری‌ها از زندگی در کوه‌های گیلان دانسته و زیگورات‌های کوه مانند سومری را نیز تأییدی بر آن می‌گیرند؛ برخی دیگر دیلمان را جزیره بحرین می‌دانند که کشتی‌های سومری در تاریخی متأخرتر از آن جزیره گذشتند و پس از عبور از دریای سرخ خود را به مصر پائین رساندند تا اولین دودمان خورشید پرست را در آنجا بنیان‌گذاری کنند.) در هر حال، نیاز آنان به تقسیم دایره‌های فلکی به درجه و دقیقه و غیره برای تعیین محل طلوع روزانهٔ خورشید و در نتیجه تعیین روزها و ماه‌ها و فصل‌ها، بسیار بیشتر از مصریانی بوده است که هر روز، خدای مخلوع و تبعیدی مصر بالا، قایق خدای پیروزمند مصر پائین را از کرانهٔ شرقی آسمان به حرکت درمی‌آورد و پس از ۱۲ ساعت پارو زنی بی وقفه، به کرانه‌های غربی آن می‌رساند. لذا تقسیم درجه به ٦۰ دقیقه، و دقیقه به ٦۰ ثانیه و غیره یک نیاز مهم سومری‌ها بود که در ضمن به درک و توانائی آنها در مورد کسرها و نمایش آنها کمک می‌کرد. دستگاه شصت شصتی گرچه دست و پاگیر و پر دردسر بود ولی علاوه بر رفع نیازهای نجومی سومریان، به آنها کمک می‌کرد همه کسرهای متعارفی با مخرج‌های ٦۰ و ۳٦۰۰ و ۲۱٦۰۰۰ و در نتیجه منبع کثیری از کسرهای متعارفی را نمایش دهند. مثلاً کسر ۱/۵ (معادل

کسر ۱۲/۶۰) را با ۱۲ دقیقه، کسر ۳/۵ (معادل ۳۶/۶۰) را با ۳۶ دقیقه، کسر ۱/۸ (معادل ۴۵۰/۳۶۰۰) را با ۷ دقیقه و ۳۰ ثانیه نمایش می‌دادند. در مورد کسری مانند ۱/۷ نیز تا تقریب ۸ دقیقه و ۳۴ ثانیه و ۱۷ ثالثه پیش می‌رفتند و از ۱ ثالثه باقیمانده چشم می‌پوشیدند. بنابراین سومری‌ها با کسر متعارفی مشکلی نداشتند و مسائل را با تقریب حل می‌کردند. اما مصری‌ها و خیلی بیشتر ایلامی‌ها با کسرهای متعارفی مشکل داشتند. در الواح ایلامی به ندرت با کسرها رو به رو می‌شویم و نمادهای وضع شدهٔ آنها برای کسرهای متعارفی ۱/۵ و ۱/۱۰ رهنمودی برای وضع یک نظام کارآمد برای نوشتن همهٔ کسرها نمی‌دهد.

اما مصریان که نیاز چندانی به تقسیمات ریز فلکی نداشتند از طریق دیگری به همین مطلب رسیدند و در واقع وضعی بهتر از سومری‌ها و ایلامی‌ها پیدا کردند. مصری‌ها همان طور که گفتیم قاعدهٔ مشخصی برای نمایش کسرهای پایه ۱/۴ و ۱/۸ و ... و ۱/۶۴ تعیین کردند که همزمان یا (به نظر ما) بعدها همان نماد را به همهٔ کسرهای یکین سرایت دادند. می‌گویند علامت بیضی شکل کسر، در خط هیروگلیف به معنای «[یک] از چند» و با احتمال کمتری به معنای «دهان» است. رابطهٔ بین دهان و کسر را این گونه می‌شود توجیه کرد که مصریان به باور تیت (مصرشناس و مترجم پاپیروس ریند) [۹،۸] به مضرب‌های ۲ و ۱/۲ و ۲/۳ به دید یک «فرمان» نگاه می‌کردند تا یک «کمیت». لذا پس از آن که تصمیم گرفتند نمادگذاری‌های بی قاعده‌ای مانند آنچه برای ۱/۲ و ۱/۴ انجام دادند رها کنند، فرمان کلی تقسیم را به شکل یک دهان نمایش دادند و تعداد تقسیمات را هم زیر «دهان» نوشتند. تصادفاً نماد کسر، به چشم نیز شبیه است و لذا می‌شود فرض کرد که بیضی بالای کسر را از حدقهٔ چشم هور گرفته باشند. حالا معلوم نیست که نماد شکل ۷ برای کسر ۲/۳ چگونه ابداع شده است. اگر در شکل ۷، دو خط قائم را کمی پائین‌تر رسم کنیم نمادی می‌دهد که قاعدتاً باید ۱/۲ خوانده شود، چون ۱/۲ را با همان نماد قدیمی «تاکردن» نمایش می‌دادند، می‌شود احتمال داد که با کمی تغییر در نماد غیر لازم ۱/۲، نمادی برای کسر ۲/۳ که اولین کسر متعارفی دوین (کسر با صورت ۲ و مخرج طبیعی) بود ابداع کردند. اجازه می‌خواهیم یک حدس هم ما بزنیم. در کتاب ایفراه [۳] چیستاهایی از دوره‌های جدیدتر تاریخ مصر وجود دارد که در آنها جواب معما از معادل بودن کسرهای ۱/۳ یا ۲/۳ با ۱ یا ۲ فصل از سال (سه فصلی) مصر به دست می‌آمده است. حدس ما این است که احتمالاً مصریان همزمان با ابداع نماد تاشدن برای عمل نصف کردن یا ابداع × برای عمل چهار قسمت کردن، نمادی هم جهت تقسیم سال به دو دورهٔ آرام و ناآرام نیل ابداع کرده‌اند: یک بیضی کنایه از «گردش سال» و دو زخمک روی بیضی کنایه از «آغاز و پایان دورهٔ آرامش نیل». همان طور که نماد ۱/۲ به معنای عمل نصف کردن است نه مفهوم نصف، یا × به معنای چهار قسمت کردن است نه ربع، نماد شکل ۷ نیز به معنای تقسیم سال به دو دورهٔ چهار ماهه و هشت ماهه باید باشد؛ و چرا این نماد برای ۲/۳ به کار رفته نه ۱/۳، علاقهٔ شدید مصریان به تکهٔ لذیذتر کیک بوده است.

شکل ۷: کسر ۲/۳

هنگام طغیان چهار ماهه نیل، تمام کشتزارها به زیر گل و لای فرو می‌رفت. در آرامش هشت ماهه نیل، مصر را شور کار و تلاش و زندگی فرا می‌گرفت. این دورهٔ هشت ماهه شامل چهار ماه کاشت و چهار ماه برداشت بود. مدارک به دست آمده همگی حاکی از آنند که اهمیت کسر ۲/۳ به مراتب بیشتر از کسر ۱/۳ بوده است و البته باید به مصریانی که چهار ماه از سال را در گل و لای سرد نیل سپری می‌کردند حق داد. برای درک علاقه مصریان به کسر ۲/۳ توجه‌تان را به لوح چوبی اخمیم جلب می‌کنیم که در آن کسر ۱/۳ بر حسب کسر ۲/۳ چنین بیان شده است:

$$۱/۳ = ۱/۴ + ۱/۱۶ + ۱/۶۴ + (۱ + ۲/۳)(۱/۳۲۰)$$

همچنان که در بخش‌های بعد خواهیم دید، در پاپیروس ریند هم هیچ جا ۲/۳ به صورت ۱/۶ + ۱/۲ نوشته نشده است و چنین به نظر می‌رسد که مصریان با «دو سوم از یک کمیت» بیشتر مأنوس بودند تا با یک سوم آن. همانطور که گفتیم اساس ضرب مصریان (با اعداد طبیعی) بر مضرب‌های ۱ و ۲ و ۴ و ... و ۲^n و در مورد کسرها بر اجزای چشم هور یعنی ۱/۲ و ۱/۴ و ۱/۸ و ۱/۱۶ و ۱/۳۲ و ۱/۶۴ استوار بود. آنطور که از عقیدهٔ پیت [۹:۸] بر می‌آید، مضرب ۲/۳ هم به اندازهٔ مضرب ۱/۲ به کار گرفته می‌شده است. همچنان که خواهیم دید، گرچه محاسبهٔ مستقیم یک سوم از یک کمیت (طبیعی یا کسری) کاری ساده‌تر از محاسبهٔ ۲/۳ آن بوده است ولی مصریان بنا به عادت مألوف، نخست ۲/۳ آن عدد را حساب و سپس حاصل را نصف می‌کردند. (این نکته تأکیدی است بر باور پیت به انس ویژهٔ مصریان با فرمان‌های ۲ و ۱/۲ و ۲/۳.) مثلاً نویسندهٔ پاپیروس ریند که در تقسیم ۲ بر ۵ احتیاج به محاسبهٔ ۱/۳ عدد ۵ داشته است، نخست ۲/۳ عدد ۵ را به صورت ۱/۳ + ۳ به دست آورده است. حدس ما این است که ۵ سال را معادل ۱۵ فصل (چهار ماهه) گرفته که دوسومش ۱۰ فصل (معادل سه سال و ۱ فصل) شده است. سپس با نصف کردن جواب اخیر به جواب نهائی ۲/۳ + ۱ یعنی ۱ سال و ۲ فصل رسیده است. (راه ساده و مستقیمی که مصریان به سراغش نرفتند این بود که ۵ سال را ۱۵ فصل و در نتیجه ۱/۳ آن را ۵ فصل بگیرند تا به جواب ۱ سال و ۲ فصل برسند.) در قسمت آخر از مسأله ۶۱ پاپیروس ریند، محاسبهٔ ۲/۳ از هر کسر یکین $۱/n$ (در حالتی که n فرد باشد) با دستور زیر داده شده است:

$$(۲/۳)(۱/n) = ۱/(۲n) + ۱/(۶n)$$

همه این‌ها نشان می‌دهند که کسر ۲/۳ در عمق فرهنگ مصری‌ها نفوذ داشته و در آنان چنان الفتی مستقل از منطق ریاضی برقرار کرده بود که کسر ساده‌ای مثل ۱/۳ را تحت‌الشعاع خود قرار می‌داد.

در قسمت نخست مسألهٔ ٦١ بالا، اثر کسرهای ۲/۳ و ۱/۲ روی چند کسر دیگر به دست آمده است؛ یک جا گفته شده است ۱/۹ از ۲/۳ می‌شود ۱/۵۴ + ۱/۱۸ و بلافاصله ترتیب گفتن را عوض کرده می‌گوید ۱/۹، ۲/۳ آن می‌شود ۱/۵۴ + ۱/۱۸. یک تعبیر این است که مصریان خواسته‌اند تأکید خود را برجابجائی عمل ضرب نمایان سازند. اما باور پیت بر این است که مصریان فقط ۲/۳ و ۱/۲ را به عنوان مضرب می‌پذیرفتند و لذا در ترتیب دوم بیان مسأله، خواسته‌اند اشتباه خود را اصلاح کرده باشند. (یعنی می‌خواهند به دانش‌آموز هشدار دهند که این فرمان‌های ۲/۳ یا ۱/۲ هستند که بر کمیتی مانند ۱/۹ اثر می‌کنند نه بر عکس.) در هر حال همه این نکات، اهمیت ۲/۳ را تأیید می‌کنند و آن را در ردیف ۱/۲ قرار می‌دهند.

در بخش‌های بعدی نمونه‌های دیگری از محاسبه با کسر ۲/۳ را خواهیم دید.

۵. لوح چوبی اخمیم

در این بخش مرحله بینابینی کسرهای مصری را مطالعه می‌کنیم؛ مصریان کسرهای خود را در پایه دودوئی تا ۱/٦۴ بسط می‌دهند ولی متوقف نشده، باقیمانده را بر حسب مجموع کسرهای یکینی از یک واحد جدید نمایش می‌دهند. لوح چوبی اخمیم بین سال‌های ۲۰۰۰ تا ۱۹۵۰ ق.م. نوشته شده و در حفاری‌های شهر اخمیم پیدا شده است. این لوح در موزهٔ قاهره جای دارد و به لوح قاهره نیز معروف است. چوبی بودن لوح شاید به خاطر گران بودن یا رایج نبودن کاغذ در آن سال‌ها باشد. (پاپیروس حدود ۳۰۰۰ ق.م. اختراع شد ولی مسلماً تهیهٔ آن با رنج فراوان همراه بوده است.) در این لوح چوبی، چند کسر متعارفی را با کسرهای چشم هور بسط داده‌اند ولی از آنجا که این لوح برای داروسازان نوشته شده، نتوانسته‌اند از خطای ۱/٦۴ چشم‌پوشی کنند. در این لوح، دو مقیاس مختلف وزن به کار رفته است. یکی هکات واحد رایج وزن و دیگری «رو» که مقدارش برابر با ۱/۳۲۰ هکات بود. (واحد جدید را با ρ نمایش می‌دهیم.) در این لوح دو چیز جالب رو به روی هم قرار گرفته‌اند: یکی کسرهای چشم هور یعنی ۱/۲، ۱/۴، ۱/۸، ... تا ۱/٦۴ هکات؛ و دیگری کسرهای پایهٔ دلخواه که فقط در مضرب ρ قرار گرفته‌اند. مثلاً کسر ۱/۳ هکات، با این که یک کسر پایه است، هنوز قابل قبول نیست مگر این که نخست، کسرهای چشم هور آن استخراج شود؛ یعنی می‌بایست بنویسند:

$$۱/۳ = ۱/۴ + ۱/۱٦ + ۱/٦۴ + ۱/۱۹۲$$

که البته کسر پایه ۱/۱۹۲ هکات در سال ۲۰۰۰ ق. م. قابل قبول نبود مگر این که به صورت کسری از ρ نوشته می‌شد؛ یعنی

$$۱/۱۹۲ = (۱ + ۲/۳)\rho$$

در این لوح علاوه بر ۱/۳، کسرهای پایه ۱/۷، ۱/۱۰، ۱/۱۱ و ۱/۱۳ نیز به همین صورت بسط داده شده‌اند. (معلوم نیست چرا از کسرهای ۱/۵ ، ۱/۹ ، ۱/۱۲ و غیره چشم‌پوشی شده است؛

شاید هدف فقط تمرین بوده نه تهیهٔ یک جدول کامل.)

همانطور که می‌بینیم، داروسازان برای کارهای حرفه‌ای خود از وزن بسیار سبک ρ استفاده می‌کردند و به خودشان اجازه می‌دادند که نه تنها از هر کسر پایه دلخواه آن واحد، بلکه از کسر ۲/۳ آن نیز استفاده کنند. (در کرمان ۵۰ سال پیش هم وقتی کار به وزن‌های کمتر از نصف هفت درم می‌کشید، تخصصی می‌شد و به عوام مربوط نمی‌شد؛ از این به بعد پای انواع و اقسام وزنه‌ها مانند مثقال، نخود، گندم، قیراط و غیره به میان می‌آمد که مصرف روزمرگی نداشتند.) مشاهدهٔ دیگر ما این است که مصری ها نه تنها مانند سومری‌ها از طریق اجزاء وزن جدید به انبوه کثیری از کسرها دست یافتند بلکه پا را فراتر گذاشتند؛ کسر سومری معمولاً از ثالثه فراتر نمی‌رفت و به تقریب رضایت می‌داد؛ ولی کسر مصری، در مرحلهٔ دوم از تحول خود، همین که شش بخش هکات را به پایان می‌رساند، آنقدر در اجزاء ρ پیش می‌رفت تا باقیمانده صفر می‌شد. به عنوان مثال کسر ۱۵/۳۱ چنین تفسیر می‌شد:

$$۱۵/۳۱ = ۱/۴ + ۱/۸ + ۱/۱۶ + ۱/۳۲ + [۴ + ۱/۲ + ۱/۳ + ۱/۱۸۶]\rho$$

در این مرحله از دگرگونی کسرهای مصری، قداست کسرهای چشم هور متزلزل شد و بعدها در اوج دورهٔ کلاسیک مصر (دودمان دوازدهم) و شکوفائی کشاورزی و اقتصاد و مهندسی و هنر و رفاه و روابط بین‌الملل، اجزای چشم خورشید، خود به خود به افسانه‌ها پیوستند و کسرهای پایه، جایگزین آنها شدند.

متأسفانه نمادی که برای ۲/۳ انتخاب کرده بودند به خوبی نماد کسرهای یکین نبود و به زور به کسر دیگری مانند ۳/۴ (شکل ۸) تعمیم داده شد. از دو نماد اخیر به هیچ وجه نمی‌توان نمادی برای کسری مانند ۸/۱۵ استنباط کرد. به نظر ما این نمادگذاری نامناسب، سدی در مقابل رشد مفهوم کسر در مصر باستان شد.

شکل ۸: کسر ۳/۴

۶. تومار چرمین ریاضیات مصری

از این بخش به بعد سندهائی را بررسی می‌کنیم که کسرهای مصری را بدون توجه به کسرهای چشم هور به کسرهای پایه تجزیه می‌کنند. تومار چرمی ریاضیات مصری بین سال‌های ۲۰۰۰ تا ۱۸۵۰ ق.م. نوشته شده و احتمالاً چرمی بودن این سند هم به دلیل رایج نبودن کاغذ بوده است. در این تومار کسرهای پایه بدون مراجعه به واحد اندازه‌گیری ρ قابل قبول شده‌اند و بنابراین یک گام اساسی جدید در درک ریاضیدانان مصری از مفهوم کسر برداشته شده است. هدف نویسنده تومار،

تجزیه یک کسر پایه به مجموع چند کسر پایه متمایز می‌باشد. روش‌های زیر را در این تومار مشاهده می‌کنیم که البته ما صورت کلی‌تری از آنچه در تومار است در اینجا آورده‌ایم و معتقدیم که مؤلف تومار چرمی به این کلیت آگاه بوده است. (در این تومار مقدار m معمولاً ۱ گرفته شده است.)
آ) اگر p و q دو عدد طبیعی باشند، آنگاه کسر متعارفی $m/(qp)$ به صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$m/(pq) = m/[q(p+۱)] + m/[pq(p+۱)]$$

حال اگر m یکی از دو عدد ۱ یا ۲ و p عدد فردی بزرگ‌تر از ۱ باشد، دو کسر طرف راست متمایزند و (پس از ساده‌شدن‌های لازم) کسر $m/(pq)$ را به دو کسر پایه متمایز تجزیه می‌کنند. (توجه کنید که $p+۱$ زوج است و با ۲ ساده می‌شود.)
آآ) عدد ۱ را به صورت

$$۱ = ۱/۲ + ۱/۳ + ۱/۶$$

تجزیه و کسر m/n را در دو طرف تساوی ضرب کنید؛ آنگاه

$$m/n = (m-۱)/n + ۱/(۲n) + ۱/(۳n) + ۱/(۶n).$$

به ویژه اگر m مساوی ۱ یا ۲ گرفته شود، آن‌گاه کسرهای $۱/m$ و $۲/n$ به سه کسر پایه متمایز تجزیه می‌شود. این روش ضمناً نشان می‌دهد که هر کسر پایه را به بینهایت جور می‌توان به صورت کسرهای مصری نمایش داد.
آآآ) روش سوم این که صورت و مخرج کسر متعارفی را در عدد سومی ضرب کنند و از میان مقسوم‌علیه‌های مخرج جدید تعداد متمایزی چنان انتخاب کنند که مجموعشان مساوی صورت جدید شود (البته انتخاب مناسب عدد سوم نقش مهمی بازی می‌کند). آنگاه مجموع چند کسر به دست می‌آید که پس از ساده شدن به کسرهائی پایه تبدیل می‌شوند. مثلاً

$$۵/۷ = ۱۰/۱۴ = (۷+۲+۱)/۱۴ = ۱/۲ + ۱/۷ + ۱/۱۴$$

کاربرد این تجزیه‌ها را در بخش‌های بعدی خواهم دید.

۷. پاپیروس های مسکو و ریند

همانطور که گفتیم، اوج شکوفائی کشاورزی، فناوری، اقتصادی ، هنری و رفاهی مصر باستان در دورهٔ کلاسیک دودمان‌های یازدهم و دوازدهم بود. دودمان یازدهم که حدود ۲۱۳۴ ق. م. رونق گرفته بود، همت خود را به کار بست تا اتحاد از دست رفتهٔ مصر را بر قرار سازد و با اقداماتی مردمی و بین‌المللی نظر دوستی مردمان داخل و خارج کشور را به خود جلب کند. این دودمان در سال ۱۹۹۰ ق. م. با کودتائی صلح آمیز توسط وزیر آن پایان پذیرفت و دودمان دوازدهم آغاز گشت. امنمهت

اول، وزیر دودمان یازدهم و بنیانگذار دودمان دوازدهم با تکیه بر تجربیات قبلی خود، آن روحیه صلح آمیز را ادامه داد و جانشینانش نیز تا سال ۱۸۰۲ ق. م. که دودمان مزبور پایان پذیرفت در این امر به او تأسی جستند. اگر وزارت امنمهت اول را در حدود سال ۲۰۰۰ ق. م. حساب کنیم باید اذعان داشت که مهمترین سندهای ریاضی مصر شامل لوح و تومار یاد شده در بالا و پاپیروس‌هائی که شرح خواهیم داد، همگی در زمان مدیریت افرادی از دودمان دوازدهم تهیه شده‌اند. مدارک به دست آمده از این دوره نشان می‌دهند که برای مدیریت مملکت از روش‌های علمی استفاده می‌شده و به ویژه سرشماری عمومی و ایجاد اداراتی جهت رسیدگی به امور کارگران از ابتکارات خاص این دوره بوده است که نه سابقهٔ قبلی داشت و نه دیگر تکرار شد. در دودمان دوازدهم، امنمهت سوم (۱۸٦۰ تا ۱۸۱۴ ق.م.) پادشاهی به ویژه مردم‌دوست و صلح طلب بود که در زمان خود مالکیت اشراف را محدود و تصدی موروثی مشاغل آنان را منسوخ کرد. تنها دریاچه (شیرین) مصر را با سدسازی و لایروبی کانال‌های فرعی نیل وسعت بخشید و آنقدر زمین کشاورزی به وجود آورد که کوچگران نوبیائی (همسایهٔ جنوبی) و سوریائی (همسایهٔ آسیایی) برای کار و کشاورزی بدان منطقه روی آوردند. به منظور شکرگزاری و همچنین نمود قدرت مصر، دستور داد مجسمه‌های عظیمی از او بسازند که گرچه هزینهٔ زیادی برداشت ولی امروزه، فرزندان او از جیب جهانگردان خارجی بیرون کشیده به خزانه برمی‌گردانند. نکتهٔ مهم این است که امنمهت سوم مدتی را با پدرش به طور شراکتی پادشاهی کرد و مدتی نیز پسرش را در امور پادشاهی شریک خود ساخت. چنین به نظر می‌رسد که پادشاهان دودمان دوازدهم، همهٔ جوانب را مد نظر داشتند تا بتوانند بهترین خدمت را به ملت خود بکنند.

در زمان امنمهت سوم، دو رسالهٔ مهم ریاضی نوشته شد که در یکی از آنها به صراحت نام او آمده است. این پاپیروس که هنوز پیدا نشده، توسط شخصی به نام احمس در سال ۱٦۵۰ ق.م. بازنویسی شد و هم اکنون موجود است و به نام خریدارش پاپیروس ریند نامیده می‌شود. پاپیروس ریند توماری است که ۳۳ سانتی‌متر پهنا و ۳ متر و ۱۹ سانتی‌متر درازا دارد. محتوای آن مشتمل بر ۲ جدول و ۳ کتاب است. در جدول نخست، حاصل تقسیم ۲ بر کلیهٔ عددهای فرد ۳، ۵، ۷، ۹، ... تا ۱۰۱ به صورت کسرهای مصری محاسبه شده‌اند و جدول دوم حاوی تقسیم اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ... و ۹ بر ۱۰ می‌باشد. کتاب اول دربارهٔ حساب است. کتاب دوم بر سه پاره است که به ترتیب به محاسبهٔ حجم‌ها، مساحت‌ها و شیب‌ها می‌پردازد. کتاب سوم حاوی تعدادی مسألهٔ متفرقه در حساب است. در پایان رساله هم سه پیوست دربارهٔ نمادها و امور دیوانی و گاهشماری آمده است. برای راحتی ارجاع، پاپیروس گمشده زمان امنمهت سوم را با نام پاپیروس امنمهت سوم یاد می‌کنیم به امید آن که روزی پیدا شود. پاپیروس دیگری که به این دوره مربوط می‌شود پاپیروس مسکو نام دارد که تاریخ تقریبی آن سال ۱۸۵۰ ق.م. است و لذا این هم باید به زمان امنمهت سوم مربوط باشد. بهتر است احمس را دقیق‌تر بشناسیم و روشن کنیم چرا گاهی پاپیروس احمس می‌گوییم و گاهی پاپیروس ریند. احمس (به معنای ماه خدا زاده شد) دبیری بود که در حوالی سال ۱٦۵۰ ق.م. می‌زیست و در دربار فرعونی با کنیه آ ـ ئوسر ـ ر (به معنای بسیار تواناست خورشید) کار

می‌کرد. شغل موروثی دبیری، زیر نظر خدای ویژه‌ای به نام «توت» انجام می‌گرفت و دبیران پس از دیدن دوره‌های لازم، حرفهٔ خود را با سوگند نامه آغاز می‌کردند. آنان مقبرهٔ خانوادگی داشتند و تصویرهای نمادین درون مقبره‌شان آنها را به حالت نشسته در مقابل توت نشان می‌دهد که تمام حواسشان متوجه اوست. این توت است که کلمه به کلمه از متن اصلی قرائت می‌کند و دبیر هم بدون هیچ دخل و تصرفی در نسخهٔ جدید وارد می‌کند (شکل ۹). دبیر لازم نبود تخصصی در ریاضی یا پزشکی یا چیز دیگر داشته باشد؛ همین که می‌توانست یکی از خط‌های قدیم مصر را بنویسد و بخواند، بزرگترین هنر را داشته است. هیچ ریاضیدانی از مصر باستان شناخته شده نیست و نوشتن نام دبیر متضمن اعتبار نوشتار بود. هیچ اطلاعی در مورد زندگی و مقبرهٔ احمس در دست نیست مگر این که خودش در مقدمهٔ پاپیروس نوشته است که در سی و سومین سال از سلطنت پادشاه مصرهای بالا و پائین، آ ـ ئوسر ـ ر، به بازنویسی پاپیروسی متعلق به دوران پادشاه مصرهای بالا و پائین، [امنمهت سوم با کنیه] نه ـ مائت ـ ر [به معنای «آن که به حقیقت خورشید متعلق است»] مشغول است. در شکل ۹، آن که در سمت چپ عکس نشسته است احمس نیست ولی دبیری است مثل او که برای افتخار دنیوی و آمرزش اخروی، مقبره‌اش را به مجسمه‌ای از خود در محضر ولی‌نعمتش توت مزین کرده است.

احمس به عنوان یک دبیر سوگند خورده، پاپیروسی را بازنویسی کرد که ۲۰۰ سال از عمرش می‌گذشت و ما با آرزوی پیدا شدنش به پاپیروس امنمهت سوم نامگذاریش کردیم. لذا صرفنظر از هنر نویسندگی و کاغذسازی، امتیازات علمی هر دو پاپیروس (یافت شده و یافت نشده) به ریاضیدان گمنام دربار امنمهت سوم می‌رسد. پاپیروس احمس در حفاری‌های شهر باستانی تبس پیدا و در سال ۱۸۵۸ به هنری رایند باستانشناس انگلیسی فروخته شد. به همین دلیل آن را پاپیروس رایند یا پاپیروس احمس می‌نامند. وراث رایند هم پاپیروس را در سال ۱۸۶۴ به موزهٔ بریتانیا فروختند که البته قسمتی از آن گم بود و بعدها سر از موزهٔ نیویورک درآورد.

۸. حساب کسرهای مصری

پاپیروس مسکو و بیش از آن پاپیروس امنمهت سوم پر از مسائل مربوط به جمع و تفریق و ضرب و تقسیم روی کسرهای مصری هستند. در جمع یا تفریق دو کسر مصری، گرچه خوارزمیک خاصی رعایت نمی‌شد و هیچ صحبت رسمی از مخرج مشترک در میان نبود، اما روح مطلب، ضرب جملات در یک مخرج مشترک و تقسیم مجموع آنها بر مخرج مشترک بود. مثلاً برای یافتن حاصل‌جمع

$$(۳ + ۱/۲ + ۱/۵) + (۲ + ۱/۲ + ۱/۷)$$

همهٔ کسرها را در ۷۰ ضرب می‌کنیم تا مجموع

$$۲۱۰ + ۳۵ + ۱۴ + ۱۴۰ + ۳۵ + ۱۰ = ۴۴۴$$

شکل ۹: توت و دبیر

به دست آید؛ حال کسر ۴۴۴/۷۰ را ساده می‌کنیم تا عدد کسری

$$۴۴۴/۷۰ = ٦۰ + ۲۴/۷۰ = ٦ + ۱۲/۳۵$$

نتیجه شود که البته تقسیم ۱۲ بر ۳۵ با روش آآآ) از بخش ٦ نتیجه زیر را می‌دهد:

$$۱۲/۳۵ = ۳٦/۱۰۵ = (۳۵ + ۱)/۱۰۵ = ۱/۳ + ۱/۱۰۵$$

در مورد ضرب و تقسیم بهتر است اندکی از کارهای انجام شده در پاپیروس‌های مسکو و امنمهت سوم را مطالعه کنیم. پاپیروس مسکو به حل چند مسألهٔ هندسی می‌پردازد که مسألهٔ چهاردهم آن یافتن حجم هرم ناقص است و به اندازهٔ اهرام ثلاثه مصر برای تأمین غرور ملی و فرهنگی مصر ارزشمند است. ما در اینجا به این مسأله کاری نداریم ولی مسائل دیگری از آن دو پاپیروس را بررسی می‌کنیم که با نسبت‌ها سر و کار دارند و به پژوهش ما مربوط می‌شوند.

(آ) **مسألهٔ ششم (پاپیروس مسکو).** ضلع مستطیلی، به مساحت ۱۲ واحد مربع، ۳/۴ ضلع دیگر است، ابعاد مستطیل چیست.

نحوهٔ حل. در این زمان، کسر ۳/۴ هنوز رسمیت نداشت و به صورت ۱/۴ + ۱/۲ نوشته می‌شد. نویسندهٔ پاپیروس تناسب را به خوبی می‌فهمید و می‌دانست که اگر یک ضلع مستطیل را ثابت نگهدارد و ضلع دیگرش را تغییر دهد مساحت مستطیل نیز به همان نسبت تغییر می‌کند. پس

ضلع بزرگ‌تر را ثابت نگه می‌دارد و روی آن یک مربع می‌سازد و می‌داند که مساحت مستطیل ۳/۴ مساحت مربع است. مفهوم وارون یک کسر را هم می‌داند و لذا ۳/۴ را در ذهنش وارون می‌کند که می‌شود ۴/۳ (یعنی عدد مصری ۱/۳ + ۱). حالا می‌داند که مساحت مربع ۴/۳ مساحت مستطیل است و لذا ۱۲ را در کسر ۴/۳ ضرب می‌کند که می‌شود ۱۶. مساحت مربع را جذر می‌گیرد و ضلع به طول ۴ به دست می‌آید. این ضلع را هم در ۳/۴ ضرب می‌کند تا ضلع به طول ۳ به دست آید. در پایان، جهت امتحان جوابها، دو ضلع را در هم ضرب می‌کند و مساحت فرض شده را به دست می‌آورد. عملیات کسری مورد نیاز پاپیروس مسکو در پاپیروس ریند موجود است.

