

فرهنگ و اندیشه ریاضی

سال ۲۸، شماره ۲، پاییز ۱۳۸۸

(تاریخ انتشار: زمستان ۱۳۸۸)

شماره پیاپی: ۴۳

فرهنگ و اندیشه ریاضی هر سال در دو شماره (بهار و پاییز) منتشر و به اعضای حقیقی، حقوقی و مشترکین انجمن ریاضی ایران ارسال می‌شود.

علاقه‌مندان به عضویت حقیقی و دانشگاه‌ها، مؤسسات و کتابخانه‌ها که تمایل به عضویت حقوقی یا اشتراک سالانه دارند می‌توانند با دبیرخانه انجمن ریاضی ایران تماس حاصل نمایند.

شماره‌های قبلی مجله را می‌توانید از دبیرخانه انجمن ریاضی ایران خریداری فرمایید.

فهرست مطالب

طولانی‌ترین زیر دنباله‌های صعودی و مدل

الدوس - دیاکونیس - همزلی،

فریدون رضاخانلو، مترجم: یوسف امیرارجمند ۱

برنامه‌ریزی خطی نیمه نامتناهی، الگوریتم‌های حل و کاربدها،

سارا ابراهیمی، علیرضا فخارزاده جهرمی ۳۵

ماتریس نمایی e^{At} در فیزیک،

طاهره زارع - جواد بهبودیان ۵۳

در پائیز اتفاق می‌افتد!

احسان ممتحن ۷۵

حدس بس؟ اجماع پیش رو درباره اثبات حدس‌های

پوآنکاره و هندسی سازی،

الین جکسون، مترجم: سید محمد باقر کاشانی ۸۵

روی جلد: چانگ (Kai Lai Chung) (به مناسبت

درگذشت وی در اول ژوئن ۲۰۰۹ در سن ۹۱ سالگی)

طولانی‌ترین زیر دنباله‌های صعودی و مدل الدوس - دیاکونیس - همرزلی*

فریدون رضاخانلو

مترجم: یوسف امیرارجمند

مقدمه

بحث را با توصیف یک مسأله کلاسیک ترکیبیات شروع می‌کنیم. فرض می‌کنیم S_n مجموعه جایگشت‌های مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ باشد. به ازای هر جایگشت

$$\Pi: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$$

می‌گوییم n یک زیردنباله صعودی است هرگاه

$$\Pi(i_1) < \Pi(i_2) < \dots < \Pi(i_k).$$

مثلا جایگشت

$$\Pi(1) = 4, \Pi(2) = 9, \Pi(3) = 2, \Pi(4) = 5, \Pi(5) = 6,$$

$$\Pi(6) = 10, \Pi(7) = 1, \Pi(8) = 7, \Pi(9) = 8, \Pi(10) = 3$$

یا به عبارت ساده‌تر

$$7, 3, 10, 1, 4, 5, 8, 9, 2, 6$$

تعداد زیادی زیردنباله صعودی دارد، اما دوتای از آنها دارای بیشترین طول ممکن‌اند که عبارتند از

$$3, 4, 5, 8, 9 \quad , \quad 1, 4, 5, 8, 9$$

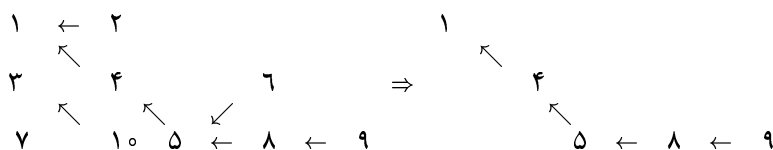
از اینجا، نگاهت $L_n: S_n \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ تعریف می‌شود که در آن طول طولانی‌ترین

*) D. J. Aldous - P. Diaconis - Hammersley

زیردنباله صعودی هر جایگشت در S_n است. L_n در یک نوع فال ورق نیز دیده می‌شود که ذکر آن در اینجا بی‌مناسبت نیست. یک دست ورق شامل n ورق را در نظر می‌گیریم که از ۱ تا n شماره‌گذاری شده‌اند. ورق‌ها را بُر می‌زنیم و فالی با قواعد زیر تعریف می‌کنیم: ورقی با شماره پایین‌تر را می‌توانیم روی ورقی با شماره بالاتر قرار دهیم و یا این که با آن، ستون جدیدی در سمت راست ستون‌های موجود ایجاد کنیم. اگر هدف این باشد که طوری بازی کنیم که در انتها تعداد ستون‌ها حداقل ممکن باشد، در این صورت دقیقاً L_n ستون باقی خواهد ماند. در واقع، الگوریتم ساده‌ای برای رسیدن به این هدف وجود دارد. استراتژی طماع این کار را انجام می‌دهد. بر طبق این استراتژی، همیشه باید ورق جدید را در آخرین ستون ممکن دست چپ قرار داد. اگر این استراتژی را در مورد جایگشت بالا به کار ببریم، خواهیم داشت

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & 2 & & & & \\ & 3 & 4 & & 6 & & \\ 7 & 10 & 5 & 8 & 9 & & \end{array}$$

واضح است که اگر $\Pi(i_1) < \Pi(i_2) < \dots < \Pi(i_k)$ یک زیردنباله صعودی باشد، در این صورت k نمی‌تواند از تعداد ستون‌ها بیشتر باشد، زیرا $\Pi(i_{r+1})$ باید در ستون سمت راست ستونی گذاشته شود که در آن $\Pi(i_r)$ قرار دارد. از طرف دیگر، می‌توانیم با استفاده از استراتژی طماع، طولانی‌ترین زیردنباله صعودی‌ای را تولید کنیم که از هر ستون یک عضو در بر دارد. این کار به ترتیب زیر قابل انجام است: هرگاه ورقی را در ستونی غیر از ستون اول قرار می‌دهیم، پیکانی از آن ورق به بالاترین ورق ستون قبل از آن وصل می‌کنیم. سپس از بالاترین ورق آخرین ستون دست راست شروع و پیکان‌ها را تا به آخر تعقیب می‌کنیم. برای نمونه، در مثال قبل دنباله زیر را به دست می‌آوریم:



که زیردنباله صعودی ۱, ۴, ۵, ۸, ۹ را تولید می‌کند. این فال را با ورق‌های بُرخورده می‌گیریم. این بدان معناست که Π به طور یکنواخت از S_n انتخاب می‌شود. به عبارت دیگر، احتمال یکنواخت \mathbb{P}_n را بر S_n تعریف می‌کنیم به طوری که هر $\Pi \in S_n$ با احتمال $1/n!$ انتخاب می‌شود. می‌خواهیم رفتار L_n را وقتی $n \rightarrow \infty$ بررسی کنیم. نتایج زیر اکنون قضیه‌هایی کلاسیک به حساب می‌آیند.

قضیه ۱.۱. (ورشیک - کِروف، لوگان - شپ^۱)

$$L_n = 2\sqrt{n} + o(1), \quad n \rightarrow \infty$$

1) Vershik-Kerov, Logan-Shepp

به عبارت دقیق‌تر، به ازای $\epsilon > 0$ داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_n \left(\left| n^{-\frac{1}{\alpha}} L_n - \gamma \right| > \epsilon \right) = 0 \quad \square$$

قضیه ۲.۱. (بیک - دفت - یوهانسون^۱)

$$L_n = \gamma \sqrt{n} + \gamma n^{\frac{1}{\alpha}} + o(n^{\frac{1}{\alpha}}), \quad n \rightarrow \infty$$

به عبارت دقیق‌تر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_n \left(\frac{L_n - \gamma \sqrt{n}}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \leq x \right) = F(x)$$

که در آن

$$F(x) = \exp \left(- \int_x^{\infty} (x-t) q^{\gamma}(t) dt \right)$$

در این عبارت q تابع Π پن لوه^۲ است که در معادله دیفرانسیل

$$q''(x) = xq(x) + \gamma q^{\gamma}(x)$$

با شرط مرزی $q(x) \sim A_{\gamma}(x)$ صدق می‌کند. در اینجا $A_{\gamma}(x)$ تابع آیری^۳ است. \square

قانون F به توزیع تریسی - ویدام^۴ شهرت دارد و این به سبب کارهای قبلی آنهاست. تریسی - ویدو [TW] همین قضیه را در مورد بزرگترین مقدار ویژه یک ماتریس هرمیتی $n \times n$ تصادفی به دست آورده بودند.

در این سخنرانی‌ها قضیه ۱.۱ را اثبات می‌کنیم و با بهره‌گیری از استدلال‌های احتمالاتی که با روش‌های اثبات اولیه این قضیه‌ها تفاوت دارد، برخی از نتایج قضیه ۲.۱ را مورد بحث قرار می‌دهیم. در بخش ۲، به بحث در مورد مدل هم‌مرزلی و گونه پیوسته آن که توسط آلدوس - دیاکونیس [AD1] تعریف شده است می‌پردازیم و چگونگی استفاده از مدل‌های تصادفی را برای بررسی L_n بیان می‌کنیم.

۲. دستگاه ذرات هم‌مرزلی

هم‌مرزلی دستگاه ذرات ساده‌ای را تعریف کرد که می‌توان برای بررسی L_n از آن استفاده کرد. برای تعریف این دستگاه، ابتدا نکته ساده‌ای را مورد توجه قرار می‌دهیم: اگر نقاط $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, 1]$ را به طور مستقل و یکنواخت انتخاب کنیم، در این صورت این انتخاب، نگاشتی مانند $\Pi \in S_n$ القا می‌کند که بر طبق \mathbb{P}_n توزیع شده است. دقیق‌تر بگوییم، فرض می‌کنیم نقاط $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, 1]$ متمایز باشند. این نقاط را می‌توان به صورت

$$0 \leq x_{\Pi^{-1}(1)} < x_{\Pi^{-1}(2)} < \dots < x_{\Pi^{-1}(n)} \leq 1$$

1) Baik-Deift-Johansson 2) Painlevé 3) Airey 4) Tracy-Widom

مرتب کرد که این ترتیب، جایگشت $(\Pi(1), \Pi(2), \dots, \Pi(n))$ را القا می‌کند. از آنجا که به ازای هر Π داریم

$$|\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \Pi \text{ را القا می‌کند}\}| = \frac{1}{n!}$$

در نتیجه قانون $\Pi = \Pi_{x_1, x_2, \dots, x_n}$ همان \mathbb{P}_n است. نقاط x_1, x_2, \dots, x_n را می‌توان مواضع n ذره دانست. اکنون می‌خواهیم دستگاهی از ذرات برهمکنش‌کننده معرفی کنیم که در زمان n تعداد L_n ذره در آن تولید می‌شود. در واقع، خواهیم توانست تمامی متغیرهای تصادفی را در یک فضای احتمال واحد بسازیم. برای این کار، قانون دنباله x_1, x_2, \dots در $[0, 1]$ متشکل از متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکنواخت را با \mathbb{P} نشان می‌دهیم. فرض می‌کنیم $w = (x_1, x_2, \dots)$ چنین دنباله‌ای باشد، دستگاهی از ذرات را با قواعد زیر تعریف می‌کنیم: اگر در مرحله n ام دستگاه ذرات عبارت از نقاطی در $X_n \subseteq \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ باشد، در مرحله $n+1$ ام، نزدیکترین ذره‌ای در X_n که در سمت راست X_{n+1} قرار دارد نابود می‌شود. اگر چنین ذره‌ای وجود نداشته باشد، قرار می‌دهیم $X_{n+1} = X_n \cup \{x_{n+1}\}$.

ادعای ما این است که توزیع X_n با توزیع L_n یکسان است. در واقع اگر ذرات نابود شده را نگه می‌داشتیم و در بالای ذره جدید قرار می‌دادیم، همان ستون‌های فال ورق را به دست می‌آوردیم؛ در غیر این صورت، آنچه در X_n باقی می‌ماند عبارت است از ورق‌های زیرین ستون‌ها.

تا اینجا یک دستگاه ذرات برهمکنش‌کننده در $[0, 1]$ با زمان گسسته ساخته‌ایم. اکنون به توصیف دستگاهی از ذرات می‌پردازیم که یک فرایند مارکوف با زمان پیوسته است و به یک معنا، مشابه زمان پیوسته مدل همرزلی است. این فرایند را مدل آلدوس - دیاکونیس - همرزلی یا به اختصار مدل ADH می‌نامیم. واضح است که برای گذار به زمان پیوسته به یک فرایند نقطه‌ای پواسن نیاز داریم، زیرا می‌خواهیم فرایند خاصیت مارکوفی داشته باشد. معلوم شده است که اگر متغیرهای فضا را نیز پواسنی کنیم، می‌توانیم \mathbb{R}^+ را جایگزین $[0, 1]$ کنیم. حاصل، یک فرایند فضا - زمان نقطه‌ای پواسن خواهد بود. یادآور می‌شویم که یک فرایند پواسن در \mathbb{R}^+ با شدت λ ، یک اندازه احتمال \mathbb{P} بر روی فضای Ω شامل زیرمجموعه‌های گسسته \mathbb{R}^+ با ویژگی‌های زیر است:

(i) اگر $\mathfrak{N}_A(w) = \#(A \cup w)$ ، آنگاه \mathfrak{N}_A یک متغیر تصادفی پواسن با شدت λ است:

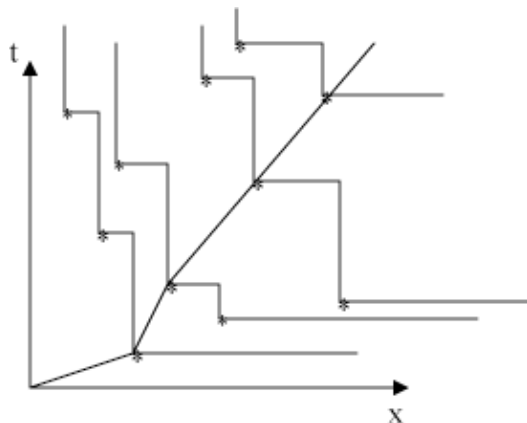
$$\mathbb{P}(\mathfrak{N}_A = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda |A|}$$

(ii) قانون $\mathbb{P}(\cdot | \mathfrak{N}_A = n)$ را اندازه یکنواخت

$$\frac{1}{|A|^n} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

تعیین می‌کند. (در اینجا x_1, x_2, \dots, x_n برجسب ذرات‌اند، اما در مورد w این برجسب‌ها را در نظر نمی‌گیریم و در عوض مجموعه $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ را مورد توجه قرار می‌دهیم.)