همانطور که گفتیم پاپیروس امنمهت سوم با دو جدول آغاز می‌شود. شیوهٔ نگارش هر فقره از جدول اول این است که نخست صورت مسأله را به صورت تقسیم ۲ بر n اعلام می‌کند؛ نحوهٔ یافتن خارج قسمت را نمی‌گوید ولی معلوم است که آن را به روشی شبیه یکی از روش‌های تومار چرمی ریاضیات مصری به دست آورده است و فقط نتیجه را به اطلاع می‌رساند. (نحوهٔ بیان، بسیار غیر آموزنده است.) آخر سر هم با ضرب خارج قسمت در مخرج، ادعای خود را به اثبات می‌رساند. در این جدول، ۵۰ کسر دوین (کسرهای با صورت ۲ و مخرج فرد) را بر حسب کسرهای پایه تجزیه کرده‌اند که ما فقط سه مثال ۳ ÷ ۲ و ۵ ÷ ۲ و ۷ ÷ ۲ را تشریح خواهیم کرد. در مسألهٔ (ب) اثبات می‌شود که حاصل تقسیم ۲ چیز بین ۳ نفر مساوی ۲/۳ آن چیز است. نحوهٔ اثبات این است که ۲/۳ را در ۳ ضرب می‌کند تا ۲ به دست آید؛ یعنی خارج قسمت را در مقسوم‌علیه ضرب می‌کند تا مقسوم به دست آید.

(ب) تقسیم ۲ بر ۳.

اثبات. [عدد] ۲ را با عملیات روی [عدد] ۳ به‌دست می‌آوریم: ۲/۳ [عدد] ۳ می‌شود [عدد] ۲. ■

توجه خواننده را به این نکته جلب می‌کنیم که کسر ۲/۳ به کسرهای یکین تجزیه نشده و با نماد مخصوص به خودش نوشته شده است (شکل ۷).

(پ) تقسیم ۲ بر ۵.

اثبات. [اولاً] ۱/۳ [عدد] ۵ می‌شود ۲/۳+۱، [ثانیاً] ۱/۱۵ [عدد] ۵ می‌شود ۱/۳. عملیات:

۵	۱
۱/۳ + ۳	۲/۳
۲/۳ + ۱	۱/۳
۱/۳	۱/۱۵

■

در اینجا مصریان می‌دانند که خارج قسمت ۲ بر ۵ مساوی کسر مصری ۱/۵ + ۱/۳ می‌شود و

برای اثبات آن باید عبارت اخیر را در مقسوم‌علیه یعنی ۵ ضرب کنند تا مقسوم یعنی ۲ حاصل شود. ضرب را طبق ضرب عددهای طبیعی در دو ستون انجام می‌دهند. سرستون اول ۱ و سرستون دوم ۵ است. این را هم می‌دانند که در اینجا کاری از دست توان‌های مثبت و منفی ۲ برنمی‌آید، لذا مستقیماً عامل‌های ۱/۱۵ و ۱/۳ را به کار می‌گیرند. اما همان طور که قبلاً گفتیم، مصریان به جای ۱/۳، نخست ۲/۳ را در ۵ ضرب می‌کنند و حاصل را نصف می‌کنند (یعنی سه فرمان «دوبرابر کردن»، «نصف کردن» و « دوسوم کردن» در ضمیر ناخودآگاه مصریان قرار داشتند). شاید هم مصریان جدول‌هایی داشتند که ۲/۳ و ۱/۲ اعداد طبیعی یا کسری را در خود آماده داشتند. معلوم نیست که ۱/۱۵ عدد ۵ را چگونه حساب کرده‌اند. یک احتمال این است که ۵ سال را ۱۵ فصل (چهار ماهه) گرفته‌اند و ۱/۱۵ آن ۱ فصل یعنی ۱/۳ سال شده است. احتمال دیگر این است که همانند مسألهٔ زیر وارون ۵/۱۵ را حساب کرده و عدد حاصل یعنی ۳ را دوباره وارون کرده‌اند.

(ت) تقسیم ۲ بر ۷.

اثبات. [اولاً] ۱/۴ [عدد] ۷ می‌شود ۱/۴ + ۱/۲ + ۱، ثانیاً ۱/۲۸ [عدد] ۷ می‌شود ۱/۴. [عملیات]

۱	۷			
۱/۲	۳ + ۱/۲		۱	۷
۱/۴	۱ + ۱/۲ + ۱/۴		۲	۱۴
۴	۲۸	۱/۴	۴	۲۸

■

توضیح: دو ستون سمت چپ با دو ستون سمت راست هیچ رابطه‌ای ندارند و این‌ها دو جدول جداگانه هستند که ما آنها را جدول‌های چپ و راست می‌نامیم. برای توضیح، نخست روی جدول چپ تمرکز می‌کنیم. حل کنندهٔ مسأله می‌داند که حاصل تقسیم ۲ بر ۷ مساوی کسر مصری ۱/۲۸ + ۱/۴ می‌شود و برای اثبات این مطلب، می‌خواهد خارج قسمت اخیر را در ۷ ضرب کند تا ۲ به دست آید. لذا عددهای ۱ و ۷ را به ترتیب در سر ستون‌های دو ستون جدول چپ می‌نویسد. نصف‌های سطر اول را در سطر دوم می‌نویسد و نصف‌های سطر دوم را در سطر سوم می‌نویسد. تا اینجا حاصل ضرب ۱/۴ در ۷ به دست می‌آید. برای ضرب ۱/۲۸ در ۷ شیوه را تغییر می‌دهد. ظاهراً هیچ تجربهٔ همه‌پسندی در مورد ۲۸ ÷ ۷ ندارد. مثلاً اگر تجربه سال ۴ فصلی را داشت، فوراً می‌گفت ۷ سال ۲۸ فصل می‌شود و لذا ۱/۲۸ عدد ۷ می‌شود یک فصل یعنی ۱/۴ سال. اما نویسندهٔ مصری نه چنین تجربه‌ای دارد و نه نمادی برای کسرهای متعارفی عام دارد که با استفاده از آن، صورت و مخرج کسر را ساده کند. لذا به جای ۲۸ ÷ ۷، وارون آن یعنی ۷ ÷ ۲۸، را حساب می‌کند که ۴ می‌شود. جدول سمت راست عملیات تقسیم ۲۸ بر ۷ را نمایش می‌دهند. احمس برای صرفه‌جویی در کاغذ، دو جدول را کنار هم نوشته است. وی، وارون ۴ را که ۱/۴ می‌شود بین دو

جدول چپ و راست یادداشت می‌کند. (ضمناً به مسامحه احمس در نگذاشتن علامت اختیار در ستون‌های دوم و پنجم توجه کنید.) حق این بود که این ۱/۴ را زیر ستون اول و وارون ۲۸ یعنی ۱/۲۸ را هم زیر ستون دوم در سطر چهارم جدول چپ می‌نوشت. ولی احمس سطر آخر جدول راست را عیناً به سطر آخر جدول چپ منتقل کرده است. اگر من به جای احمس بودم دو جدول چپ و راست را به شکل زیر اصلاح می‌کردم و از ۱/۴ بین دو جدول چشم می‌پوشیدم:

		۷	۱
۷	۱	۳ + ۱/۲	۱/۲
۱۴	۲	۱ + ۱/۲ + ۱/۴	۱/۴
۲۸	۴	۱/۴	۱/۲۸

با این اصلاحات، مجموع ردیف‌های سوم و چهارم اختیار شده از ستون دوم می‌شود ۲، و مجموع عددهای متناظر از ستون اول می‌شود ۱/۲۸ + ۱/۴. در سایر کسرهای دوین، همین استدلال‌ها و عملیات تکرار می‌شود که از آنها صرفنظر می‌کنیم و به بررسی چند مسأله دیگر از پاپیروس امنمهت سوم می‌پردازیم.

(ث) **تقسیم ۱ بر ۱۰.** اثبات. جواب ۱/۱۰ است. برای امتحان ۱۰ را در ۱/۱۰ ضرب می‌کنیم.

۱	۱/۱۰
۲	۱/۵
۴	۱/۳ + ۱/۱۵
۸	۲/۳ + ۱/۱۰ + ۱/۳۰

چون مجموع [عددهای اختیار شده از ستون دوم] مساوی ۱ نان می‌شود پس جواب درست است. ■

قبل از هر چیز توجه کنید که در صورت مسأله صحبت از نان نبود ولی در آخر مسئله، نان به عنوان کمیت مورد تقسیم اعلام می‌شود؛ ظاهراً مثال نان بسیار رایج بوده و برخی از مصرشناسان عقیده دارند که معمولاً در مسأله‌ای که کمیت مورد تقسیم ذکر نمی‌گردید فرض می‌کردند نان است. روش حل مسأله (ث) با روش حل مسأله‌های (پ) و (ت) متفاوت است. احتمال دارد تهیه کننده پاپیروس امنمهت سوم حسابگری حرفه‌ای بوده که تمام جدول‌های مورد نیاز خود را از این طرف و آن طرف جمع آوری کرده و بدون برقراری یک ترتیب منطقی یا یک ارتباط استقرائی بین مسأله‌ها و قضیه‌های گردآوری شده، به تدوین آنها پرداخته است. (شاید هم پاپیروس امنمهت سوم توسط چند دبیر نوشته شده که هر کدام سلیقه خاص خود را داشته‌اند و دویست سال بعد که احمس آن را رونویسی کرده به خود اجازه یکنواخت کردن متن را نداده است.) ضمناً توجه کنید که بین دو مفهوم ۱/۱۰ و خارج قسمت ۱ بر ۱۰ تفاوت قائل می‌شدند. این جدول تقسیمات بر ۱۰ نیز باید زمانی

تهیه شده باشد که هنوز فرمان ۱/۱۰ به اندازهٔ فرمان‌های ۲ و ۱/۲ و ۲/۳ رایج نشده بود و لذا مضرب را ۱۰ گرفته و آن را در ۱/۱۰ ضرب کرده‌اند؛ یادآور می‌شویم که ۱۰ (به صورت ۸ + ۲) مجموع فرمان‌های ۲ برابر کردن و ۸ برابر کردن است.

(ج) تقسیم ۷ بر ۱۰.

اثبات. جواب ۱/۳۰ + ۲/۳ است. برای امتحان ۱۰ را در ۱/۳۰ + ۲/۳ ضرب می‌کنیم.

۱	۲/۳ + ۱/۳
۲\`	۱ + ۱/۳ + ۱/۱۵
۴	۲ + ۲/۳ + ۱/۱۰ + ۱/۳۰
۸\`	۵ + ۱/۲ + ۱/۱۰

[چون مجموع سطرهای دوم و چهارم از ستون راست] مساوی ۱۰ می‌شود پس جواب درست است. ■

با بررسی دو مسألهٔ دیگر ارجاعات خود به پاپیروس امنمهت سوم را پایان می‌دهیم.

(چ) مسألهٔ ۲۲ (پاپیروس ریند). کسر ۱/۳۰ + ۲/۳ را به ۱ کامل کنید. [یعنی کسری بیابید که حاصل جمعش با کسر ۱/۳۰ + ۲/۳ برابر با ۱ شود.]

حل. [عدد] ۳۰ را در ۱/۳۰ + ۲/۳ ضرب کنید تا ۲۱ حاصل شود. [عدد] ۳۰ [به اندازه] ۹ [واحد] از ۲۱ بیشتر است. عدد ۳۰ را [در عددی] ضرب کنید تا ۹ به دست آید:

۱	۳۰
\`۱/۱۰	۳
\`۱/۵	٦

مجموع [عددهای ستون راست از سطرهای اختیار شده] برابر ۹ است. بنابراین باید ۱/۱۰ و ۱/۵ [به کسر مفروض] اضافه شود تا کامل شود. برای اثبات آنها را با هم جمع می‌کنیم؛ یعنی باید ۲/۳ و ۱/۵ و ۱/۱۰ و ۱/۳۰ روی هم مساوی ۱ شوند. برای اثبات، کسرها را در ۳۰ ضرب می‌کنیم می‌شود ۲۰ و ٦ و ۳ و ۱ که [جمعشان] ۳۰ می‌شود. ■

قبلاً گفته بودیم مصری‌ها برای جمع و تفریق از مخرج مشترک استفاده می‌کردند؛ بند (چ) این موضوع را به خوبی آشکار می‌سازد.

(ح) مسأله ٦۱ ـ ب (پاپیروس ریند). جدول ضرب کسرها.

۲/۳ از ۲/۳ می‌شود ۱/۹ + ۱/۳.

$\frac{۱}{۳}$ از ۲/۳ می‌شود ۱/۱۸ + ۱/٦.

۱/۹ از ۲/۳ می‌شود ۱/۵۴ + ۱/۱۸؛

[به عبارت دیگر] ۱/۹، ۲/۳ آن می‌شود ۱/۵۴ + ۱/۱۸،
۱/۵، ۱/۴ آن می‌شود ۱/۲۰. ■

از همهٔ این مسأله‌ها آشکار است که مفهوم خارج قسمت $a : b$ عددی مانند c است که $a = bc$. همچنین از بند (ث) چنین برمی‌آید که تقسیم ۱ بر n و کسر $۱/n$ دو مفهوم متفاوت دارند که معادل بودنشان باید اثبات شود. به هر حال مصریان پذیرفته بودند که $۱/m$ از $۱/n$ با حاصل ضرب $۱/m$ در $۱/n$ برابر است و هر دو عبارت مقدار مشترک $۱/(mn)$ دارند. تقریباً همهٔ عملیاتی که امروزه روی کسرها انجام می‌شود، مصری‌ها هم به نحوی انجام می‌دادند فقط می‌بایست مواظب باشند که چند برابر کسرهای پایه را نهایتاً به صورت مجموعی از چند کسر پایه متمایز بنویسند.

۹. مصر و یونان

یونانیان، رقم‌ها و دستگاه عددنویسی‌شان را از نیاکانشان در آناتولی و کرت به ارث بردند و تا قرن نهم ق.م.، خردمندانشان با مسافرت به سرزمین‌های ایران و بابل و مصر داستان‌های مذهبی لازم را برای خود شبیه‌سازی کرده بودند. (اصولا دیدگاه نسبتاً غالبی وجود دارد که همه دین‌های چند خدائی، پایه‌های دین خود را از سومریان برگرفته‌اند و برخی از صاحب نظران چنان به افراط می‌روند که این دیدگاه را به دین قومی مانند مایا نیز که آن سوی دنیا می‌زیست، تعمیم می‌دهند.) از این رهگذر، ذخیره‌ای از ریاضیات مورد نیاز خود را مانند هندسه، نجوم، حساب و به ویژه کسرها را نیز به سرزمین‌های یونانی‌نشین دو طرف تنگه بسفر منتقل کردند. طبیعی است که آن داستان‌های بچه‌گانه جنگ خدایان، نمی‌توانستند چنگی به دل اقوام آزاداندیشی بزنند که تنوع قدرت‌های مستقل منطقه، پناهگاه‌هائی هر چند گذرا، برای دگراندیشان فراهم ساخته بود. مدتی هم صاحبان مکاتبشان گفته‌های بزرگانی همچون زردشت را پشتوانه ادعاهای خود قرار می‌دادند ولی اگر دلیل کم می‌آوردند، روایاتی از این بزرگان جعل می‌کردند که بویس [٦] فهرستی از این روایات جعلی را تحت عنوان طنزآمیز چنین نگفت زردشت! گردآوری کرده است. بالأخره یک روز هم آمدند و گفتند این چه کاریست؛ بیائید خودمان فکر کنیم! و این گونه بود که فلسفه شروع شد و به دنبال آن، نظام استدلال در همه چیز رخنه کرد. مطالعه رخنه کردن استدلال در علوم مختلف کار ما نیست ولی ما می‌توانیم با اتفاقاتی که در ریاضیات افتاد آن را شبیه‌سازی کنیم.

اولین اثبات ریاضی که در تاریخ ثبت شده است مربوط به قضیهٔ مشهور تالس است. تالس می‌خواست این باور ریاضی‌دانان مصری و بابلی را ثابت کند که اگر از نقطه‌ای واقع بر یک ضلع مثلث، خطی به موازات ضلع دیگر آن مثلث رسم شود، ضلع سوم را نیز به نسبت قطعات متناظر روی ضلع اول قطع می‌کند؛ عکس این قضیه هم درست است و روی هم قضیهٔ مشهور تالس را درست می‌کنند. چون این قضیه و اثباتش به موضوع مقالهٔ ما مربوط می‌شود، به جزئیات آن وارد می‌شویم. حالت ساده‌ای از این قضیه این است که خط موازی، ضلع اول را نصف کند. اولین پرسش ممکن این است که آیا هر پاره‌خط یک وسط دارد؟ ظاهراً یونانیان در این موضوع شکی نداشتند و همان

طور که مصریان و سومریان (و بابلیان) نصف را بدون دلیل پذیرفته بودند، آنها هم پذیرفتند. (چیزی را که اجماع می‌پذیرفت بدیهی تلقی می‌شد و اثبات نمی‌خواست.) اثبات تالس در دست ما نیست؛ سه قرن بعد از او، اثباتی از قضیهٔ تالس در کتاب اقلیدس داده شده است. ظاهراً اقلیدس برای فرار از بحث اعداد گنگ و گویا، به مفهوم مساحت متوسل شده و از این قضیه استفاده کرده است که اگر اندازهٔ ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشند، نسبت مساحت‌هایشان مساوی نسبت قاعده‌هایشان است.

مثلث ABC را بگیرید و از نقطهٔ دلخواه D روی AB خطی به موازات BC رسم کنید تا AC را در E قطع کند. (اگر قطع نکند از C دو خط به موازات یک خط رسم شده است که در زمان تالس، بدیهیات را نقض می‌کرد و در زمان اقلیدس، اصول موضوعه هندسه را.) مثلث‌های BDE و CDE مساحت‌های مساوی دارند، بنابراین اگر $area(XYZ)$ مساحت مثلث XYZ باشد، آنگاه

$$AD/DB = area(ADE)/area(DBE) = area(ADE)/area(DCE) = AE/EC$$

و بدین ترتیب یک طرف قضیه به اثبات می‌رسد. استفاده از مساحت یک امر پیشرفته است و همان طور که خواهیم دید یکی دو قرن بعد از تالس برای تعریف ضرب عددهای گنگ وارد جبر شد. در زمان تالس فرض بر این بود که اندازهٔ هر پاره خط گویا است و لذا نسبتی مانند AD/DB، نهایتاً به شکل کسری مانند m/n خلاصه می‌شد و در نتیجه، پاره خط ثالثی یافت می‌شد که درست n بار در DB و m بار در AD می‌گنجید. با این فرض، $m+n$ خط موازی یافت می‌شد که پاره خط AD را به m و پاره خط DB را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کرد. می‌مانست نشان دهند که این خط‌ها روی ضلع AC هم همین‌کار را انجام می‌دادند. بدین ترتیب، قضیه به حالت ساده‌اش که نقطهٔ D وسط AB قرار داشت تقلیل می‌یافت و اثباتش به جای استفاده از تشابه مثلث‌ها، با استفاده از انطباق مثلث‌ها به دست می‌آمد و عددهای گنگ و گویا در این قسمت از اثبات نقشی نداشتند. عددهای گویا پایهٔ دین و مکتب فیثاغورس را در قرن‌های ششم و پنجم ق.م. تشکیل می‌دادند و باور آنان بر این بود که همه چیز از عددهای طبیعی به دست آمده است. (هیچ کس نمی‌داند که این مطالب چگونه به فیثاغورس وحی شد و ظاهراً کسی از همعصران وی نیز متعرض اثبات نشد.) یونانیان نسبت m/n را به صورت m^n نمایش می‌دادند ولی معلوم نیست چرا از آن نماد در انجام محاسبات روی کسرها استفاده‌ای نکردند و همچنان به روش‌های سومری یا مصری ادامه دادند.

اگر ما با پیروی از فیثاغورس، اعتقاد داشته باشیم که جذر ۲ عددی گویا است هیچ راهی برای یافتن صورت و مخرج آن نداریم مگر آن که تقریب زدن را آن قدر ادامه دهیم تا شاید به باقی‌مانده صفر برسیم؛ ولی یکی از شاگردان شکاک فیثاغورس مسأله را حل شده فرض کرد و به تناقضی رسید که مکتب فیثاغورس را زیر و زبر کرد. او گفت اگر (خدا ناکرده) جذر ۲ به صورت کسر ساده شده m/n می‌بود، پس عدد ۲ هم به صورت کسر ساده شده $m^۲/n^۲$ درمی‌آمد و در آن صورت m می‌بایست به صورت $۲k$ (زوج) باشد. در نتیجه $۲ = n^۲/k^۲$، یعنی n هم می‌بایست زوج باشد که تناقض بود. چون این تناقض به نتیجه کفرآمیز گنگ بودن جذر ۲ می‌رسید، پس می‌بایست پنهان بماند! ولی نماند.

ریاضیدانان یونانی بعد از فیثاغورس راهی برای توجیه عددهای گنگ ندیدند مگر آن که عددها را، اعم از گنگ یا گویا، به صورت پاره خطهایی در صفحه نمایش دهند. جمع و تفریق عددها را با خطکش و پرگار انجام می‌دادند و ضرب دو عدد را هم مساحت مستطیلی می‌گرفتند که طول و عرضش برابر با آن دو عدد بود. دستگاهی که نتواند حاصل ضرب‌هایش را در درون خود جا دهد عاقبت خوشی ندارد. این مساحت‌ها را نمی‌توانستند با هم جمع کنند، زیرا می‌بایست به ازای هر دو مستطیل مفروض، مستطیلی پیدا کنند که مساحتش به طور طبیعی مجموع مساحت‌های دو مستطیل مفروض را نمایش دهد. اگر بعدهای مستطیل اول a و b و بعدهای مستطیل دوم c و d و یک بعد مستطیل مجهول x باشند، آنگاه برای یافتن بعد دیگر مستطیل مجهول، باید تقسیم مساحت بر طول را تعریف کرد که به نظر می‌رسد هم از خیر جمع دو مساحت گذشتند و هم از خیر تقسیم مساحت بر طول. (البته امروزه ما می‌توانیم با استفاده از قوت نقطهٔ نسبت به دایره، حاصلضرب دو پاره خط را به صورت یک پاره خط تعریف کنیم؛ چنین به نظر می‌رسد که در فاصلهٔ زمانی بین فیثاغورس و افلاطون یا هندسه به پیشرفت کافی نرسیده بود و یا پیچیدگی‌هایی به وجود می‌آمد که به مفهوم ساده‌تر مساحت پناه بردند.) در هر حال، یونانیان نتوانستند از نسبت چشم بپوشند چون تمامی زیبایی‌های هندسه و موسیقی و طبیعت را از دست می‌دادند. در تقسیم، به عنوان عکس عمل ضرب، مقسوم مساحت بود و مقسوم علیه طول؛ خارج قسمت نیز می‌بایست طول باشد تا این که طبق تعریف مصریان، حاصل ضرب خارج قسمت در مقسوم علیه بتواند مساوی مقسوم گردد. اما در نسبت بین دو کمیت، هر دو می‌بایست از یک جنس باشند ولی امکان داشت که نسبت دو طول با نسبت دو مساحت یا نسبت دو وزن برابر باشد. یونانیان متعرض تعریف و ماهیت نسبت نشدند ولی درک کرده بودند که نسبت دو کمیت همجنس، باید ماهیتی مطلق و مستقل از جنسیت آن دو کمیت داشته باشد. مهمترین مشغولیت ذهنی آنان این بود که چگونه برابری دو نسبت را تعریف کنند. اگر چهار کمیت دخیل در تناسب همجنس بودند، می‌توانستند با استفاده از قاعدهٔ طرفین ــ وسطین درستی آن را محقق سازند؛ ولی در حالتی که جنسیت دو کمیت اول با جنسیت دو کمیت دوم متفاوت بود، این کار بی‌معنی بود. آنان، چنان درگیر تعریف تناسب شدند که چهار عمل اصلی روی نسبت‌ها را فراموش کردند؛ شاید هم نسبت‌ها، زیبایی‌های ذاتی طبیعت بودند که فقط برای دیدن آفریده شده بودند نه برای دستکاری! مثل نسبت طلائی، نت موسیقی، شیب تپه، .... یونانیان نسبت را همان طور که بود پذیرفتند: یعنی یک جفت مرتب از دو کمیت همجنس. حال زبانی باید ابداع کرد که با آن برابری نسبت مساحت‌های دو مثلث هم قاعده را با نسبت ارتفاع‌های آن دو مثلث بیان کند؛ اصولاً برابری دو نسبت یعنی چه؟

یک قرن طول کشید تا به همت افلاتون و با نبوغ ائودوکسوس مفهوم برابری دو نسبت راست و ریست شد؛ در حقیقت فلاسفه آن چنان خسته شده بودند که به هر تعریف نیم‌بندی هم قانع می‌شدند! این را هم بگوئیم که اگر فشار فلاسفه نبود، نبوغ ائودوکسوس در جهت‌های مفیدتری به کار می‌افتاد، ارشمیدس‌های بعد از او به قله‌های رفیع‌تری دست می‌یافتند، دانش‌های یونانی مردمی‌تر و کارآتر می‌شدند، و اوباش اسکندریه جرأت جسارت به آخرین بازمانده‌های مکتب یونانی

و سوزاندن کتابخانه آن را پیدا نمی‌کردند.

ائودوکسوس صد سالی جلوتر از اقلیدس می‌زیست و شاید با اثباتی که برای قضیهٔ تالس در کتاب اقلیدس داده شد آشنا نبود. فرض کنید ائودوکسوس با اثبات غیراقلیدسی قضیهٔ تالس آشنا بود. احتمالاً عدد طبیعی n را به دلخواه می‌گرفت و پاره خط DB را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کرد. پاره خط DB/n را پیمانهٔ جدیدی می‌گرفت و با این پیمانه و با شروع از نقطهٔ D، پاره خط AD را m بار درمی‌نوردید که m هم عدد طبیعی دلخواهی بود. یکی از سه حالت زیر اتفاق می‌افتاد: یا به A نمی‌رسید، یا دقیقاً بر A منطبق می‌شد و یا از آن می‌گذشت؛ یعنی

$$(i)\ \ m(DB/n) < AD$$
$$(ii)\ \ m(DB/n) = AD$$
$$(iii)\ \ m(DB/n) > AD$$

(توجه کنید که ضرب یک عدد طبیعی m در یک کمیت دلخواه a را با جمع m باره $a+a+\ldots+a$ تعبیر می‌کردند و لذا جنس کمیت تغییر نمی‌کرد؛ همین طور تقسیم یک کمیت به n جزء مساوی نیز از بدیهیات بود که از مصریان و سومریان به ارث رسیده بود.) بدین ترتیب بر ضلع AB یا امتداد آن $m+n$ نقطه با فاصله‌های مساوی به دست می‌آمد. اگر از آن نقاط خطوطی به موازات BC رسم می‌شد، بنا به حالت ساده قضیهٔ تالس، $m+n$ نقطه با فاصله‌های مساوی بر ضلع AC یا امتداد آن به‌دست می آمد که اولاً EC را به n قسمت مساوی تقسیم کرده و ثانیاً متناظر به سه حالت بالا، سه حالت زیر اتفاق می‌افتاد:

$$(I)\ \ m(EC/n) < AC$$
$$(II)\ \ m(EC/n) = AC$$
$$(III)\ \ m(EC/n) > AC$$

اصلی به نام ائودوکسوس ــ ارشمیدس وجود دارد که می‌گوید به ازای هر دو کمیت a و b یک عدد m یافت می‌شود که $a < mb$ و برای آن زمان‌ها بدیهی بود که m را می‌شد کمینه گرفت. (امروز ما این کمینگی را از اصل کمال میدان عددهای حقیقی یا از اصل خوش ترتیبی مجموعه عددهای طبیعی نتیجه می‌گیریم.) لذا برای هر عدد طبیعی n، یک عدد طبیعی m وجود داشت که

$$(m-1)(BD/n) \leq AD < m(BD/n) \qquad (1)$$

و در نتیجه

$$(m-1)(EC/n) \leq AE < m(EC/n) \qquad (2)$$

با ضرب جمله‌های نامساوی (۱) در EC و جمله‌های (۲) در BD نتیجه می‌شد که

$$n|AD.EC - AE.BD| < BD.EC \ \ \forall n. \qquad (3)$$

چون n عدد طبیعی دلخواهی بود پس بنا به اصل ائودوکسوس ـ ارشمیدس،

$$AD.EC = AC.BD \qquad (۴)$$

و این همان چیزی بود که در حساب فیثاغورسی تناسب $AD/DB = AE/EC$ را برقرار می‌کرد. بدین ترتیب یک طرف قضیهٔ تالس به اثبات می‌رسد. آنچه ما را در اثبات (فرضی) ائودوکسوس، به تساوی دو نسبت رساند قاعدهٔ مشهور طرفین ــ وسطین کردن بود؛ اگر هر چهار کمیت از جنس طول بودند، یونانیان مشکلی با امر تناسب نداشتند و تناسب را با قاعدهٔ طرفین ــ وسطین (۴) تعریف می‌کردند. همانطور که قبلاً هم گفتیم مشکل آنها وقتی بود که می‌خواستند نسبت دو کمیت همجنس (مانند مساحت‌های دو مثلث هم قاعده) را با نسبت دو کمیت همجنس دیگر (مانند ارتفاع‌های آن دو مثلث) بسنجند. (هر چیزی را که نمی‌شد در هر چیزی ضرب کرد؛ به فرض که مساحت را در طول ضرب کردیم و حجم شد، بعد چی؟ ضرب حجم در مساحت چی؟) من مطمئنم که ائودوکسوس هم مانند خلف خود ارشمیدس از عددهای گنگ و تقریب آنها واهمه‌ای نداشت و ضرب و تقسیم کمیت‌ها را به صورت حسابی می‌دید نه هندسی؛ فقط به ملاحظه فلاسفه سعی می‌کرد به زبان مورد قبول آنها صحبت کند. ائودوکسوس، برابری (۴) را برای تعریف تناسب مناسب می‌دید ولی می‌بایست آن را ترجمه کند. نامساوی‌های (۱) و (۲)، همان طور که ما امروز می‌بینیم، از نظر ائودوکسوس منجم با (۴) معادل بودند. ولی ائودوکسوس یونانی ریاضی‌دان در ضمیر ناخودآگاهش از به کار بردن اصل خوش ترتیبی حساس اکراه می‌کند و برای پرهیز از هر گونه مجادله، گامی عقب‌تر نهاده و هم ارزی (۴) را با همزمانی بی درد سر دستگاه (i)-(iii) با دستگاه (I)-(III) مورد استفاده قرار می‌دهد. اکنون کمیت‌ها از هر جنسی باشند، در نوشتن نامساوی‌های مزبور اشکالی پیدا نمی‌شود و لذا ائودوکسوس تعریف زیر را برای تناسب $a/b = c/d$ ارائه می‌کند: اگر a و b دو کمیت همجنس و c و d نیز دو کمیت همجنس دیگر باشند، نسبت a به b برابر با نسبت c به d است هرگاه گزاره‌های زیر به ازای همهٔ عددهای طبیعی m و n برقرار باشند:

$mb < na$ اگر و تنها اگر $md < nc$

$mb = na$ اگر و تنها اگر $md = nc$

$mb > na$ اگر و تنها اگر $md > nc$

بدین ترتیب، مفهوم نسبت، هویتی پیدا کرد و فلاسفه را از نگرانی بیرون آورد؛ ولی نسبت‌ها و کسرها راه خود را از هم جدا کردند تا هزار سال بعد ریاضی‌دانان اسلامی آنها را آشتی دهند. هم ائودوکسوس، منجم ریاضی‌دان، و هم ارسطو، سیاستمدار منطق‌دان، علی‌رغم خدمات مؤثری که به آکادمی افلاتون کردند، تاب ادامه همکاری با آکادمی را نیاوردند و سرانجام، در خارج از آتن، مکتب‌های فکری جدیدی برای شاگردان خود باز کردند. منجمان و مهندسان (اعم از یونانی و غیر یونانی)، بی‌توجه به جنگ و دعوای خدایان فلسفه، همچنان به استفاده از کسرهای مصری یا سومری (بابلی) ادامه می‌دادند و از گنگ بودن یا گویا بودن اعداد حقیقی هراسی نداشتند. برای

اینان عدد «پی» همان ماهیت را داشت که عدد ۱ داشت با این تفاوت که «پی» رخ نمی‌نمود و هر جا که حضورش لازم می‌شد، بستگی به اهمیت کار، یکی از نزدیکان را به جای خود می‌فرستاد؛ اوائل ۳ را می‌فرستاد، برای بابلی‌ها ۲۵/۸، برای مصری‌های هزارهٔ دوم ق.م. ۲۵٦/۸۱، برای ارشمیدس قرن سوم ق.م. ۲۲/۷. این عدد آخری برای همهٔ نیازهای روزمره کافی بود؛ به قول کاشانی قرن پانزدهم (بعد از میلاد)، اگر ارشمیدس می‌خواست دور زمین را حساب کند ۵ فرسنگ خطا داشت و من (کاشانی) می‌خواهم عدد «پی» را چنان تقریب بزنم که خطایم در محاسبه استوای کره‌ای ششصد هزار برابر زمین از قطر موی اسب کمتر باشد. عدد «پی» را البته یا به صورت کسر مصری می‌نوشتند ویا در دستگاه شصت شصتی. ریاضی‌دانانی هم مانند ارشمیدس، همانند منجمان، کسرهای خود را در دستگاه شصت شصتی می‌نوشتند و تقریب اعدادی مانند پی یا جذر ۲ را وجهه همت خود قرار داده بودند. به هر حال افلاتونیان رغبتی به نوشتن اعداد بسیار بزرگ یا بسیار کوچک نشان نمی‌دادند و به جنبهٔ نظری ریاضیات بیشتر اهمیت می‌دادند. به همین دلیل هم تلاشی در جهت اعتلای دستگاه عددنویسی خود برای بهتر نوشتن عددهای بزرگ یا کسرها به خرج نمی‌دادند. این روزها تا بیش از یک ترلیون رقم از بسط دهدهی عدد پی را می‌شناسیم ولی به قول کاشانی، فقط خدا است که مقدار واقعی پی را می‌داند، یعنی تا آنجا که به ما بندگان خدا مربوط می‌شود عدد پی گنگ است و هیچ گاه راز خود را به ما نخواهد گفت.

دلیل دیگر بی‌علاقگی افلاتونیان به کسرهای مصری یا شصت شصتی، ناممکن بودن بسط متناهی یک عدد گویای دلخواه در هر یک از دو روش بود. همان طور که گفتیم بابلی‌ها کاملاً آگاه بودند که کسری مانند ۱/۱۳ را نمی‌توان با بسط متناهی شصت شصتی نمایش داد. در مورد نوشتن یک عدد گویای دلخواه به شکل کسرهای مصری نیز، یونانیان می‌بایست حدود ۱۵۰۰ سال صبر کنند تا ریاضی‌دانان اروپائی امکانش را به اثبات برسانند.

همان طور که دیدیم، ائودوکسوس تعریفی برای نسبت‌ها داد که گرچه برای کارهای نظری بسیار مفید و مناسب بود ولی نه به درد عددنویسی می‌خورد و نه به درد محاسبه. در کتاب اقلیدس، روش معروف نردبانی داده شده است که علاوه بر یافتن بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد طبیعی، یک دنبالهٔ متناهی از عددهای طبیعی به دست می‌دهد که فقط به نسبت آن دو عدد بستگی دارد. مثلاً به روش نردبانی یافتن بزرگترین مقسوم علیه مشترک ۳۵ و ۱۰ توجه کرده آن را با روش نظیر برای مقسوم علیه مشترک ۷۰ و ۲۰ مقایسه کنید.

	۳	۲
۳۵	۱۰	۵
۵	۰	

	۳	۲
۷۰	۲۰	۱۰
۱۰	۰	

همان طور که می‌بینید در بالای هر دو جدول یک دنبالهٔ عددی ۳ و ۲ تکرار شده است. این دنباله

۳ و ۲ در بالای جدول روش نردبانی هر دو عدد طبیعی دیگری هم که متناسب با ۳۵ و ۱۰ باشند ظاهر خواهد شد و چنین به نظر می‌رسد که یونانیان خیلی قبل از اقلیدس به درستی این قضیه برای نسبت‌ها واقف بودند. ضمناً ارتباط بین این دنباله و کسرهای مسلسل مربوط به نسبت‌های ۷/۲ و ۲/۷ از رابطه‌های زیر دیده می‌شود:

$$۳۵/۱۰ = ۱۴/۴ = ۷/۲ = ۳ + ۱/۲$$

یا

$$۱۰/۳۵ = ۴/۱۴ = ۲/۷ = ۱ + (۳ + ۱/۲)$$

اقلیدس (قرن سوم ق.م.)، دنباله‌ای را که در بالای جدول روش نردبانی ظاهر می‌شد به عنوان تعریفی از نسبت دو عدد طبیعی گرفت و بعدها، ماهانی (قرن نهم میلادی) با ترکیب این کار اقلیدس با کارهایی از زمان افلاتون، تعریف ملموسی به شرح زیر برای نسبت دو کمیت مفروض ارائه کرد. در تعریف زیر منظور از $[a/b]$ بزرگترین عدد صحیح نامنفی است که در شرط $nb \leq a$ صدق کند؛ در این صورت $a = nb + c$ که $\circ \leq c < b$.

دو کمیت دلخواه a و b را در نظر بگیرید و فرض کنید $a \geq b$. عددهای طبیعی p_n و کمیت‌های q_n را (تا جائی که امکان داشته باشد) به شرح زیر تعریف کنید:

$$q_\circ = a, q_۱ = b, p_{n-۱} = [q_n/q_{n-۱}], q_{n-۱} = p_{n-۱}q_n + q_{n+۱}(n = ۱, ۲, ۳\cdots).$$

ماهانی (احتمالاً به توصیهٔ ثابت بن قره)، دنباله p_n را نمایشی از نسبت a به b گرفت. امروزه، این دنباله در نمایش کسرهای a/b و b/a به صورت کسرهای مسلسل زیر شرکت می‌کند:

$$a/b = p_\circ + ۱(p_۱ + ۱/(p_۲ + ۱/(p_۳ + \ldots))),$$
$$b/a = ۱/(p_\circ + ۱/(p_۱ + ۱/(p_۲ + ۱/(p_۳ + \cdots))))$$

که معمولاً با نمادهای زیر هم نمایش داده می‌شوند:

$$a/b = [p_\circ, p_۱, p_۲, p_۳, \ldots],$$
$$b/a = [\circ, (p_\circ, p_۱, p_۲, p_۳, \cdots].$$

این دنباله آن طور که ما تعریف کردیم یکتا است و اگر کمیت‌های a و b عددهای طبیعی باشند، دنباله را پایانی است. اگر حاصل a/b گنگ باشد، دنباله را پایانی نخواهد بود. این دنباله‌ها، از هر لحاظ در چارچوب فکری یونانی ماب‌هایی همچون ماهانی و ثابت بن قره قرار داشتند مگر از لحاظ پایان ناپذیری که ماهانی سد روانی آن را شکست. سؤالی که مطرح می‌شود این است که چرا ماهانی کار را یک سره نکرد و به رواج بسط شصت شصتی عددهای گنگ و گویا نپرداخت. جواب این است که یونانیان دلخوری دیگری هم در مورد بسط شصت شصتی از بابلی‌ها به ارث برده بودند و

آن تبعیض بین عددهای گویا بود؛ مثلاً کسر ۱/۱۲ دارای بسط یک جمله‌ای ۵/۶۰ است در حالی که کسر ۱/۱۱ هیچ بسط متناهیی ندارد. (به قول بابلی‌ها، ۱۱ وارون ندارد.) ماهانی نمی‌توانست خود را به سادگی از تفکر یونانی ماب پیش کسوتانی همچون خاندان برمکی، پسران موسی شاکر خوارزمی و دوست حرانی‌اش ثابت بن قره در دارالحکمه بغداد رها سازد. البته ریاضی‌دانی مانند محمدبن موسی خوارزمی هم در همان دارالحکمه خدمت می‌کرد که فکری آزاد داشت و ریاضیات شرق و غرب را چنان در هم می‌آمیخت که بتواند آن را همگانی سازد. خوارزمی، در کارهای نجومی مأمون، شرکت جست ولی از دل آنها یک کتاب جغرافی کاربردی درآورد. زیج‌های هندی و ایرانی و یونانی را مطالعه کرد ولی خود زیجی ترتیب داد که ستون‌ها (یا پارامترهایش) برگرفته از زیج‌های گوناگون بود. نام خوارزمی برای این ماندگار شد که تعصب کلاسیک ریاضیات یونانی را کنار گذاشت و به کاربردهای ملموس توجه کرد. وی از زیجی که هیأت هندی با خود برای منصور عباسی به ارمغان آورده بود، ده رقم هندیان و عددنویسی آنان را فرا گرفت و باب جدیدی در محاسبات به روی همعصران خود و نسلهای بعدی گشود و به حق اصطلاح الگوریتم (خوارزمیک) را برای جاودانگی نام خود ذخیره کرد. کار خوارزمی همراه با شهامت ماهانی، سرانجام راه را برای کسرهای متعارفی و دهدهی به شکلی که امروز با آنها سروکار داریم باز کرد و در سال‌های دههٔ ۱۴۲۰ میلادی که کاشانی مفتاح‌الحساب را به الغ بیگ تقدیم می‌کرد تمایزی بین برخورد با اعداد گنگ و گویا و نسبت‌ها باقی نمانده بود. دیگر کسی مجبور نبود عدد حقیقی را پاره خط، حاصل ضربشان را مساحت و نسبتشان را عدد مطلق بگیرد. همهٔ این عملیات در یک دستگاه عددهای حقیقی (نامنفی) انجام می‌گرفت. البته اروپائیان تا سال ۱۲۰۰ و چه بسا ۱۵۰۰ میلادی در مقابل حساب هندی مقاومت می‌کردند و تا پذیرش آن، همچنان به استفاده از چرتکه و کسرهای مصری ادامه می‌دادند. ولی کم کم، کسر مصری به تجملات فکری ریاضی‌دانان پیوست و بسط شصت شصتی هم جای خود را به بسط مقتصدانه دهدهی داد.

۱۰. یادداشت‌های پراکنده

بخش ۱ (پیشگفتار)

آ. هیچ کتابی در تاریخ ریاضیات عصر عتیق نوشته نمی‌شود مگر این که در فصل مربوط به تاریخ ریاضیات مصر، اشاره‌ای نیز به کسرهای مصری داشته باشد. با وجود این صفحات ۱۶۸ و ۱۶۹ کتاب ایفراه [۳] را به عنوان یک مرجع جالب برای کسرهای مصری و صفحات ۱۵۱ و ۱۵۳ آن را برای کسرهای سومری ــ بابلی معرفی می‌کنیم. بسیاری از مطالب استفاده شده در این مقاله برگرفته از همین مرجع هستند. نویسندهٔ مقالهٔ حاضر، مطالبی جهت تدریس تاریخ حساب در کارگاه تاریخ ریاضی زیراب مازندران (مهر ۱۳۸۴) از کتاب فوق برداشته است که حاوی شرحی بر دستگاه‌های عددنویسی و کسرهای دوران باستان است [۱۲].

ب. برای کسانی که راحت‌ترند با اینترنت کار کنند، سایت زیر قابل اطمینان است:

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/

ت. ظاهراً قوم بسیار متمدنی مانند مایا هیچ درکی از کسرها نداشتند و به جز تقویم بسیار جالب و پیچیده‌شان، هیچ پیمانهٔ دیگری را مانند ساعت و متر و لیتر و غیره برای اندازه‌گیری به کار نمی‌گرفتند. بر عکس، تمدن پیشرفته‌ای هم مانند هند (دره سند) بود که ذره‌ای به طول $۷^{-۱۰}$ برابر انگشت داشت و باورشان این بود که این کوچکترین ذره‌ای از یک ماده است که می‌تواند رنگ و طعم و بوی خود را حفظ کند. (ایفراه [۳، صفحات ۲۹۸ و ۴۲۵].)

ث. مقالهٔ جالب زیر می‌تواند بخشی از انگیزه‌های ما را روشن سازد. خواندن آن را توصیه می‌کنیم:

http://historyofegyptianfractions.blogspot.com

بخش ۲ (چهار عمل اصلی مصریان)

آ. برای چهار عمل اصلی جمع و ضرب و تفریق و تقسیم، همان کتاب ایفراه [۳] و مرجع [۱۲] مناسب هستند؛ البته هر کتاب تاریخ ریاضیات دیگری نیز باید اشاره‌ای به این مطلب داشته باشد.

ب. همان‌طور که نصف کردن ساده‌ترین عمل تقسیمی است، دو برابر کردن هم ساده‌ترین عمل ضربی است و مصریان در طول تاریخ خود هیچگاه تفکر دودوئی را در مورد ضرب و تقسیم رها نکردند. ولی در مورد کسرها، علاقه و نیاز به جواب دقیق و پیشرفت دستگاه‌های اندازه‌گیری، آنان را به درک کمیت‌های پیچیده‌تر رهنمون کرد.

بخش ۳ (اجزاء چشم هور)

آ. برای جدول زمانی تاریخ مصر و مقیاس‌های مختلف مصریان به سایت موزه پتری که توسط یونیورسیتی کالج لندن تهیه شده است ارجاع می‌دهیم:

http://www.digitalegypt.ucl.ac.uk

http://www.digitalegypt.ucl.ac.uk/weights/volume.html

ب. اگر به اطلاعات بیشتری در مورد جنگ خدایان و انعکاس آن در روابط پادشاهی‌های دو مصر بالا و پائین علاقه‌مند هستید، سایت زیر مفید است:

http://www.friesian.com/notes/oldking.htm#archaic

بخش ۴. (نیل آرام)

آ. کسر ۳/۴ هرگز نتوانست به اندازهٔ کسر ۲/۳ رواج پیدا کند؛ نه تنها پاپیروس‌های امنمهت سوم و دودمانش که به قرن بیستم ق.م. مربوط می‌شوند بلکه ارشمیدس نیز که در قرن سوم ق.م. می‌زیست کسر ۳/۴ را به صورت ۱/۴ + ۱/۲ نمایش می‌داد.

ب. برای چیستاهای مصری در مورد رابطهٔ بین کسرها و بخش‌های سال به [۳] ارجاع

می‌دهیم.

بخش ۵. (لوح چوبی اخمیم)

آ. برای مدارک و کارهای ریاضی مصریان و سایر ملت‌های باستان، به کارهای بروئینز [۵،۴] ، گون [۱٦]، گیلینگز [۱۸،۱۷] و ریک [۱۳] ارجاع می‌دهیم.

ب. اتمام این طرح بدون استفاده از دایرةالمعارف ویکیپدیا امکان پذیر نبود و خواننده را ضمن هشدار در مورد طبیعت عدم قطعیت این سایت، به استفاده از آن ترغیب می‌کنیم.

بخش ٦. (تومار چرمی ریاضیات مصری)

آ. مرجع‌های ذکر شده برای لوح چوبی اخمیم (بخش ۵)، برای تومار چرمی ریاضیات مصری هم مفید هستند.

ب. سایت زیر نیز حاوی مقاله‌ای درباره تومار چرمی ریاضیات مصری است و نحوهٔ بسط کسرهای متعارفی را بر حسب کسرهای پایه شرح می‌دهد:

http://planetmath.org/HultschBruinsMethodEgyptianFractions2.html

بخش ۷. (پاپیروس‌های مسکو و ریند)

آ. اخیراً الفبائی در مغرب رود نیل متعلق به سال‌های ۱۸۰۰ تا ۱۹۰۰ ق.م. یعنی عصر دودمان دوازدهم پیدا شده که تاریخ اختراع الفبا را ۳۰۰ سال به عقب می‌برد. از آنجا که تلاش برای جایگزینی خط تصویری با خط ساده الفبایی جهشی مردمی محسوب می‌شود، شاید بتوان این را نیز یکی از اقدامات مردمی دودمان دوازدهم دانست که البته مثل دیگر ابتکارات آن دودمان توسط طبقات بانفوذ کاهنان و اشراف عقیم ماند؛ برای این خبر به سایت زیر ارجاع می‌دهیم:

http://news.bbc.co.uk/1/hi/world/middle_east/521235.stm

ب. محتویات پاپیروس‌های مسکو و ریند توسط دانشمندان مصرشناس، استروو، تورائف [۱] و پیت [۹،۸] معرفی شد ولی ما به گزیدهٔ مطلوبی از آنها در مرجع [۲۰] دسترسی داشتیم.

بخش ۸ (حساب کسرهای مصری)

آ. در این بخش گفتیم که مصریان به مقدار دقیق کسرها روی آورده بودند؛ به هر حال این مسأله استثناهایی هم داشت. مثلاً دبیر پاپیروس رایزنر (مربوط به ۱۸۰۰ ق.م.)، پس از آن که کسر ۳٦/۱۰ را به صورت دقیق ۱/۱۰ + ۱/۲ + ۳ بسط می‌دهد، در مورد کسر ۳۹/۱۰، دقت را فدای جواب تقریبی ولی ساده ۴ می‌کند.

ب. همان طور که ملاحظه کردیم، بسط یک کسر متعارفی به کسرهای پایه مصری یکتا نیست و شاید این عدم یکتائی موجب دلسردی یونانیان از ارائهٔ اثبات وجودی بسط و در نتیجه تعریف عددهای گویا بر حسب آن بوده باشد؛ به هر حال مصریان را باور بر این بوده است که لااقل یک کسر مصری در مقابل خارج قسمت هر دو عدد طبیعی موجود بوده است. مصریان در انتخاب بسط

خود سعی می‌کردند جواب‌هایی را بپذیرند که مخرج‌های زوج و کوچک بیشتری در آنها ظاهر شود.

ت. مقاله [۱۱] در رابطه با این بخش توصیه می‌شود.

بخش ۹ (مصر و یونان)

آ. در صفحهٔ ۵۹۵ کتاب ایفراه [۳] می‌خوانیم که یونانی‌ها تلاش کردند کسرهای متعارفی را بسازند ولی ناکارآمدی دستگاه عددنویسی الفبائی‌شان مانع بود و به استفاده از کسرهای شصت شصتی ادامه دادند. ریاضی‌دانان مسلمان، نماد کسرهای متعارفی هندی را که فقط یک خط کسری کم داشت تا پایان قرن دوازدهم به کار می‌گرفتند تا این که الحصار مراکشی خط کسری را به آن افزود که مورد توجه فیبوناتچی قرار گرفت و با درج در کتابش، کاربرد جهانی یافت. در مورد کارهای مسلمانان روی کسرهای مسلسل به [۲۱] ارجاع می‌دهیم.

ب. ظاهراً منجمان اسکندریه بیشتر به استفاده از بسط‌های شصت شصتی رغبت داشتند تا به کسرهای مصری؛ بطلمیوس از غیر قابل استفاده بودن کسرهای مصری در کارهای خودش گلایه داشته است. ضمناً طول شبانه روز به ۲۴ ساعت تقسیم نمی‌شد بلکه روز هم به ۶۰ قسمت تقسیم می‌شد؛ مثلاً طول سال که امروزه در دستگاه دهدهی به صورت ۳۶۵۲۴۶۶۶×۱۰^{-۵} روز حساب می‌شود توسط منجمان یونانی به صورت

$$۳۶۵ \quad ۱۴ \quad ۴۸$$

روز (یعنی ۳۶۵ روز و ۱۴/۶۰ روز و ۴۸/۳۶۰۰ روز) داده شده است (لوکی [۱۹]).

ت. مدرک صریحی دال بر استفادهٔ مسلمانان یا کشورهای شرقی آسیا از کسرهای مصری وجود ندارد ولی رد پای تفکر دودوئی و کسرهای یکین را می‌توان در آثار آنان یافت. مثلاً عددی که به صورت توانی از ۲ می‌بود نام خاص زوج‌الزوج را به خود می‌گرفت؛ ضرب در ۲ و تقسیم بر ۲ به صورت باب‌های جداگانه‌ای در آثار خوارزمی، گیلانی، ایوب طبری، نسوی، کاشانی و ملا محمد باقر یزدی بررسی شده‌اند [۲؛۷؛۱۰]. همچنین کاشانی کسر یکین را کسر مفرد مجرد و غیر آن را کسر مفرد مکرر می‌نامید [۱۵]. چینی‌ها، کسر ۱/۲ را جزء زوج، کسر ۱/۳ را جزء کوچک تر، کسر ۲/۳ را جزء بزرگتر و کسر ۱/۴ را جزء ضعیف می‌نامیدند (میدونیک [۲۰، صفحه ۲۴۳]).

ث. فیبوناتچی در ۱۲۰۲ میلادی الگوریتم به اصطلاح «آزمندانه» را در کتاب معروف حساب خود برای یافتن کسر مصری متناظر به هر کسر متعارفی ابداع کرد؛ البته همزمان، در همان کتاب به معرفی کارهای حساب مسلمانان پرداخت که به کلی از رونق کسرهای مصری کاست. در حقیقت او برای ترویج الگوریتم خوارزمی به اروپائیان سرسخت و مخالف فرهنگ شرقی، کتاب لیبر آباچی خود را به بهانهٔ آموختن چرتکه و کسرهای مصری طوری تدوین کرد که اروپائیان از طریق آن با کارهای دانشمندان اسلامی آشنا شوند. با وجود این سه قرن دیگر طول کشید تا حساب هندی مسلمانان جای خود را در اروپا باز کرد و کسرهای متعارفی و دهدهی را به جای کسرهای مصری و شصت شصتی رایج ساخت. کتاب فیبوناتچی توسط سیگلر [۱۴] در سال ۲۰۰۲ میلادی به انگلیسی ترجمه شد.

ج. اشغال مصر توسط اسکندر و تأسیس مدرسهٔ اسکندریه، این تصور غلط را به وجود آورد که کسر مصری ساخته و پرداخته یونانیان است تا این که کشف پاپیروس‌ها این تصور را باطل کرد.

ح. رومیان برخی از کسرهای نایکین را با استفاده از مکمل کسرهای یکین نامگذاری می‌کردند؛ مثلاً ۱۰/۱۲ را ۱/۶ مانده [به یک] و یا ۱۱/۱۲ را ۱/۱۲ مانده [به یک] می‌نامیدند.

خ. مسائل بسیار جالبی در مورد کسرهای مصری مطرح بوده که برخی از آنها هنوز هم باز هستند. برای مطالعهٔ بیشتر به سایت زیر ارجاع می‌دهیم:

http://www.mcs.surrey.ac.uk/personal/r.knott/fractions

که عشق آسان نمود اول ولی افتاد مشکل‌ها

مراجع

[1] Struve, V.V. and Turaev, B. Mathematischer Papyrus des Staatichen Museums der Schonen Kunst in Mockau. Quellen und Studien zur Geschichete der Mathematik. Abteilung A: Quellen 1. Berlin: J. Springer 1930.

[۲] اسمیت، دی. ای.
Smith, D. E. History of Mathematics, Vol. I, 1951, Vol. II, 1952, USA.

[3] Ifrah, G. The Universal History of Numbers: From perhistory to the invention of the computer. Translated from the French by David Bellos, E.F. Harding, Sophie Wood and Ian Monk. John Wiley and Sons Inc. 2000.

[4] Bruins, E. M. Egyotian arithmetic, Janus 68(1-3)(1981), 33-52

[5] Bruins, E. M. Reducible and trivial decompositions concerning Egyptian arithmetics, *Janus* 68(4) (1981), 281-297.

[۶] بویس، ام. چکیده تاریخ کیش زردشت. ترجمه همایون صنعتی‌زاده. انتشارات صفیعلیشاه. چاپ اول. ۱۳۷۷

[۷] پوپ، وی. تاریخ ریاضیات. ترجمهٔ مهرداد رهبری. انتشارات دانشگاه هرمزگان. سال ۱۳۸۰.

[۸] پیت، تی .ای.
Peet, T. E. The Rihnd Methematical Papyruse, British Museum, Manuscript 10057 and 10058. London: The University Press of Liverpool Ltd. And Hodder & Stoughton Ltd. 1923.

[۹] پیت، تی. ای.
Peet, T. E. Arithmatic in the Middle Kingdom, J. Egyptian Arch. 9, 91-95, 1923.

[۱۰] دیویس، اچ. تاریخ محاسبه. ترجمه مهران اخباریفر. شرکت انتشارات علمی و فرهنگی. تهران ۱۳۸۴.

[۱۱] رایزینگ، جی. آر.

Rising G. R. The Egyptian use of uni fractions for equitable distribution, *Historial Math.* 1(1)(1974), 93-94.

[۱۲] رجبعلی‌پور، م. تاریخ حساب، مجموعه مقالات: به مناسبت بزرگداشت استاد مهدی بهادری نژاد، فرهنگستان علوم جمهوری اسلامی ایران، زمستان ۱۳۸۴، صص ۲۳۷ تا ۲۸۴.

[۱۳] ریک، ا. ای.

Raik, A. E. On the theory of Egyptian fractions (Russian), Istor - Mat. Issled No. 23 (1978), 181-191; 358

[۱۴] سیگلر، ال. ای.

Sigler, L. E. Fibonacci's Liber Abaci, Lonardo Pisano's Book of Calculation, Springer 2002.

[۱۵] قربانی، ا. کاشانی نامه. احوال و آثار غیاث‌الدین جمشید کاشانی. مرکز نشر دانشگاهی. تهران. چاپ دوم با تجدید نظر ۱۳٦۸.

[.۱٦] گون، بی. جی.

Gunn, B. G. Review of The Rhind Mathematical Papyrus by T. E. Peet. J. of Egypt. Arch. 12 (1926), 123-137.

[۱۷] گیلینگز، آر. ج.

Gillings, R. J. The Egyptian Mathematical Leather Role - line 8: How did the Scribe do it? *Historia Math.* 8(4) (1981), 456-457.

[۱۸] گیلینگز، آر. ج.

Gillings, R. J. The Mathematics in the Time of Pharaohs (Cambridge, MA., 1982).

[۱۹] لوکی، پی.

Luckey, P. Die Rechenkunst bei Gamsid b. Masud Al-Kasi; mit Ruckbliken auf altere Geschichte des Rechnens, Abhandlungen fur die Kunde des Morgenlandas, XXXI, I, Wiesbaden, 1951.

[۲۰] میدونیک، اچ.

Midonik, H. The treasury of Mathematics, Vol. 1, Penguin Books. Philosophical Library, New York, 1965.

[۲۱] وندرواردن، بی. ال.

Van der Waerden, A History of Algebra: From Al- Khwarizmi to Emmy Noether, Springer, 1985.

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۲ (بهار ۱۳۸۸) صص. ۳۹ تا ۵۲

بعضی نتایج جدید در نظریهٔ حلقه‌های تعویض ناپذیر

آگاتا اسموکتونویچ

مترجم: منصور معتمدی

ارائه شده توسط آگاتا اسموکتونویچ[۱] در کنگره بین‌المللی ریاضی‌دانان ۲۰۰۶ اسپانیا

چکیده

در این مقاله چند نتیجه دربارهٔ ساختار حلقه‌های تعویض ناپذیر را مرور خواهیم کرد. به طور عمده بر حلقه‌های پوچ، حلقه‌هایی رادیکالِ جیکوبسن و حلقه‌های با بعد گلفاند[۱] کیریلف[۲] تأکید خواهیم کرد.

رده‌بندی موضوعی ریاضیات: (۲۰۰۰)، ۱۶—۰۲، ۱۶—۰۶، ۱۶—۴۰، ۱۶N۲۰، ۱۶N۶۰، ۱۶D۶۰، ۱۶P۹۰.

واژه‌های کلیدی: حلقه‌های پوچ، رادیکال جیکوبسن، جبرهای جبری، جبرهای اول، رشد جبرها، بعد گلفاند ـ کیریلف.

۱. **مقدمه:** در این جا به توصیف مختصری از نتایج و مثال‌هایی که بیش‌تر به حلقه‌های تعویض ناپذیر پوچ ارتباط پیدا می‌کنند می‌پردازیم. در این توصیف حلقه‌ها تعویض‌ناپذیر و شرکت پذیرند. یک فضای برداری R یک جبر (با یک $K-$ جبر) است هرگاه R به یک عمل دوتاییِ

$$*:(R,R)\to R$$

که ضرب نامیده می‌شود مجهز باشد، به طوری که برای هر $a,b,c\in R$ و برای هر $\alpha\in K$ داشته باشیم:

1) Agata Smoktunowicz 2) Gelfand 3) Kirillov

$$(a+b)*c = a*c+b*c, \quad a*(b+c) = a*b+a*c$$
$$(a*b)*c = a*(b*c), \quad a*(b+c) = a*b+a*c$$

می‌دانیم که حلقه‌های نیم سادهٔ آرتینی، حلقه‌های ساده تعویض ناپذیر و حلقه‌های ساده نویتری راست با مشخصهٔ صفر عضو واحد دارند [35]. در این متن، حلقه‌ها معمولاً بدون ۱ هستند. در واقع حلقه‌های پوچ و حلقه‌های رادیکال جیکوبسن نمی‌توانند عضو واحد داشته باشند.

۲. حلقه‌های پوچ

مهم‌ترین مسأله در این عرصه حدسیهٔ کوته[1] است که نخستین بار در ۱۹۳۰، توسط کوته بیان شده است. کوته حدس زد که اگر حلقه R بدون ایدال ناصفر (دوطرفه) پوچ باشد، ایدال یک طرفه پوچ نیز نخواهد داشت، [24]، هم‌چنین [15] و [27] را ببینید. این حدسیه اگرچه توجه بسیاری از جبرپیشه‌ها را به خود جلب کرده، اما تاکنون مفتوح باقی مانده است. این حدسیه یکی از پرسش های اساسی راجع به ساختار حلقه‌هاست.