فرض می‌کنیم w معلوم باشد، می‌توانیم دستگاهی از ذرات برهمکنش کننده در \mathbb{R}^+ تعریف کنیم که در ابتدا تهی است.



شکل ۱. *ها نقطه‌های پواسنی هستند.

نقطه ثابت $x > 0$ را تثبیت و $\vec{\eta}(t, x)$ را تعریف می‌کنیم که به ازای هر t زیرمجموعه‌ای متناهی از $[0, x]$ است. ابتدا نقطه‌ای را در $([0, x] \times \mathbb{R}^+)$ نشان می‌کنیم که مختصه t آن کوچک‌ترین باشد، مثلاً نقطه (x_1, t_1) . سپس قرار می‌دهیم $\vec{\eta}(x, t) = \{x_1\}$ و آن را خلق یک ذره در x_1 در زمان t_1 به حساب می‌آوریم. پس از آن، نقطه دیگری را در w^* نشان می‌کنیم که بعد از نقطه اول دارای کوچک‌ترین مختصه t باشد، مثلاً نقطه (x_2, t_2) و داریم $t_2 > t_1$ (این کار همیشه با احتمال ۱ صورت می‌گیرد). اگر $x_2 > x_1$ ، در این صورت ذره جدیدی در x_2 خلق شده است به طوری که $\vec{\eta}(x, t_2) = \{x_1, x_2\}$ ؛ در غیر این صورت $x_1 > x_2$ و ما x_1 را به x_2 می‌بریم (یا x_1 را نابود می‌کنیم) به طوری که $\vec{\eta}(x, t_2) = \{x_2\}$. این روند را ادامه می‌دهیم: اگر w^* شامل نقاط $(x_1, t_1), (x_2, t_2), \dots$ با $t_1 < t_2 < \dots$ شود و به ازای $t = t_k$ داشته باشیم $\vec{\eta}(x, t) = \{y_1, y_2, \dots, y_l\}$ ، در این صورت، به شرط این که هیچ d -ذره‌ای در سمت راست d نباشد، داریم

$$\vec{\eta}(x, t_k+) = \vec{\eta}(x, t_k-) \cup \{x_k\}$$

در غیر این صورت، نزدیک‌ترین y -ذره‌ای را که در سمت راست x_k قرار دارد به x_k منتقل می‌کنیم. حال نقطه $(x, t) \in (\mathbb{R}^+)^2$ را تثبیت می‌کنیم و نقاط پواسون واقع در $[0, x] \times [0, t]$ را با $(x_1, t_1), (x_2, t_2), \dots, (x_n, t_n)$ مشخص می‌کنیم که در آن $t_1 < t_2 < \dots < t_n$. بنابراین n تصادفی است و توزیع آن مانند یک متغیر تصادفی پواسن با پارامتر xt است، یعنی $n = \aleph_{[0, x] \times [0, t]}(w)$

$$\mathbb{P}(n(w) = n) = e^{-xt} \frac{(xt)^n}{n!}$$

یادآور می‌شویم که $\mathbb{P}(\cdot | n(w) = n)$ عبارت است از اندازه یکنواخت در $[\circ, x] \times [\circ, t]$. در صورتی که t - مختصه‌ها مشخص شوند، x - مختصه‌ها به‌طور یکنواخت در $[\circ, x]$ توزیع می‌شوند. مختصه‌های x_1, \dots, x_n که به $[\circ, x]$ تعلق دارند، جایگشت $\Pi \in S_n$ را القاء می‌کنند به طوری که

$$x_{\Pi^{-1}(1)} < x_{\Pi^{-1}(2)} < \dots < x_{\Pi^{-1}(n)}$$

از آنجا که x_i ها مستقل‌اند و به‌طور یکنواخت توزیع شده‌اند، توزیع جایگشت القا شده بر طبق \mathbb{P}_n خواهد بود. اکنون نشان می‌دهیم که در واقع $L_n(\Pi) = \#\eta(x, t)$ ، یعنی مقدار ذرات در زمان t اندازه طولانی‌ترین زیر دنباله صعودی Π را تعیین می‌کند. برای این کار کفایت مشاهده کنیم که یک زیر دنباله صعودی $i_1 < i_2 < \dots < i_l$ بدین معناست که $x_{i_1} < x_{i_2} < \dots < x_{i_l}$ یا به عبارت دیگر، یک مسیر بالا رونده از (\circ, \circ) به (x, t) وجود دارد که از نقاط پواسن می‌گذرد. می‌توانیم مسیر هر ذره را در فضا - زمان با استفاده از خطوط قائم و خطوط افقی رسم کنیم به طوری که هر پاره خط افقی نشان دهنده پرش خود به خود یک ذره و هر پاره خط عمودی نشان دهنده فاصله زمانی باشد که در طی آن ذره در یک مکان متوقف است. اما تعداد کل ذرات، $\#\overrightarrow{\eta}(x, t)$ در زمان t در $[\circ, x]$ دقیقاً برابر است با تعداد مسیرهای فضا - زمان که این خود با تعداد نقاط پواسن که بر روی طولانی‌ترین مسیر بالا رونده از (\circ, \circ) به (x, t) قرار دارند، یکی است. به جای $\#\overrightarrow{\eta}(x, t)$ می‌نویسیم $h(x, t)$. در این صورت به‌ازای هر w داریم

$$h(x, t; w) = L_{\mathbb{N}(x, t; w)}(\Pi(w)) \quad (۱)$$

که در آن $\mathbb{N}(x, t; w)$ تعداد نقاط پواسن در $[\circ, x] \times [\circ, t]$ و $\Pi(w)$ عبارت است از جایگشت القا شده وابسته به این نقاط. می‌دانیم که بر طبق قانون اعداد بزرگ، برای فرایندهای پواسن تقریباً به‌طور حتم

$$\lim_{x, t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{N}(x, t)}{xt} = ۱ \quad (۲)$$

یا

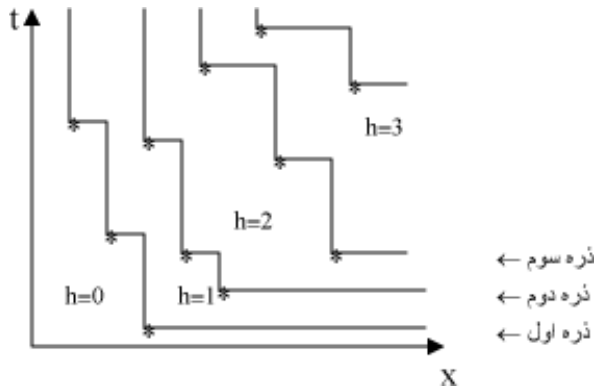
$$\lim_{\epsilon \rightarrow \circ} \epsilon^2 \mathbb{N}\left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{t}{\epsilon}\right) = xt. \quad (۳)$$

در نتیجه قضیه ۱.۱ معادل است با این که بگوئیم تقریباً به‌طور حتم

$$\lim_{\epsilon \rightarrow \circ} \epsilon h\left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{t}{\epsilon}\right) = 2\sqrt{xt}.$$

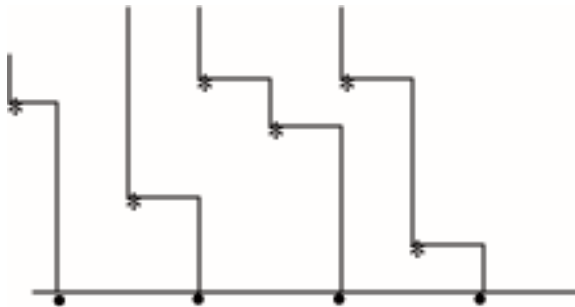
در بخش ۳ رابطه (۳) را به‌طور شهودی اثبات خواهیم کرد. در واقع، در مسیرهای فضا - زمانی

ذرات مجموعه‌های تراز تابع $h : (\mathbb{R}^+)^2 \rightarrow \mathbb{N}$ هستند.



شکل ۲. مجموعه‌های تراز h

مثلاً ذره‌ای وجود دارد که ابتدا در $+\infty$ است و به تدریج که $t \rightarrow +\infty$ ، ذره به 0 نزدیک می‌شود. اگر مسیر این ذره را رسم کنیم منحنی‌ای به دست می‌آوریم که از پاره‌خط‌های عمودی و افقی تشکیل شده است و در زیر آن هیچ نقطه پواسنی وجود ندارد. اما در هر یک از L -گوشه‌هایش یک نقطه پواسن واقع است. این ذره را می‌توانیم ذره اول بنامیم و همین‌طور n امین ذره را تعریف می‌کنیم. می‌توانیم $h(x, t; w)$ را یک تابع ارتفاع تعبیر کنیم که با گذشت زمان به صورت تصادفی رشد می‌کند. آنچه که ساخته‌ایم دارای یک تابع ارتفاع اولیه بسیار خاص است که تنها برای $x > 0$ تعریف شده است. این مسأله را می‌توان در \mathbb{R} در نظر گرفت و از یک فرایند نقطه‌ای پواسن در $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$ برای ساختن h و یا معادل آن، یک دستگاه ذرات متناظر با داده‌های اولیه دلخواه، استفاده کرد. ابتدا دستگاه ذرات را توصیف خواهیم کرد. با یک زیر مجموعه گسسته از \mathbb{R} که مکان‌های اولیه ذرات را نمایش می‌دهد شروع می‌کنیم.



شکل ۳

مکان ذرات را با $\dots < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < \dots$ نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم

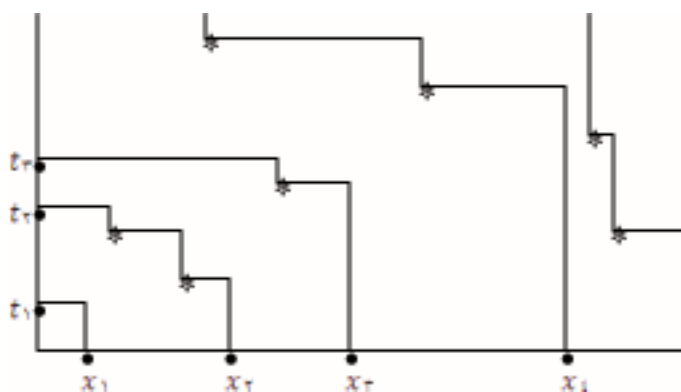
$$\lim_{i \rightarrow \pm\infty} x_i = \pm\infty$$

در این صورت، آفرینش ذره وجود نخواهد داشت و از آنجا که نقطه پواسن * بین x_i و x_{i-1} ظاهر می‌شود، ذره i ام به مکان * می‌جهد. (نگاه کنید به شکل ۳.)

این بخش را با شرح نوع دیگری از مدل ADH به پایان می‌رسانیم. این نوع را گروئن بوم [G] مورد مطالعه قرار داد که به صورت زیر است. یک فرایند پواسنی با شدت ۱ در $(\mathbb{R}^+)^2$ در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم مجموعه‌ای از ذرات (یا چشمه‌ها) در $t = 0$ در مکان‌های $x = 0$ و مجموعه‌ای از حفره‌ها در $0 < t_1 < t_2 < \dots$ بر روی خط مرزی $x = 0$ قرار دارند. فرض می‌کنیم

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = \lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty.$$

در اینجا هم هرگاه یک نقطه پواسن بین x_i و x_{i-1} قرار گیرد، x_i را به مکان * منتقل می‌کنیم. به علاوه، اگر در زمان t_i ذره‌ای بین 0 و x_j قرار نداشته باشد، x_j را خارج می‌کنیم، یعنی اولین ذره از طریق مبدأ از دستگاه خارج می‌شود.

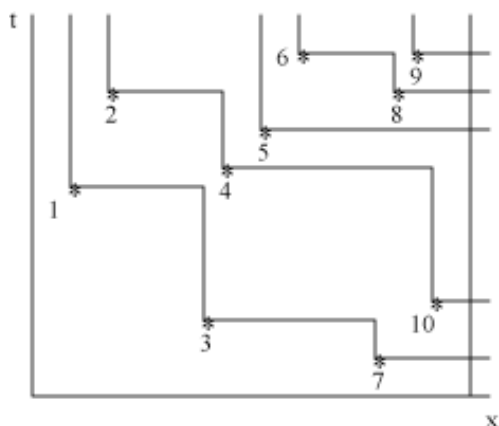


شکل ۴

در بخش‌های بعد چندین حد مقیاس برای مدل ADH و انواع آن را مورد بحث قرار خواهیم داد.

در پایان این بخش، به نکته‌ای در مورد طول ستون‌ها در فال ورق که با استراتژی طماع به دست می‌آید و همچنین طول مسیرها در فرایند ADH اشاره می‌کنیم. در واقع اگر n نقطه پواسن در $[0, t] \times [0, x]$ داشته باشیم، آنگاه تعداد نقاط پواسن در مسیر ذره z ام دقیقاً برابر خواهد بود با تعداد

ورق‌ها درستون زام.



شکل ۵

در شکل ۵ پیکربندی ADH متناظر با جایگشت بخش ۱ را ملاحظه می‌کنیم.