درستی این حدسیه برای رده‌های زیادی از حلقه‌ها به اثبات رسیده است: به طور مثال می‌توان نشان داد که برای یک رده داده شده حلقه‌ها مجموع تمام ایدال‌های پوچ یک طرفه، پوچ است. معروف‌ترین مثال چنین نتیجه‌ای اثبات حدسیه در حالت جبرها روی یک هیات ناشماراست که توسط آمیتسر[2] انجام شده است، دیگر این که لویتزکی[3] [27] نشان داده است که ایدال های پوچ در رده حلقه های نویتری، پوچ توان هستند، با این حال همان طور که اشاره شد حدسیه کوته، در حالت کلی هم چنان مفتوح است.

عضو r در حلقهٔ R را پوچ‌توان گویند، هرگاه برای nای، $r^n = 0$. حلقهٔ R را پوچ می‌نامیم هرگاه هر عضو آن پوچ‌توان باشد و حلقهٔ R را پوچ‌توان می‌نامیم، هرگاه به ازای nای $R^n = 0$، یک تعریف مناسب دیگر در حالت حلقه‌های نامتناهی ـ تولید شده چنین است: حلقهٔ R به طور موضعی پوچ است هرگاه هر زیر حلقهٔ متناهی ـ تولید شده R پوچ‌توان باشد. شناخت کامل حلقه‌های پوچ و پوچ‌توان برای کوششی در جهت شناخت حلقه‌ها در حالت کلی حائز اهمیت است.

علاوه بر آن حلقه‌های پوچ کاربردهایی در نظریهٔ گروها دارند. قضیه‌ای که بیان می‌شود ابتدا توسط گولد[3] و شفرویچ[4] اثبات شده است: برای هر هیأت F یک $F-$ جبر R متناهی ـ تولیدشده پوچ وجود دارد که پوچ‌توان نیست [20]. یادآوری می‌شود که گروه G را تابدار می‌نامند، هرگاه مرتبهٔ هر $g \in G$ متناهی باشد. گولد از گروه $R + 1$، در حالتی که مشخصهٔ F صفر است، استفاده کرده تا بتواند یک مثال نقیض برای مسألهٔ عمومی برنساید[5] بیابد: اگر G یک گروه متناهی تولید شدهٔ تابدار باشد آیا G لزوماً متناهی است؟

1) Köthe 2) Amitsur 3) Levitzki 3) Golod 4) Shafarevish 5) Burnside

پرسش‌های بدون پاسخ فراوانی دربارهٔ حلقه‌های پوچ وجود دارد. همان طور که پیش‌تر اشاره شد معروف‌ترین این پرسش‌ها اینک حدسیهٔ کوته است که در ۱۹۳۰ توسط کوته بیان شده است: اگر حلقهٔ R ایدال ناصفر پوچ‌توان نداشته باشد، ایدال ناصفر پوچ یک طرفه هم ندارد. کوته خود حدس زده است که پاسخ مثبت است ([24] ، [27] ، [37]). گزاره‌های بسیاری از جمله گزاره‌های زیر هم‌ارز حدسیه کوته هستند:

۱− در هر حلقه، مجموع دو ایدال راست پوچ، پوچ است.

۲− (کرمپا[1] [26]) برای هر حلقهٔ پوچ R حلقهٔ ماتریس‌های ۲×۲ روی R پوچ‌توان است.

۳− (فیشر[2]، کرمپا [18]) برای هر حلقهٔ R، اگر R^G پوچ باشد، آن گاه R پوچ است (G گروه خودریختی‌های R، R^G مجموعه عناصر $G-$ ثابت R است.

۴− (فررو[3]، پوزیلوسکی[4] [17]) هر حلقه که مجموع یک حلقهٔ پوچ‌توان و یک حلقهٔ پوچ است باید پوچ باشد.

۵− (کرمپا [26]) برای هر حلقهٔ R، حلقهٔ چندجمله‌ای $R[X]$ با یک متغیر یک رادیکال جیکوبسن است.

۶− (اسموکتونویچ [44]) برای هر حلقهٔ پوچ R، حلقهٔ چندجمله‌ای‌های $R[X]$ با یک متغیر، روی R اولیه چپ نیست.

۷− (چو[5] [49]) پوچسازهای چپ هر مجموعهٔ تک عضوی در هر متمم یک رادیکال در یک ایدال ماکسیمال چپ و پوچ در شرط زنجیری فزاینده صدق می‌کنند.

یادآوری می‌کنیم که حلقهٔ R رادیکال جیکوبسن است هرگاه برای هر $r \in R$ ، $r' \in R$ وجود داشته باشد که $r + r' + rr' = ۰$. هر حلقهٔ پوچ یک رادیکال جیکوبسن است. بزرگ‌ترین ایدال در حلقهٔ R را که رادیکال جیکوبسن باشد، رادیکال جیکوبسن R می‌نامند.

رادیکال جیکوبسن R برابر است با اشتراک تمام ایدال‌های اولیهٔ راست حلقهٔ R (ایدال J را اولیه می‌نامند، هرگاه R/J اولیه باشد). یادآوری می‌کنیم که حلقه R را اولیه (راست) می‌نامیم هرگاه ایدال ماکسیمال Q وجود داشته باشد به طوری که برای هر ایدال ناصفر I در R، که $Q + I = R$، $b \in R$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $r \in R$ ، $br - r \in Q$. ([13])

گوییم حدسیهٔ کوته برای حلقهٔ R برقرار است، هرگاه ایدال تولید شده توسط ایدال‌های چپ پوچ، پوچ باشد. حدسیهٔ کوته برای ردهٔ حلقه‌های نویتری (لویتزکی [27] و [32]) حلقه‌های گلدی[6] [32])، حلقه‌های با بعد کرول[7] راست (لنگان[8] [29] و [15])، جبرهای تک جمله‌ای (بیدار[9]، فونگ[10] [6]). حلقه‌های اتحاد چندجمله‌ای (رازمیسلف[11] ،کِمِر[12] ـ براون[13] [14] ، [34] ، [22] ، [12])، جبرهای روی هیأت‌های نامتناهی (آمیتسر [27] و [36]) برقرار است.

1) Krempa 2) Fisher 3) Ferrero 4) Puczylowski 5) Xu 6) Goldie 7) Krull 8) Lenagan 9) Beidar 10) Fong 11) Razmyslov 12) Kemer 13) Braun

نتایج مرتبط دیگری وجود دارند که اینک به برخی از آن‌ها اشاره می‌شود.

قضیهٔ ۲.۱ (لویتزکی، [32]) فرض کنیم R یک حلقهٔ نویتری راست است، در این صورت هر ایدال پوچ یک طرفه R، پوچ‌توان است. **قضیهٔ ۲.۲ (لنگان** [29]) اگر R بعد کرول راست داشته باشد، آن گاه زیرحلقه‌های پوچ R، پوچ‌توان هستند.

قضیهٔ ۳.۲ (گردن، لنگان و رابسون ،گردن و رابسون [15]). اگر R بعد کرول راست داشته باشد، آن گاه رادیکال اول R پوچ‌توان است.

رادیکال اول R یک ایدآل پوچ است و برابر است با اشتراک همهٔ ایدآل‌هال اول R.

قضیهٔ ۴.۲ (بیدار، فونگ [16]). فرض کنیم X یک مجموعهٔ نامتهی، $Z =< X >$ تکوارهٔ آزاد روی X، Y یک ایدآل تکوارهٔ Z و F یک هیأت باشد. در این صورت رادیکال جیکوبسن جبر تک‌جمله‌ای $F[Z/Y]$ به طور موضعی پوچ توان است.

نتیجهٔ فوق در حالتی که مشخصه برابر با صفر باشد به یاسپر[۱] و پوزیلوسکی منسوب است. پیش‌تر، بلف[۲] و گاتوا[۳] ـ ایوانوا[۴] [10] نشان داده‌اند که رادیکال جیکوبسن یک جبر متناهی ـ تولید شده تک‌جمله‌ای روی یک هیأت پوچ است، با این حال چنین نیست که رادیکال جیکوبسن یک جبر تک جمله‌ای متناهی ـ تولید شده، پوچ‌توان باشد، زیرا زلمانوف[۵] [50] نشان داده است که یک جبر تک‌جمله‌ای متناهی تولید شده اول وجود دارد که دارای یک ایدآل ناصفر به طور موضعی پوچ‌توان است.

قضیهٔ ۵.۲ (رازمیسلف[۶] ـ کمر ـ براون) [34] [22] [12] [14]) اگر R یک جبر اتحاد چند جمله‌ای متناهی ـ تولید شده روی هیأت F باشد، آن گاه رادیکال جیکوبسن R پوچ‌توان است.

رازمیسلف [34] نتیجهٔ فوق را برای حلقه‌هایی که در تمام اتحادهای چندجمله‌ای ماتریس‌ها صدق می کنند ثابت کرد. پس از آن کمر[32] این نتیجه را برای جبرهای روی هیأت‌های با مشخصهٔ صفر ثابت کرد. بعدها براون، پوچ توانی رادیکال را در هر جبر اتحاد چند جمله‌ای متناهی ـ تولید شده، روی یک حلقهٔ تعویض پذیر نویتری ثابت کرد. آمیتسر پیش‌تر نشان داده است که رادیکال جیکوبسن یک جبر اتحاد چندجمله‌ای روی یک هیأت، پوچ است. قضیهٔ معروف دیگر قضیهٔ ناگاتا[۷] ـ هیگمن[۸] است.

قضیهٔ ٦.۲. (ناگاتا ـ هیگمن [19]) اگر A یک جبر شرکت‌پذیر با مشخصهٔ p باشد به طوری که برای هر $a \in A$، $a^n \in \circ$ و $p > n$ یا $p = \circ$، آن گاه A پوچ‌توان است.

برای آشنایی با نتایج مرتبط با قضیهٔ ناگاتا ـ هیگمن [19] را ببینید.

قضیه‌ای از کلاین[۹] بیان می‌کند که اگر R یک حلقهٔ پوچ‌توان با شاخص متناهی باشد، آن‌گاه

---

1) Jaspers 2) Belov 3) Gateva 4) Ivanova 5) Zelmanov 6) Razmyslov 7) Nagata
8) Higman 9) Klein

$R[X]$ یک حلقهٔ پوچ با شاخص متناهی است.

در ۱۹۵۶ آمیتسر [27]، نشان داد که اگر R یک جبر پوچ روی هیات ناشمارای F باشد، آن گاه حلقهٔ چندجمله‌ای $R[x]$ با یک متغیر، روی R نیز پوچ است. اگر R شمارا باشد، همان طور که مؤلف در ۲۰۰۰ نشان داده است، وضعیت کاملاً به گونهٔ دیگری است.

قضیهٔ ۷.۲ (اسموکتونویچ) [43] برای هر هیأت شمارای K یک K جبر N وجود دارد به طوری که حلقهٔ چندجمله‌ای با یک متغیر روی N پوچ نیست. نتیجهٔ فوق به یک سوٴال آمیتسر جواب می‌دهد. یک قضیهٔ مهم دیگر آمیتسر قضیهٔ زیر است.

قضیهٔ ۸.۲ (آمیتسر [27]) فرض کنیم R یک حلقه است، در این صورت رادیکال جیکوبسن حلقهٔ چندجمله‌ای $R[x]$ برابر $N[x]$ است که N یک ایدال پوچ حلقهٔ R است.

در ۱۹۵۶، آمیتسر حدس زد که اگر R یک حلقه باشد و $R[x]$ ایدال پوچ نداشته باشد، آن‌گاه نیم اولیه است (یعنی رادیکال جیکوبسن $R[x]$ صفر است). این گزاره همان طور که در بالا به آن اشاره شد برای رده‌های مهمی از حلقه‌ها درست است. با این حال قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که این حدسیه در حالت کلی برقرار نیست: حلقهٔ پوچ N وجود دارد که حلقهٔ چندجمله‌ای با یک متغیر روی N رادیکال جیکوبسن است، اما پوچ نیست [41]. تعمیم‌های این قضیه را در [45] ببینید. این قضیه در حالت‌های کلی‌تر درست است: برای هر عدد طبیعی n، حلقهٔ پوچ N وجود دارد به طوری که حلقهٔ چندجمله‌ای‌ها با n متغیر تعویض شونده روی N رادیکال جیکوبسن است، اما پوچ نیست. یادآوری می‌شود، همان‌طور که توسط کرمپا در [26] نشان داده شده است، حدسیهٔ کوته با این گزاره هم ارز است که حلقهٔ چندجمله‌ای‌ها روی حلقه‌های پوچ، رادیکال جیکوبسن است. با این حال تصاویر هم‌ریخت حلقه‌های چندجمله‌ای روی حلقه‌های پوچ با هسته‌های ناصفر همان‌طور که در نتیجهٔ زیر آمده است، اغلب رادیکال جیکوبسن هستند.

قضیهٔ ۹.۲ (اسموکتونویچ [44]). فرض کنیم R یک حلقهٔ پوچ و $R[x]$ حلقهٔ چندجمله‌ای‌ها با یک متغیر روی R باشد. فرض کنیم I یک ایده‌آل $R[x]$ و M ایدال R تولید شده با ضرایب چندجمله‌ای‌های متعلق به I باشد. در این صورت $R[x]/I$ رادیکال جیکوبسن است اگر و تنها اگر $R[x]/M[x]$ رادیکال جیکوبسن باشد.

پرسش‌های زیر مسائل جالبِ مفتوح دربارهٔ حلقه‌های پوچ‌اند:

پرسش ۱ (لاتیشف[1]، [16]،صص ۱۲). فرض کنیم R یک جبر شرکت‌پذیر با تعداد متناهی مولد و رابطه باشد. اگر A یک جبر پوچ باشد، آیا باید پوچ‌توان باشد؟

پرسش ۲ (آمیتسر، [33]). فرض کنیم A یک جبر شرکت‌پذیر با تعداد متناهی مولد و رابطه باشد، آیا رادیکال جیکوبسن A پوچ‌توان است؟

---

1) Latyshev

۳. جبرهای جبری

معروف‌ترین پرسش در این عرصه مسألهٔ کوروش[1] است ([15]، [16]). فرض کنید R یک جبر متناهی ـ تولید شده روی هیأت F و R روی F جبری باشد آیا R روی F با بعد متناهی است؟

پاسخ این مسأله در حالت کلی منفی است. ساختمان معروف گلود و شفرویچ در دهه ۱۹۹۰ یک جبرمتناهی ـ تولید شده پوچ که پوچ‌توان نیست به‌وجود می‌آورد. از این مسأله استفاده شد تا یک مثال نقیض برای بی‌تکلیف‌ترین مسألهٔ نظریهٔ گروه‌ها، در آن زمان، یعنی حدسیهٔ برنساید به وجود آورید. زلمانوف بعدها به خاطر حل مسألهٔ محدود برنساید جایزهٔ فیلدز را دریافت کرد [27]. با وجود این مسألهٔ کوروش هم چنان برای حالت خاص کلیدی حلقه‌های تقسیمی حل نشده است.

پرسش ۳: (**مسألهٔ کوروش برای حلقه‌های تقسیمی** [16]، [36]) فرض کنیم R یک جبر متناهی ـ تولید شده روی هیات F ، R روی F جبری و R یک حلقهٔ تقسیمی باشد. آیا R روی مرکز R یک فضای برداری متناهی ـ بعد است؟

باز هم مانند مسأله‌های حلقهٔ پوچ‌توان نتایج جزئی فراوانی وجود دارد. مسألهٔ کوروش برای حلقه‌های تقسیمی هم‌چنان مفتوح است، اما برای حالتی که F متناهی یا دارای تعداد متناهی توسیع هیأت‌هاست، به ویژه برای هیأت‌های به طور جبری بسته ([36]) پاسخ آن مثبت است. به موجب قضیهٔ لویتزکی و کاپلانسکی[2] حدسیهٔ کوروش در حالتی که برای درجهٔ عناصر R کرانی وجود داشته باشد درست است ([15]). معلوم نیست که مسألهٔ کوروش برای حلقه‌های تقسیمی در حالت جبری روی هیأت‌های ناشمارا پاسخ مثبت داشته باشد. هم‌چنین این سؤال هم‌چنان مفتوح است که آیا حدسیهٔ کوروش برای حلقه‌های تقسیمی با بعد گلفاند ـ کیریلف و به‌ویژه برای حلقه‌های تقسیمی با رشد درجه دوم درست است؟ این مسأله ارتباط‌های آشکاری با مسائل حلقه‌های پوچ مرتبط با یک جبر دارد. یک عضو پوچ به وضوح جبری است، در جهت عکس، می‌توان یک جبر شرکت‌پذیر مدرج مثبت جبری به قسمی ساخت که قسمت مثبت آن یعنی تمام عناصر همگن پوچ باشند. از طرف دیگر مسألهٔ کوروش برای حلقه‌های با بعد گلفاند ـ کیریلف متناهی دارای جواب منفی است [35]. برای حلقه‌های ساده [42]، برای حلقه‌های اولیه [2] و برای حلقه‌های متناهی تولید شدهٔ جبری اولیه [8] پاسخ منفی دارد، با وجود این پرسش طبیعی برخاسته از مسأله عمومی کوروش هم‌چنان حل نشده است:

پرسش ۴: (**پرسش اسمال**[3]) فرض کنیم R یک جبر متناهی ـ تولید شده با عضو واحد روی هیأت F و R روی F جبری باشد، آیا R یک فضای برداری متناهی ـ بعد روی مرکز آن است؟

پرسش دیگری که چند سال است مطرح شده پرسش زیر است:

پرسش ۵: فرض کنیم K یک هیأت و R یک جبرمتناهی ـ تولید شده و یک حلقهٔ تقسیمی باشد.

1) Kurosh 2) Kaplanski 3) Small

آیا R یک فضای برداری متناهی ــ تولیدشده روی K است؟

تا آن جا که من می‌دانم هنوز به این پرسش با شرایط مختلف، مثلاً در حالتی که بعد گلفاند ــ کیریلف برابر ۲ باشد پاسخ داده نشده است. اسمال ([38]) نشان داده است که هر حلقهٔ تقسیمی که تصویر هم‌ریخت یک جبر مدرج نویتری است (البته با یک ایدآل نامدرج) باید با بعد متناهی باشد مسألهٔ مفتوح مشابهی در مورد حلقه ها موجود است: **پرسش ٦:** ([16] ص ۲۰) آیا یک حلقهٔ تقسیمی شرکت‌پذیر نامتناهی که متناهی ــ تولید شده باشد وجود دارد؟

۴. جبرهای با بعد گلفاند ــ کیریلف متناهی

بعد گلفاند ــ کیریلف، میزانی را که یک جبر به وسیلهٔ یک مجموعه تولید می شود اندازه می‌گیرد. بعد GK برای جبرهای با بعد متناهی صفر است و یک استدلال شمارشی مقدماتی نشان می‌دهد که بعد ممکن بعدی یک است. با این حال بورهو[1] و کرافت[2] نشان دادند که هر عدد حقیقی بزرگ‌تر یا برابر ۲ می‌تواند بعد GK باشد([25]). قضیهٔ معروف شکاف برگمن[3] نشان می‌دهد که جبری با بعد GK که اکیداً بین ۱ و ۲ باشد وجود ندارند ([11]، هم چنین [25] را ببینید) قضیه‌ای از اسمال و وارفیلد[4] جبر اول آفین R روی هیأت F با بعد GK برابر ۱، یک مدول متناهی روی مرکز آن است و مرکز آن یک $F-$جبر متناهی تولید شده با بعد GK یک است ([40] و [25]). در حالت خاص که R یک دامنهٔ متناهی ــ تولید شده روی یک هیأت به طور جبر بسته و بعد گلفاند ــ کیریلف آن ۱ است، از قضیه اسمال ــ وارفیلد و از قضیهٔ تسن[5] ([15] را بینید) نتیجه می‌شود که R در واقع تعویض‌پذیر است ([47]). قضیه‌ای از اسمال، استافورد[6] و وارفیلد نشان می‌دهد که جبر متناهی ــ تولید شده که بعد گلفاند ــ کیریلف آن برابر ۱ باشد به تعویض‌پذیر بودن نزدیک است، به این معنی که در یک اتحاد چندجمله‌ای صدق می‌کند ([39] ، [25]).

با پیشرفت هندسه تعویض‌ناپذیر، حالت مدرج، توجه بسیاری را در دههٔ پیشین به خود جلب کرده است. در این جا پیشرفت با مطالعهٔ جبرهایی با شرایط محدود، شامل رشد جبرها صورت می‌گرفت. روشی است که مثال‌هایی با بعد گلفاند کیریلف متناهی مورد توجه بودند. از آن جا که این نظریه در قیاس با حالت پروژکتیو کلاسیک گسترش یافته است، محقق نوعاً با جبرهای مدرج سر و کار دارد. بنابراین در مقایسه با حالت نامدرج ابعاد باید یک واحد افزایش یابند. اولین حالت مطالعهٔ دامنه‌های مدرج با بعد گلفاند ــ کیریلف ۲ است؛ یعنی خم‌های تصویری تعویض ناپذیر. این حالت در حدود ده سال پیش در یک مقالهٔ معروف در *Inventiones Mathematicae* به وسیلهٔ آرتین[7] استافورد انجام شد. در واقع آرتین و استافورد در [3] ساختمان دامنه‌های متناهی ــ مدرج را برحسب جبرهای مرتبط با خودریختی‌های خم‌های بیضوی توصیف کرده‌اند. آنان توانستند مشخص کنند که در چه حالت‌هایی این جبرها نویتری، اولیه، اتحاد چندجمله‌ای و غیره هستند.

1) Borho 2) Kraft 3) Bergman 4) Warfield 5) Tsen 6) Stafford 7) Artin

آنان در این مقاله قضیه‌ای مشابه قضیه شکاف برگمن را فرمول‌بندی کردند: هیچ دامنهٔ مدرج شده با اعداد طبیعی با بعد گلفاند ـ کیریلفی که اکیداً بین دو و سه باشد وجود ندارد. آنان هم‌چنین توانستند بازه (۱۱/۵ ,۲) را مستثنی کنند. مؤلف توانسته است در ۴۶ درستی حدسیه را در حالت کلی اثبات کند. خطوط برجسته‌ای بین سه عرصه‌ای که به آن اشاره شد وجود دارد. همان طور که پیش‌تر بیان شد. عضوهای پوچ جبری هستند و جبرهای مدرج پوچ را می‌توان از جبرهای جبری به عنوان جبرهای مدرج ساخت. مثال گلود و شفرویچ یک جبر پوچ، اما نه پوچ‌توان را به دست می‌دهد که دارای رشد نمایی است و از این رو به طور قطع بعد گلفاند ـ کیریلف آن نامتناهی است.

مؤلف این متن در یک کار مشترک که اخیراً بالنگان انجام داده است مثالی از یک جبر پوچ متناهی ـ تولید شده اما نه پوچ توان ساخته است که دارای بعد گلفاند ـ کیریلف متناهی کوچک‌تر یا برابر ۲۰ است. شرط دقیق رشد که تقسیم‌بندی پوچ‌توان توان و پوچ اما نه پوچ‌توان را موجب می‌شود آزار دهنده است.

به سادگی دیده می‌شود جبرهای پوچ‌توان که بعد گلفاند ـ کیریلف آن‌ها برابر ۱ است پوچ‌توان نیستند. شاید خط تقسیم کننده مسأله، رشد درجه دوم باشد.

در این زمینه این پرسش مفتوح باقی می‌ماند که آیا یک جبر متناهی ـ تولید شده با رشد درجه دوم وجود دارد؟ و می‌تواند به عنوان پرسش آزمونی برای پرسش‌های جدید باشد. یک $F-$جبر دارای رشد درجه دوم است هرگاه یک ثابت c و یک زیرفضای مولد روی R وجود داشته باشد که برای هر $n > ۰$، $dim_F(V + V^۲ + \ldots + V^n) \leq cn^۲$ به ویژه $GKdimR \leq ۲$.

در این باره نتیجهٔ جدید بارتولدی[1] شایسته یادآوری است. بارتولدی در ۲۰۰۴ قضیهٔ زیر را ثابت کرد.

قضیهٔ ۱.۴ (بارتولدی [4]) فرض کنیم K یک توسیع جبری هیأت $F_۲$ باشد. در این صورت یک $K-$جبر متناهی ـ مولد مدرج R وجود دارد به طوری که تمام عضوهای همگنِ R پوچ‌اند، اما این جبر یک عضو وارون‌پذیر متعالی دارد. به ویژه R پوچ مدرج است اما پوچ نیست. این جبر هم‌چنین یک زیرجبر یک ریخت با حلقه ماتریس‌های ۲ × ۲ روی R دارد.

با جزئیات بیش‌تر، بارتولدی نشان داد که یک جبر «بازگشتی متعدی» آفین (بدون واحد) که از گروه گریکورچوک[2] رشدهای میانی ساخته می‌شود، رشد درجه دوم دارد. به علاوه با فرض این که هیأت پایه، بسط جبری $F_۲$ باشد، این جبر رادیکال جیکوبسن است، اما پوچ نیست. این جبر پیش‌تر توسط آنا کریستیناویرا[3] [48] مطالعه شده بود. وی نشان داده است که R اول است و برای هر ایدآل ناصفر دوطرفه I در R، R/I با بعد متناهی است.

یک روش دیگر برای ساختن مثال‌هایی از جبرهای متناهی ـ مولد را مارکف[4] معرفی کرده است که بعدها توسط بیدار ([15])، بل[5] و اسمال ([7] ، [8] ، [32] ، [36]) بسط داده شده است.

---

1) Bartholdi 2) Grigorchuk 3) Christina Vieira 4) Markov 5) Bell

تأثیر نتیجهٔ مارکف این است که نخست امکان ساختن در جبرهای نامتناهی ــ مولد را فراهم می‌آورد، که بدین ترتیب مسأله ساده‌تر می‌شود. سپس با استفاده از روش مارکف، ساختار به یک جبر متناهی ــ مولد آورده می‌شود.

قضیهٔ ۲.۴ (مارکف [31]). فرض کنیم K یک هیأت و R یک $K-$ جبر اول شمارا ــ مولد باشد. در این صورت یک $k-$ جبر اول A با مولد x، y وجود دارد به طوری که R با یک ایدآل راست xR از A یک‌ریخت است.

یادآوری می‌شود که $T \subseteq R$ گوشه یک جبر R است هرگاه T زیرجبر R باشد و $TRT \subseteq T$. قضیهٔ مارکف توسط اسمال بسط داده شد، وی نشان داد (حدود ۱۹۸۲، چاپ نشده) که اگر K یک هیأت و T یک، K-جبراول و شمارا تولید شده باشد، آن گاه یک جبر اول متناهی ــ تولید شده A وجود دارد به طوری که T گوشه آن است.

این نتیجه را می‌توان در حالت‌های مختلف به کار برد. به عنوان نمونه بل و اسمال در [8] این نتیجه را به کار برده و نشان داده‌اند که یک جبر اولیه متناهی ــ تولید شده وجود دارد که مرکز آن با بعد نامتناهی است. در ۲۰۰۳ بل، قضیهٔ اسمال را چنین تعمیم داد: فرض کنیم K یک هیأت و F یک K جبر اول شمارا تولید شده با بعد گلفاند ــ کیریلف $\alpha < \infty$ باشد، در این صورت یک جبرمتناهی ــ تولید شده مانند A با بعد گلفاند ــ کیریلف $\alpha + ۲$ وجود دارد به طوری که T گوشه A است.

قضیهٔ بل به یک مسأله دیگر اسمال ارتباط پیدا می‌کند: اگر R یک جبر نویتری آفین با رشد درجه دوم باشد آیا می‌توان نتیجه گرفت که R اولیه یا اتحاد چندجمله‌ای است. در ۲۰۰۰ آرتین و استافورد نشان دادند که پاسخ این پرسش در حالت مدرج شده مثبت است. براساس پژوهش اسمال این نتیجه، هم چنین در حالتی که هر ایدآل ناصفر اول ماکسیمال باشد درست است.

یک کاربرد این قضیه توسط بل این مثال است که یک مثال نقیض برای پرسش دیگر اسمال است: یک جبر اول آفین با بعد گلفاند ــ کیریلف ۲ وجود دارد که اتحاد چندجمله‌ای نیست، اولیه هم نیست. رادیکال جیکوبسن این جبر صفر است. نتیجهٔ زیر از لنسکی[1]، رسکو[2] و اسمال این اطمینان را می‌دهد که معمولاً مستوی‌سازی یک حلقه اول هم چنان اولیه است.

قضیهٔ ۳.۴ (اسمال، رسکو، لنسکی [28]) فرض کنیم R یک حلقهٔ اول است در این صورت موارد زیر برقرارند:

۱. فرض کنیم V یک ایدآل راست R باشد، در این صورت یک حلقهٔ اولیه وجود دارد اگر و تنها اگر $V/V \cap l(V)$ اولیه باشد که

$$l(V) = \{r \in R = rV = ۰\}$$

1) Lanski 2) Resco

۲. اگر R شامل یک عضو خودتوان باشد، آن گاه R یک حلقهٔ اولیه است اگر و تنها اگر eRe یک حلقهٔ اولیه باشد.

۵. حلقه‌های ساده

حلقهٔ R (احتمالاً بدون واحد) ساده نامیده می‌شود اگر $R^۲ \neq ۰$ و R هیچ ایدال سره دوطرفه نداشته باشد. لویتزکی، جیکوبسن، کاپلانسکی، و دیگران پرسیده‌اند که آیا حلقهٔ سادهٔ پوچ وجود دارد؟ ساسیدا[1] در ۱۹۶۱ حلقهٔ ساده‌ای پیدا کرد که حلقهٔ رادیکال جیکوبسن است (یعنی $R = J(R)$ ، که $J(R)$ رادیکال جیکوبسن R است). در این مورد می‌توانید [15] را ببینید. با این حال این حلقهٔ پوچ نیست. توجه می‌کنیم که حلقهٔ چندجمله‌ای‌ها با یک متغیر روی حلقهٔ ساسیدا اولیه راست و اولیه چپ است [44]. به موجب لم ناکایاما[2] یک حلقهٔ ساده که رادیکال جیکوبسن باشد نمی‌تواند متناهی ـ مولد باشد. از آن جا که هر حلقهٔ پوچ، رادیکال جیکوبسن است، یک حلقهٔ ساده پوچ نمی‌تواند متناهی ـ مولد باشد. چند سال پیش مثال‌هایی از حلقه‌های ساده توسط مؤلف ساخته شده است ([15]).

قضیهٔ ۱.۵ (اسموکتونویچ [42]): برای هر هیأت شمارای K یک جبر ساده پوچ روی K وجود دارد. توجه کنید که در آن مقاله تمام حلقه‌ها توسط اعداد صحیح مدرج شده بودند.