۳. حد هیدرودینامیکی

در یک نوع مدل ADH، ذرات را در مکان‌های x_i فرض می‌کنیم با این شرط که $x_i < x_{i+1}$ و

$$\lim_{i \rightarrow \pm\infty} x_i = \pm\infty$$

با استفاده از یک فرایند پواسن با شدت ۱ در نیم‌صفحه بالایی، دستگاهی از ذرات با برهمکنش $(x_i(t) : i \in \mathbb{Z})$ تعریف کردیم که در $t = 0$ با پیکربندی اولیه ما تطبیق داشت و رابطه $x_i(t) < x_{i+1}(t)$ در مورد آن در تمام زمان‌ها صادق بود. اکنون دو حد مقیاس را تعریف می‌کنیم که می‌توان آنها را در [AD1]، [V] و [S1] یافت. به‌عنوان نتیجه‌ای از این نتایج، قضیه ۱.۱ را اثبات می‌کنیم. قرار می‌دهیم

$$W^\epsilon(y, t) = \epsilon x_{[\epsilon^{-1}y]}(\epsilon^{-1}t)$$

قضیه ۱.۳. فرض می‌کنیم که حد زیر

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} W^\epsilon(y, 0) = W(y, 0)$$

وجود دارد. در این صورت $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} W^\epsilon(y, t) = W(y, t)$ به‌ازای $t > 0$ وجود دارد و W جواب منحصر به فرد معادله همپلتون-ژاکوبی

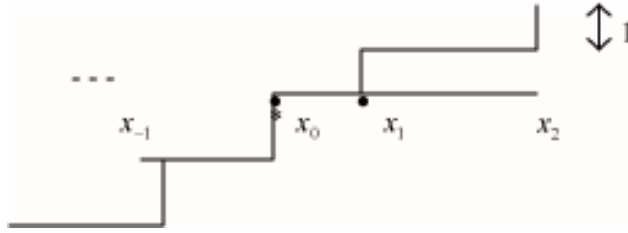
$$W_t + (W_y)^2 = 0 \quad (4)$$

طولانی‌ترین زیر دنباله‌های صعودی و مدل الدوس - دیاکونیس - همرزلی — ۱۰

است.

مکان ذرات را می‌توانیم به صورت تابع $x: \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$ با تعریف $x(i, t) = x_i(t)$ در نظر بگیریم که در آن مکان ذره i ام است. این تابع نسبت i صعودی است. معکوس این تابع $h: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{Z}$ ، تعداد ذرات در یک بازه را به دست می‌دهد، یعنی

$$h(b, t) - h(a, t) = \#\{x_i(t) : a < x_i(t) \leq b\}.$$



شکل ۶. نمودار h

توصیف جنبهٔ دینامیکی h ساده است: هرگاه یک نقطهٔ پواسن در $[x_{i-1}, x_i]$ پیدا شود، ارتفاع $h(x, t)$ در بازه $[\bar{x}, x_i]$ یک واحد افزایش پیدا می‌کند؛ \bar{x} مکان نقطهٔ پواسن است. قرار می‌دهیم

$$h^\epsilon(x, t) = \epsilon h\left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{t}{\epsilon}\right)$$

قضیهٔ ۲.۳. فرض می‌کنیم حد $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} h^\epsilon(x, 0) = u(x, 0)$ وجود دارد. در این صورت $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} h^\epsilon(x, t) = u(x, t)$ وجود دارد و u جواب منحصربه‌فرد معادلهٔ همپلتون - ژاکوبی

$$u_t = \frac{1}{u_x} \quad (5)$$

است. دو قضیه ۱.۳ و ۲.۳ در اصل معادلند. در واقع، اگر در ابتدا W برحسب y غیرصعودی باشد، در زمان‌های بعد نیز چنین خواهد بود و اگر u را وارون W فرض کنیم، در این صورت می‌توانیم (۵) را به راحتی از (۴) نتیجه بگیریم:

$$u_t = -W_t u_x = W_y u_x = \frac{1}{u_x} u_x = \frac{1}{u_x}$$

اکنون در وضعی قرار داریم که می‌توانیم، در صورتی که (۵) را بپذیریم، رابطهٔ (۳) را به طور صوری توجیه کنیم. در واقع $u(x, t) = 2\sqrt{xt}$ تنها جواب (۵) است که در مورد آن داریم $u(0, t) = u(x, 0) = 0$. البته هنوز باید توضیح دهیم چرا (۵) درست است و برای اثبات قضیهٔ ۲.۳، یک نوع مدل ADH در نظر می‌گیریم که تنها در $(\mathbb{R}^+)^2$ تعریف شده است. ابتدا رابطهٔ بین

جواب‌های (۵) را با جواب خاص $2\sqrt{xt}$ که در قضیه ۱.۱ ظاهر می‌شود، توضیح می‌دهیم. برای این کار، یادآور می‌شویم که بر طبق فرمول هویف - لکس، جواب مسأله

$$\begin{cases} u_t = H(u_x) \\ \bar{u}(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

که در آن H محدب است، عبارت است از

$$u(x, t) = \sup_y \left[g(y) - tL\left(\frac{y-x}{t}\right) \right] \quad (6)$$

که در آن $L = H^*$ مزدوج محدب H است. در موردی که در دست بررسی داریم

$$H(p) = \begin{cases} \frac{1}{p}, & p > 0 \\ +\infty, & p < 0. \end{cases}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} L(v) &= \sup_p (vp - H(p)) = \sup_{p>v} (vp - 1/p) \\ &= \begin{cases} -2\sqrt{-v}, & v \leq 0 \\ +\infty, & v > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

بنابراین جواب عمومی عبارت است از

$$\bar{u}(x, t) = \sup_{y \leq x} \left[g(y) + 2\sqrt{t(x-y)} \right] \quad (7)$$

به ویژه، اگر

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ -\infty & x < 0 \end{cases}$$

آنگاه در زمان‌های بعد خواهیم داشت

$$\bar{u}(x, t) = \begin{cases} 2\sqrt{xt}, & x \geq 0 \\ -\infty, & x < 0. \end{cases}$$

به طور کلی‌تر، به ازای هر y ، تابع

$$\Gamma(x, t; y) = \begin{cases} g(y) + 2\sqrt{t(x-y)}, & y \leq x \\ -\infty, & x < y, \end{cases} \quad (8)$$

یک جواب تحت شرایط اولیه زیر است

$$\Gamma(x, 0; y) = \begin{cases} g(y), & y \leq x \\ -\infty, & x < y. \end{cases}$$

در واقع اگر بنویسیم $\bar{u}(x, t) = T_t g(x)$ ، آنگاه T_t یک نیم گروه غیرخطی است که دارای خاصیتی به نام یکنوایی قوی است، یعنی اگر $\{g_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ خانواده‌ای از توابع کراندار پیوسته باشد، آنگاه

$$T_t \left(\bigvee_{\alpha} g_{\alpha} \right) = \bigvee_{\alpha} T_t g_{\alpha} \quad (9)$$

به‌ویژه

$$T_t g = \sup_y T_t \Gamma(\cdot, \circ; y). \quad (10)$$

روابط (۷) و (۸) هر دو از (۶) و (۵) نتیجه می‌شوند. معلوم شده است که یکنوایی قوی یک مشابه میکروسکوپی دارد. به عبارت دقیق‌تر، اگر h_α خانواده‌ای از توابع ارتفاع اولیه باشند و در ابتدا $\hat{h} = \sup_{\alpha} h_{\alpha}$ ، آنگاه در زمان‌های بعدی

$$\hat{h}(x, t; w) = \sup_{\alpha} h_{\alpha}(x, t; w) \quad (11)$$

که در آن w تحقق یک فرایند نقطه‌ای پواسن است و w ‌ای که در \hat{h} و تمام h_{α} ها ظاهر می‌شود یکی است.

به عنوان مثال $h^{\circ} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ را به طور دلخواه به عنوان تابع ارتفاع اولیه در نظر می‌گیریم. تعریف می‌کنیم

$$\gamma^{\circ}(x; y, h(y)) = \begin{cases} h^{\circ}(y) & y \leq x \\ -\infty & y > x \end{cases}$$

در این صورت $h^{\circ}(x) = \sup_y \gamma^{\circ}(x; y, h(y))$. تابع ارتفاع متناظر را با $\gamma(x, t; y, h(y); w)$ نشان می‌دهیم که در ابتدا از $\gamma^{\circ}(\cdot; y, h(x))$ شروع می‌شود. در این صورت داریم

$$h(x, t; w) = \sup_y \gamma(x, t; y, h(y); w) \quad (12)$$

در واقع، $\gamma(x, t; y, h(y); w)$ برحسب آن نوع فرایند ADH که در بخش ۲ بدان اشاره شد تعبیری دارد و آن این است که فرض می‌کنیم نمونه‌ای از فرایند پواسن در \mathbb{R}^2 (یا $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$) داریم، w را به $\mathbb{R}^+ \times [y, \infty)$ محدود می‌کنیم. سپس از $[y, +\infty)$ خالی شروع می‌کنیم و با استفاده از محدودیت w به $\mathbb{R}^+ \times [y, \infty)$ ذرات را خلق کرده حرکت می‌دهیم. حاصل دستگاهی از ذرات در $[y, \infty)$ خواهد بود و اگر تعداد ذرات حاضر در $[y, x]$ در زمان t برابر $\hat{\gamma}(x, t; y, h(y); w)$ باشد، آنگاه

$$\gamma(x, t; y, h(y); w) = \begin{cases} \hat{\gamma}(x, t; y, h(y); w) + h^{\circ}(y) & \text{if } x \geq y \\ -\infty & \text{if } x < y \end{cases}$$

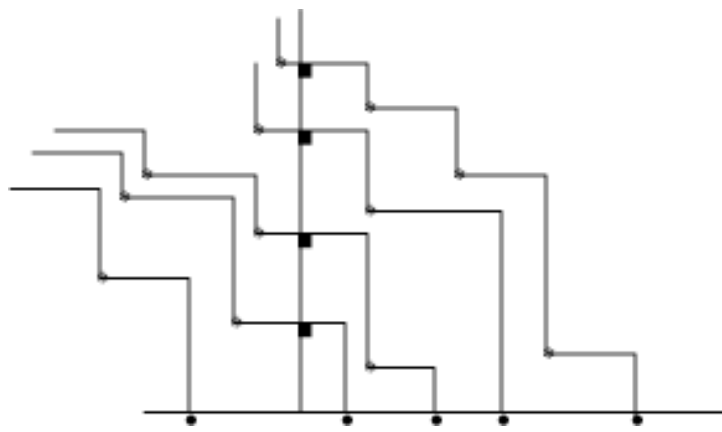
از رابطه فوق و (۱۲) نتیجه می‌شود

$$h(x, t; w) = \sup_{y \leq x} [h^{\circ}(y) + \hat{\gamma}(x, t; y, h(y); w)] \quad (13)$$

که مشابه میکروسکوپی (۷) است. اکنون می‌توانیم شکل تابع همیلتونی H را توجیه کنیم. مشاهده می‌کنیم که معادله $u_t = H(u_x)$ یک جواب ابتدایی به صورت زیر دارد

$$u^p(x, t) = px + tH(p) = px + \frac{t}{p} \quad (۱۴)$$

که در شرط اولیه $u^p(x, 0) = px$ صدق می‌کند. حتی این جواب نیز دارای یک مشابه میکروسکوپی است که آن را توصیف خواهیم کرد. $p > 0$ داده شده است. در ابتدا، ذرات را بر طبق یک فرایند پواسن با شدت p در \mathbb{R} توزیع می‌کنیم تصادفی بودن شرط اولیه را مستقل از فرایند نقطه پواسن با شدت λ در $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ انتخاب می‌کنیم. می‌توان نشان داد که چنین توزیع اولیه‌ای v_p ناورداست، به این معنا که توزیع ذرات $(x_i(t) : i \in Z)$ همواره همان v_p است. به علاوه، اگر به مکان‌های تلاقی مسیرهای ذرات با یک محور موازی با محور زمان نگاه کنیم، یک فرایند نقطه‌ای مشاهده می‌کنیم که آن هم یک فرایند پواسن است اما این بار با شدت λ/p .



شکل ۷ • توزیع بر طبق v_p
 ■ توزیع بر طبق $v_{\lambda/p}$

این را می‌پذیریم و با استفاده از (۱۳) رابطه (۳) را اثبات می‌کنیم. در واقع (۱۳) لازم‌اش این است که

$$\epsilon h\left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{t}{\epsilon}; w\right) = \sup_{y \leq x} \left[\epsilon h^\circ\left(\frac{y}{x}\right) + t \hat{\gamma}\left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{t}{\epsilon}; \frac{y}{\epsilon}; w\right) \right] \quad (۱۵)$$

اگر فرض کنیم که در ابتدا ذرات مطابق v_p توزیع شده‌اند و این که $h^\circ(0) = 0$ ، در این صورت می‌توانیم با به کار گرفتن قانون اعداد بزرگ بگوییم که در (۱۵) قرار می‌دهیم $x = 0$ و از این امر که $h(0, t; w)$ یک فرایند پواسن با شدت $\frac{1}{p}$ است کمک می‌گیریم. در نتیجه

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon h\left(0, \frac{t}{\epsilon}, w\right) = \frac{t}{p}$$

و حاصل

$$\frac{t}{p} = \sup_{y \leq 0} \left[yp + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \hat{\gamma} \left(0, \frac{t}{\epsilon}; \frac{y}{\epsilon}; w \right) \right]$$

است که به‌ازای هر $p > 0$ درست است. به‌ازای $y \leq 0$ می‌نویسیم

$$A(y, t) = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \hat{\gamma} \left(0, \frac{t}{\epsilon}; \frac{y}{\epsilon}; w \right)$$

و در نتیجه

$$\frac{t}{p} = \sup_y [yp - A(y, t)]$$

به شرط این که مقدار $A(y, t)$ را به‌ازای $y > 0$ مثبت، بینهایت بدانیم. بنابراین، به‌ازای $y \leq 0$ داریم

$$\begin{aligned} A(y, t) &= \sup_{p > 0} \left[yp - \frac{t}{p} \right] = t \sup_{p > 0} \left[\frac{y}{t} p - \frac{1}{p} \right] \\ &= tL \left(\frac{y}{t} \right) = -\sqrt{-yt} \end{aligned}$$

خلاصه این که به‌ازای $y \leq 0$ ،

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \hat{\gamma} \left(0, \frac{t}{\epsilon}; \frac{y}{\epsilon}; w \right) = \sqrt{-yt} \quad (16)$$

مشاهده می‌کنیم که توزیع احتمال $\hat{\gamma} \left(0, \frac{t}{\epsilon}; \frac{y}{\epsilon}; w \right)$ و $\hat{\gamma} \left(-\frac{y}{\epsilon}, \frac{t}{\epsilon}; 0; w \right)$ یکسان است و مسلماً لازمه برقراری (۱۶) قضیه (۱.۱) است. این را هم مشاهده می‌کنیم که اثبات وجود حد $\epsilon \hat{\gamma} \left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{t}{\epsilon}; 0; w \right)$ وقتی $\epsilon \rightarrow 0$ نسبتاً ساده است. تابع $h(x, t; w) = \gamma(x, t, 0, w)$ ابر جمع‌ی است، یعنی به‌ازای هر $s, t, x, y > 0$ داریم

$$h(x + y, t + s; w) \geq h(x, t; w) + h(y, s; t_{x,s}w)$$

که در آن نمونه پواسن است که از انتقال نقطه $(0, 0)$ به نقطه (x, s) به‌دست می‌آید. وجود حد فوق‌الذکر پیامد قضیه ارگودیک زیرجمع‌ی است.