پرسش ۷. آیا یک جبر سادهٔ تعویض‌ناپذیر پوچ روی یک هیأت ناشمارا وجود دارد؟

تشکر و قدردانی. مؤلف از تام لنگان و لنس اسمال به خاطر پیشنهادهای مفید آنان سپاسگزاری می کند. از تام لنگان برای همکاری در نوشتن بخش ۴ متشکرم.

منابع

[1] Amitsur, S. A., A generalization of Hilbert's Nullstellensatz. *Proc. Amer. Math. Soc.* **8** (1957), 649-656.

[2] Amitsur, S. A., unpublished.

[3] Artin, M., Stafford, J. T., Noncommutative graded domains with quadratic growth. *Inventiones Math.* **122** (1995), 231-276.

[4] Bartholdi, L., Branch Rings, thinned rings, tree enveloping rings. *Israel J. Math.,* to appear.

[5] Beidar, K. I., Radicals of finitely generated algebras. *Uspiekhi mat. Nauk.* **222** (1981), 203-204.

1) Sasiada 2) Nakayama

[6] Beidar, K. I., Fong, Y., On radicals of monomial algebras. *Comm. Algebra* **26** (1998), 3913-3919.

[7] Bell, J., Examples in finite Gelfand-Kirillov dimension. *J. Algebra* **263** (2003), 159-175.

[8] Bell, J., Small, L. W., A question of Kapalansky. *J. Algebra* **258** (2002), 386-388.

[9] Bell, J., Lenagan, T., Small, L., Smoktunowicz, A., unpublished.

[10] Belov, A., Gateva- Ivanova, T., Radicals of monomial algebras. In *First International Tainan-Moscow Algebra Workshop* (Tainan 1994), De Gruyter, Berlin 1996, 159-169.

[11] Bergman, G. M., A *note of growth functions of algebras and semigroups.* Mimeographed notes, University of California, Berkeley 1978.

[12] Braun, A., The nilpotency of the radical in a finitely generated PI ring. *J. Algebra* **89** (1984), 375-396.

[13] Divinski, N. J., *Rings and radicals.* Mathematical expositions No. 14, University of Toronto Press, Toronto, Ont., 1965.

[14] Drenski, V., *Polynomial identity rings.* Advanced Courses in Mathematics, Barcelona. Birkhäuser, Basel 2004.

[15] Faith, C., *Rings and Things and a Fine Array of Twentieth Century Associative Algebra.* Math. Surveys Monogr. 65, amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999; 2nd ed., 2004.

[16] Filippov, V. T., Kharchenko, V.K., Shestakov, I., P. (eds.) *Dniester Notebook: Unsolved Problems in Theory of Rings and Modules.* Fourth edition, Mathematics Institute, Russian Academy of Science, Siberian Branch, Novosibirsk 1993.

[17] Ferrero, M., Puczylowski, E. R., On rings which are sums of two subrings. *Arch. Math. (Basel)* **53** (1989). 4-10.

[18] Fisher, J. W., Krempa, J., "R^G is nil implies R is nil" is equivalent to the "Koethe conjecture". *Houston J. Math.* **9** (1983), 177-180.

[19] Formanek, E., The Nagata-Higman Theorem. *Acta Appl. Math.* **21** (1990), 185-192.

[20] Golod, E. S., Shafarevich, I. R., On the class field tower. *Izv. Akad. Nauk. SSSR Mat. Ser.* **28** (1964), 261-272.

[21] Jespers, E., Puczylowski, E. R., The Jacobson radical and Brown-McCoy radical of rings graded by free groups. *Comm. Algebra* **19** (1991), 551-558.

[22] Kemer, A. R., Capelli identities and nilpotency of the radical of finitely generated PI algebra. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **255** (1980), 739-797.

[23] Klein, A. A., Rings with bounded index of nilpotence. *Contemp. Math.* **13** (1982), 151-154.

[24] Köthe, G., Die Struktur der Ringe, deren Restklassenring nach dem Radikal vollständing reduzibel ist. *Math. Z.* **32** (1930), 161-186.

[25] Krause, G., Lenagan, T. H., *Growth of Algebras and Gelfand-kirillov Dimension.* Revised edition, Graduate Studies in Mathematics 22, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[26] Krempa, J., Logical connections between some open problems concerning nil rings. *Fund. Math.* **76** (1972), 121-130.

[27] Lam, T. Y., A *first course in noncommutative rings.* Second edition, Graduate Texts in Mathematics 131, Springer-Verlag, New York 2001.

[28] Lanski, C., resco, R., Small, L., On the primitivity of prime rings. *J. Algebra* **59** (1979), 395-398.

[29] Lenagan, T. H., The nil radical of a ring with Krull dimension. *Bull. London Math. Soc.* **5** (1973), 307-311.

[30] Lenagan, T. H., Smoktunowicz, A., An infinite dimensional affine nil algebra with finite Gelfand-Kirillov dimension. Submitted.

[31] Markov, V. T., Some examples of finitely generated algebras. *Uspekhi Mat. Nauk* **221** (1981), 185-186.

[32] McConnel, J. C., and Robson, J. C., *Noncommutative Noetherian Rings.* Wiley Interscience, Chichester 1987.

[33] Puczylowski, E. R. Some results and questions on nil rings. In *15th School of Algebra* (Portuguese) (Canela, 1998), *mat. Contemp* **16** (1999), 265-280.

[34] Razmyslov, Ju. P., The Jacobson radical in PI algebras. *Algebra i Logika* **13** (1974), 337-360.

[35] Robson, J. C., Do simple rings have unity elements? *Algebra* **7** (1967), 140-143.

[36] Rowen, L. H., *Ring Theory.* Vol. I, II, Pure and Applied Mathematics 127, 128, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988.

[37] Rowen, L. H., Koethe's conjecture. In *Rings Theory* 1989 (Ramat Gan and jerusalem, 1988/1989), Israel Math. Conf. Proc. 1, Weizmann Science Press of Israel, Jersalem 1989, 193-202.

[38] Small, L. W., private communication.

[39] Small, L. W., Stafford, J. T., Warfield, R. B., Jr, Affine algebras of Gelfand-Kirillov dimension one are PI. *Math. Proc. Cambridge philos. Soc.* **97** (1984), 407-414.

[40] Small, L. W., Warfield, R. B., Jr, Prime affine algebras of Gelfand-Kirillov dimension one. *J. Algebra* **91** (1984) 384-389.

[41] Smoktunowicz, A., Puzylowski, E. R., A polynomial ring that is Jacobson radical but not nil. *Israel J. Math.* **124** (2001), 317-325.

[42] Smoktunowicz, A., A simple nil rings exits. *Comm. Algebra* **30** (2002), 27-59.

[43] Smoktunowicz, A., Polynomial rings over nil rings need not be nil. *J. Algebra* **233** (2000) 427-436.

[44] Smoktunowicz, A., On primitive ideals in polynomial rings over nil rings. *Algebra. Represent Theory* **8** (2005), 69-73.

[45] Smoktunowicz, A., Amitsur's conjecture on polynomial rings in n- commuting indeterminates. *math. Proc. Roy. Irish Acad.* **102** (2002), 205-213.

[46] Smoktunowicz, A., There are no graded domain with GK dimension strictly between 2 and 3. *Invent. Math,* to appear.

[47] Stafford, J., T., Van den Berg, M., Noncommutative curves and noncommutative surfaces, *Bull. Amer. Math. Soc.* **38** (2001) 171-216.

[48] Vieira, A. C. Modular algebras of Burnside p-groups. In *16th School of Algebra, Part II* (Portuguese) (Brasilia, 2000), *Mat. Contemp.* **21** (2001), 287-304.

[49] Xu, Y. H., On the Koethe problem and the nilpotent problem. *Sci. Sinica Ser. A* **26** (1983), 901-908.

[50] Zelmanov, E. I., An example of a finitely generated prime ring. *Sibirsk. Mat. Zh.* **20** (1979), 303-304.

[51] Zelmanov, E. I., Solution of the restricted Burnside problem for 2-groups. *Mat. Sb.* **182** (1991), 568-592.

مترجم: منصور معتمدی
دانشگاه شهید چمران اهواز، دانشکده علوم ریاضی
man_ motamedi@hotmail.com

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۲ (بهار ۱۳۸۸) صص. ۵۳ تا ۷۴

شار ریچی ریمانی و کیلر، حدس‌های پوانکاره، هندسی سازی و کالابی*

محمد صفدری

در سال‌های نخست قرن بیستم، هانری پوانکاره، پس از آن که (همزمان با چند ریاضیدان دیگر) موفق شد قضیهٔ یکنواخت‌سازی را ثابت کند و طبقه‌بندی رویه‌ها را نتیجه بگیرد، اولین تلاش‌ها برای طبقه‌بندی خمینه‌های سه بعدی را آغاز کرد و حدس زیر را مطرح ساخت:

حدس پوانکاره: هر خمینهٔ سه بعدی بسته (فشرده و بی‌لبه) که همبند ساده باشد با کرهٔ سه بعدی S^3 همسانریخت است[۱].

این حدس نزدیک به یکصد سال پایه و انگیزه بسیاری از مطالعات در توپولوژی بعد پایین شد و البته تمام تلاش‌ها برای اثبات آن ناکام ماند. در ۲۰۰۰ میلادی مؤسسهٔ کلی[۲] این مسأله را به همراه شش مسألهٔ دیگر به عنوان مسائل «جایزه‌دار هزاره» معرفی کرد و برای حل آن جایزه‌ای یک میلیون دلاری تعیین نمود. تنها ۳ سال بعد گ. پرلمان[۳] طی دو مقاله که آنها را در arXiv قرار داد، توانست حدس پوانکاره را با کمک نظریهٔ شار ریچی ثابت کند. در واقع او قضیه‌ای بسیار کلی‌تر را ثابت کرد که حدس پوانکاره نتیجه‌ای ساده از آن است. این قضیه که خمینه‌های سه‌بعدی را به طور کامل طبقه‌بندی می‌کند حدس هندسی‌سازی ترستن[۴] است و روشی متعارف برای تجزیهٔ یک خمینهٔ سه بعدی به قسمت‌هایی با هندسه مشخص ارائه می‌کند.

---

*) این تحقیق در پژوهشگاه دانش‌های بنیادی (IPM) به عنوان طرح سربازی نخبگان تحت نظارت دکتر مهرداد شهشهانی انجام شده است.

۱) چون در بعد سه رسته خمینه‌های توپولوژیک و خمینه‌های دیفرانسیلی یکی است می‌توان به جای همسانریختی از وابرریختی استفاده کرد.

2) Clay   3) Grigori Perelman   4) W. Thurston

اواخر دهه هفتاد و اوایل دهه هشتاد، ترستن ثابت کرد که هر خمینه هاکن[1] هندسه‌پذیر می‌باشد و حدس زد که به طور کلی هر خمینه سه بعدی هندسه‌پذیر است [27]. در توضیح این مطلب اولاً باید گفت که منظور از خمینه هاکن، خمینه‌ای سه بعدی است که شامل رویه‌ای تراکم‌ناپذیر با گونه مثبت است. (یک رویه در یک خمینه سه بعدی را تراکم‌ناپذیر گوییم، هرگاه نگاشتی که شمول روی گروه بنیادی اول القاء می‌کند یک به یک باشد.) نکتهٔ دوم در رابطه با مفهوم هندسه‌پذیری است. خمینه سه‌بعدی M را هندسه‌پذیر می‌نامیم هرگاه بتوان آن را به تعدادی مؤلفه مجموع همبند تجزیه کرد و در هر مؤلفه مثل N بتوان تعدادی چنبره تراکم‌ناپذیر مجزا مثل T_iها یافت، به گونه‌ای که هر مؤلفهٔ همبندی $N \setminus \cup T_i$ متریکی کامل و موضعاً همگن با حجم متناهی بپذیرد. موضعاً همگن بودن یک خمینه به این معنی است که هر نقطه از آن یک همسایگی همگن داشته باشد، یعنی آن همسایگی با مجموعهٔ بازی از یک خمینه همگن کامل به طور طولپا یکریخت باشد. خمینه‌های همگن کامل هم خمینه‌هایی هستند که گروه ایزومتری‌های آنها به طور تراگذار روی آنها عمل کند. این خمینه‌ها را ترستن در بعد سه به طور کامل طبقه‌بندی نموده است. (البته با تحمیل چند شرط اضافی روی آنها، اما این شرط‌های اضافی به طور طبیعی در هندسی‌سازی برقرار می‌شوند و بنابراین این طبقه‌بندی همان است که به آن نیاز داریم.) وی ثابت کرد که در بعد سه، هشت خمینه متفاوت با فرض بالا وجود دارند که به آنها هندسه‌های مدل می‌گویند. ما در اینجا هندسه‌های مدل را دقیقاً معرفی نمی‌کنیم ولی سه تا از آنها را که در بعد دو نیز وجود دارند نام می‌بریم. هندسه مدل تخت $\mathbb{R}^۳$، هندسه مدل بیضوی $S^۳$ و هندسه مدل هذلولوی $H^۳$.

همان گونه که گفته شد، تلاش‌هایی که برای اثبات حدس پوانکاره و پس از آن حدس هندسی‌سازی ترستن، با استفاده از ابزارهای توپولوژیک صورت گرفت، همه ناکام ماندند. البته هندسه‌پذیری رده‌های مختلفی از خمینه‌های سه بعدی ثابت شد اما به طور مشخص در مورد برخی رده‌ها هیچ‌گونه پیشرفتی حاصل نشد؛ تا این که گرایش به سمت استفاده از ابزارهای آنالیز هندسی در توپولوژی هندسی پیدا شد و سرانجام یکی از همین ابزارها، شار ریچی، بر مشکلات غلبه نمود و قضایای طبقه‌بندی ۳ ـ خمینه‌ها را نتیجه داد. شار ریچی به تعبیری صورت سهموی معادلهٔ اینشتین در نسبیت عام است و همهٔ دلایل اهمیت معادلهٔ اینشتین در مورد آن نیز معتبرند. مشخصاً این که انحنای ریچی تنها تانسور از جنس متریک است (به جز مضارب متریک) که تحت عمل وابرریختی‌ها ناورداست و تنها به مشتقات تا مرتبه دوم متریک، بستگی دارد. نکته دیگری که اهمیت شار ریچی در بعد سه را برجسته می‌کند این است که در بعد سه انحنای ریمان به طور کامل از روی انحنای ریچی مشخص می‌شود. بنابراین شار ریچی که انتظار می‌رود انحنای ریچی را به سمت «هموار» شدن هدایت کند، انحنای ریمان را نیز تحت کنترل خواهد داشت و نتایج هندسی ـ توپولوژیک را به دست خواهد داد.

---

1) Haken

۱. شار ریچی

ابتدا چند تعریف را از هندسهٔ ریمانی یادآوری و نمادهای خود را مشخص می‌کنیم. خمینه $n-$ بعدی M را در نظر بگیرید. متریک ریمانی روی M را با g_{ij} نشان می‌دهیم. نمادهای کریستوفل Γ^k_{ij}، عبارتند از

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{۱}{۲} g^{kl}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}) \qquad (۱)$$

تانسورهای انحنای ریمان R^k_{ijl} و R_{ijkl} به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$R^k_{ijl} = \partial_i \Gamma^k_{jl} - \partial_j \Gamma^k_{il} + \Gamma^k_{ip}\Gamma^p_{jl} - \Gamma^k_{jp}\Gamma^p_{il} \qquad (۲)$$

$$R_{ijkl} = g_{kp} R^p_{ijl} \qquad (۳)$$

با استفاده از این تانسورها انحنای ریچی R_{ik} و انحنای اسکالر R با روابط زیر داده می‌شوند:

$$R_{ik} = g^{jl} R_{ijkl} \qquad (۴)$$

$$R = g^{ik} R_{ik} \qquad (۵)$$

اکنون می‌توانیم شار ریچی را تعریف کنیم. فرض کنید $(M^n, g_۰)$ یک خمینه ریمانی n ـ بعدی باشد. شار ریچی روی M^n در واقع یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای برای تحول متریک است:

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = -۲R_{ij} \qquad (٦)$$

$$g(۰) = g_۰$$

این معادله را نخستین بار ریچارد هامیلتون[۱] در ۱۹۸۲ در نظر گرفت [12] و با استفاده از آن قضیهٔ زیر را ثابت کرد:

قضیهٔ ۱ــ۱. هر خمینهٔ سه‌بعدی که متریکی با انحنای ریچی مثبت بپذیرد، فضاگونه کروی است، یعنی، خارج‌قسمتی از کرهٔ سه بعدی است.

این قضیه، اولین استفاده از شار ریچی برای طبقه‌بندی خمینه‌های سه بعدی و در واقع بهانه‌ای برای شروع مطالعهٔ شار ریچی و نقش آن در این طبقه‌بندی بود. هامیلتون در همان مقاله وجود و

۱) منظور از g^{ij} وارون g_{ij} است. در طول این مقاله همواره از اختصار جمع‌بندی اینشتین استفاده می‌کنیم یعنی روی اندیس‌هایی که هم در بالا و هم در پایین ظاهر شده‌اند جمع می‌بندیم.

2) Richard S. Hamilton

یکتایی جواب را برای شار ریچی ثابت کرد. اثبات او مبتنی بر قضیه تابع وارون نش ــ موزر[1] و در نتیجه بسیار پیچیده بود. وی هم‌چنین شرایط وجود بلندمدت (جواب ماکسیمال) را بررسی کرد و اصل ماکسیمم را برای تانسورها ثابت نمود. مقاله او در حقیقت پایه‌ای برای نظریه شار ریچی و تحقیقات بعدی روی آن شد. در ادامهٔ این بخش به بیان قضایای فوق و طرح اثبات آنها می‌پردازیم.

قضیه ۱—۲. روی هر خمینه ریمانی بسته، شار ریچی برای زمان کوتاه جواب دارد و جواب آن یکتاست.

همان طور که گفتیم، اثبات هامیلتون برای این قضیه بسیار پیچیده و تکنیکی بود. یک سال بعد د. تورک[2] در [11] اثباتی بسیار ساده برای این قضیه ارائه داد. برای بیان این اثبات لازم است ابتدا نگاهی دقیق‌تر به شار ریچی و معادلات تحولی که القا می‌کند بیاندازیم. اگر مقدار R_{ij} را از معادلات (۲)، (۳)، و (۴) در معادله (٦) جایگذاری کنیم و سپس خطی سازی شده شار را در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{g}_{ij} = \Delta\tilde{g}_{ij} + g^{kl}(\partial_i\partial_j\tilde{g}_{kl} - \partial_i\partial_k\tilde{g}_{jl} - \partial_j\partial_k\tilde{g}_{il}) \qquad (۷)$$

$$+\text{(جملات مرتبهٔ پایین‌تر)}$$

که در آن $\tilde{g}$ وردش g است. توجه کنید که اگر $\Delta\tilde{g}$ تنها جملهٔ مرتبهٔ دوم بود، شار ریچی یک معادلهٔ سهموی می‌شد و طبق قضایای کلاسیک معادلات دیفرانسیل، وجود و یکتایی جواب نتیجه می‌شد. در واقع د. تورک نیز به طور هوشمندانه‌ای جملات غیر از $\Delta\tilde{g}$ را حذف می‌کند و بدین ترتیب قضیه را نتیجه می‌گیرد. برای حذف این جملات اضافی، کافی است توجه کنیم که برابر با قرینه مشتق لی متریک نسبت به میدان برداری

$$W_i = g_{ik}g^{pq}(\Gamma^k_{pq} - (\Gamma_\circ)^k_{pq})$$

می‌باشند که $\Gamma_\circ$ هموستار متریک $g_\circ$ است. بنابراین اگر شار را با ابرریختی‌های تولید شده توسط این میدان برداری ترکیب کنیم، می‌توانیم این جملات را حذف کنیم و در نهایت چون ترکیب با وابرریختی مثل تغییر مختصات است، می‌توان نتیجه گرفت که شار اولیه نیز، یعنی همان شار ریچی، جواب یکتا دارد.

توجه کنید که در این اثبات به وجود وابرریختی‌های یک میدان برداری تا زمانی دلخواه نیاز داریم و فرض فشردگی خمینه هم برای تضمین این موضوع می‌باشد. البته این قضیه برای خمینه‌های نافشرده نیز برقرار است و این تعمیم در مقاله‌های [25] و [5] انجام گرفته است. پس از این، نوبت به وجود بلندمدت جواب می‌رسد. این قضیه را نیز هامیلتون در اولین مقاله‌اش درباره شار ریچی ثابت کرده است.

1) Nash-Moser inverse function theorem 2) D. DeTurk

قضیهٔ ۱ــ۳. فرض کنید که $(M^n, g(t))$ جوابی برای شار ریچی روی یک خمینه فشرده باشد و جواب در بازهٔ زمانی ماکسیمال $[\circ, T)$ وجود داشته باشد. در این صورت اگر $T < \infty$ داریم:

$$\lim_{t\to T} \max_{x\in M^n} |Rm(x,t)| = \infty$$

اثبات این قضیه با استفاده از برهان خلف می‌باشد. یعنی فرض می‌کنند که $|Rm|$ وقتی $T \longrightarrow t$ کراندار بماند، و ثابت می‌کنند که وقتی $T \longrightarrow t$، متریک‌های $g(t)$ به سمت یک متریک هموار $g(T)$ میل می‌کنند و بعد با استفاده از وجود کوتاه مدت جواب، جواب را از $g(T)$ ادامه می‌دهند و این با ماکسیمال بودن T در تناقض است.

در ادامهٔ این بخش به بیان معادلات تحول القا شده توسط شار ریچی و اصل ماکسیمم می‌پردازیم. انحنای اسکالر و انحنای ریچی، به ترتیب تحت شار به صورت زیر تغییر می‌کنند:

$$\frac{\partial}{\partial t}R = \Delta R + ۲|Rc|^۲ \tag{۸}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}R_{ij} = \Delta R_{ij} + ۲g^{kp}g^{lq}R_{kijl}R_{pq} - ۲g^{pq}R_{ip}R_{qj} \tag{۹}$$

و برای عنصر حجم داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t}d\mu = -Rd\mu \tag{۱۰}$$

که نتیجه می‌دهد حجم تحت شار ریچی به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\frac{\partial}{\partial t}V = \frac{\partial}{\partial t}\int_{M^n} d\mu = \int_{M^n} \frac{\partial}{\partial t}d\mu = -\int_{M^n} Rd\mu \tag{۱۱}$$

کمیت $r = \int_{M^n} Rd\mu$ میانگین انحنای اسکالر است و به کمک آن می‌توان شار ریچی را به گونه‌ای نرمال کرد که حجم را ثابت نگه دارد. برای این منظور، شار نرمال شده‌ی ریچی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\frac{\partial}{\partial t}g = -۲Rc + \frac{۲r}{n}g \tag{۱۲}$$

این شار برای به دست آوردن برخی نتایج هندسی ــ توپولوژیک مناسب‌تر است. زیرا از به‌وجود آمدن تکینگی‌هایی مانند رمبش[1] خمینه به یک نقطه جلوگیری می‌کند. ما هم در ابتدا از نرمال شدهٔ شار ریچی استفاده می‌کنیم و چند نتیجه هندسی ــ توپولوژیک را به دست می‌آوریم ولی در بررسی شار با جراحی، معمول است که شار را بدون نرمال شدگی در نظر بگیرند. به معادله تحول انحنای اسکالر تحت شار نرمال شده، در بخش بعدی نیاز خواهیم داشت:

1) Collapse

$$\frac{\partial}{\partial t}R = \Delta R - \frac{2r}{n}R + 2|Rc|^2 \qquad (13)$$

در پایان این بخش به توضیح مختصری دربارهٔ اصل ماکسیمم برای تابع‌های عددی و میدان‌های تانسوری می‌پردازیم. اصل ماکسیمم برای توابع عددی، قضیه‌ای آشنا در نظریهٔ معادلات دیفرانسیل پاره‌ای سهموی است و ما در اینجا آن را یادآوری می‌کنیم.

قضیه ۱—۴۰ فرض کنید $u : M^n \times [0, T) \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی هموار باشد که در نامعادله زیر صدق می‌کند:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \leq \Delta u + F(u)$$

که لاپلاسین نسبت به متریک متغیر $g(t)$ می‌باشد و $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی موضعاً لیپشیتز است. اگر ثابت $c \in \mathbb{R}$ چنان باشد که $\forall x \in M^n \ u(x, 0) \leq c$ و تابع φ جواب معادله دیفرانسیل عادی زیر باشد:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= F(\varphi) \\ \varphi(0) &= c \end{aligned}$$

آنگاه برای هر $x \in M^n$ و هر $t \in [0, T)$ که φ در آن تعریف شده است، داریم:

$$u(x, t) \leq \varphi(t)$$

لازم به ذکر است که این قضیه با تبدیل همهٔ نابرابری‌ها از $\leq$ به $\geq$ نیز برقرار است.

همان طور که گفتیم، هامیلتون توانست اصل ماکسیمم را به میدان‌های تانسوری که تحت معادلات دیفرانسیل پاره‌ای تحول می‌کنند، تعمیم دهد. البته این تعمیم برای تانسورهای دلخواه نسبتاً پیچیده است و ما آن را در ساده‌ترین حالت، یعنی ۲ ـ تانسورهای هموردا متقارن بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۱—۵. فرض کنید که $\alpha(t)$ خانواده‌ای یک پارامتری از ۲ ـ تانسورهای هموردا متقارن روی خمینهٔ ریمانی M^n باشد که تحول آن در نابرابری زیر صدق می‌کند:

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha \geq \Delta\alpha + \beta$$

که در آن نابرابری به این معنی است که $\frac{\partial}{\partial t}\alpha - \Delta\alpha - \beta$ نامنفی معین است. در اینجا نیز Δ نسبت به متریک متغیر $g(t)$ است و β ۲ـتانسور متقارنی است که در فرض بردار ویژه پوچ صدق می‌کند، یعنی اگر v یک بردار ویژه α متناظر مقدار ویژه صفر باشد آنگاه $\beta(v, v) \geq 0$.

حال اگر α در لحظه صفر (مثبت) نامنفی معین باشد در لحظات بعد نیز چنین خواهد بود. با استفاده از این قضیه بود که هامیلتون توانست قضیه (۱ـ۱) را ثابت کند. در واقع او برای این اثبات متریک اولیه را که انحنای ریچی آن مثبت بود با شار ریچی متحول کرد. در طی این تحول انحنای ریچی همواره مثبت باقی می‌ماند. او سپس تخمین‌های مناسبی برای انحنا به دست آورد که نشان می‌داد انحنا به مقدار ثابتی میل می‌کند و به کمک وجود بلند مدت جواب، نشان داد که وقتی

$t \longrightarrow \infty$ متریک‌ها به متریکی با انحنای ثابت و مثبت میل می‌کنند و طبق قضایای کلاسیک نتیجه گرفت که خمینه، خارج‌قسمتی از کره است.

۲. شار روی رویه‌ها و یکنواخت‌سازی

در این بخش می‌خواهیم شار نرمال شده‌ی ریچی را روی رویه‌ها در نظر بگیریم. چون برای رویه‌ها رابطهٔ $Rc = \frac{R}{2} g$ برقرار است، شار به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial t} g = (r - R) g$$

هامیلتون در [14] برای اولین بار شار بالا را بررسی کرد و قضیه‌ی زیر را به دست آورد که البته بخشی از اثبات آن را چاو[1] در [8] کامل کرد.

قضیه ۲-۱. فرض کنید که (M^2, g_0) یک رویه ریمانی بسته باشد. در این صورت جواب یکتای $g(t)$ برای شار نرمال شده ریچی

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} g &= (r - R) g \\ g(0) &= g_0 \end{aligned} \tag{۱۴}$$

به‌ازای $t \geq 0$ وجود دارد. به علاوه وقتی که $t \longrightarrow \infty$، متریک‌های $g(t)$ به طور یکنواخت در هر نرم C^k به متریکی هموار با انحنای ثابت میل می‌کنند.

توجه کنید که قضیه‌ی بالا یکنواخت‌سازی رویه‌ها را نتیجه می‌دهد. زیرا، از آنجا که تغییرات متریک تحت شار همواره مضربی از خود متریک است، رده همدیسی متریک تغییر نمی‌کند. پس آنچه که ثابت شده در واقع این است که در هر رده همدیسی متریکی با انحنای ثابت وجود دارد و این یک حکم کلاسیک است که یکنواخت‌سازی رویه‌ها را نتیجه می‌دهد.

در حقیقت آنچه که این قضیه به دست می‌دهد چیزی بیشتر از یکنواخت‌سازی است، زیرا راهی کانونی برای تبدیل هر متریک به متریک با انحنای ثابت و همدیس با آن ارائه می‌دهد. و این راه کانونی همان شار ریچی است.

در ادامهٔ این بخش به طرح مختصر اثبات این قضیه و ایده‌های پشت آن می‌پردازیم. ابتدا توجه کنید که طبق قضیهٔ (۱-۲) جواب برای کوتاه مدت وجود دارد. اکنون اگر بتوانیم کرانداری یکنواخت R را ثابت کنیم از قضیهٔ (۱-۳) می‌توان نتیجه گرفت که جواب تا زمان بی‌نهایت وجود خواهد داشت. برای یافتن کران R، طبق آنچه که در معادلات دیفرانسیل تحولی معمول است، باید معادله تحول R را به دست آوریم و سپس از اصل ماکسیمم استفاده نمائیم. طبق معادله (۱۳) داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t} R = \Delta R + R(R - r) \tag{۱۵}$$

1) B. Chow

که این نوع معادله به معادله عکس‌العمل ـ انتشار[1] معروف است. حال اصل ماکسیمم نتیجه می‌دهد که R همواره از جواب معادله دیفرانسیل عادی

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}s &= s(s-r) \\ s(0) &= s_0 \end{aligned}$$

بزرگتر است که s_0 یک کران پایین برای R در لحظه صفر است. ولی، از آنجا که این معادله به ازای مقادیر اولیه بزرگتر از r در زمان متناهی تکینه می‌شود، نمی‌توان با استفاده از آن یک کران بالای مناسب برای R به دست آورد.

برای یافتن کران بالای مناسب برای R باید توجه کرد که تکینگی فوق از جملهٔ R^2 در معادله تحول R حاصل می‌شود. پس اگر ما بتوانیم با افزودن یک جمله مناسب به R، جمله نامطلوب R^2 را حذف کنیم می‌توانیم امیدوار باشیم که کران بالای مناسبی به دست خواهیم آورد. در واقع این ایده مشکل را حل می‌کند. برای تعریف کمیت مناسبی که به دنبال آن بودیم ابتدا باید پتانسیل انحنا را تعریف کنیم. توجه کنید که چون طبق تعریف r، $\int_M (R-r)d\mu = 0$، معادلهٔ زیر طبق نظریه هاج جواب دارد و جواب آن پتانسیل انحنا نامیده می‌شود:

$$\Delta f = R - r. \qquad (۱۶)$$

حال $H = R - r + |\nabla f|^2$ کمیت مناسبی است که می‌خواستیم. نامعادلهٔ زیر برای تحول H به دست می‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial t}H \leq \Delta H + rH. \qquad (۱۷)$$

طبق اصل ماکسیمم خواهیم داشت $H \leq Ce^{rt}$ و چون $R - r \leq H$، کرانی را که می‌خواستیم به دست می‌آوریم.