این بخش را با بحثی در مورد طول ستون وسط در فال ورق به پایان می‌بریم. همان‌طور که در پایان بخش ۲ گفته شد، اگر در مجموعه $[0, t] \times [0, x]$ n نقطه پواسن وجود داشته باشد، در این صورت تعداد نقاط پواسن در مسیر ذره i ام دقیقاً برابر است با تعداد ورق‌ها در ستون i ام. اکنون نتیجه‌ای را بیان خواهیم کرد که با استفاده از تکنیک‌های استاندارد قابل اثبات است. این نتیجه در [AD2] به صورت حدس آمده است.

قضیه ۳.۳. تعداد ورق‌ها در ستون $\lfloor \frac{y}{\epsilon} \rfloor$ ام برابر است با $(y \log \frac{y}{\epsilon}) \epsilon + O(\epsilon)$.

در اینجا ϵ طوری تعیین شده است که $\epsilon^{-2} = n$ باشد. تعداد ورق‌ها ϵ^{-2} است.

اکنون خطوط کلی اثبات قضیه (۳.۳) را ترسیم می‌کنیم. یادآور می‌شویم که

$$\epsilon x_{[\epsilon^{-1}y]}(\epsilon^{-1}t) = w(y, t) + O(1),$$

و w در (۴) صدق می‌کند. ما باید (۴) را تحت شرط اولیه $w(y, 0) = +\infty$ و شرط مرزی $w(0, t) = 0$ حل کنیم. تنها جواب $w(y, t) = y^2/4t$ به‌ازای $y > 0$ است که خود وارون $u(x, t) = 2\sqrt{xt} = y$ است. می‌خواهیم تعداد نقاط پواسن در مسیر ذره $[\epsilon^{-1}y]$ ام در مجموعه $[\epsilon^{-1}] \times [0, \epsilon^{-1}]$ را طوری بشماریم که تعداد کل نقاط پواسن در مستطیل تقریباً ϵ^{-2} باشد. این متناظر است با مجموعه ماکروسکوپی $[0, 1] \times [0, 1]$. بنابراین باید منتظر بمانیم تا ذره y/ϵ ام وارد بازه $[0, 1]$ شود. این اتفاق در زمان t_0 که در رابطه $y^2/4t_0 = 1$ صدق می‌کند، خواهد افتاد، یعنی $t_0 = y^2/4$ در مقیاس ماکروسکوپی. بنابراین باید تعداد نقاط پواسن بر روی مسیر را در بازه زمانی ماکروسکوپی $[y^2/4, 1]$ و یا بازه زمانی میکروسکوپی $[\frac{y^2}{\epsilon^2}\epsilon^{-1}, \epsilon^{-1}]$ بشماریم. به‌جای $[y\epsilon^{-1}]$ می‌نویسیم i . تعداد نقاط پواسنی که ذره i ام با آن برخورد می‌کند دقیقاً برابر است با تعداد دفعاتی که ذره i ام به طرف چپ می‌جهد. اگر $N_i(t)$ تابعی باشد که هر بار که ذره i ام می‌جهد یک واحد بدان اضافه شود، در این صورت باید نشان دهیم

$$N_i(\epsilon^{-1}) - N_i\left(\frac{y^2}{\epsilon^2}\epsilon^{-1}\right) = \left(y \log \frac{2}{\epsilon}\right) \epsilon^{-1} - O\left(\epsilon^{-1}\right) \quad (17)$$

اما، می‌توان نشان داد که در واقع

$$N_i(t) - N_i(s) = \int_s^t (x_i(s) - x_{i-1}(s)) ds + M_i(s, t) \quad (18)$$

که در آن $M_i(s, t)$ یک مارتینگل است. رابطه (۱۸) بدین سبب است که آهنگ جهش x_i به نقطه $\xi \in (x_{i-1}, x_i)$ برابر است با طول بازه $[x_{i-1}, x_i]$. از طرف دیگر، می‌توان نشان داد که $M_i(s, t) = O(t - s)$. بنابراین

$$N_i(\epsilon^{-1}) - N_i\left(\frac{y^2}{\epsilon^2}\epsilon^{-1}\right) = \int_{\frac{y^2}{\epsilon^2}\epsilon^{-1}}^{\epsilon^{-1}} (x_i(s) - x_{i-1}(s)) ds + O(\epsilon^{-\frac{1}{2}})$$

سرانجام، رفتار میانگین $x_i - x_{i-1}$ مانند مشتق w نسبت به y است. بنابراین، همان‌طور که می‌خواستیم داریم

$$\epsilon \int_{\frac{y^2}{\epsilon^2}\epsilon^{-1}}^{\epsilon^{-1}} (x_i(s) - x_{i-1}(s)) ds \approx \int_{\frac{y^2}{\epsilon^2}}^1 w_y(y, s) ds = \int_{\frac{y^2}{\epsilon^2}}^1 \frac{y}{\sqrt{s}} ds = y \log \frac{2}{y}.$$

۴. قضیه حد مرکزی

در این بخش به قضیه (۱.۲) می‌پردازیم. در بخش‌های قبل مشاهده کردیم که چگونه می‌توان تعداد زیادی مسأله وابسته به جایگشت تصادفی را بر حسب مدل ADH بیان کرد. در واقع ADH نمونه‌ای است از چندین مدل رشد یک بعدی که از آن انتظار داشتن حد مقیاس نظیر قضایای (۱.۳) و (۲.۳) می‌رود. اگر این نتایج را یک قانون اعداد بزرگ برای دستگاه ذرات مورد بررسی بدانیم، طبیعتاً می‌خواهیم یک قضیه حد مرکزی برای همگرایی داشته باشیم و حدس زده شده است که تابع ارتفاع تغییر مقیاس یافته $h^\epsilon(x, t; w) = \epsilon h\left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{t}{\epsilon}; w\right)$ باید در معادله زیر صدق کند:

$$h^\epsilon(x, t; w) = u(x, t) + \epsilon^{\frac{1}{2}} z(x, t; w) + O(\epsilon^{\frac{1}{4}}) \quad (19)$$

این حدس در ابتدا از طریق شبیه‌سازی تأیید شد و سپس قضیه کاردار - پاریزی - زنگ شواهد بیشتری برای اعتبار آن فراهم آورد. در مورد مدل ADH، قضیه (۱.۲) رابطه (۱۹) را دقیقاً اثبات می‌کند و مهم‌تر از آن، قانون متغیر تصادفی z را نیز تعیین می‌کند. هرچند در اثبات کنونی قضیه (۱.۲) از فرمولی استفاده می‌شود که L_n را به دترمینان‌های Toeplitz ربط می‌دهد و نمی‌توان آن را در مورد دستگاه‌های ذرات برهمکنش کننده دیگر به کار برد. مثلاً اگر در مدل ADH اجازه دهیم ذرات هم به چپ و هم به راست بجهند، (۱۹) باید دوباره اثبات شود.

هدف اصلی این بخش توضیح نتیجه جدیدی است که کاتور و گروئن بوم به دست آورده‌اند و به کمک استدلال‌های احتمالاتی حالت ضعیف‌تری از (۱۹) را اثبات کرده‌اند که امتیاز آن این است که در مورد دستگاه‌های ذرات متعددی کاربرد دارد. (نگاه کنید به [BS] و [BCS]). یادآور می‌شویم که قانون مدل ADH در ربع اول دستگاه مختصات را که در ابتدا ذره‌ای در آن نیست، با \mathbb{P} نشان دادیم. در این مدل، $h(x, t; w)$ تعداد ذرات در $[0, x]$ در زمان t است و $u(x, t) = 2\sqrt{xt}$. این قضیه می‌گوید (۱۹) نسبت به \mathbb{P} اعتبار دارد و $z(x, t; w)$ یک متغیر تصادفی است و توزیع $\frac{z(x, t; w)}{2\sqrt{xt}}$ بر طبق قانون ترسی - ویدو است. در بخش ۳ گفتیم چگونه می‌توان رابطه $h^\epsilon = u + O(1)$ را با استفاده از مقایسه بین ADH در ربع اول و مدل ADH در نیم‌صفحه فوقانی که در آن توزیع هیأت اولیه ذرات بر طبق یک فرایند پواسن با شدت $p > 0$ است، اثبات کرد. قانون این مدل ADH آخر را با \mathbb{P}_p نشان می‌دهیم. ترجیح می‌دهیم با \mathbb{P}_p کار کنیم زیرا این مدل ایستا است. این سؤال را می‌توان مطرح کرد که آیا اگر w را طبق \mathbb{P}_p انتخاب کنیم، گونه‌ای از (۱۹) درست خواهد بود یا خیر؟ در این کار باید دقت شود، زیرا قضیه حد مرکزی برای توزیع اولیه مقیاس گاوسی دارد که با آنچه که می‌خواهیم ثابت کنیم متفاوت است. دقیق‌تر بگوییم،

$$h^\epsilon(x, 0; w^\circ) = xp + \epsilon^{\frac{1}{2}} B_p(x, w^\circ) + O(\epsilon^{\frac{1}{4}}) \quad (20)$$

که در آن $B_p(x, w^\circ)$ یک حرکت براونی با واریانس p است: $|x|p = \mathbb{E} B_p(x, w^\circ)^2$. به علاوه، از

آنجا که $h(\circ, t; w)$ شمارشگر تعداد نقاط در $[\circ, t]$ بر حسب فرایند پواسن با شدت λ/p است، داریم

$$h^\epsilon(\circ, t; w) = \frac{t}{p} + \epsilon^\dagger B_{\frac{\lambda}{p}}(t; w) + O(\epsilon^\dagger) \quad (21)$$

به عبارت دیگر، وقتی h^ϵ را در مورد \mathbb{P}_p در نظر می‌گیریم، دو منشأ نوفه وجود دارد: یکی از دینامیک ناشی می‌شود و از مرتبه $O(\epsilon^\dagger)$ است و منشأ دیگر داده‌های اولیه است که از مرتبه $O(\epsilon^\dagger)$ می‌باشد. اندازه نوفه اولیه بسیار بزرگتر است زیرا $\epsilon^\dagger \gg \epsilon^\dagger$ و بر نوفه دینامیکی غلبه دارد. به عنوان مثال، مشاهده می‌کنیم که نوفه دینامیکی هم‌اکنون در پس جمله $O(\epsilon^\dagger)$ در (۲۱) پنهان است و نمی‌توان آن را به راحتی در تنظیم (۲۱) مجزا کرد.

برای این که نوفه دینامیکی را از فرایند ایستای \mathbb{P}_p جدا کنیم، باید ابتدا چگونگی انتشار نوفه اولیه در زمان را درک کنیم. برای این کار، ابتدا به بررسی یک PDE می‌پردازیم. مسأله فوق را در مورد PDE زیر بررسی می‌کنیم

$$u_t = H(u_x) \quad (22)$$

دو جواب (۲۲)، u و \hat{u} ، تحت شرایط اولیه

$$u(x, \circ) = g(x), \quad \hat{u}(x, \circ) = g(x) + \delta k^\circ(x) \quad (23)$$

را در نظر می‌گیریم. در این رابطه δ یک عدد مثبت کوچک است. در این صورت، انتظار ما این است که داشته باشیم

$$\hat{u}(x, t) = u(x, t) + \delta k(x, t) + O(\delta) \quad (24)$$

که در مسأله

$$\begin{cases} k_t = H'(u_x)k_x \\ k(x, \circ) = k^\circ(x) \end{cases} \quad (25)$$

صدق می‌کند. در اینجا فرض بر این است که u یک جواب کلاسیک است و در نتیجه $H'(n_x)$ خوش‌تعریف است و معادله (۲۵) در چارچوب کلاسیک معنادار است. حل (۲۵) آسان است. معادله دیفرانسیل معمولی زیر را حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = H'(u_x(x, t)) \\ x(\circ) = x, \end{cases} \quad (26)$$

و جواب را به صورت $\Phi(x, t)$ می‌نویسیم. در این صورت

$$k(x, t) = k^\circ(\Phi(x, t))$$

در واقع، به آسانی می‌توان نشان داد که u_x در امتداد جواب (۲۶) ثابت است و در نتیجه مشخصه معروف است. به ویژه، هرگاه $g(x) = px$ و $u(x, t) = xp + tH(p)$ ، آنگاه $k(x, t) = k^\circ(x + tH'(p))$. به عبارت دیگر، یک اختلال کوچک در داده اولیه g در نقطه x ، در امتداد خط مشخصه $x + tH'(p)$ منتشر می‌شود که در آن $p = \nabla g(x)$.

اکنون به مرحله‌ای رسیده‌ایم که می‌توانیم ربط بین (۲۰) و (۲۱) را توضیح دهیم. چون «جمله اصلاحی»، $\epsilon^{\frac{1}{\nu}} B_p(x)$ ، از نوفه دینامیکی بسیار بزرگ‌تر است، این اصلاح در امتداد خط مشخصه انتقال پیدا می‌کند تا جایی که

$$B'_p = B_p(tH'(p)) = B_p\left(-\frac{t}{p^\nu}\right)$$

توجه کنید که طبق انتظار،

$$\mathbb{E}_p B_p\left(-\frac{t}{p^\nu}\right)^\nu = \frac{t}{p^\nu} p = \frac{t}{p} = \mathbb{E}_p B'_p(t)$$

اکنون که چگونگی انتقال نوفه اولیه برای ما روشن‌تر شده است، می‌توانیم حدسی بزنیم.

$$h^\epsilon(x, t; w) = xp + tH(p) + \epsilon^{\frac{1}{\nu}} B_p(x + tH'(p), w^\circ) + \epsilon^{\frac{\nu}{\nu}} \hat{z}(x, t; \hat{w}) + O(\epsilon^{\frac{\nu}{\nu}}) \quad (27)$$

که در آن $w = (w^\circ, \hat{w})$ و w° نماینده تصادفی بودن اولیه و \hat{w} نشان دهنده فرایند نقطه پواسن با شدت ۱ در نیم‌صفحه فوقانی است. بنابراین

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(h^\epsilon(x, t)\right) &= \mathbb{E}_p\left(h^\epsilon(x, t) - xp - tH(p)\right)^\nu \\ &= \epsilon |x + tH'(p)| p + \epsilon^{\frac{\nu}{\nu}} \text{Var}\left(\hat{z}(x, t)\right) \\ &\quad + O(\epsilon^{\frac{\nu}{\nu}}) \end{aligned} \quad (28)$$

به خصوص

$$\text{Var}\left(h^\epsilon(-tH'(p), t)\right) = \epsilon^{\frac{\nu}{\nu}} \text{Var}\left(\hat{z}(x, t)\right) + O(\epsilon^{\frac{\nu}{\nu}}) \quad (29)$$

یعنی این که، اگر قرار دهیم $x = -tH'(p)$ ، آنگاه دیگر نوفه‌ای از جانب توزیع اولیه نخواهد آمد، زیرا $h(\circ, \circ)$ را طوری انتخاب کرده‌ایم که $h(\circ, \circ) = \circ$.

اکنون می‌خواهیم (۲۵) را ثابت کنیم. قضیه زیر در [CG2] اثبات شده است:

قضیه ۱.۴. به ازای $t, p > \circ$ داریم

$$\circ < \limsup_{\epsilon \rightarrow \circ} \text{Var} \Gamma^\epsilon(t) \leq \limsup \text{Var} \Gamma^\epsilon(t) < \infty \quad (30)$$

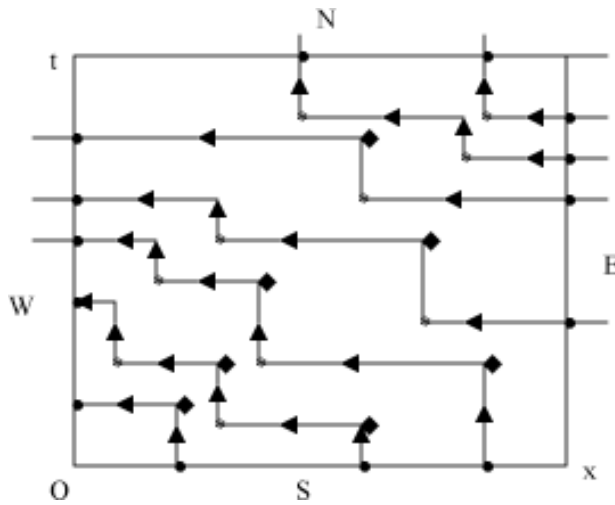
که در آن واریانس نسبت به P_p حساب شده است و

$$\Gamma^\epsilon(t) = \epsilon^{-\frac{1}{p}} h^\epsilon(-tH'(p), p)$$

اکنون که می‌دانیم مشابه قضیه (۱.۲) برای فرایند ایستای \mathbb{P}_p چه باید باشد، خوب است مدل ADH را مورد بررسی دقیق‌تری قرار دهیم. یادآور می‌شویم که برای \mathbb{P}_p هم تصادفی بودن اولیه w° و هم تصادفی بودن دینامیک آن \hat{w} را داریم. w° محدود به \mathbb{R}^+ و \mathbb{R}^- را به ترتیب با w_+° و w_-° نشان می‌دهیم. محدودیت \hat{w} به راست و چپ محور t را نیز با \hat{w}_\pm نمایش می‌دهیم. می‌دانیم که w_+ ، w_- ، \hat{w}_+ ، \hat{w}_- مستقل از یکدیگر هستند. محدودیت هیئت ذرات به $(0, +\infty)$ و $(0, -\infty)$ را به صورت $\rightarrow\eta^\pm(t)$ می‌نویسیم. اکنون می‌گوییم که چون ذرات تنها به سمت چپ می‌جهند، $\rightarrow\eta^-(t)$ فقط به w_+° و w_-° بستگی دارد. در واقع هم اگر یک نقطه پواسن \hat{w}_- بین دو ذره ظاهر شود، از یک نقطه پواسن \hat{w} برای جهش یک ذره w_-° استفاده می‌کنیم؛ در غیر این صورت، هیچ ذره جدیدی در آن مکان خلق نمی‌شود. اگر از تمامی w استفاده کنیم، به جای یک ذره جدید، ذره‌ای داریم که از روی 0 پریده است. به عبارت دیگر، هیئت‌های ذرات در سمت چپ مبدأ تغییری نمی‌کنند چه از کل w استفاده کنیم چه از w_- فقط. با در نظر داشتن این امر، مشاهده می‌کنیم که زمان‌های خلقت ذرات جدید به تعبیر w_- ، معادل همان مواقعی هستند که ذره‌ای، به تعبیر w کل، از مبدأ می‌گذرد. هدف ما از بیان این مطالب این است که نقاطی بر روی محور t ها که محل عبور ذرات هستند فرایندی تشکیل می‌دهند که تنها به w_- بستگی دارد و از این رو مستقل از w_+ است. اکنون فقط دستگاه ذراتی را در نظر می‌گیریم که در سمت راست مبدأ قرار می‌گیرد. این دستگاه را می‌توان به شیوه مارکوفی و به کمک سه فرایند پواسن توصیف کرد که عبارتند از یک فرایند نقطه پواسنی با شدت 1 در ربع اول، یک فرایند پواسنی با شدت p برای هیأت اولیه و یک فرایند نقطه پواسنی با شدت $1/p$ برای نقاط خروجی واقع بر محور t ها. این فرایند جدید معادل است با \mathbb{P}_p که به ربع اول محدود شده باشد و آن را با \mathbb{P}_p^+ نمایش می‌دهیم. یکی دیگر از خواص مفید \mathbb{P}_p را که برحسب \mathbb{P}_p^+ قابل بیان است، توضیح خواهیم داد.

یادآور می‌شویم که نقاط پواسن داخل مستطیل $[0, x] \times [0, t]$ نقاط پواسن در ضلع $\{0\} \times [0, x]$ و نقاط خروجی پواسن در ضلع غربی $[0, t] \times \{0\}$ برحسب \mathbb{P}_p^+ مستقل هستند و شدت آنها به ترتیب 1 ، p و $1/p$ است. اما یک ویژگی خاص که در نظریه صف به قضیه برک معروف است، می‌گوید که فرایند ذره نقطه‌ای در ضلع شمالی $\{t\} \times [0, x]$ ، نقاط ورودی در ضلع شرقی $[x] \times [0, t]$ و گوشه‌های غیر L شکلی در داخل $[0, x] \times [0, t]$ همگی مستقل اند. به علاوه این فرایندها باز هم پواسن هستند با شدت p ، $1/p$ و 1 باهمین ترتیب. اکنون آمادگی داریم تا فرمولی برای واریانس به دست آوریم که بعداً از آن در جزئی از اثبات حدس مان (۲۷) بهره خواهیم برد. باید توجه داشت که $h(x, t) = h(x, t; w)$ برحسب $h(x, t) = (w_+^\circ, \hat{w}_+)$ چیزی جز تعداد نقاط خروجی روی ضلع تعداد نقاط در ضلع شمالی، نیست. به این دلیل ساده که

$$h(x, t) = h(0, t) + \#\hat{\eta}'(x, t)$$



شکل ۸. * فرایند پواسن با شدت ۱ ، فرآیند پواسن با شدت ۱ (W, S, *) مستقل، (N, E, ♦) مستقل ، N, S فرایند پواسن با شدت p ♦ فرآیند پواسن با شدت ۱
E, W فرایند پواسن با شدت ۱/p

که در آن $\vec{\eta}'(x, t)$ هیأت ذرات است که به بازه $[0, x]$ در زمان t محدود شده باشد. قانون بقای جرم می‌گوید

$$h(0, t) + \# \vec{\eta}(x, 0) = (h(x, t) - h(x, 0)) + \# \vec{\eta}(x, t)$$

W, E, N و S به اختصار نشان دهنده تعداد نقاط در اضلاع شرقی، جنوبی، غربی و شمالی $[0, x] \times [0, t]$ خواهند بود. بنابراین داریم

$$W + N = S + E$$

اما

$$\begin{aligned} \text{Var}(h(x, t)) &= \text{Var}(W + N) = \text{Var}(W) + \text{Var}(N) + 2\text{Cov}(W, N) \\ &= \text{Var}(W) + \text{Var}(N) + 2\text{Cov}(S + E - N, N) \\ &= \text{Var}(W) - \text{Var}(N) + 2\text{Cov}(S, N) \end{aligned}$$

زیرا طبق قضیه برک، N و E مستقل‌اند. قرار می‌دهیم $N = S + E - W$ و به دست می‌آوریم

$$\text{Var}(h(x, t)) = \text{Var}(N) - \text{Var}(W) + 2\text{Cov}(W, E)$$

در نتیجه

$$Var(h(x, t)) = p(-tH'(p) - x) + 2Cov(S, N) \quad (31)$$

$$Var(h(x, t)) = p(x + tH'(p)) + 2Cov(W, E) \quad (32)$$

این روابط را باید با (۲۸) مقایسه کرد.

اکنون به بررسی $Cov(S, N)$ و $Cov(W, E)$ می پردازیم. برای این کار، نوعی از این مدل را در نظر می گیریم که در آن هیئت اولیه به مقدار کمی مختل شده است. دقیق تر بگوییم، \mathbb{P}_p^+ را در نظر می گیریم اما به جای توزیع اولیه، یک فرایند نقطه پواسن با شدت $p + \delta$ قرار می دهیم. حاصل را با $\mathbb{P}_{p, \delta}^+$ نشان می دهیم. ادعای ما این است که

$$\frac{d}{ds} \mathbb{E}_{p, \delta}^+ N \Big|_{\delta=0} = \frac{1}{p} Cov(S, N) \quad (33)$$

از آنجا که $\mathbb{E}_{p, \delta}^+(N | S = n)$ مستقل از δ است، داریم

$$\frac{d}{ds} \mathbb{E}_{p, \delta}^+ N \Big|_{\delta=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_p^+(N | S = n) \frac{d}{ds} \mathbb{P}_{p, \delta}^+(S = n) \Big|_{\delta=0},$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \mathbb{P}_{p, \delta}^+(S = n) \Big|_{\delta=0} &= \frac{d}{ds} \frac{(x(p + \delta))^n}{n!} e^{-(p + \delta)x} \Big|_{\delta=0} \\ &= n \frac{(xp)^n}{n!} \frac{1}{p} e^{-px} - x e^{-px} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \mathbb{E}_{p, \delta}^+ N \Big|_{\delta=0} &= \frac{1}{p} \mathbb{E}_p^+ NS - x \mathbb{E}_p^+ N \\ &= \frac{1}{p} (\mathbb{E}_p^+ NS - \mathbb{E}_p^+ S \mathbb{E}_p^+ N) \\ &= \frac{1}{p} Cov(S, N) \end{aligned}$$

که (۳۳) را ثابت می کند. آنچه (۳۳) می گوید اساساً این است که کواریانس S و N برابر است با p ضرب در حساسیت بینهایت کوچک $\mathbb{E}_p^+ N$ نسبت به شدت S . اکنون سمت چپ (۳۳) را مورد توجه قرار می دهیم. ابتدا مشاهده می کنیم که $\mathbb{P}_{p, \delta}^+$ را می توان به طریق زیر ساخت. یک فرایند پواسن با شدت $p + \delta$ را می توان در شروع به صورت اجتماع دو فرایند نقطه پواسنی مستقل با شدت p و δ بیان کرد. نقاط فرایند اول را ذرات درجه یک و نقاط فرایند دوم را ذرات درجه دو می نامیم. (توجه: این دقیقاً مشابه میکروسکوپی (۲۷) است). ادعای ما این است که این وضعیت در زمان های بعد نیز ادامه می یابد. یعنی این که، در زمان t ، فرایند $\vec{\eta}(t)$ را می توان به صورت اجتماع دو فرایند $\vec{\eta}^1$ و $\vec{\eta}^2$ نوشت که توزیع $\vec{\eta}^1$ بر طبق \mathbb{P}_p^+ است و تشکیل شده است از ذرات درجه

یک، در صورتی که $\vec{\eta}^2$ تشکیل شده است از ذرات درجه دو و تحولات آن به $\vec{\eta}^1$ بستگی دارد. منظور ما این است که چون در ربع اول و همین‌طور بر روی محور t ها از فرایند نقطه پواسنی واحدی استفاده می‌کنیم، فرایندهای \mathbb{P}_p^+ و $\mathbb{P}_{p,\delta}^+$ را می‌توان طوری جفت کرد که $\vec{\eta}$ ، که طبق $\mathbb{P}_{p,\delta}^+$ توزیع شده است، برابر باشد با $\vec{\eta}^2 \cup \vec{\eta}^1$ که $\vec{\eta}^1$ بر طبق \mathbb{P}_p^+ توزیع شده است. درستی این امر را می‌توان به سادگی، با بررسی دینامیک $\vec{\eta}^2$ ، تحقیق کرد.