با استفاده از این کران برای R می‌توان وجود بلند مدت جواب و همگرایی $g(t)$ به متریک با انحنای ثابت را، برای حالت $r \leq 0$ یعنی برای رویه‌های با گونهٔ مثبت، ثابت نمود. تنها حالتی که می‌ماند گونهٔ صفر یعنی کره است که برای آن داریم $r > 0$ و در نتیجه کران e^{rt} به بی‌نهایت میل می‌کند و به درد نمی‌خورد. برای این حالت نیز می‌توان با کمک یک کمیت جدید کران مناسبی پیدا کرد و اثبات را مانند حالت‌های دیگر کامل نمود. این کمیت جدید $M = \nabla\nabla f - \frac{1}{2}(\Delta f)g$ است که برای تحول آن نابرابری زیر را داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t}|M|^2 \leq \Delta|M|^2 - 2R|M|^2 \qquad (۱۸)$$

1) reaction-diffusion equation

اکنون اگر بتوانیم نشان دهیم که در طول زمان $R \geq c > 0$ به طور یکنواخت برقرار است، آنگاه طبق اصل ماکسیمم به دست می‌آوریم:

$$|M| \leq Ce^{-ct}. \tag{۱۹}$$

و این کران وقتی $t \to \infty$ به صفر میل و مشکل را حل می‌کند. تنها نکته‌ای که می‌ماند اثبات وجود کران پایین مثبت و یکنواخت برای R است. چون رویهٔ مورد مطالعه کره است میانگین انحنای اسکالر آن مثبت است و می‌توان نشان داد که پس از گذشت زمانی متناهی از شار ریچی انحنا مثبت می‌شود. برای اثبات کرانداری یکنواخت از پایین، کمیتی شبیه انتروپی کلاسیک را در نظر می‌گیرند:

$$N = \int_M R \log R d\mu. \tag{۲۰}$$

می‌توان ثابت کرد که N در طول شار ریچی نزولی است و این خاصیت کمک می‌کند تا کران دلخواه را به دست آوریم. توصیف دقیق‌تر مراحل اثبات را می‌توان در [9] یافت.

۳. طرح اثبات حدس پوانکاره

در این بخش می‌خواهیم خلاصهٔ اثبات پرلمان را بیان کنیم. ابتدا بهتر است که طرحی کلی از مراحل اثبات داشته باشیم. همان طور که گفته شد اولین استفاده از شار ریچی برای طبقه‌بندی هندسی و توپولوژیک توسط هامیلتون در اولین مقاله‌اش درباره شار ریچی صورت گرفت. وی ثابت کرده بود که هر خمینه سه بعدی که متریک با انحنای ریچی مثبت بپذیرد، فضاگونه کروی است یعنی خارج‌قسمتی از کره سه بعدی است. در واقع هامیلتون نشان داده بود که اگر شار نرمال شده‌ی ریچی را روی خمینه‌ای سه بعدی که انحنای ریچی مثبت دارد به جریان بیاندازیم، شار تا زمان بی‌نهایت ادامه خواهد یافت و در بی‌نهایت به متریکی با انحنای ثابت مثبت میل خواهد کرد. (این که خمینه‌ای بسته با متریکی با انحنای ثابت مثبت خارج‌قسمتی از کره است یک قضیه کلاسیک هندسه است.) اما در طول بیست و چند سالی که از پیدایش نظریه شار ریچی می‌گذشت (تا قبل از اثبات حدس پوانکاره) مشخص شده بود که کار همیشه به این سادگی پیش نمی‌رود و شار روی خمینه‌های سه بعدی دلخواه ایجاد تکینگی می‌کند. برای غلبه بر این مشکل هامیلتون در [17] شار ریچی با جراحی را برای طبقه‌بندی دسته‌ای از خمینه‌های چهاربعدی معرفی کرد. ایده او این بود که اندکی قبل از این که تکینگی ایجاد شود با یک جراحی توپولوژیک یک همسایگی از ناحیه‌ای را که تکینه می‌شود خارج کنیم و شار را پس از جراحی دوباره ادامه دهیم. حال اگر این فرایند را بتوانیم به گونه‌ای انجام دهیم که شار با جراحی تا زمان بی‌نهایت ادامه یابد می‌توانیم امیدوار باشیم که شار در بی‌نهایت به متریکی میل کند که هندسه خمینه را مشخص کند (همانند متریک‌های با انحنای ثابت).

اگرچه هامیلتون توانسته بود جراحی بالا را به طور موفقیت‌آمیزی در بعد چهار (البته برای رده‌ای خاص از خمینه‌ها) به انجام برساند اما به دلیل پاره‌ای از مشکلات که مهمترین آنها عدم شناخت کافی از هندسه و توپولوژی تکینگی‌ها بود، مسأله در بعد سه همچنان حل نشده باقی مانده بود. در واقع کار بزرگ پرلمان این بود که موفق شد فرایند بالا را در بعد سه انجام دهد. برای این که دقیق‌تر باشیم قضیهٔ اصلی پرلمان را به طور کامل بیان می‌کنیم.

قضیهٔ وجود سرتاسری جواب برای شار ریچی با جراحی: فرض کنید که (M, g) یک خمینهٔ ریمانی سه بعدی بسته و جهت‌پذیر باشد. در این صورت یک شار ریچی با جراحی وجود دارد که به هر $t \in [\circ, \infty)$ یک خمینهٔ ریمانی $(M(t), g(t))$ نسبت می‌دهد و خواص زیر را دارد:

i) $g(\circ) = g$ و $M(\circ) = M$،

ii) زیرمجموعه گسسته $T \subset (\circ, \infty)$ از زمان‌های جراحی وجود دارد که اگر I یک مؤلفه همبندی $[\circ, \infty)\backslash T$ و در نتیجه یک بازه باشد و اگر $t_I = \inf I$ آنگاه برای $t \in \{t_I\} \cup I$، $t \mapsto (M(t), g(t))$ یک شار ریچی هموار است یعنی $M(t)$ روی این بازه ثابت است و داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t} g = -۲Rc \qquad t \in \{t_I\} \cup I$$

iii) اگر $t \in T$ و $\varepsilon > \circ$ به اندازهٔ کافی کوچک باشد در این صورت هر مؤلفه همبندی $M(t-\varepsilon)$ همسانریخت با جمع همبند متناهی تا از مؤلفه‌های همبندی $M(t)$ به همراه متناهی تا خمینهٔ فضاگونه کروی و $S^۲-$ کلاف‌های روی $S^۱$ می‌باشد. به علاوه هر مؤلفهٔ همبندی $M(t)$ دقیقاً در یکی از مؤلفه‌های همبندی $M(t-\varepsilon)$ به عنوان جمعوند ظاهر می‌شود.

در توضیح این قضیه بسیار مهم ابتدا باید متذکر شد که طبق (ii) زمان‌های جراحی یک زیرمجموعه گسسته از $(\circ, \infty)$ می‌باشند، لذا در هر بازه‌ی زمانی متناهی فقط تعدادی متناهی جراحی انجام می‌گیرد و زمان‌های جراحی در یک نقطه انباشته نمی‌شوند. هم‌چنین طبق (iii) در هر جراحی تعدادی از مؤلفه‌های همبندی خمینه را به جمعوندهای جمع همبند تجزیه می‌کنیم و تعداد متناهی خمینه فضاگونه کروی و $S^۲-$ کلاف روی $S^۱$ را حذف می‌کنیم و این در واقع توصیف کامل هر جراحی از نظر توپولوژیک می‌باشد.

پرلمان در سومین مقاله خود [24] قضیه زیر را ثابت کرد که اثباتی جداگانه برای حدس پوانکاره ارائه می‌کند. ناگفته نماند که پرلمان در دو مقاله اول خود اثباتی برای حدس هندسی‌سازی ترستن ارائه کرده بود که طبعاً اثباتی برای حدس پوانکاره نیز می‌باشد.

قضیهٔ انقراض در زمان متناهی[1]. فرض کنید (M, g) یک خمینه سه بعدی بسته و جهت‌پذیر باشد که گروه بنیادی آن حاصل ضرب آزادی از گروه‌های متناهی و گروه‌های دوری نامتناهی است.

1) Finite time extinction

در این صورت شار ریچی با جراحی با مقدار اولیه (M, g) در زمان متناهی منقرض می‌شود یعنی برای زمان‌های به اندازه کافی بزرگ $M(t)$ تهی است.

حال با استفاده از این دو قضیه اثبات حدس پوانکاره و کلی‌تر از آن حدس بیضوی سازی، که بیان می‌کند هر خمینهٔ سه بعدی بسته، با گروه بنیادی متناهی، فضاگونه کروی است، به سادگی انجام می‌گیرد. برای رفع مشکل جهت‌پذیری به این دو نکته توجه کنید که اولاً هر خمینه همبند ساده جهت‌پذیر است، ثانیاً می‌توان شار را به ۲ـپوشش جهت‌پذیر هر خمینه ترفیع داد.

حال فرض کنید (M, g) یک خمینه سه بعدی بسته و جهت‌پذیر با گروه بنیادی متناهی باشد. طبق قضایای بالا شار ریچی با جراحی روی (M, g) در زمان متناهی منقرض می‌شود یعنی $T > ۰$ وجود دارد (که می‌توان آن را زمان جراحی گرفت) که برای $t \geq T$ داریم: $M(t) = \emptyset$. اکنون چون زمانهای جراحی گسسته‌اند در بازه‌ی زمانی $[۰, T]$ متناهی تا جراحی صورت می‌گیرد که آنها را $t_۱, t_۲, \ldots, t_n = T$ می‌نامیم.

قسمت (iii) قضیه وجود سرتاسری جواب شار با جراحی نتیجه می‌دهد که

$$M(t_i) = M(t_{i+۱}) \# N_۱ \# \ldots \# N_{k_i}$$

که N_jها یا فضاگونه‌های کروی‌اند، یعنی $S^۳/\Gamma$ که Γ زیرگروهی متناهی از ایزومتریهای $S^۳$ یعنی $SO(۴)$ است که به طور خطی و آزاد عمل می‌کند. یا $S^۲$ـکلاف‌های روی $S^۱$اند، یعنی $S^۲ \times S^۱$ یا خارج‌قسمت آن تحت عمل $\mathbb{Z}_۲$.

حال داریم:

$$M(t_{n-۱}) = \emptyset \# N_۱ \# \ldots \# N_k$$

یعنی $M(t_{n-۱})$ جمع همبندی از فضاگونه‌های کروی و $S^۲-$ کلاف‌های روی $S^۱$ است. اگر به طور استقرایی پیش برویم نتیجه می‌شود که $M = M(۰) = M(t_۱) \# N_۱ \# \ldots \# N_l$ نیز از همین نوع است. اکنون با در نظر گرفتن این که گروه بنیادی $S^۲$ـکلاف‌های روی $S^۱$ برابر با $\mathbb{Z}$ است و با استفاده از قضیه ون کمپن نتیجه می‌شود که M جمع همبند تعدادی خمینه‌ی فضاگونه‌ی کروی است. حال نظر به این که گروه بنیادی M متناهی است و حاصل‌ضرب آزاد گروه‌های غیربدیهی نامتناهی است، قضیه ون کمپن نتیجه می‌دهد که تعداد جمعوندهای M یک است و M خمینه‌ای فضاگونه است. پس ما حدس بیضوی سازی را ثابت کرده‌ایم. اگر M همبند ساده باشد همین استدلال نتیجه می‌دهد که $M \simeq S^۳/\Gamma$. قضایای کلاسیک توپولوژی می‌گویند که Γ همان گروه بنیادی M است زیرا $S^۳$ همبند ساده و در نتیجه فضای پوششی جهانی M است. پس Γ گروهی بدیهی است و M با کره سه بعدی همسانریخت است یعنی حدس پوانکاره نیز نتیجه شد.

پس از این بحث اولیه و طرح کلی مراحل اثبات به سراغ جزئیات قضایای فوق می‌رویم.

۴. فشردگی شار

گام اول در اثبات قضیه وجود سرتاسری جواب و انجام جراحی این است که بتوانیم شناختی کافی از هندسهٔ تکینگی‌ها به دست آوریم. در واقع باید بدانیم قسمتی از خمینه که در فرایند جراحی جدا می‌شود دقیقاً چیست. این مهم‌ترین مشکل برای انجام جراحی در بعد سه بود که توسط پرلمان برطرف شد. یک نکته مهم در اینجا این است که تکینگی‌هایی که در بعد سه ظاهر می‌شوند به نوعی خوش رفتارند و دارای همسایگی‌هایی هستند که می‌توان با جراحی آنها را حذف کرد. اما این اتفاق در ابعاد بالاتر نمی‌افتد و هندسهٔ تکینگی‌ها پیچیده‌تر از آن است که با روش‌های شناخته شده جراحی توپولوژیک تا این زمان، قابل رفع باشند و این موضوع با غیرممکن بودن طبقه‌بندی خمینه‌ها در ابعاد بزرگتر یا مساوی چهار، سازگار است. البته هنوز هم می‌توان از شار ریچی برای مطالعهٔ خمینه‌های از ابعاد بالاتر استفاده کرد ولی باید شرط‌های توپولوژیک و هندسی اضافی بر خمینه تحمیل کنیم تا از پیدایش تکینگی‌های «بدخیم» جلوگیری کنیم و این کار قبل از پرلمان توسط هامیلتون برای دسته‌ای از خمینه‌های چهار بعدی انجام شده بود [17].

حال به بررسی تکینگی‌ها و روش یافتن یک همسایگی با توپولوژی مشخص برای آنها می‌پردازیم. طبق قضیه (۱-۳) تکینگی وقتی به‌وجود می‌آید که انحنا به بی‌نهایت میل کند. می‌توان نشان داد که زیرمجموعه Ω از M که انحنا روی آن به بی‌نهایت میل می‌کند بسته است و در زمان تکینگی، شار روی زیرمجموعهٔ باز $M\backslash\Omega$ به سمت متریکی هموار میل می‌کند. پس اگر یک همسایگی Ω را خارج کنیم می‌توانیم شار را ادامه دهیم. نکتهٔ مهم این است که Ω همسایگی‌هایی کانونی دارد که توپولوژی کاملاً مشخصی دارند. قضیهٔ زیر این مسأله را به طور دقیق بیان می‌کند.

قضیهٔ ۴-۱. فرض کنید $g(t), t \in [\circ, T)$ شار ریچی روی خمینهٔ سه بعدی، بسته و جهت‌پذیر M باشد. در این صورت برای هر $\varepsilon > \circ$ ثابت‌های $C, K > \circ$ وجود دارند به طوری که برای هر $t_\circ \in [\circ, T)$، هر $x \in (M, g(t_\circ))$ که $R(x) \geq K$ یک (C, ε)ـهمسایگی کانونی دارد.

$(C,\varepsilon)-$ همسایگی‌های کانونی به چهار دسته تقسیم می‌شوند. ما در اینجا به جزئیات تکنیکی تعریف آنها نمی‌پردازیم و در عوض توصیفی کلی از آنها ارائه خواهیم کرد. دسته اول و دوم به لحاظ توپولوژیک خمینه‌های فضاگونه کروی‌اند. دسته سوم که به آنها $\varepsilon-$ گردن‌بند[1] می‌گویند وابرریخت با استوانه سه بعدی یعنی $S^{\text{۲}} \times I$ هستند که I یک بازهٔ باز است و دستهٔ آخر که موسوم به $(C,\varepsilon)-$ کلاه[2] هستند اجتماع یک $\varepsilon-$گردن‌بند و یک هسته می‌باشند که هسته همسانریخت با $B^{\text{۳}}$ (گوی سه بعدی) یا $\mathbb{R}P^{\text{۳}}$ است که یک نقطه از آن حذف شده است، و در طول مرز خود که یک $S^{\text{۲}}$ است به یکی از مرزهای $\varepsilon-$گردن‌بند چسبیده است.

---

1) ε-necklace   2) (C,ε)-cap

روش اثبات این قضیه استفاده از قضایای فشردگی از نوع چیگر ــ گروموف [1] است. البته نسخهٔ قدیمی و اصلی این قضیه به تنهایی کافی نیست. هامیلتون در [16] توانست یک قضیهٔ فشردگی از نوع چیگر ـ گروموف را برای شار ریچی ثابت کند.

قضیهٔ ۴—۲. فرض کنید $(M_k, g_k(t))$ که $t \in (A, B]$ و $A < \circ \le B$ دنباله‌ای از شارهای ریچی باشد که هر $g_k(t)$ کامل است و برای هر k، $p_k \in M_k$ و گوی‌های ژئودزیکی $B_\circ(p_k, s_k)$ نسبت به متریک $g_k(\circ)$ داده شده باشند که $\circ < s_k \le \infty$ و $s_k \longrightarrow s_\infty \le \infty$. هم چنین فرض کنید که:

i) برای هر شعاع $r < s_\infty$ ثابت‌های مثبت $C(r)$ و $k(r)$ موجود باشند به نحوی که روی $B_\circ(p_k, r) \times (A, B]$ داشته باشیم:
$|Rm(g_k(t))| \le C(r)$ برای هر $k \ge k(r)$

ii) ثابت مثبت δ موجود باشد به نحوی که شعاع یک به یکی [2] M_k در نقطه p_k نسبت به متریک $g_k(\circ)$ در رابطهٔ

$$\mathrm{inj}(M_k, p_k, g_k(\circ)) \ge \delta > \circ$$

برای هر $k \ge ۱$ صدق کند.

در این صورت زیردنباله‌ای از $(B_\circ(p_k, s_k), g_k(t), p_k)$ وجود دارد که روی $t \in (A, B]$ در توپولوژی C^∞_{loc} به شار ریچی $(B_\infty, g_\infty(t), p_\infty)$ میل می‌کند که B_∞ گوی ژئودزیکی حول p_∞ به شعاع s_∞ در متریک $g_\infty(\circ)$ است و $g_\infty(t)$ها کامل‌اند اگر $s_\infty = \infty$ باشد.

در توضیح این قضیه ابتدا باید در مورد توپولوژی C^∞_{loc} برای شارها صحبت کنیم. میل کردن در این توپولوژی بدین معنی است که زیرمجموعه‌های باز و تو در توی U_k از B_∞ موجودند که اجتماع آنها B_∞ را می‌پوشاند و برای هر k وابرریختی f_k از U_k به باز $V_k \subset B_\circ(p_k, s_k)$ وجود دارد به طوری که متریک‌های $\tilde{g}_k(t) = (f_k)^* g_k(t)$ در توپولوژی C^∞ روی زیرمجموعه‌های فشرده $B_\infty \times (A, B]$ به $g_\infty(t)$ میل کنند. البته همهٔ U_kها باید شامل p_∞ باشند و $f_k(p_\infty) = p_k$ شود.

حال با استفاده از این قضیهٔ فشردگی می‌توان قضیهٔ ساختار همسایگی تکینگی‌ها را ثابت کرد. برای این کار شار ریچی $g(t)$ را روی خمینه M در نظر بگیرید و فرض کنید $\circ \le t < T < \infty$ یعنی تکینگی در زمان متناهی ظاهر می‌شود. اکنون در طول یک دنباله t_n که به T میل می‌کند شار را تغییر مقیاس می‌دهیم، یعنی شار

$$g^{(n)}(t) = \frac{۱}{L_n^۲} g(t_n + L_n^۲ t) \qquad (۲۱)$$

را روی $M_n = M$ در نظر می‌گیریم. به سادگی دیده می‌شود که $g^{(n)}(t)$ها نیز در معادلهٔ شار ریچی صدق می‌کنند. ثابت‌های مثبت L_n طوری انتخاب شده‌اند که انحنای $g^{(n)}(t)$ها کراندار بماند، بنابراین وقتی به تکینگی نزدیک می‌شویم یعنی وقتی $n \longrightarrow \infty$، L_n به صفر میل خواهد کرد. نقاط $x_n \in M$ نیز نقاطی هستند که انحنا در آنها تقریباً ماکسیمم است. حال برای این که بتوانیم از

1) Cheeger-Gromov 2) injectivity radius

فشردگی استفاده کنیم لازم است که کران پایینی یکنواخت روی شعاع یک به یکی در x_nها به دست آوریم. هامیلتون حدس زد که چنین کران پایینی وجود دارد و این حدس او به حدس دور کوچک مشهور شد. پرلمان در [22] و [23] با استفاده از مفهوم حجم کاهش یافته که توسط خودش معرفی شده بود توانست آن را ثابت کند و امروزه این قضیه به عنوان قضیه نارمبش موضعی شناخته می‌شود. ما در بخش بعد به این مفهوم خواهیم پرداخت.

پس از آن که مشخص شد که با برقراری شرایط قضیهٔ فشردگی می‌توان با استفاده از آن نشان داد که شارهای معرفی شده در بالا زیردنباله‌ای همگرا دارند. حد این زیردنباله که در واقع توصیف کننده خمینه در لحظهٔ تکینگی است خواص هندسی و توپولوژیک خوبی دارد و به آن $\kappa-$جواب باستانی می‌گویند. کلمه باستانی برای این است که شار حدی در بازهٔ زمانی $(-\infty, ۰]$ تعریف شده است. البته می‌توان نشان داد که شار حدی خواص زیاد دیگری نیز دارد ولی ما در اینجا به آنها نمی‌پردازیم. اکنون اگر نشان دهیم که x_∞ در شار حدی که یک $\kappa-$ جواب باستانی است همسایگی کانونی دارد از نزدیک بودن خمینه اولیه در $C^\infty_{loc}-$ توپولوژی به آن می‌توان نتیجه گرفت که نقاط با انحنای زیاد در خمینه اولیه نیز همسایگی‌های کانونی دارند و قضیه نتیجه می‌شود. برای این کار لازم است که شار روی $\kappa-$ جواب باستانی را یک بار دیگر تغییر مقیاس دهیم و از فشردگی استفاده کنیم. این شار حدی جدید خواص بسیار بیشتری از $\kappa-$ جواب‌های باستانی دارد و به آن جوابواره گرادیانی کوچک شونده[1] می‌گویند.

یکی از کارهای مهم پرلمان این بود که جوابواره‌های گرادیانی کوچک شونده در بعد سه را طبقه‌بندی کرد و از این طریق توانست نشان دهد که نقاط با انحنای زیاد در نزدیکی تکینگی، همسایگی کانونی دارند. این کار او نیز مبتنی بر حجم کاهش یافته، یکی از مهم‌ترین ابداعات وی بود.

۵. انتروپی و حجم کاهش یافته

در این بخش می‌خواهیم درباره دو تابع مهم که توسط پرلمان معرفی شده‌اند، به طور مختصر شرح دهیم. اولین آنها انتروپی پرلمان است. پیش از آن که پرلمان مقالات خود را منتشر کند تلاش‌ها برای یافتن تابعی که شار ریچی شار گرادیان آن باشد، بی‌نتیجه مانده بود. پرلمان با معرفی تابع انتروپی خود این کار را انجام داد و نشان داد که می‌توان به شار ریچی به عنوان یک شار گرادیان نگاه کرد. انتروپی پرلمان، تابع زیر است:

$$W(g, f, \tau) = \int_M [\tau(R + |\nabla f|^۲) + f - n](۴\pi\tau)^{-\frac{n}{۲}} e^{-f} d\mu_g \qquad (۲۲)$$

1) gradient shrinking solitons

که در آن g متریک ریمانی، f یک تابع C^∞ روی M و τ ثابتی است که فقط به زمان بستگی دارد. اگر شار ریچی را به عنوان یک سیستم دینامیکی نگاه کنیم که روی فضای متریک‌های ریمانی که خارج‌قسمت آنها را تحت عمل گروه و ابرریختی‌ها گرفته‌ایم، عمل می‌کند. در این صورت با استفاده از تابع انتروپی (که در واقع یک تابع لیاپانف برای این سیستم است.) می‌توان نشان داد که این سیستم دینامیکی جوابهای تناوبی غیرثابت ندارد. یعنی به جز نقاط ثابت، برای شار ریچی جواب تناوبی وجود ندارد و این بدین معنی است که اگر شار تا بی‌نهایت ادامه یابد حد آن یک نقطه ثابت شار است. نکته‌ای که در این جا باید به آن توجه کرد این است که چون خارج‌قسمت فضای متریک‌ها تحت عمل گروه وابرریختی‌ها، فضای فاز است بنابراین نقطه‌های ثابت جواب‌هایی هستند که تحت زمان با یک گروه از وابرریختی‌ها تغییر می‌کنند. به این جواب‌های معادله شار ریچی، جوابواره‌های ریچی[1] می‌گویند. در آخر باید متذکر شویم که چون شار ریچی تحت عمل وابرریختی‌ها ناورداست، بنابراین نوع نگاه بالا کاملاً طبیعی است.

دومین ابداع مهم پرلمان، یک تابع فاصله روی فضا ــ زمان است که به آن $\mathcal{L}$ـطول می‌گویند و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{\tau}(R(\gamma(\tau),\tau) + |\frac{d\gamma}{d\tau}|^2_{g(\tau)})d\tau \qquad (۲۳)$$

که در آن $g(t)$ در معادلهٔ شارریچی صدق می‌کند و جهت $\tau = T - t$ در خلاف جهت زمان است. هم‌چنین γ خمی است، که با τ پرمایش شده است و به آن به عنوان یک خم در فضا ــ زمان، $M \times [0, T]$، نگاه می‌شود. با استفاده از این طول می‌توان یک مفهوم حجم تعریف کرد که به آن حجم کاهش یافته می‌گویند و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{V}(\tau) = \int_M (4\pi\tau)^{-\frac{n}{2}} \exp(-l(x,\tau))d\mu_{g(\tau)} \qquad (۲۴)$$

که در آن $l(x,\tau) = \frac{L(x,\tau)}{2\sqrt{\tau}}$ و L مینیمم $\mathcal{L}$ بین x و نقطهٔ ثابت p است. پرلمان ثابت کرد که حجم کاهش یافته در طول شار ریچی صعودی است و با استفاده از این مطلب قضیه نارمبش موضعی را اثبات نمود.

۵ــ۱ قضیهٔ نارمبش موضعی[2].

فرض کنید $g(t), t \in [0, T)$ شار ریچی روی خمینه بسته M^n باشد که $T < \infty$. در این صورت اعداد ثابت مثبت κ و ρ_0 وجود دارند به طوری که $g(t)$ها در همهٔ نقاط فضا ــ زمان و برای تمام مقیاس‌های کمتر از ρ_0، $\kappa-$ نارمبیده‌اند.

در این قضیه $\kappa-$ نارمبیدگی در مقیاس r به این معنی است که برای هر $(x_0, t_0) \in M \times [0, T)$ اتفاق زیر رخ دهد:

1) Ricci solitons 2) no local collapsing

هرگاه $|Rm|(x,t_\circ) \leq r^{-2}$ برای هر $x \in B_{t_\circ}(x_\circ, r)$، آنگاه

$$Vol_{t_\circ}(B_{t_\circ}(x_\circ, r)) \geq \kappa r^n.$$

در این جا $B_{t_\circ}(x_\circ, r)$ گوی ژئودزیکی حول نقطهٔ $x_\circ$ به شعاع r نسبت به متریک $g(t_\circ)$ است.

با استفاده از این قضیه می‌توان کران پایینی یکنواخت برای شعاع یک به یکی به دست آورد که برای استفاده از قضیهٔ فشردگی مورد نیاز بود. زیرا طبق قضایای استاندارد هندسه ریمانی می‌توان از روی مقدار انحنا و شعاع یک به یکی کرانی برای حجم گوی‌های ژئودزیکی کوچک به دست آورد و چون طبق قضیه نارمبش موضعی کران پایینی برای حجم گوی‌های ژئودزیکی و کرانی بالا برای انحنا داریم پس شعاع یک به یکی نیز باید از پایین کران‌دار باشد.

۶ رفتار شار با جراحی در زمان‌های بزرگ

تا اینجا دربارهٔ اتفاقاتی که در زمان‌های تکینگی می‌افتد صحبت کردیم و ساختار آنها را مشخص نمودیم. حال قبل از به‌وجود آمدن تکینگی باید با یک جراحی توپولوژیک (که در واقع تجزیه یک مجموع همبند به مؤلفه‌هایش است) آن را خارج کنیم و به جای آن یک گوی سه بعدی با متریکی مشخص قرار دهیم. (یعنی قسمت‌های غیرتکینه را با آن جمع همبند کنیم.) به این گوی سه بعدی، جواب استاندارد می‌گویند. پس از جراحی باید دوباره شار ریچی را روی خمینه جدید به حرکت درآوریم تا به تکینگی بعدی برسیم. برای این که بتوان این کار را تا زمان بی‌نهایت انجام داد کافی است که زمان‌های جراحی که همان زمانهای ایجاد تکینگی‌اند (البته اندکی قبل از آن‌اند.) زیرمجموعه‌ای گسسته از $[\circ, \infty)$ باشند. اثبات این مطلب برخلاف مطالب قبلی بسیار ساده است. روش کار این است که توجه کنیم در هر جراحی مقدار حجمی که از خمینه حذف می‌شود کران پایینی دارد. (این به دلیل نوع تعریف فرایند جراحی است.) از طرف دیگر طبق معادله (۱۱) حجم در نامعادله تحول

$$\frac{d}{dt}Vol \leq -R_{\min}.Vol \qquad (۲۵)$$

صدق می‌کند. بنابراین در یک بازه زمانی متناهی، افزایش حجم متناهی است. پس برای تعداد جراحی‌ها در این بازه زمانی کرانی بالا خواهیم داشت (زیرا پس از انجام تعداد مشخصی جراحی چیزی از خمینه باقی نمی‌ماند!) لذا تعداد جراحی‌ها در هر بازه زمانی متناهی، متناهی است و در نتیجه زمانهای جراحی گسسته‌اند.

حال نوبت به قضیهٔ انقراض در زمان متناهی می‌رسد. ایده اثبات این قضیه این است که نشان می‌دهند $M(t)$ برای tهای به اندازه کافی بزرگ گروه‌های بنیادی اول، دوم و سوم بدیهی دارد و می‌دانیم که هر خمینه سه بعدی بسته با این خاصیت تهی است. البته این گزاره وقتی درست است که خمینه اولیه را همبند ساده فرض کنیم اما برای حالتهای دیگر (که در صورت قضیه ذکر شده‌اند) می‌توان با ترفیع به پوشش جهانی این استدلال را تکرار کرد. پس برای اثبات قضیه باید نشان دهیم

که $\pi_2(M(t))$ و $\pi_3(M(t))$ برای tهای بزرگ بدیهی‌اند (فرض کرده‌ایم که π_1 بدیهی است.) ما در اینجا به شرح مختصر بدیهی شدن π_2 می‌پردازیم. برای بررسی π_3 و جزئیات طرح اثبات زیر می‌توانید به [21] مراجعه نمایید.