شکل ۹. ● ذرات درجه یک ■ ذرات درجه دو

فرض می‌کنیم نقطه پواسنی * در لحظه t ظاهر شود. نزدیک‌ترین ذره درجه یک را در سمت راست این نقطه قرار می‌دهیم. در آن لحظه، ذره درجه یک به مکان * انتقال داده می‌شود. اگر یک ذره درجه دو بین * و ذره درجه یک قرار داشته باشد، چیز دیگری اتفاق نمی‌افتد؛ در غیر این صورت نزدیک‌ترین ذره درجه دو که در سمت چپ * قرار دارد به مکان قبلی ذره درجه یک انتقال می‌یابد (نگاه کنید به شکل ۹). توجه داشته باشید که ذرات درجه دو تنها می‌توانند به سمت راست حرکت کنند. برای محاسبه سمت چپ معادله (۳۳) اکنون آمادگی داریم. مکان ذرات درجه دو را با $(y_1(t), \dots, y_k(t))$ مشخص می‌کنیم. در ابتدا تمام y_i ها در بازه $[0, x]$ قرار دارند و توزیع آنها بر طبق یک فرایند پواسن با شدت δ است. پس داریم

$$\mathbb{E}_p^+ N - \mathbb{E}_{p,\delta}^+ N = \mathbb{E}_{p,\delta}^+ \sum_j \mathbb{P}(y_j(t) < x)$$

تعداد اولیه ذرات درجه دو را با η^2 نمایش می‌دهیم. از آنجا که $O(\delta^2) = \mathbb{P}_{p,\delta}^+(\eta^2 \geq 2)$ ، داریم

$$\mathbb{E}_{p,\delta}^+ N - \mathbb{E}_p^+(N) = \mathbb{P}_{p,\delta}^+(\eta^2 = 1, X(t) \leq x) + O(\delta^2)$$

که در آن $X(t)$ مکان تنها ذره درجه دو است. توجه داشته باشید که مکان اولیه $X(0)$ به طور یکنواخت از $(0, x)$ انتخاب شده است. مکان تنها ذره درجه دو را که از نقطه z شروع می‌کند با $X(t; z)$ نشان می‌دهیم. داریم

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{p,\delta}^+ N - \mathbb{E}_p^+ N &= \delta \int_0^x \mathbb{P}_{p,\delta}^+(X(t; z) \leq x) dz + O(\delta^2) \\ &= \delta \int_0^x \mathbb{P}_{p,\delta}^+(X(t; 0) \leq x - z) dz + O(\delta^2) \\ &= \delta \int_0^x \mathbb{P}_{p,\delta}^+(x - X(t; 0) \geq z) dz + O(\delta^2) \end{aligned}$$

$$= \delta \mathbb{E}_{p,\delta}^+(x - X(t; \circ)) + O(\delta^2)$$

که برای تساوی دوم از ایستا بودن \mathbb{P}_p استفاده کرده‌ایم. به جای $X(t, \circ)$ به اختصار می‌نویسیم $X(t)$ ، و به دست می‌آید

$$\frac{d}{d\delta} \mathbb{E}_{p,\delta}^+ N \Big|_{\delta=\circ} = \mathbb{E}_{p,\delta}^+(x - X(t))^+$$

از این رابطه و روابط (۳۳) و (۳۱) نتیجه می‌شود که

$$\text{Var}(h(x, t)) = p(-tH'(p) - x) + 2p \mathbb{E}_p^+(x - X(t))^+$$

$Cov(W, E)$ را نیز به همین منوال حساب می‌کنیم. برای این کار، محورها را 90° درجه می‌چرخانیم و نقش x و t را با یکدیگر عوض می‌کنیم. اکنون «در ابتدا» ذرات روی ضلع شرقی مستطیل $[0, x] \times [0, t]$ قرار گرفته‌اند و از ضلع جنوبی وارد می‌شوند. در داخل، یک فرایند نقطه پواسنی با شدت ۱ داریم که در گوشه‌هایی که L شکل نیستند قرار دارند. به تدریج که مختصه x کاهش می‌یابد، ذرات به سمت شمال حرکت می‌کنند و مختصه t افزایش پیدا می‌کند. اگر یک «درجه دو» از گوشه (x, t) مستطیل شروع کند، به سمت جنوب حرکت خواهد کرد در حالی که ذرات درجه یک به سمت بالا حرکت می‌کنند. اگر مختصه t این ذره درجه دو را با $t - z(\circ)$ نشان دهیم، در این صورت $z(x) = 0$ و

$$\text{Var}(h(x, t)) = p(x + tH'(p)) + \frac{2}{p} \mathbb{E}_p^+(t - z(\circ))^+ \quad (34)$$

حال وقت آن رسیده که (۳۴) را مورد بررسی قرار داده درباره معنای آن بیاندیشیم. اگر انتخاب کنیم $x = -tH'(p)$ ، خواهیم داشت

$$\text{Var}(h(x, t)) = 2p \mathbb{E}_p^+(x - X(t))^+$$

این رابطه می‌گوید که نوفه دینامیکی مسؤل افت و خیزهای $h(x, t)$ است. به علاوه،

$$X(t) = -tH'(p) + O(t)$$

و واریانس $h(-tH'(p), t)$ برابر است با p ضرب در نوعی واریانس بینهایت کوچک که مقدار انحراف $X(t)$ از مکان ماکروسکوپی آن $-tH'(p)$ تعیین کننده آن است و این رابطه بسیار نزدیکی دارد با این امر که تغییرات کوچک در جواب $u_t = H(u_x)$ در امتداد خطوط مشخصه انتقال پیدا می‌کنند. یک ذره درجه دو در واقع یک تغییر بینهایت کوچک در چگالی است (تنها یک ذره بدان اضافه می‌شود) و این تغییر در مقیاس ماکروسکوپی، در امتداد خط مشخصه‌ای که از مکان اولیه ذره شروع می‌شود حرکت می‌کند. سرانجام، (۳۴) را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\text{Var}(h^\epsilon(x, t)) = \epsilon p(-tH'(p) - x) + 2p\epsilon \mathbb{E}_p^+(x - X^\epsilon(t))^+$$

که در آن $X^\epsilon(t) = \epsilon X(\frac{t}{\epsilon})$. در بخش ۵ نشان خواهیم داد که

$$\mathbb{E}_p^+(x - X^\epsilon(t))^+ = O(\epsilon^{\frac{1}{3}})$$

یا معادل آن

$$\mathbb{E}_p^+(x - X(t))^+ = O(t^{\frac{1}{3}})$$

به ازای $x = -tH'(p)$.

۵. ذره درجه دو

در بخش ۴، تخمین واریانس $Var(h^\epsilon(-tH'(p), t)) = O(\epsilon^{\frac{1}{3}})$ را تبدیل به تخمینی برای اندازه افت و خیزهای یک ذره درجه دو کردیم. یک ذره درجه دو $X(t)$ از مبدا آغاز می‌کند و انتظار ما این است که هرگاه $t \rightarrow +\infty$ داشته باشیم

$$X(t) = -tH'(p) + \bar{Z}t^{\frac{1}{3}} + O(t^{\frac{1}{3}})$$

برای قضیه (۱.۴)، کافیت نشان دهیم

$$t^{\frac{1}{3}} \lesssim \mathbb{E}_p^+(-tH'(p) - X(t))^+ \lesssim t^{\frac{1}{3}}$$

که در آن $a(t) \lesssim b(t)$ بدین معناست که عدد ثابتی مانند C وجود دارد به طوری که به ازای تمام t $a(t) \leq Cb(t)$ باشد. قبل از بررسی فرایند $X(t)$ ، این مسأله را در مقیاس ماکروسکوپی در نظر می‌گیریم. یادآور می‌شویم که هر اختلال کوچک در جواب معادله $u_t = H(u_x)$ در امتداد خط مشخصه منتشر می‌شود. اگر u یک جواب غیرکلاسیک این معادله باشد، خطوط مشخصه را باید به نحوی مناسب تعبیر کرد. با استفاده از فرمول وردش هویف و لکس^{۱)}، این کار آسان می‌گردد. داریم

$$u(x, t) = \sup_y \left[u(y, 0) - tL\left(\frac{y-x}{t}\right) \right] \quad (۳۵)$$

می‌دانیم که اگر u در نقطه x و در زمان t مشتق‌پذیر باشد، آنگاه سوپریمم فوق تنها در یک نقطه می‌پیوندد؛ در غیراین صورت ماکزیمم کننده منحصر به فرد نیست و یک تناظر یک به یک بین مجموعه کاندیدهایی که برای u_x داریم (که بستگی به نحوه نزدیک شدن به (x, t) از نقاط نزدیک به آن دارد) $y = y(x, t)$ به وقوع و مجموعه ماکزیمم کننده‌ها وجود دارد. این تناظر از طریق رابطه

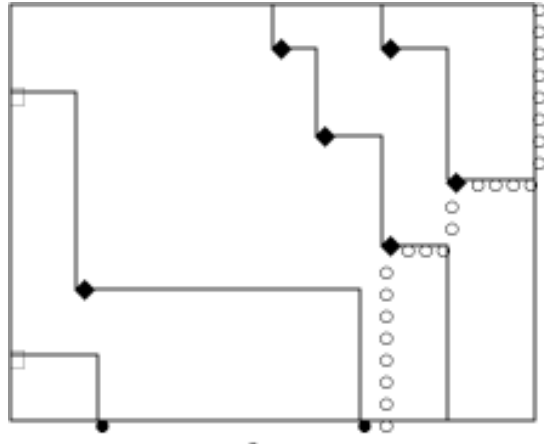
$$u_x = L'\left(\frac{y-x}{t}\right)$$

1) Lax

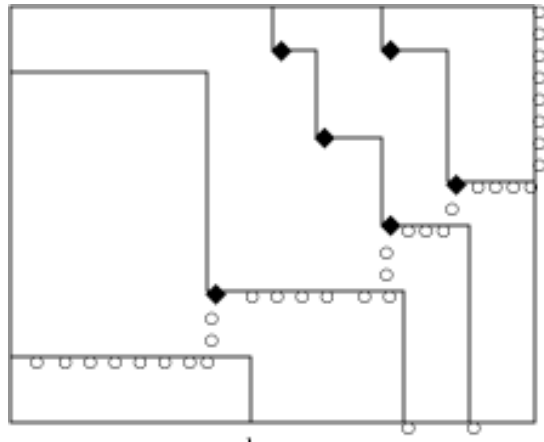
برقرار می‌شود. در واقع، می‌توانیم تابعی مانند $y(x, t)$ تعریف کنیم که نسبت به x غیر نزولی باشد و هرگاه u_x تک مقداری باشد، y هم نسبت به x پیوسته باشد؛ در غیراین صورت y در x یک ناپیوستگی جهشی داشته باشد و $y(x_+, t)$ و $y(x, t)$ نشان دهنده بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین ماکزیمم کننده در عبارت (۳۵) باشد. همچنین، هرگاه $y(x_+, t) = y(x_-, t) = y(x, t)$ یک خط مشخصه واحد وجود دارد که پس از t واحد زمانی به x می‌رسد. در واقع می‌توانیم $y(x, t) = y$ را معکوس کنیم و یک تابع غیر نزولی $x(y, t)$ به دست آوریم. این تابع به عنوان تابعی از زمان در معادله دیفرانسیل

$$\frac{dx}{dt} = -H'(u_x(x, t)) \quad (36)$$

با شرط اولیه $x(y, 0) = y$ صدق می‌کند. معادله دیفرانسیل معمولی (۳۶) مکان ماکروسکوپی یک ذره درجه دو را به دست می‌دهد. به عبارت دقیق‌تر، اگر یک ذره درجه دو، $X(t) = X\left(t; \frac{y}{\epsilon}\right)$ ، از $\left[\frac{y}{\epsilon}\right]$ شروع کند، در این صورت $X^\epsilon(t) = \epsilon X\left(\frac{t}{\epsilon}\right)$ وقتی $\epsilon \rightarrow 0$ به $x(y, t)$ همگرا می‌شود. بخصوص، اگر $u(x, t) = px + tH(p)$ ، در این صورت $x(y, t) = y - tH'(p)$. خلاصه این که، مورد نظر ما مکان ذره درجه دو یعنی $x(y, t)$ است، اما اگر معکوس آن $y(x, t)$ را در نظر بگیریم، یک شاخص وردشی در اختیار داریم که همان ماکزیمم کننده سمت راست رابطه (۳۵) است. در حالت کلی توصیف وردشی مشابهی برای $x(y, t)$ در دست نداریم. هر چند، هنگامی که همتای ماکروسکوپی آن تابع، یعنی $x(t; y)$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم، به شرط این که فقط اندازه ایستای \mathbb{P}_p را در نظر بگیریم، یک مشخصه ایستا برای آن وجود خواهد داشت. در واقع، قضیه باک این اجازه را می‌دهد که زمان را معکوس کنیم و ضلع شمالی مستطیل $[0, t] \times [0, x]$ را ضلع آغازین فرض کنیم. متغیر فضا را هم تحت انعکاس قرار می‌دهیم به طوری که گوشه (x, t) نقش مبدأ را ایفا کند.

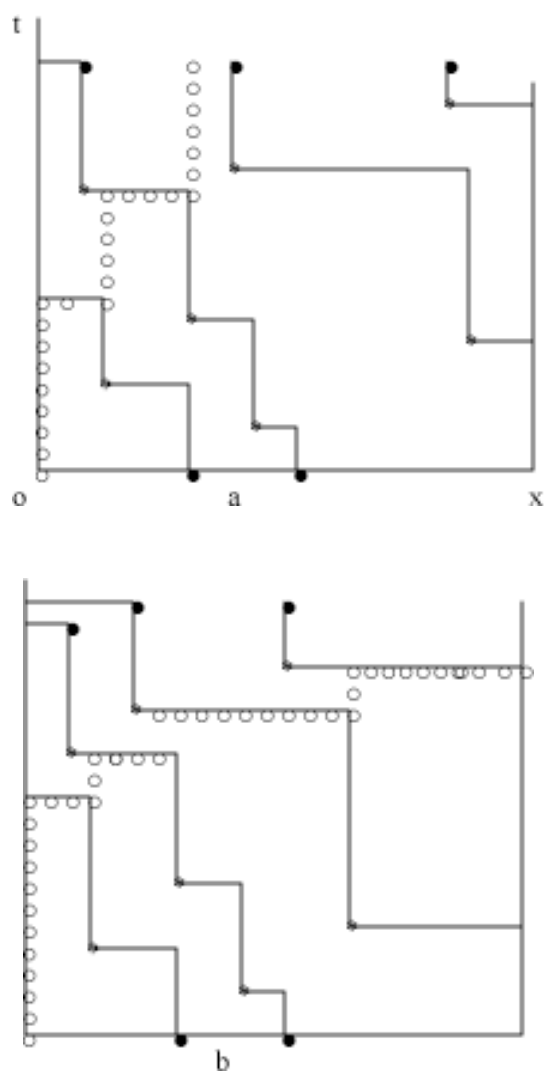


a



b

شکل ۱۰



شکل ۱۱

علامت o مسیر یک ذره درجه دو را نشان می‌دهد. $x = -tH'(p)$

در شکل ۱۰ دو نمونه از ذرات درجه دو نشان داده شده است. در (a) داریم $X(t) < x$ و در b داریم $X(t) > x$ و $x = -tH'(p)$ مکان ماکروسکوپی است. در شکل ۱۱، زمان معکوس شده است

و مختصه x نیز نسبت به نقطهٔ وسط بازه انعکاس یافته است. در شکل ۱۱، در هر دو قسمت a و b ، داریم $h(x, t) = ۴$ ، یعنی چهار مسیر ذره در مستطیل $[۰, t] \times [۰, x]$ وجود دارد.

در مورد (a) ، یک منحنی بالارونده را که به‌طور ضعیف صعودی است به این ترتیب انتخاب می‌کنیم که ابتدا دو ذره روی محور x ها در نظر گرفته و سپس یک منحنی بالارونده اکیداً صعودی را برمی‌گزینیم. اما در مورد (b) ابتدا نقطه‌ای را روی محور t ها انتخاب کرده و سپس یک منحنی اکیداً بالارونده را گزینش می‌کنیم. به‌طور کلی‌تر

$$h(x, t) = \max \left(h_1(x, t), h_2(x, t) \right) \quad (۳۷)$$

که در آن

$$h_1(x, t) = \sup_{0 < \xi < x} \{h(\xi, ۰) + \hat{\gamma}(x, t; \xi, ۰)\} \quad (۳۸)$$

$$h_2(x, t) = \sup_{0 < \xi < t} \{h(۰, \xi) + \hat{\gamma}(x, t; ۰, \xi)\} \quad (۳۹)$$

در این روابط $\hat{\gamma}(x, t; a, b)$ اندازهٔ طولانی‌ترین منحنی بالارونده صعودی از (a, b) تا (x, t) است. همان‌طور که شکل‌های ۱۰ و ۱۱ نشان می‌دهند، نقطهٔ مرزی ماکزیمم‌کننده بر روی محور x ها خواهد بود اگر و تنها اگر $X(t) < x$. فرض می‌کنیم $Z(t)$ بزرگترین مختصه x ممکن برای چنین ماکزیمم‌کننده‌ای باشد. اگر تمام نقاط مرزی ماکزیمم‌کننده بر روی محور x ها واقع باشند، قرار می‌دهیم $Z(t) = ۰$. خلاصه این که

$$Z(t) \stackrel{D}{=} (x - X(t))^+ \quad (۴۰)$$

یعنی متغیرهای تصادفی $Z(t)$ و $(x - X(t))^+$ دارای توزیع یکسان هستند. اما رابطهٔ (۳۵) معادل است با این که بگوییم قضیهٔ ۲.۵ داریم

$$t^{\frac{1}{p}} \lesssim \mathbb{P}_p^+(Z(t)) \lesssim t^{\frac{1}{p}} \quad (۴۱)$$

ابتدا توضیحی راهگشا برای (۴۱) ارائه خواهیم داد. این توضیح به درک بهتر استراتژی نهفته در پس اثبات این قضیه که به کاتور و گروئن بوم [CG2] باز می‌گردد، خواهد انجامید. نقطهٔ $Z(t)$

برای سویریمم در رابطه (۳۸) یک ماکزیمم کننده است. یاد آور می شویم که $x = -tH'(p)$ و CLT برای فرایندهای پواسنی میگوید

$$h(z, 0) = pz + B_p(z) + O(\sqrt{z})$$

که در آن $B_p(z)$ یک حرکت براونی است. این را به صورت زیر می نویسیم:

$$h(at^{\frac{1}{\nu}}, 0) = apt^{\frac{1}{\nu}} + t^{\frac{1}{\nu}} B_p(a) + O(t^{\frac{1}{\nu}}), \quad (42)$$

به ازای $0 < a < t^{\frac{1}{\nu}}$. البته، انتظار داریم که متغیر تصادفی A ، مستقل از a ، وجود داشته باشد به طوری که

$$\hat{\gamma} \left(-tH'(p), t; at^{\frac{1}{\nu}}, 0 \right) = \nu \left[\left(-tH'(p) - at^{\frac{1}{\nu}} \right) t^{\frac{1}{\nu}} + t^{\frac{1}{\nu}} A + O(t^{\frac{1}{\nu}}) \right] \quad (43)$$

این را از قضیه (۲.۱) می دانیم و سعی ما بر این است که از یکی از نتایج (۴۳)، که از طریق استدلالهای احتمالاتی اثبات پذیر است و برای قضیه (۵.۱) لازم می باشد، استفاده کنیم. فعلاً (۴۳) را می پذیریم و به توضیح راهگشا ادامه می دهیم. اگر طرف راست (۴۳) را بسط دهیم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} & \nu t \left(-tH'(p) - at^{\frac{1}{\nu}} \right)^{\frac{1}{\nu}} + t^{\frac{1}{\nu}} A + O(t^{\frac{1}{\nu}}) \\ &= \nu t \sqrt{-H'(p)} \left(1 - \frac{a}{-H'(p)} t^{-\frac{1}{\nu}} \right)^{\frac{1}{\nu}} + t^{\frac{1}{\nu}} A + O(t^{\frac{1}{\nu}}) \\ &= \nu t \sqrt{-H'(p)} \left(1 - \frac{1}{\nu} \frac{a}{-H'(p)} t^{-\frac{1}{\nu}} - \frac{1}{\lambda} \frac{a}{(-H'(p))^{\frac{1}{\nu}}} t^{-\frac{2}{\nu}} \right) + t^{\frac{1}{\nu}} A + O(t^{\frac{1}{\nu}}) \\ &= \frac{\nu t}{p} - apt^{\frac{1}{\nu}} - \frac{1}{\nu} p^{\frac{\nu-1}{\nu}} a^{\nu} t^{\frac{1}{\nu}} + t^{\frac{1}{\nu}} A + O(t^{\frac{1}{\nu}}). \end{aligned} \quad (44)$$

از رابطه فوق، (۴۲) و (۳۸) به دست می آوریم

$$\begin{aligned} h_{\nu} \left(-tH'(p), t \right) &= h_{\nu} \left(\frac{t}{p^{\frac{1}{\nu}}}, t \right) \\ &= \frac{\nu t}{p} + t^{\frac{1}{\nu}} \max_{0 < a < t^{\frac{1}{\nu}}} \left[B_p(a) - \frac{1}{\nu} p^{\frac{\nu-1}{\nu}} a^{\nu} + A \right] + O(t^{\frac{1}{\nu}}) \end{aligned} \quad (45)$$

از آنجا که A یک متغیر تصادفی مستقل از a است، a ی ماکزیمم کننده در (۴۴) نمی تواند خیلی بزرگ باشد؛ یعنی هرگاه $t \rightarrow \infty$ ، ماکزیمم کننده باید کراندار باقی بماند. بنابراین ν ماکزیمم کننده در (۳۸) باید از مرتبه $t^{\frac{1}{\nu}}$ باشد. در واقع محاسباتی که در بالا انجام دادیم به فرمول زیر منجر می شود:

$$h^{\epsilon} \left(-tH'(p), t \right) = \nu t H(p) + t^{\frac{1}{\nu}} Z_p(t) + O(\epsilon^{\frac{1}{\nu}})$$

طولانی‌ترین زیر دنباله‌های صعودی و مدل الدوس - دیاکونیس - همزلی — ۳۰

که $\bar{Z}_p(t)$ یک متغیر تصادفی است که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$\bar{Z}_p(t) \stackrel{D}{=} t^{\frac{1}{p}} \max_a \left(B_p(a) - \frac{1}{p} p^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} \right) + \left(\frac{t}{p} \right)^{\frac{1}{p}} Z^* \quad (46)$$

$B_p(a)$ یک حرکت براوننی است با واریانس pa ، Z^* یک متغیر تصادفی تریسی - ویدام است و این دو از یکدیگر مستقل هستند.

خطوط کلی اثبات (41) را ادامه می‌دهیم. اول مشاهده می‌کنیم که اگر تابع ارتفاع واسطه به اندازه \mathbb{P}_q را با $h^*(x, t)$ نشان دهیم، همیشه خواهیم داشت

$$\hat{\gamma}(x, t; Z, \circ) \leq h^q(x, t) - h^q(z, \circ) \quad (47)$$

رابطه (45) به این دلیل است که می‌دانیم $h^q(\circ, \circ) = 0$ و $h^q(x, t)$ شمارشگر تعداد مسیرهای ذراتی است که در داخل مستطیل $[0, x] \times [0, t]$ قرار دارند. سمت راست رابطه (45) هم آن مسیرهایی را می‌شمارد که یک از یک نقطه بازه $[0, z]$ شروع نمی‌شوند. این عدد را می‌توان به عنوان مشخصه اندازه طولانی‌ترین منحنی رو به بالایی که به طور ضعیف صعودی است و نقطه (z, \circ) را به نقطه (x, t) وصل می‌کند، در نظر گرفت. یعنی این که این منحنی اجازه دارد، قبل از این که از $[z, x] \times [0, t]$ نقاط پواسنی را انتخاب کند، نقاطی را از $\{0\} \times [z, x]$ یا $[z, x] \times [0, t]$ برگزیند. البته، تعداد منحنی‌هایی که به طور ضعیف صعودی هستند، اقلاباً برابر است با تعداد منحنی‌هایی که اکیداً صعودی هستند و بنابراین (45) به ازای هر q ای درست است. انتخاب بهترین q برای ما چندان مشکل نیست. از نظر ماکروسکوپی (45) متناظر است با

$$2\sqrt{(x-z)t} \leq (x-z)q + tH(q) = (x-z)q + \frac{t}{q}$$

این نابرابری یک تساوی می‌شود هرگاه

$$q = \left(\frac{t}{x-z} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{x}{t} - \frac{z}{t} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

در موردی که با آن سروکار داریم $x = -tH'(p) = \frac{t}{p^2}$ ، و این بدان معناست که بهترین q عبارت است از

$$q = \left(\frac{1}{p^2} - \frac{z}{t} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (48)$$

باید توجه داشت که اگر z ماکزیمم کننده (38) باشد، در این صورت

$$\begin{aligned} h_1(x, t) &= h^p(z, \circ) + \hat{\gamma}(x, t; z, \circ) \\ &\leq h^p(z, \circ) + h^q(x, t) - h^q(z, \circ) \end{aligned}$$

یا

$$\begin{aligned} h^q(z, \circ) - h^p(z, \circ) &\leq h^q(x, t) - h_1^q(x, t) \\ &\leq h^q(x, t) + h^p(x, t). \end{aligned}$$

در این رابطه به جای h نوشته ایم h^p . انتخاب ما (۴۶) به ازای $q < p$ صادق است. از آنجا که $h^q(z, \circ) - h^p(z, \circ)$ را می توان تعداد ذرات پواسنی با شدت $q - p$ فرض کرد، داریم

$$h^{q-p}(z, \circ) \leq h^q(x, t) - h^p(x, t)$$

جفت شدگی بین \mathbb{P}_p و \mathbb{P}_q را با $\hat{\mathbb{P}}$ نشان می دهیم. داریم

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(Z(t) > \lambda) &\leq \hat{\mathbb{P}}(h^{q-p}(\lambda, \circ)) \leq h^q(x, t) - h^p(x, t) \\ &\leq \hat{\mathbb{P}}(h^{q-p}(\lambda, \circ)) \leq \hat{\mathbb{P}}(h^{q-p}(\lambda, \circ) - a) \\ &\quad + \hat{\mathbb{P}}(\hat{\mathbb{P}}(h^{q-p}(\lambda, \circ) - a) \leq h^q(x, t) - h^p(x, t)) \\ &\leq \frac{Var(h^{q-p}(\lambda, \circ))}{a^2} + \frac{Var(h^q(x, t) - h^p(x, t))}{b^2} \end{aligned} \quad (49)$$

که در آن

$$\begin{aligned} b &= \hat{\mathbb{P}}[h^{q-p}(\lambda, \circ) - h^q(x, t) + h^p(x, t)] - a \\ &= \lambda(q-p) - x(q-p) - t(H(q) - H(p)) - a \end{aligned}$$

q را برابر $\left(\frac{1}{p^2} - \frac{\lambda}{t}\right)^{-\frac{1}{2}}$ انتخاب می کنیم به طوری که

$$b = b(\lambda) = -\lambda p - 2\left((X - \lambda)t\right)^{\frac{1}{2}} + xp + \frac{t}{p} - a$$

اما $b(\circ) = -a$ و $b_1(\circ) = \circ$ زیرا $x = -tH'(p) = tp^{-2}$. از طرف دیگر، b محدب است زیرا $b''(\lambda) = \frac{t}{\lambda^3}(x - \lambda)^{-\frac{3}{2}}$ و در نتیجه،

$$b \geq \frac{b''(\circ)}{2} \lambda^2 - a = p^2 \frac{\lambda^2}{4t} - a$$

اکنون مقدار a را برابر $p^2 \frac{\lambda^2}{4t}$ انتخاب می کنیم به طوری که

$$b \geq p^2 \frac{\lambda^2}{4t}$$

اکنون کرانی برای عبارت سمت راست (۴۳) تعیین می کنیم. مسلماً داریم

$$Var(h^{q-p}(\lambda, \circ)) = (q-p)\lambda \quad (50)$$

به علاوه

$$Var(h^q(x, t) - h^p(x, t)) \leq 2Varh^q(x, t) + 2Varh^p(x, t)$$

حال رابطه‌ای بین $Varh^p$ و $Varh^q$ خواهیم یافت. داریم

$$Var(h^q(x, t)) = \frac{tq}{xq} - : xq + \Upsilon q \mathbb{F}_q^+(x - X(t))^+ \quad (51)$$

از آنجا که تبدیل $\mathbb{P}_q^+, (x, t) \mapsto (\frac{q}{p}x, \frac{p}{q}t)$ را به \mathbb{P}_p^+ تبدیل می‌کند، نتیجه می‌گیریم که

$$\mathbb{F}_q^+(x - X(t))^+ = \mathbb{F}_q^+(x - \frac{p}{q}X(\frac{p}{q}t))^+$$

از این رابطه، (۴۹) و این که $x = tp^{-\Upsilon}$ می‌توان نتیجه گرفت که

$$\begin{aligned} Var(h^q(x, t)) &= \frac{t}{q} - xq + \Upsilon q \mathbb{F}_p^+(x - \frac{p}{q}X(\frac{p}{q}t))^+ \\ &= \frac{t}{q} - xq + \Upsilon(xq - \frac{t}{q}) + \Upsilon \mathbb{F}_p^+(\frac{t}{q} - pX(\frac{p}{q}t))^+ \\ &= xq - \frac{t}{q} + \Upsilon p \mathbb{F}_p^+(\frac{t}{q} \frac{1}{p^\Upsilon} - X(\frac{p}{q}t))^+ \\ &= xq - \frac{t}{q} + Var(h^p(\frac{t}{q} \frac{1}{p^\Upsilon}, \frac{p}{q}t)) \end{aligned}$$

در اینجا به یک نابرابری اشاره می‌کنیم که در [CG2] آمده و از اثبات آن صرف‌نظر می‌کنیم: به ازای هر $a < 1$ داریم

$$Var(h^p(-tH'(p)a, ta)) \leq Var(h^p(-tH'(p), t))$$

اگر این رابطه را بپذیریم، رابطه زیر لازم می‌آید

$$Var(h^q(x, t)) \leq xq - \frac{t}{q} + Var(h^p(x, t))$$

بنابراین

$$\begin{aligned} Var(h^q(x, t) - h^p(x, t)) &\leq \Upsilon(xq - \frac{t}{q}) + \Upsilon Var(h^p(x, t)) \\ &= \Upsilon(xq - \frac{t}{q}) + \Upsilon p \mathbb{F}_p^+(Z(t)) \end{aligned}$$

از رابطه فوق و نابرابری ساده زیر،

$$xq - \frac{t}{q} \leq \Upsilon p^\Upsilon \lambda$$

نتیجه می‌گیریم که

$$Var(h^q(x, t) - h^p(x, t)) \leq \Upsilon p^\Upsilon \lambda + \Upsilon p \mathbb{F}_p^+(Z(t))$$

از این رابطه و روابط (۴۸) و (۴۷) به دست می آید

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(Z(t) > \lambda) &\leq \frac{\gamma^2 t^\gamma}{p^{\gamma} \lambda^{\gamma}} (p - q) \lambda + \frac{\gamma^2 t^\gamma}{p^{\gamma} \lambda^{\gamma}} \left[\gamma p^\gamma \lambda + \lambda p \mathbb{E}_p^+(Z(t)) \right] \\ &\lesssim \frac{t^\gamma}{\lambda^\gamma} + \frac{t^\gamma}{\lambda^\gamma} \mathbb{E}_p(Z(t)) \end{aligned}$$

به ازای $\lambda \in (0, tp^{-\gamma})$ با استفاده از این نابرابری، رسیدن به رابطه

$$\mathbb{E}_p(Z(t)) \lesssim t^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

دیگر مشکل نیست. برای مشاهده جزئیات می توان به [CG2] مراجعه کرد.

مراجع

- [1] A. Arjmand, *Test*. Iran J.Math. 28, 36, 295-306, (2008).
- [AD1] D. J. Aldous and P. Diaconis. Hammersley's interacting particle process and longest increasing subsequences. *Probab. Th. Rel. Fields*, 103: 199-213, 1995.
- [AD2] D. J. Aldous and P. Diaconis. Longest increasing subsequences: From patience sorting to Baik-Deitt-Johansson Theorem. *Bulletin of AMS*, 36: 413-432, 1999.
- [BDK] J. Baik, P.A. Deift, and K. Johansson. On the distribution of the length of the longest increasing subsequence of random Permutations. *J. Amer. Math. Soc.* 12: 1119-1178, 1999.
- [CG1] E. Cator and P. Groeneboom. Hammersley's process with sources and sinks. *Ann. Probab.* 33: 879-903, 2005.
- [CG2] E. Cator and P. Groeneboom. Second class particles and cube root asymptotics for Hammersley's process. *Ann. Probab.* 34: 1273- 1295, 2006.
- [FF] P.A. Ferrari and L. R. G. Fontes. Current fluctuations for the asymmetric simple exclusion process. *Ann. Probab.* 22: 820-832, 1994.
- [C] T. Sepäläinen. Hydrodynamic scaling, convex duality and asymptotic shapes of growth models. *Markov Process. Related Fields*, 4: 1-26, 1998.
- [V] R. Venkatsubramani. Hydrodynamic limit for the asymmetric exclusion process with deterministic initial data and the Hammersley process on S^1 . Ph. D. thesis, New York University, 1995.

- [VK] A. M. Vershik and S. V. Kerov. Asymptotics for the Plancherel measure of the symmetric group and the limiting form of Young tables. *Soviet Math. Dokl.*, 18: 527-531, 1977. Translation of *Dokl. Acad. Nauk. SSSR* 233: 1024-1027, 1977.

مؤلف: فریدون رضاخانلو rezakhan@math.berkeley.edu
دانشگاه برکلی کالیفرنیا، دانشکده ریاضی

مترجم: یوسف امیرارجمند amirarj@aut.ac.ir
دانشگاه صنعتی امیرکبیر، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

برنامه‌ریزی خطی نیمه نامتناهی، الگوریتم‌های حل و کاربردها

سارا ابراهیمی، علیرضا فخارزاده جهرمی

چکیده

مسائل برنامه‌ریزی خطی نیمه نامتناهی، که به وفور و با تنوع زیاد در طبیعت و مباحث علمی ظاهر می‌شوند گرچه دارای خواصی شبیه به مسائل برنامه‌ریزی خطی متناهی هستند اما در مواردی و خصوصاً شیوه‌های حل با آن‌ها متفاوت‌اند. در این نوشتار، نمونه‌هایی از برنامه‌ریزی خطی نیمه نامتناهی ورده‌های مختلف آن را معرفی و تشریح می‌کنیم. سپس شکاف دوگانی در خصوص آن‌ها را مطرح و بر مبنای آن به ارائه الگوریتم‌های حل این‌گونه مسائل در حالت‌های پیوسته و شمارا می‌پردازیم. همچنین روش همگرایی در خصوص یافتن جواب تقریبی مناسب و همگرا به جواب اصلی نیز مطرح می‌شود. سرانجام طی مثال‌هایی کاربردها و چگونگی کارکرد الگوریتم‌ها، و کارآیی آن‌ها را تشریح می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: برنامه‌ریزی خطی متناهی، برنامه‌ریزی خطی نیمه نامتناهی، شکاف دوگانی، الگوریتم، اندازه‌های برل منظم.

۱. مقدمه و تاریخچه

توانایی‌های نظریه دوگانی، وجود الگوریتم سیمپلکس و کارایی آن، کسب اطلاعات مفید با انجام تحلیل حساسیت و دیگر خواص مفید برنامه‌ریزی خطی متناهی موجب شده است تا در بسیاری موارد یک مدل خطی، حتی به قیمت کم شدن دقت، جایگزین مدلی غیرخطی شود.

به طور طبیعی در مدل‌سازی هر چه بعد مسأله برنامه‌ریزی خطی متناهی (FLP) بزرگ‌تر باشد، قدرت تطبیق مدل با واقعیت و دقت آن بهتر خواهد بود ([۲۱]). لذا در دو دهه اخیر شاهد تلاش در

جهت توسعه دانش حل مسائل FLP به منظور حل مسائل برنامه‌ریزی خطی نامتناهی ($INLP$) هستیم.

یک مسأله $INLP$ مسأله‌ای از نوع برنامه‌ریزی ریاضی است که دارای تابع هدف و قیود خطی بوده، اما تعداد متغیرها یا قیود آن (یا هر دو) نامتناهی‌اند. به طور مثال بخشی از مسائل نظریه بازی‌ها را می‌توان از این دسته برشمرد. در حالی که بازی‌های دو نفره نمونه‌ای از مسائل FLP هستند، اما اگر بازیکنان استراتژی‌های خود را از فضایی با بعد نامتناهی انتخاب کنند، با مسأله‌ای از نوع $INLP$ مواجه خواهیم بود ([۲۵]). در مسیر گسترش برنامه‌ریزی خطی نامتناهی، گذر بعدی، مسائلی از نوع مسائل برنامه‌ریزی خطی نیمه نامتناهی ($SILP$) است که نزدیک‌ترین تقریب به مسائل $INLP$ هستند، به علاوه انتظار رخداد این دسته از مسائل به دلیل محدودیت تعداد منابع در طبیعت (تعداد قیود) و استفاده متعدد از آنها (متغیرها)، بسیار فراوان است.

مبحث برنامه‌ریزی خطی نیمه نامتناهی اولین بار توسط کارنس^۱ و همکارانش (۱۹۶۳، [۲]) طی مقاله‌ای در مورد مسائل برنامه‌ریزی خطی نیمه نامتناهی شماره مطرح شد. آنها سعی داشتند تا یک نتیجه دوگانی قوی روی کارهای هار^۲ (۱۹۲۴، [۹]) بنا نمایند. اما مقاله آنها یک اشتباه داشت که بعدها توسط دوفین^۳ و کارلوویتز^۴ (۱۹۶۵، [۲]) تصحیح شد. در این نوع کارها ایده بستار کانونی نقش برجسته‌ای دارد. اگر تعدادی قید $\lambda(s)$ برای $s \in S$ (مجموعه اندیس است) وجود داشته باشد به طوری که مجموعه $\{\lambda(s)(a(s), b(s)) : s \in S\}$ در R^{n+1} فشرده باشد، آنگاه مجموعه قیود برای مسأله برنامه‌ریزی خطی نیمه نامتناهی «به طور کانونی بسته» نامیده می‌شود. این حالت، همراه با شرط نقطه درونی کافی است تا شرط دوگانی قوی را مستقل از ماهیت مجموعه S تضمین نماید (گلاشف^۵ در سال ۱۹۷۹، [۶] این مطلب را ثابت نموده است). نتایج بعدی از تئوری دوگانی برای $SILP$ توسط مقاله‌های کارنی^۶ در ۱۹۸۱، بورواین^۷ در ۱۹۸۱ و ۱۹۸۳، دوفین، یاروسلاو^۸ و کارلوویتز در ۱۹۸۳ شرح داده شده است. همچنین در ۱۹۸۳ گلاشف و گوستاوسون به اتفاق کتابی تحت عنوان «بهینه‌سازی خطی و تقریب» نوشتند ([۷]). یکی از موضوع‌های مورد بحث در این کتاب، مسائل برنامه‌ریزی خطی نیمه نامتناهی پیوسته می‌باشد. در آنجا ابتدا مراحل هندسی و جبری روش سیمپلکس برای این دسته از مسائل بیان، قضایای دوگانی بررسی و سپس به معرفی بعضی کاربردها پرداخته شده است.

در مسائل کنترل بهینه، مبحث $SILP$ نقش بسزایی دارد و حتی موجب پیشرفت در روش‌های حل (حداقل در کاربری) گردیده است. مقاله رودولف^۹ در ۱۹۸۷ این موضوع را تأیید می‌نماید. همچنین در این راستا با مطرح نمودن روش تعدیل^{۱۰} (۱۹۹۰، [۲۳]) و (۱۹۹۲، [۲۴])، به حل مسائل کنترل بهینه برمبنای $SILP$ پرداخته شده است. رویو^{۱۱} نیز در (۱۹۹۵، [۲۲]) از این روش برای حل مسأله‌های متضمن معادله انتشار (دیفیوژن) استفاده نمود. فخارزاده، ترابی و اعلام‌پور نیز

1) Charnes 2) Haar 3) Duffin 4) Karlovitz 5) Glashoff 6) Karney 7) Borwein
8) Jeroslow 9) Rudolph 10) Relaxation 11) Rubio

(۱۳۸۱ ه.ش، [۳۰]) موفق به حل همان مسأله با استفاده از روش دیگری برای حل مسائل $SILP$ شدند، آنها مقایسه‌ای را نیز در این زمینه انجام داده‌اند.

۲. رده‌های مسائل $SILP$ و دوگان آنها

برای بردارهای n مؤلفه‌ای c و $a(s)$ و مجموعه اندیس S یک مسأله برنامه‌ریزی خطی نیمه نامتناهی، در حالت کلی، به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{Min : } & c^T x \\ \text{S. to : } & a(s)^T x \geq b(s), \quad s \in S, \quad x \in R^n. \end{aligned} \quad (1)$$

نسبت به وضعیت S ، نوع مسأله $SILP$ در (۱) و شیوه حل آن متفاوت می‌باشد:
الف) اگر مجموعه اندیس S زیر مجموعه‌ای پیوسته از فضای اقلیدسی R^k باشد، آنگاه (۱) تبدیل به مسأله‌ای از نوع $SILP$ پیوسته می‌شود. در حالت خاص معمولاً $k=1$ و $S=[a, b] \subseteq R$ اختیار می‌شود. بنا به خاصیت هم‌ارزی و به منظور سادگی $[a, b]$ را $[0, 