برای اثبات بدیهی بودن $\pi_2(M(t))$ برای tهای بزرگ احتیاجی به فرض‌های قضیه انقراض در زمان متناهی روی گروه بنیادی نداریم. در واقع این گزاره برای شار ریچی با جراحی روی هر خمینهٔ سه بعدی بسته و جهت‌پذیر درست است. ایده اثبات استفاده از مساحت کره‌های دو بعدی غوطه‌ور شده در خمینه است. برای این منظور کمیت $W_2(g)$ را به عنوان مینیمم مساحت کره‌های دو بعدی غوطه‌ور شده در M که پوچ هموتوپ نیستند، در نظر می‌گیریم. می‌توان تغییرات $W_2(g)$ را تحت شار ریچی با جراحی محاسبه کرد و نشان داد که این کمیت در زمان متناهی، منفی می‌شود. اما $W_2(g)$ باید همواره نامنفی باشد، پس نتیجه می‌شود که از جایی به بعد همه‌ی کره‌های دوبعدی غوطه‌ور شده در خمینه پوچ هموتوپند و لذا گروه بنیادی دوم بدیهی است.

تا اینجا مطالب لازم برای اثبات حدس پوانکاره و کلی‌تر از آن، حدس بیضوی سازی را، بیان کردیم. گام بعدی که برای اثبات حدس هندسی‌سازی ترستن باید برداشته شود، تحلیل رفتار حدی شار با جراحی است، زیرا در حالت کلی انقراضی در زمان متناهی رخ نمی‌دهد و خمینه تا زمان بی‌نهایت ناتهی می‌ماند. در این راستا لازم است توجه شود که در هر جراحی قسمت‌هایی از خمینه که جدا می‌شوند توپولوژی کاملاً مشخصی دارند و در واقع هندسه‌پذیرند، پس اگر بتوان نشان داد که در زمان‌های به‌اندازه کافی بزرگ، $M(t)$ هندسه‌پذیر است نتیجه می‌شود که $M = M(0)$ نیز هندسه‌پذیر می‌باشد و اثبات کامل می‌گردد. اثبات هندسه‌پذیری $M(t)$ برای tهای بزرگ نیز توسط پرلمان در [23] انجام گردید. این اثبات که به طور گسترده از توپولوژی بعد پایین استفاده می‌کند در منابع [4] و [19] شرح داده شده است. ما در اینجا تنها اشاره می‌کنیم که در این اثبات نشان می‌دهند که $M(t)$ در زمانهای بزرگ یک گراف خمینه است، یعنی به قسمت‌هایی تجزیه می‌شود که هر کدام از آنها S^1- کلاف روی یک رویه است، و هندسه‌پذیری این دسته از ۳ ــ خمینه‌ها از مدت‌ها پیش ثابت شده است [28].

۷. شار کیلر ــ ریچی و حدس کالابی

شار ریچی روی خمینه‌های کیلر نخستین بار در ۱۹۸۵ توسط کائو[1] در نظر گرفته شد [3]. وی نشان داد که شار ریچی ساختار کیلر را حفظ می‌کند و اثباتی جدید برای وجود متریک‌های کیلر ــ اینشتین[2] روی خمینه‌های کیلر با کلاس اول چرن نامثبت ارائه کرد. او هم چنین اثباتی جدید برای حدس کالابی ارائه داد که از اثبات قبلی آن بسیار ساده‌تر بود.

1) H. Cao

۲) یعنی فرم ریچی مضربی از فرم کیلر باشد

حدس کالابی: هر $(1,1)$– فرم در کلاس اول چرن، فرم ریچی یک متریک در کلاس کیلر متریک اولیه است.

روش اثبات چنین است که شار نرمال شده ریچی (یا شار ریچی به اضافه یک جمله ثابت) را روی خمینهٔ کیلر به جریان می‌اندازند و نشان می‌دهند که این شار تا بی‌نهایت ادامه دارد و به متریک موردنظر میل می‌کند. این کار بسیار شبیه حالتی است که شار ریچی را روی رویه‌ها در نظر گرفتیم. (در واقع خمینه‌های کیلر یک بعدی‌اند.) مسأله‌ای که باعث می‌شود این روش کار کند این است که با تکنیک‌های استاندارد هندسه کیلر می‌توان شار نرمال شده کیلر ــ ریچی را به معادله‌ای از نوع مونژ ــ آمپر سهموی تبدیل کرد:

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \log\frac{\det(g_\circ + \partial\bar{\partial}\varphi)}{\det(g_\circ)} + \frac{r}{n}\varphi - f_\circ \qquad (۲۶)$$

که در آن φ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$g(t) = g_\circ + \partial\bar{\partial}\varphi \qquad (۲۷)$$

به دست آوردن معادله (۲۶) هم آسان است. کافی است از رابطه (۲۷) نسبت به زمان مشتق بگیریم و از رابطهٔ $\frac{\partial}{\partial t}g_{i\bar{j}} = -R_{i\bar{j}} + \frac{r}{n}g_{i\bar{j}}$ استفاده کنیم. (در شار کیلر ــ ریچی برای راحتی محاسبات ضریب ۲ را حذف می‌کنند.)

$$-R_{i\bar{j}} + \frac{r}{n}g_{i\bar{j}} = \frac{\partial}{\partial t}g_{i\bar{j}} = \frac{\partial}{\partial t}\partial_i\bar{\partial}_j\varphi = \partial_j\bar{\partial}_j\frac{\partial}{\partial t}\varphi \qquad (۲۸)$$

پس

$$\partial\bar{\partial}\frac{\partial}{\partial t}\varphi = -Rc + \frac{r}{n}g = -(Rc - Rc_\circ) + \frac{r}{n}(g - g_\circ) - Rc_\circ + \frac{r}{n}g_\circ. \qquad (۲۹)$$

حال کافی است توجه کنیم که $g - g_\circ = \partial\bar{\partial}\varphi$ و طبق قضایای کلاسیک هندسه کیلر:

$$Rc - Rc_\circ = -\partial\bar{\partial}\log\frac{\det g}{\det g_\circ}. \qquad (۳۰)$$

هم چنین چون کلاس اول چرن علامت‌دار است می‌توان $g_\circ$ را طوری انتخاب کرد که کلاس $Rc_\circ - \frac{r}{n}g_\circ$ بدیهی باشد و در نتیجه معادله زیر جواب داشته باشد:

$$Rc_\circ - \frac{r}{n}g_\circ = \partial\bar{\partial}f_\circ \qquad (۳۱)$$

(البته می‌توان نشان داد که معادلهٔ $Rc - \frac{r}{n}g = \partial\bar{\partial}f$ همواره جواب دارد و جواب آن در $R - r = \Delta f$ صدق می‌کند. به تابع f پتانسیل انحنا نیز می‌گویند. به تشابه موجود با پتانسیل انحنای رویه‌ها توجه نمایید.)

حال از رابطهٔ

$$\partial\bar{\partial}\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \partial\bar{\partial}\log\frac{\det g}{\det g_\circ} + \partial\bar{\partial}\frac{r}{n}\varphi - \partial\bar{\partial}f_\circ \qquad (۳۲)$$

به سادگی به معادله (۲٦) می‌رسیم.

همان طور که گفته شد با استفاده از معادله بالا می‌توان وجود متریک‌های کیلر ـ اینشتین روی خمینه‌های کیلر با کلاس اول چرن نامثبت را بسیار ساده‌تر از اثبات اولیه‌اش، ثابت کرد. ولی اگر کلاس اول چرن مثبت باشد، لزوماً متریک کیلر ـ اینشتین روی خمینه موجود نیست. البته روش بالا نشان می‌دهد که شار روی این خمینه‌ها نیز تا بی‌نهایت ادامه می‌یابد. یکی از مسائل مهم در نظریهٔ شار کیلر ـ یچی که در طول بیست سال اخیر مورد توجه افراد فعال در این زمینه بوده است، تحلیل رفتار حدی جواب روی خمینه‌های کیلر با کلاس اول چرن مثبت است. خصوصاً این سوال مطرح بوده است که اگر روی چنین خمینه‌ای متریکی کیلر ـ اینشتین موجود باشد، آیا باز هم شار نرمال شده‌ی کیلر ـ ریچی در بی‌نهایت به آن میل می‌کند. تلاش برای پاسخ دادن به این سؤال منجر به این شد که بسیاری افراد با فرض کردن شرایطی اضافی به آن جواب مثبت دهند. یکی از این شرایط، مثبت بودن انحناهای دو مقطعی خمینهٔ کیلر است که تیان[1] و چن[2] در [6] و [7] به آن پرداخته‌اند. لازم به ذکر است که از قبل معلوم شده بود که شار کیلر ـ ریچی مثبت بودن انحناهای دو مقطعی را حفظ می‌کند [20].

پرلمان در کار منتشر نشده‌ای این مسأله را به طور کامل حل کرد و بدون هیچ شرط اضافی نشان داد که در صورت وجود متریک کیلر ـ اینشتین، شار به آن میل خواهد کرد. برای اطلاعات بیشتر در این زمینه و آخرین پیشرفت‌ها راجع به این مساله به [26] مراجعه نمایید.

یکی دیگر از کاربردهای شار کیلر ـ ریچی در هندسه کیلر اثباتی نو برای حدس فرانکل است که اخیراً ارائه شده است [29].

حدس فرانکل. هر خمینه کیلر فشرده که انحناهای دو مقطعی مثبت دارد یکریخت با فضای افکنشی است.

این اثبات بدون استفاده از وجود متریک کیلر ـ اینشتین مبتنی بر استفاده از روش‌های نوینی است که توسط بوهم[3] و ویلکینگ[4] ابداع شده‌اند [2]. گفتنی است که این روش‌ها برای اثبات حدس هامیلتون مبنی بر این که هر خمینه با عملگر انحنای مثبت فضاگونه کروی است، به‌وجود آمده‌اند و در واقع نشان می‌دهند که شار نرمال شده ریچی روی این خمینه‌ها تا بی‌نهایت ادامه دارد و به متریکی با انحنای ثابت همگرا می‌شود. هامیلتون، خود این مطلب را در ابعاد سه و چهار ثابت کرده بود [12] و [13]. در پایان، لازم است به مقاله‌های [1] و [20] نیز اشاره کنیم که در آنها از شار کیلر ـ ریچی برای طبقه‌بندی خمینه‌های کیلر فشرده با انحناهای دو مقطعی نامنفی، استفاده شده است و در واقع حدس فرانکل را تعمیم داده‌اند.

1) G. Tian 2) X. Chen 3) C. Böhm 4) B. Wilking

مراجع

[1] Bando, Shigetoshi. On the classification of three-dimensional compact Kaehler manifolds of nonnegative bisectional curvature. J. Diff. Geom. 19(1984), n. 2, 283-297.

[2] Böhm, Christoph; Wilking, Burkhard. Manifolds with positive curvature operators are space forms. arXiv: math. DG/0606187.

[3] Cao, Huai-Dong. Deformation of Kähler metrics to Kähler-Einstein metrics on compact Kähler manifolds. Invent. Math. 81(1985), no. 2, 359-372.

[4] Cao, Huai-Dong; Zhu, Xi-Ping. A complete proof of the Poincaré and geometrization conjectures — application of the Hamilton-Perelman theory of the Ricci flow. Asian J. Math. 10(2006), 165-498.

[5] Chen, Bing-Long; Zhu, Xi-Ping. Uniqueness of the Ricci flow on complete noncompact manifolds. arXiv:math. DG/0505447.

[6] Chen, Xiuxiong; Tian, Gang. Ricci flow on Kähler-Einstein surfaces. Invent. Math. 147(2002), no. 3, 487-544.

[7] ———- , ———- . Ricci flow on Kähler-Einstein manifolds. Duke Math. J. 131 (2006), 17-73.

[8] Chow, Bennett. The Ricci flow on the 2-sphere. J. Diff. Geom. 33(1991), no. 2, 325-334.

[9] Chow, Bennett; Knopf, Dan. The Ricci flow: An introduction. Mathematical Surveys and Monographs, AMS, Providence, RI, 2004.

[10] Chow, Bennett; et. al. The Ricci flow: Techniques and Applications, Part 1: Geometric Aspects. Mathematical Surveys and Monographs, AMS, Providence, RI, 2007.

[11] DeTurck, Dennis. Deforming metrics in the direction of their Ricci tensors. Diff. Geom. 18(1983), 157-162.

[12] Hamilton, Richard S. Three manifolds with positive Ricci curvature. J. Diff. Geom. 17(1982), no. 2, 255-306.

[13] ———- . Four manifolds with positive curvature operator. J. Diff. Geom. 24(2986), no. 2, 153-179.

[14] ———- . The Ricci flow on surfaces. Contemp. Math. 71, AMS, Providence, RI, 1988.

[15] ———- . The formation of singularities in the Ricci flow. Surveys in differential geometry, Vol. II, Cambridge, MA, 1993, 7-136.

[16] ———- . A compactness property for solutions of the Ricci flow. Amer. J. Math. 117(1995), no.3, 545-572.

[17] ———- . Four manifolds with positive isotropic curvature. Comm. Anal. Geom. 5(1997), no.1, 1-92.

[18] ———- . Non-singular solutions of the Ricci flow on three manifolds. Comm. Anal. Geom. 7(1999), no.4, 695-729.

[19] Kleiner, Bruce; Lott, John. Notes on Perelamn's papers. arXiv;math. DG/0605667.

[20] Mok, Ngaiming. The uniformization theorem for compact Kähler manifolds of nonnegative holomorphic bisectional curvature. J. Diff. Geom. 27(1988), no.2, 179-214.

[21] Morgan, John; Tian, Gang. Ricci flow and the Poincaré conjecture, Clay Mathematics Monographs, AMS, Providence, RI, 2007.

[22] Perelman, Grisha. The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, arXiv:math., DG/0211159.

[23] ———- . Ricci flow with surgery on three manifolds, arXiv:math., DG/0303109.

[24] ———- . Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three manifolds. arXiv:math., DG/0307245.

[25] Shi, Wan-Xiong. Ricci deformation of the metric on complete noncompact Riemannian manifolds. J. Diff. Geom. 30(1989), no.2, 303-394.

[26] Tian, Gang; Zhu, Xiaohua. Convergence of Kähler-Ricci flow. J. Amer. Math. Soc. 20(2007), no.3, 675-699.

[27] Thurston, William P. Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry. Bull. Amer. Math. Soc. 6(1982), no.3, 357-381.

[28] Waldhausen, F. Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten I,II. Invent. Math. 3(1967), 308-333: 4(1967), 87-117.

[29] Wang, YQ. A new Ricci flow proof of Frankel conjecture. arXiv:math. DG/0608151.

محمد صفدری
دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده علوم ریاضی
msafdari@math.sharif.edu

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۱ (پاییز ۱۳۸۷) صص. ۷۵ تا ۸۹

روش‌های تخمین تعداد صفرهای انتگرال آبلی

حمیدرضا ظهوری زنگنه، علی عطابیگی علمی

چکیده

ارتباط بسیار نزدیکی بین مسألهٔ شانزدهم ضعیف شدهٔ هیلبرت و مسألهٔ یافتن کران بالا برای تعداد صفرهای انتگرال آبلی وجود دارد. این مقاله به بررسی روش‌های مختلف برای تخمین تعداد صفرهای انتگرال آبلی می‌پردازد.

لغات کلیدی: مسألهٔ شانزدهم ضعیف شدهٔ هیلبرت، سیکل‌های حدی، انتگرال آبلی.

مقدمه

یکی از مهم‌ترین مسائل باز در نظریهٔ کیفی معادلات دیفرانسیل تعیین تعداد ماگزیمم **سیکل‌های حدی** (مدارهای تناوبی ایزوله) یک دستگاه چندجمله‌ای مرتبه d در صفحه است که اولین بار توسط هیلبرت در ابتدای قرن گذشته در دومین کنگرهٔ بین‌المللی ریاضی‌دانان در پاریس مطرح شد. این مسأله با گذشت یک سده و اندی علیرغم تحقیقات جدی و چاپ صدها مقاله پیرامون آن هنوز حتی برای $d = ۲$ باز است. شاید بهترین نتیجهٔ به‌دست آمده دراین راستا نتیجه‌ای است که به‌طور مستقل توسط ایلیاشنکو و اکال در ۱۹۹۱ میلادی ثابت شد. آنها نشان دادند که یک دستگاه چندجمله‌ای مفروض دارای تعداد متناهی سیکل حدی است. این نتیجه به قضیهٔ متناهی بودن انفرادی مشهور است [۴].
حال یک اختلال چندجمله‌ای از یک دستگاه هامیلتونی چندجمله‌ای از درجه d به‌صورت زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = H_y(x,y) + \varepsilon f(x,y), \quad \dot{y} = -H_x(x,y) + \varepsilon g(x,y), \qquad (۱)$$

که درآن f ، g و H به‌ترتیب چندجمله‌ای‌هایی نسبت به دو متغیر x و y با حداکثر درجهٔ m, n, n

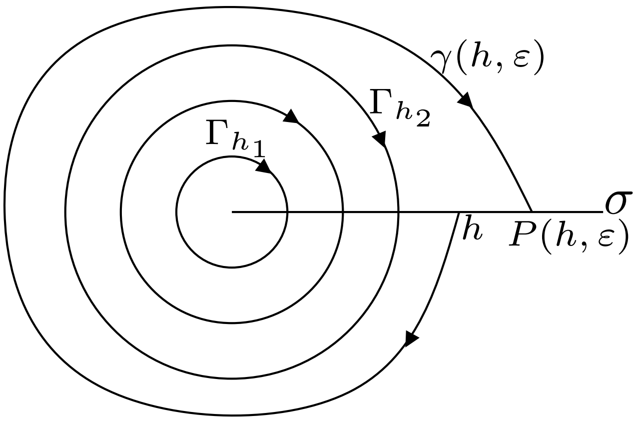
هستند، $d = \max\{m, n\}$ و ε پارامتری کوچک است. دستگاه $\dot{x} = P(x, y),\quad \dot{y} = Q(x, y)$ را انتگرال پذیر گویند هرگاه تابع $V(x, y)$ از رده $\mathcal{C}^{1}$ موجود باشد که روی هیچ زیرمجموعه بازی از $\mathbb{R}^{2}$ ثابت نباشد و مدارهای این دستگاه روی منحنی‌های تراز V قرار داشته باشند. درحالت خاص این دستگاه را هامیلتونی گویند هرگاه تابع $H(x, y)$ از ردهٔ $\mathcal{C}^{1}$ موجود باشد که $\frac{\partial H}{\partial x} = P(x, y)$ و $\frac{\partial H}{\partial y} = -Q(x, y)$. تابع H را تابعی هامیلتونی گویند. واضح است که هر دستگاه هامیلتونی انتگرال پذیراست. در این صورت دستگاه (۱) به ازای $\varepsilon = 0$ یک دستگاه هامیلتونی با تابع هامیلتونی H است و مدارهای آن روی منحنی‌های تراز $\gamma_h =: \{(x, y) : H(x, y) = h\}$ قرار دارند. فرض کنید $\Gamma_h = \{\gamma_h :\ h \in (h_1, h_2)\}$ یک طوق تناوبی (خانواده مدارهای تناوبی غیر ایزوله) باشد و σ یک برش متقاطع باخانواده منحنی‌های تراز γ_h باشد که توسط h پارامتری شده‌اند. هرگاه $\gamma(h, \varepsilon)$ مدار دستگاه مختل شده (۱) با نقطهٔ شروع h در σ باشد، برای ε به اندازه کافی کوچک این مدار مجدداً برش σ را در نقطه‌ای یکتا قطع خواهد کرد که آن را با $P(h, \varepsilon)$ نشان می‌دهیم (شکل ۱ را مشاهده کنید). در این صورت $d(h, \varepsilon) = P(h, \varepsilon) - h$ تابع تغییرمکان یا تابع جابه‌جایی نامیده می‌شود. طبیعی است که تابع تغییر مکان می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$d(h, \varepsilon) = P(h, \varepsilon) - h = \varepsilon I_1(h) + \varepsilon^2 I_2(h) + \cdots + \varepsilon^j I_j(h) + O(\varepsilon^{j+1}). \qquad (۲)$$

در این صورت $I(h) := I_1(h)$ اولین تقریب از تابع تغییر مکان دستگاه مختل شده (۱) را ارائه می‌دهد. از قضیهٔ پوانکاره ـ پونتریاگین نتیجه می‌شود که برای مقادیر کوچک و مثبت ε شرط کافی برای انشعاب یک سیکل حدی از طوق تناوبی Γ_h آن است که $I(h)$ در اولین تقریب نسبت به ε برابر صفر باشد یعنی به ازای هر منحنی بسته γ_h در طوق تناوبی Γ_h داشته باشیم:

$$I(h) := \oint_{\gamma_h} f(x, y)dy - g(x, y)dx = 0, \qquad (۳)$$

عبارت $I(h)$ در (۳) یک انتگرال آبلی نامیده می‌شود که تعداد صفرهای آن یک کران بالا برای تعداد سیکل‌های حدی منشعب شده از طوق تناوبی دستگاه (۱) است. اگر سطح تراز $H = h$ شامل چندین طوق تناوبی باشد برای توابع چندجمله‌ای مفروض f، g و H و برای هر عدد h حقیقی، تابع I در حالت کلی یک تابع چند مقداری است. هرگاه $I(h) \equiv 0$ اختلال (۱) در تقریب مرحله اول نسبت به ε یک دستگاه پایستار (هامیلتونی و یا انتگرال پذیر) است و باید تقریب‌های مرتبه بالاتر را در نظر گرفت. فرانسوا الگوریتمی برای محاسبه $I_j(h)$ با فرض صفر بودن $I_k(h)$، $k \le j$ ارائه داد که در این مقاله به آن نمی‌پردازیم [۴]. تعیین یک کران بالای دقیق از تعداد صفرهای ایزوله $I(h)$ مسأله مماسی و یا مسألهٔ ضعیف شده شانزدهم هیلبرت نامیده می‌شود. با توجه به پیشرفت کند در روند حل مسألهٔ شانزدهم هیلبرت این مسأله در ابتدا توسط آرنولد در ۱۹۷۷ میلادی مطرح [۲،۱] و سپس توسط اسمیل در لیست مسائل حل نشده قرن بیست و یکم قرار گرفت. برای پاسخ دادن به این سؤال روش‌های متفاوتی ارائه شده است که در این مقاله به معرفی برخی از آن‌ها می‌پردازیم.



شکل ۱: $d(h,\varepsilon) = P(h,\varepsilon) - h$

۲. روش مبتنی بر معادلهٔ پیکارد ـ فوکس

در حالت کلی انتگرال آبلی $I(h)$ را می‌توان به صورت مجموع متناهی انتگرال‌هایی به صورت $I_{j,k} := \oint_{\Gamma_h} x^j y^k$ نوشت. خانوادهٔ بزرگی از معادلات دیفرانسیل که در کاربردها اهمیت خاصی دارد، از معادلات لینیارد تشکیل شده است که در این جا به بررسی حداکثر تعداد سیکل‌های حدی آن می‌پردازیم. این معادلات را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -f(x) + \varepsilon y g(x) \end{aligned} \quad (۴)$$

که در آن f و g توابعی چندجمله‌ای هستند. این دستگاه به ازای $\varepsilon = ۰$ هامیلتونی با تابع هامیلتونی $H(x,y) = \frac{۱}{۲}y^۲ + F(x)$ است که در آن $F'(x) = f(x)$. فرض کنید $\{H(x,y) = h,\ h_۱ < h < h_۲\}$ خانواده‌ای از منحنی‌های بسته جبری Γ_h را نشان دهد که مبدأ را احاطه کرده است. هر گاه $g(x) = \Sigma_{k=۰}^{n} a_k x^k$ و قرار دهیم $I_{k۱} = I_k := \oint_{\gamma_h} x^k y dx$، آنگاه $I(h) = \varepsilon[a_۰ I_۰ + a_۱ I_۱ + \cdots + a_n I_n]$. توجه می‌کنیم که طبق قضیهٔ گرین $I_۰ = \oint_{\gamma_h} y dx$ مساحت محصور به γ_h را نشان می‌دهد، لذا به ازای هر $h \in (h_۱, h_۲)$ کمیتی مثبت است. در این صورت $I(h) = \varepsilon I_۰(h)[a_۰ + a_۱(I_۱/I_۰)(h) + \cdots + a_n(I_n/I_۰)(h)]$ و تخمین صفرهای $I(h)$ به تخمین تعداد صفرهای عبارت داخل کروشه منتهی می‌شود. با توجه به این مقدمه به معرفی روش پیکارد ـ فوکس می‌پردازیم. در این روش ابتدا دستگاه معادلات دیفرانسیلی که I_j ها در آن صدق

می‌کنند را می‌یابیم. این دستگاه معادلات دیفرانسیل به دستگاه معادلات پیکارد ـ فوکس مشهور است. با بررسی رفتار کیفی جواب‌های این معادلات، خواص هندسی و رفتارهای مجانبی آنها وقتی h به مقادیر بحرانی h_1 و h_2 میل می‌کند را تعیین می‌کنیم. برای بررسی رفتار هندسی نسبت انتگرال‌های آبلی $P_k(h) = \frac{I_k(h)}{I_0(h)}$، معادلات دیفرانسیلی که هریک از آنها در آن صدق می‌کنند را می‌یابیم. این معادلات از نوع معادلات ریکاتی هستند. حال تعریف برخی مفاهیم مقدماتی را یادآوری می‌کنیم.

دستگاه معادلات دیفرانسیل خودگردان در صفحه

$$\dot{x} = P(x,y), \quad \dot{y} = Q(x,y), \tag{۵}$$

را در نظر بگیرید. نقطهٔ $p = (\bar{x},\bar{y})$ یک نقطهٔ تعادل (یا نقطهٔ بحرانی) دستگاه (۵) است هرگاه $P(\bar{x},\bar{y}) = Q(\bar{x},\bar{y}) = 0$. در واقع نقطهٔ تعادل جواب خاصی از یک دستگاه (۵) است که برای هر $t \in \mathbb{R}$، $\phi_t(p) = p$، که در آن $\phi_t(.)$ جریان تولید شده توسط این دستگاه است. نقطهٔ تعادل p پایدار است هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ یک $\delta > 0$ موجود باشد که اگر $\|q-p\| < \delta$ آن‌گاه $\|\phi_t(q)-p\| < \varepsilon$ به ازای هر $t \geq 0$. p ناپایدار است هرگاه پایدار نباشد. p مجانبی پایدار است هرگاه پایدار باشد و $\delta > 0$ موجود باشد به‌طوری که اگر $\|q-p\| < \delta$ آن‌گاه $\lim_{t\to\infty}\phi_t(q) = p$.

فرض کنید λ و μ مقادیر ویژهٔ ماتریس ژاکوبی میدان برداری دستگاه (۵) در نقطهٔ p باشند در این صورت

(i) اگر $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ و $\lambda\mu < 0$، p یک نقطهٔ تعادل زینی نامیده می‌شود

(ii) اگر $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ و $\lambda\mu > 0$، نقطهٔ تعادل p گره نامیده می‌شود که پایدار است هرگاه $\lambda < 0, \mu < 0$ و ناپایدار است هرگاه $\lambda > 0, \mu > 0$.

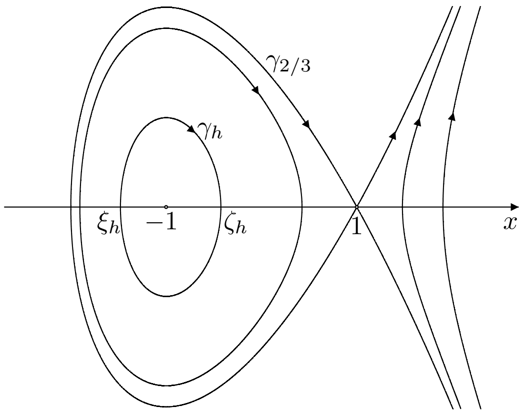
(iii) نقطهٔ تعادل p یک مرکز است اگر یک همسایگی U داشته باشد که برای هر $q \in U \setminus \{p\}$، $P^2(q) + Q^2(q) \neq 0$، و جواب‌های گذرنده از q بسته و احاطه کننده p باشند.

(iv) نقطهٔ تعادل p هذلولوی است اگر قسمت حقیقی مقادیر ویژهٔ ماتریس ژاکوبی ناصفر باشند.

حال همیلتونی $H(x,y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x$ با خانواده منحنی‌های بسته

$$\{\Gamma_h\} = \{(x,y);\ \ H(x,y) = h, \quad -\frac{2}{3} \leq h \leq \frac{2}{3}\},$$

را مطابق شکل (۲) در نظر بگیرید.



شکل ۲: خانوادهٔ بیضی‌های همیلتونی (۵)

دستگاه همیلتونی متناظر، با X_H نشان داده می‌شود. وقتی $h \to -\frac{۲}{۳}$ بیضی Γ_h منقبض شده به مرکز X_H در $(-۱, ۰)$ میل می‌کند و اگر $h \to \frac{۲}{۳}$ این بیضی به یک مدار هموکلینیک میل می‌کند. یادآوری می‌کنیم که: نقطهٔ x را متعلق به مجموعهٔ $\alpha-$ **حدی** (به طور متناظر مجموعهٔ $\omega-$ حدی) مدار نقطهٔ $x_۰$ گویند هرگاه دنبالهٔ t_j موجود باشد که اگر $\lim_{j\to\infty} t_j = -\infty$ ($\lim_{j\to\infty} t_j = \infty$)، آنگاه $\lim_{j\to\infty} \phi_{t_j}(x_۰) = x$. Γ یک مدار هموکلینیک گفته می‌شود هرگاه نقاط $\alpha-$ حدی و $\omega-$ حدی آن نقاط تعادل زینی باشند. یک اختلال X_H به شکل زیررا در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -۱ + x^۲ + \varepsilon(\alpha + x)y, \end{aligned} \tag{۶}$$

که در آن α یک ثابت و ε یک پارامتر کوچک است. انتگرال آبلی متناظر با دستگاه (۶) برابر است با

$$I(h) = \alpha I_۰(h) + I_۱(h), \quad I_j(h) = \oint_{\gamma_h} x^j y dx, \quad j = ۰, ۱ \tag{۷}$$

چون جهت Γ_h ساعتگرد است. با استفاده از قضیهٔ گرین به‌سادگی دیده می‌شود که $I_۰(h)$ مساحت ناحیه محصور به Γ_h است، بنابراین $I_۰(h) > ۰$ برای $h > -\frac{۲}{۳}$. فرض کنید $(\xi_h, ۰)$ و $(\eta_h, ۰)$ $\xi_h < -۱ < \eta_h < ۱$ نقاط تقاطع Γ_h با محور x ها باشند، با استفاده از (۷) داریم، $I_j(h) = ۲\int_{\xi_h}^{\eta_h} x^j y dx,$. از طرفی

$$H(x,y) = h \ \Rightarrow \ \frac{y^۲}{۲} - \frac{x^۳}{۳} + x = h \ \Rightarrow \ y\frac{\partial y}{\partial h} = ۱ \ \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial h} = \frac{۱}{y}.$$

در نتیجه

$$I'_j(h) = \oint_{\gamma_h} x^j \frac{\partial y}{\partial h} dx = \oint_{\gamma_h} \frac{x^j}{y} dx = ۲ \int_{\xi_h}^{\eta_h} \frac{x^j}{y} dx, \qquad (۸)$$

که در آن $y(x,h) \geq ۰$ با استفاده از $H(x,y) = h$ تعیین می‌شود. از طرفی

$$I_j(-\frac{۲}{۳}) = \lim_{h \to -\frac{۲}{۳}^+} \int\int_{H \leq h} x^j dxdy = ۰ \quad j = ۰, ۱.$$

در نتیجه با استفاده از (۷)، قاعدهٔ هوپیتال و همچنین قضیهٔ مقدار میانگین برای انتگرال‌ها، داریم

$$\lim_{h \to -\frac{۲}{۳}^+} \frac{I_۱(h)}{I_۰(h)} = \lim_{h \to -\frac{۲}{۳}^+} \frac{I'_۱(h)}{I'_۰(h)} = \lim_{h \to -\frac{۲}{۳}^+} \frac{\zeta_h \int_{\xi_h}^{\eta_h} \frac{dx}{y}}{\int_{\xi_h}^{\eta_h} \frac{dx}{y}} = -۱,$$

که در آن $\xi_h < \zeta_h < \eta_h$ و $\lim_{h \to -\frac{۲}{۳}^+} \xi_h = \lim_{h \to -\frac{۲}{۳}^+} \eta_h = -۱$. تابع $P(h)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P(h) = \begin{cases} \frac{I_۱(h)}{I_۰(h)}, & h \in (-\frac{۲}{۳}, \frac{۲}{۳}], \\ -۱, & h = -\frac{۲}{۳}. \end{cases} \qquad (۹)$$

در نتیجه رابطهٔ (۷) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$I(h) = I_۰(h)(\alpha + P(h)). \qquad (۱۰)$$

در ادامه ثابت می‌کنیم که به ازای $h \in (-\frac{۲}{۳}, \frac{۲}{۳})$، $P'(h) > ۰$ و بنابراین (۱۰) نتیجه می‌دهد که $I(h)$ حداکثر دارای یک صفر است.

لم ۱. $I_۰(h)$ و $I_۱(h)$ در معادلهٔ پیکارد ـ فوکس زیر صدق می‌کنند:

$$(۹h^۲ - ۴)\frac{d}{dh} \begin{pmatrix} I_۰ \\ I_۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{۱۵h}{۲} & ۷ \\ ۵ & \frac{۲۱}{۲} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_۰ \\ I_۱ \end{pmatrix} \qquad (۱۱)$$

اثبات. از رابطهٔ (۸) و این واقعیت که در طول Γ_h، $y^۲ = ۲h + \frac{۲}{۳}x^۳ - ۲x$ ، نتیجه می‌شود که

$$I_j(h) = \int_{\gamma_h} \frac{x^j y^۲}{y} dx = ۲hI'_j(h) - ۲I'_{j+۱}(h) + \frac{۲}{۳}I'_{j+۳}(h). \qquad (۱۲)$$

از طرفی، از فرمول انتگرال‌گیری جزء به جزء و این واقعیت که در طول Γ_h، $ydy = (-۱ + x^۲)dx$، نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} I_j(h) &= ۲ \int_{\xi_h}^{\eta_h} x^j y dx = ۲ \left(\frac{۱}{j+۱} x^{j+۱} y(x,h)|_{\xi_h}^{\eta_h} - \int_{\xi_h}^{\eta_h} \frac{x^{j+۱}(-۱ + x^۲)}{(j+۱)y} dx \right) \\ &= \frac{۱}{j+۱} \left(I'_{j+۱}(h) - I'_{j+۳}(h) \right). \end{aligned} \qquad (۱۳)$$

از حذف $I'_{j+3}(h)$ در (۱۲) و (۱۳) به‌دست می‌آید:

$$(2j+5)I_j(h) = 6hI'_j(h) - 4I'_{j+1}(h).$$

که از قرار دادن $j = 0, 1$، نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} 5I_0(h) &= 6hI'_0(h) - 4I'_1(h), \\ 7I_1(h) &= 6hI'_1(h) - 4I'_2(h). \end{aligned} \qquad (14)$$

توجه می‌کنیم که در طول Γ_h داریم $y^2dy = (-1+x^2)ydx$. بنابراین

$$0 = \oint_{\gamma_h} y^2 dy = \oint_{\gamma_h} (-1+x^2)ydx \Rightarrow I_2(h) \equiv I_0(h).$$

با قرار دادن $I'_0(h)$ به جای $I'_2(h)$ در (۱۴) و با به‌دست آوردن $I'_0(h)$ و $I'_1(h)$ از این معادله، نتیجه می‌شود

$$\begin{cases} 6hI'_0(h) - 4I'_1(h) = 5I_0(h) \\ -4I'_0(h) + 6hI'_1(h) = 7I_1(h) \end{cases}$$
$$\Rightarrow I'_0(h) = \frac{\det\begin{pmatrix} 5I_0 & -4 \\ 7I_1 & 6h \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 6h & -4 \\ -4 & 6h \end{pmatrix}}, \quad I'_1(h) = \frac{\det\begin{pmatrix} 6h & 5I_0 \\ -4 & 7I_1 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 6h & -4 \\ -4 & 6h \end{pmatrix}}.$$

که معادلهٔ (۱۱) را نتیجه می‌دهد. ■

قضیهٔ ۱. تابع $P(h)$ تعریف شده در (۹) به ازای $h \in (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$، اکیداً صعودی است.

برهان. از تعریف (۹) بر می‌آید که

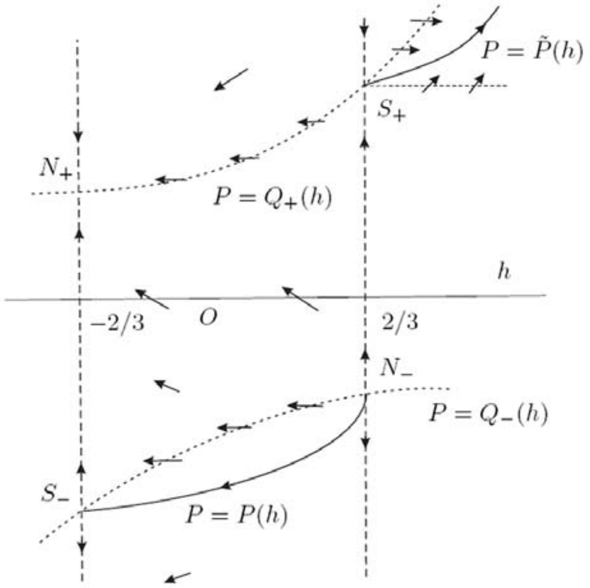
$$P'(h) = \frac{I'_1(h)}{I_0(h)} - \frac{I'_0(h)}{I_0(h)}P(h).$$

با جایگذاری (۱۱) در برابری فوق، نتیجه می‌شود که

$$P'(h) = \frac{5I_0 - \frac{21}{2}I_1}{(9h^2-4)I_0} - \frac{\frac{15}{2}hI_0 + 7I_1}{(9h^2-4)I_0} \Longrightarrow (9h^2-4)P' = -7P^2 + 3hP + 5.$$

این معادله، یک معادلهٔ ریکاتی است و معادل با دستگاه زیر است.

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = -7P^2 + 3hP + 5 \\ \frac{dh}{dt} = 9h^2 - 4. \end{cases} \qquad (15)$$



شکل ۳: رفتار میدان برداری (۱۷) و تابع $P(h)$

این دستگاه دارای خطوط پایای $\{h=\pm\frac{۲}{۳}\}$ است (یعنی اگر $\phi^t(.)$ جریان تولید شده توسط (۱۵) و $x\in\{h=\pm\frac{۲}{۳}\}$، آنگاه $(\phi^t(x)\in\{h=\pm\frac{۲}{۳}\})$ و هر ۴ نقطه بحرانی (تعادل) این دستگاه روی این دو خط قرار دارند: یک زین در $S_-(-\frac{۲}{۳},-۱)$ و یک گره در $N_-(\frac{۲}{۳},-\frac{۵}{۷})$ واقع در نیم صفحه پایین و یک زین در $S_+(\frac{۲}{۳},۱)$ و یک گره در $N_+(-\frac{۲}{۳},\frac{۵}{۷})$ واقع در نیم صفحه بالا. تعریف (۹) نشان می‌دهد که نمودار تابع $P=P(h)$ منیفلد پایدار S_- است، به این معنی که یک همسایگی U از S_- موجود هست که مجموعه $\{x\in U;\ \phi^t(x)\in U, t\geq ۰, \lim_{t\to\infty}\phi^t(x)=S_-\}$ توسط نمودار P نمایش داده می‌شود. در واقع $P=P(h)$ یک جواب دستگاه (۱۵) است که از نقطهٔ $(-\frac{۲}{۳},-۱)$ می‌گذرد و هم‌چنین با افزایش h به سمت گره ناپایدار N_- میل می‌کند. زیرا با توجه به شکل (۳) جهت میدان برداری روی خط $\{(h,P);\quad P=۰\}$ به سمت بالاست ($\frac{dP}{dt}>۰$). از طرف دیگر، از معادلهٔ اول (۱۵) نتیجه می‌شود که

$$۰=\frac{dP}{dt}=-۷P^۲+۳hP+۵\Longrightarrow P=Q_\pm(h)=\frac{۳h\pm\sqrt{۹h^۲+۱۴۰}}{۱۴}$$

که در آن $Q_\pm(h)$ دو شاخه هذلولوی هستند که در طول آنها $\frac{dP}{dt}=۰$. این دو شاخه نوار $\{(h,P);\ -\frac{۲}{۳}<h<\frac{۲}{۳}\}$ را به سه ناحیه تقسیم می‌کنند، که در آنها جهت میدان برداری (۱۵) در

ناحیه‌های بالا و پایین به سمت پایین و در ناحیه وسط به سمت بالاست. با محاسبهٔ مستقیم شیب خم $P=P(h)$ در نقطه S_- دیده می‌شود که

$$\frac{dP}{dh}\mid_{S_-}=(\frac{dP}{dt}.\frac{dt}{dh})\mid_{S_-}=\frac{۱}{۸}$$

در حالی‌که شیب $P=Q_-(h)$ در همین نقطه برابر $\frac{۵}{۲۸}$ است. بنابراین منحنی $P=P(h)$ در نزدیکی نقطه S_- در پایین منحنی $P=Q_-(h)$ قرار دارد و لذا در کل بازه $(-\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳})$ نیز در پایین آن باقی می‌ماند، زیرا در زیر $P=Q_-(h)$ جهت میدان برداری (۱۵) رو به پایین است، (شکل (۳) را ببینید). بنابراین به‌ازای $h\in(-\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳})$، $P'(h)>۰$ زیرا در پایین شاخه $P=Q_-(h)$، $\frac{dP}{dt}$ و $\frac{dh}{dt}$ منفی هستند. ■

۳. روش معدل‌گیری

در این بخش کاربردی از روش معدل‌گیری در زمینهٔ مطالعهٔ مسألهٔ شانزدهم ضعیف شده هیلبرت در [۳] به‌طور خلاصه معرفی می‌شود. در برخی موارد استفاده از این روش معادل مطالعه انتگرال‌های آبلی است، ولی در برخی دیگر از موارد یکی از آنها مؤثرتر و مناسب‌تر از دیگری است. ابتدا چند قضیهٔ کلی بدون اثبات ارائه می‌شود، سپس این روش برای مطالعهٔ اختلال درجه دوم از یک دستگاه ناهمیلتونی برگشت پذیر مرتبه دوم استفاده می‌شود. یک دستگاه را برگشت پذیر گویند هرگاه شکل کلی آن به صورت زیر باشد:

$$\begin{aligned}\dot{x}&=-y-(a+b-۲)x^{۲}+(a+b-۲)y^{۲},\\ \dot{y}&=x-۲(a-b)xy\end{aligned}$$

که در آن a، b و c اعداد حقیقی ثابت هستند.

نظریه معدل‌گیری در حالت کلی در یک فضای با بعد متناهی دلخواه به کار می‌رود. چون در این قسمت از آن برای مطالعهٔ دستگاه‌های خودگردان در حالت یک بعدی استفاده می‌شود، قضیهٔ (۲) معدل‌گیری مرتبهٔ اول را ارائه می‌دهد، برای اثبات، [۱۲] را ببینید. تعاریف مورد نیاز در این بخش عبارتند از:

تعریف ۱. مسألهٔ مقدار اولیهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}=\varepsilon f(t,x)+\varepsilon^{۲}h(t,x,\varepsilon),\quad x(۰)=x_۰ \tag{۱۶}$$

که در آن $x,y,x_۰\in D$، D یک زیر مجموعه باز در $\mathbb{R}$ و $t\in[۰,\infty)$، $\varepsilon\in(۰,\varepsilon_۰]$؛ هم‌چنین توابع f و h متناوب با دورهٔ تناوب T نسبت به t هستند. در این صورت معادلهٔ

$$\dot{y}=\varepsilon\overline{f}(y),\quad y(۰)=x_۰, \tag{۱۷}$$

را معادلهٔ معدل (۱۶) گویند که در آن

$$\overline{f}(y) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t,y)dt. \qquad (18)$$

قضیهٔ ۲. در مسألهٔ مقدار اولیه (۱۶) فرض کنید که

(i) f، $\frac{\partial f}{\partial x}$، $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ و $\frac{\partial h}{\partial x}$ ، پیوسته و به‌وسیلهٔ یک ثابت مستقل از ε در $D \times [0,\infty)$ و $\varepsilon(0,\varepsilon_0)$ کراندار باشند،

(ii) T مستقل از ε است ،

(iii) $y(t)$ روی مقیاس زمانی از مرتبه $\frac{1}{\varepsilon}$، متعلق به D است.

آن گاه گزاره‌های زیر برقرارند.

(a) روی مقیاس زمانی از مرتبهٔ $\frac{1}{\varepsilon}$، اگر $\varepsilon \to 0$ آنگاه

$$x(t) - y(t) = O(\varepsilon).$$

(b) اگر p یک نقطهٔ تعادل هذلولوی دستگاه معدل (۱۷) باشد، آن‌گاه (۱۶) یک جواب $T-$ تناوبی $\phi(t,\varepsilon)$ نزدیک به p است که $\lim_{\varepsilon\to 0}\phi(t,\varepsilon) = p$ و اگر p مجانبی پایدار باشد، آن‌گاه جواب تناوبی متناظر $\phi(t,\varepsilon)$ در فضای (t,x) برای ε به اندازهٔ کافی کوچک، مجانبی پایدار است و اگر ناپایدار باشد آن‌گاه $\phi(t,\varepsilon)$ ناپایدار است. ■

حال یک اختلال از یک دستگاه انتگرال‌پذیر مسطح به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$X_\varepsilon : \begin{cases} \dot{x} = P(x,y) + \varepsilon p(x,y) \\ \dot{y} = Q(x,y) + \varepsilon q(x,y) \end{cases} \qquad (19)$$

که در آن $P,Q,p,q \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. فرض کنید که X_0 دارای عامل انتگرال‌ساز $\mu(x,y) \neq 0$، انتگرال اول H وخانواده بیضی‌های پیوسته

$$\gamma_h \subset \{(x,y) : H(x,y) = h, h_1 < h < h_2\}, \qquad (20)$$

باشد. برای مطالعهٔ تعداد سیکل‌های حدی دستگاه (۱۹) باید این دستگاه را به فرم معادلهٔ (۱۶) نمایش دهیم:

قضیهٔ ۳. ([۴]) فرض کنید که به ازای هر (x,y) در مجموعه شامل بیضی‌های $\{\gamma_h\}$، $xQ(x,y) - yP(x,y) \neq 0$ و $\rho : (\sqrt{h_1},\sqrt{h_2}) \times [0,2\pi) \longrightarrow [0,\infty)$ یک تابع پیوسته باشد به‌طوری‌که برای هر $R \in (\sqrt{h_1},\sqrt{h_2})$ و برای هر $\varphi \in [0,2\pi)$،

$$H(\rho(R,\varphi)\cos\varphi, \rho(R,\varphi)\sin\varphi) = R^2. \qquad (21)$$

در این صورت معادلهٔ دیفرانسیلی که ارتباط بین ریشه دوم انرژی $R = \sqrt{h}$، و زاویه φ را برای دستگاه (۱۹) توصیف می‌کند به‌صورت زیر است:

$$\frac{dR}{d\varphi} = \varepsilon \frac{\mu(x^2+y^2)(Qp-Pq)}{2R(xQ-yP)}\left(1 - \varepsilon\frac{xq-yp}{xQ-yP}\right) + O(\varepsilon^3) \qquad (22)$$

که در آن $x = \rho(R,\varphi)\cos\varphi$ و $y = \rho(R,\varphi)\sin\varphi$.

مثال ۱. ([۴]) دستگاه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x^2 + \varepsilon p(x,y) \\ \dot{y} = x + xy + \varepsilon q(x,y) \end{cases} \qquad (23)$$

که در آن $p(x,y) = a_1 x - a_3 x^2 + (2a_1 + a_5)xy + a_6 y^2$ و $q(x,y) = a_1 y + a_2 x^2 + a_4 xy - a_2 y^2$.

توجه کنید که برای $\varepsilon = 0$، دستگاه (۲۳) یک دستگاه انتگرال‌پذیر برگشت‌پذیراست که دارای انتگرال اول $H(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{(1+y)^2}$ و فاکتور انتگرال $2(1+y)^{-3}$ است. که در آن منظور از انتگرال اول یک تابع غیر ثابت است که در طول جواب‌های دستگاه ثابت باشد و یک فاکتور انتگرال تابع ناصفری چون $R(x,y)$ است به‌طوری‌که $\nabla\cdot(R(x,y)(-y+x^2, x+xy)) = 0$. با استفاده از قضیهٔ (۳) و با قراردادن $x = \rho\cos\varphi$ و $y = \rho\sin\varphi$، برای $0 < R < 1$ و $\varphi \in [0, 2\pi)$ داریم:

$$H(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = R^2 \Rightarrow \frac{\rho}{1+\rho\sin\varphi} = R \Rightarrow \rho = \rho(R,\varphi) = \frac{R}{1-R\sin\varphi}.$$

بنابراین با استفاده از (۲۲)، از دستگاه (۲۳) و جای‌گذاری $x = \rho\cos\varphi$، $y = \rho\sin\varphi$ و $\rho = \frac{R}{1-R\sin\varphi}$ نتیجه می‌شود

$$\frac{dR}{d\varphi} = \varepsilon\frac{a_1 R + a(\varphi)R^2 + b(\varphi)R^3}{1 - R\sin\varphi} + O(\varepsilon^2),$$

که در آن

$$\begin{aligned} a(\varphi) &= (-2a_1 + 3a_2 + a_5)\sin\varphi + (a_4 + a_6)\cos\varphi - (4a_2 + a_5)\sin^3\varphi \\ &- (a_3 + a_4 + a_6)\cos^3\varphi, \\ b(\varphi) &= a_1 + a_2 - (a_1 + 2a_2)\cos^2\varphi - a_4\sin\varphi\cos\varphi. \end{aligned}$$

حال با انتگرال‌گیری، تابع معدل به شکل زیر تبدیل می‌شود

$$\begin{aligned} \overline{f}(R) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a_1 R + a(\varphi)R^2 + b(\varphi)R^3}{1 - R\sin\varphi}d\varphi \\ &= \frac{1}{2(R\sqrt{1-R^2})}[2a_2R^4 + (6a_2 + a_5 - 2a_1)R^2\sqrt{1-R^2} \\ &\quad -(10a_2 + 2a_5)R^2 - (2a_5 + 8a_2)\sqrt{1-R^2} + 8a_2 + 2a_5]. \end{aligned}$$

توجه کنید که $R\in(۰,۱)$. با جای‌گذاری $\xi=\sqrt{۱-R^۲}$ در $\overline{f}$ از $\overline{f}(\xi)=۰$ نتیجه می‌شود:

$$\overline{f}(\xi)=\frac{۱}{۲(\xi\sqrt{۱-\xi^۲})}\Big(۲a_۲\xi^۴-(٦a_۲+a_۵-۲a_۱)\xi^۳$$
$$+(٦a_۲+۲a_۵)\xi^۲+(a_۵-۴a_۲-۲a_۱)\xi\Big)=۰$$

بنابراین، طبق قاعدهٔ دکارت[1] که بیان می‌کند حداکثر تعداد ریشه‌های مثبت یک چندجمله‌ای، یکی کمتر از تعداد ضرایب ناصفر آن است و هم‌چنین چون ۰ یکی از ریشه‌های $\overline{f}(\xi)$ است، بنابراین، حداکثر تعداد ریشه‌های $\overline{f}(\xi)$ برای $R\in(۰,۱)$ برابر $۲=۱-۱-۴$ است. بنابراین دستگاه (۲۳) حداکثر دارای ۲ سیکل حدی برای ε به اندازهٔ کافی کوچک است.

۴. روش مبتنی بر اصل شناسه

در این بخش یک روش برای مطالعهٔ تعداد صفرهای انتگرال آبلی معرفی می‌شود که از اصل شناسه استفاده می‌کند. پترف[2] در یک سری از مقالات [۷]−[۱۱] از این روش برای مطالعه اختلال همیلتونی بیضوی مرتبهٔ ۳ و مرتبهٔ ۴ استفاده کرد، بنابراین در بعضی متون این روش، روش پترف نامیده می‌شود. در این روش با توسیع انتگرال آبلی $I(h)$ به صورت یک تابع تحلیلی و تک مقدار در صفحه مختلط با استفاده از اصل شناسه یک کران بالا برای تعداد صفرهای تابع توسعه یافته می‌یابیم. واضح است که این کران یک کران بالا برای انتگرال آبلی تابع حقیقی مقدار $I(h)$ است.
از این روش برای مطالعه همیلتونی

$$H(x,y)=\frac{y^۲}{۲}-\frac{x^۳}{۳}+x,$$

با خانواده پیوسته بیضی‌های

$$\{\gamma_h\}=\{(x,y):\ H(x,y)=h,-\frac{۲}{۳}\leq h\leq\frac{۲}{۳}\},\qquad (۲۴)$$

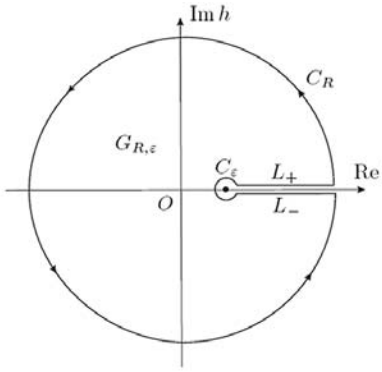
و انتگرال آبلی $I(h)=\oint_{\gamma_h}f(x,y)dy-g(x,y)dx$، ولی برای اختلال با چندجمله‌ای از درجهٔ دلخواه n استفاده می‌کنیم. نتیجه اصلی این بخش، قضیهٔ زیراست:

قضیهٔ ۴. هر $I(h)$ غیربدیهی یعنی انتگرال آبلی چندجمله‌ای ۱ ــ فرم از درجهٔ حداکثر n روی بیضی (۲۴)، حداکثر دارای $n-۱$ صفر برای $h\in(-\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳})$ است.

ابتدا چند لم را بدون اثبات بیان و سپس قضیه (۴) را با استفاده از این لم‌ها ثابت می‌کنیم. فرض کنید $D=\mathbb{C}\setminus\{h\in\mathbb{R},\ h\geq\frac{۲}{۳}\}$، ناحیهٔ همبند سادهٔ $G=G_{R,\varepsilon}\subset D$ با مرز ساده و بستهٔ $\partial G=C_{R,\varepsilon}$ به صورت $C_{R,\varepsilon}=\{C_R\}\cup\{C_\varepsilon\}\cup\{L_\pm\}$ تعریف می‌شود که در آن

1) Descarte's rule   2) G.S. Petrov

$C_R=\{h\in\mathbb{C},\ |h|=R\gg ۱\}$، $C_\varepsilon=\{h\in\mathbb{C},\ |h-\frac{۲}{۳}|=\varepsilon\ll ۱\}$ و $L_\pm$ مرزهای بالایی و پایینی برش $\{h\ge\frac{۲}{۳}\}$ هستند، شکل (۴) را ببینید.



شکل ۴. ناحیهٔ $G_{R,\varepsilon}$ و مرزهای آن

لم ۲. ([۸]) $I(h)$ را می‌توان به ناحیهٔ D به عنوان یک تابع تحلیلی تک ـ مقدار توسعه داد و مجدداً از نماد $I(h)$ برای نمایش تابع توسعه یافته استفاده می‌کنیم. به‌علاوه، برای h در همسایگی بینهایت $I_۰(h)\sim h^{\frac{۵}{۶}}$ و $I_۱(h)\sim h^{\frac{۷}{۶}}$.

لم ۳. ([۹]) $ImI_۰(h)\neq ۰$ ، $ImI_۱(h)\neq ۰$ برای $h\in L_+\cup L_-$.

لم ۴. ([۴]) $I_۰(h)\neq ۰$ برای $h\in G\setminus\{-\frac{۲}{۳}\}$.

لم ۵. ([۴]) $Im(\frac{I_۱(h)}{I_۰(h)})\neq ۰$ برای $h\in L_+\cup L_-$.

اثبات قضیهٔ ۴. با استفاده از لم ۱.۲.۹ در ([۴]) انتگرال آبلی $I(h)$ را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$I(h)=Q_۰(h)I_۰(h)+Q_۱(h)I_۱(h),$$

که در آن $I_j(h)=\oint_{\gamma_h} x^j y\,dx$، $j=۰,۱$ و $Q_۰$ و $Q_۱$ چندجمله‌ای‌هایی حقیقی هستند با $degQ_۰\le[\frac{n-۱}{۲}]=n_۰$ ، $degQ_۱\le[\frac{n}{۲}]-۱=n_۱$. توجه کنید که $n_۰+n_۱=n-۲$. از لم (۴) نتیجه می‌شود که $h=-\frac{۲}{۳}$ تنها صفر $I_۰(h)$ است و طبق فرمول (۹)، $\lim_{h\to-\frac{۲}{۳}^+}\frac{I_۱(h)}{I_۰(h)}=-۱$، بنابراین به جای تعداد صفرهای $I(h)$ در فرم بالا، تعداد صفرهای تابع زیر مورد بررسی قرار خواهد

گرفت،

$$F(h) = Q_0(h) + \frac{I_1(h)}{I_0(h)} Q_1(h).$$

توجه شود که صفر بدیهی $I(h)$ در $h = -\frac{2}{3}$ برای $F(h)$ را می‌توان حذف کرد. حال برای بررسی تعداد صفرهای $F(h)$ در $G_{R,\varepsilon}$، برای R و $\frac{1}{\varepsilon}$ مثبت و به اندازه کافی بزرگ، از اصل شناسه استفاده می‌کنیم. ثابت می‌شود که عدد دوران F هنگامی که h روی مرز $G_{R,\varepsilon}$ می‌چرخد حداکثر $n - 1$ است.

اگر C یک مسیر بستهٔ ساده باشد و تابع f در درون و روی C تحلیلی و ناصفر باشد، دراین‌صورت تعداد صفرهای f در درون C برابر با تغییرات شناسه f در طول C (تقسیم بر 2π) است. به این مقدار،**عدد دوران یا پیچش** f روی C گویند.

از لم (۲) نتیجه می‌شود که با تغییر h در طول C_R و در جهت مثلثاتی تابع $F(h)$ حداکثر $\max(n_0, n_1 + \frac{1}{2}) = \alpha$ دور در اطراف صفر می‌چرخد، چون عدد حقیقی مثبت M موجود است که هرگاه $h \to \infty$، $|F(h)| < M|h|^\alpha$. از طرف دیگر هرگاه متغیر h در طول برش $L_\pm$ حرکت کند، تعداد چرخش‌های $F(h)$ در اطراف ۰ توسط تعداد صفرهای $Im(F(h))$ تخمین زده می‌شود. بنا بر لم (۵) تعداد صفرهای $Im(F(h))$ برای $h \in L_+ \cup L_-$ حداقل $2n_1$ است زیرا

$$Im(F(h)) = Im(\frac{I_1(h)}{I_0(h)})Q_1(h).$$

و چون هر دور کامل از $F(h)$ متناظر با حداقل ۲ صفر برای $Im(F(h))$ است، لذا تعداد دورهای کامل $F(h)$ روی این دو حاشیه حداکثر $n_1 + 1$ می‌باشد (کمتر از یک نصف دور به هر کدام از لبه‌ها اضافه شده) و در نهایت، هنگامی‌که h در طول C_ε ساعتگرد حرکت می‌کند، تعداد دورهای کامل F وقتی $\varepsilon \to 0$، به سمت صفر میل می‌کند، زیرا وقتی $h \to \frac{2}{3}$، $\frac{I_1}{I_0}$ به سمت یک عدد ثابت میل می‌کند (وقتی $h \to \frac{2}{3}$ آن‌گاه بیضی Γ_h به سمت حلقه زینی Γ می‌رود و انتگرال‌های I_1, I_0 روی این حلقه اعداد حقیقی معینی هستند). با جمع‌بندی بحث فوق، نتیجه می‌شود که تعداد دورهای کامل $F(h)$ حداکثر برابر است با $\max(n_0 + n_1 + 1, 2n_1 + \frac{4}{3}) = n - 1$. توجه کنید که عدد دوران باید عددی صحیح باشد. ■

مراجع

[1] Arnold V.I., Loss of stability of self-oscillations close to resonance and versal deformations of equivariant vector fields, Funct. Anal. Appl. 11(1977) 85-92.

[2] Arnold V.I., Ten problems, Adv. Soviet Math. 1(1990) 1-8.

[3] Buica A.,Llibre J., Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree, Bull. Sci. Math. 128(2004)7-22.

[4] Christopher C., Li C., Limit Cycles of Differential Equations, Advanced course in Mathematics, Birkhäuser Verlag, (2000).

[5] Iliev I. D., On second order bifurcation of limit cycles, J. London Math. Soc. 58(1998)353-366.

[6] Iliev I. D., Perturbations of quadratic centers, Bull. Sci. Math. 122(1998) 107-161.

[7] Petrov G. S., Number of zeros of complete elliptic integrals, English transl., Funct. Anal. Appl. 18(1984)148-149.

[8] Petrov G. S., Elliptic integrals and their nonoscillation, English transl., Funct. Anal. Appl. 20(1986) 37-40.

[9] Petrov G. S., The Chebyschev property of elliptic integrals, English transl., Funct. Anal. Appl. 22(1988) 72-73.

[10] Petrov G. S., Non-oscillations of elliptic integrals, English transl., Funct. Anal. Appl. 24(1990) 205-210.

[11] Petrov G. S., On the non-oscillations of elliptic integrals, English transl., Funct. Anal. Appl. 31(1997) 262-265.

[12] Sanders J. A., Verhulst F., Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems, Appl. Math. Sci. 59, Springer, (1985).

[۱۳] دانیار الهی، حمیدرضا ظهوری زنگنه، ارتباط مسألهٔ شانزدهم هیلبرت با انتگرال‌های آبلی و چند روش برای بررسی یکنوایی دو انتگرال آبلی، فرهنگ و اندیشه ریاضی، ۳۲(۱۳۸۳) ۴۴−۳۸.

علی عطابیگی علمی

حمیدرضا ظهوری زنگنه hamidz@cc.iut.ac.ir

دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان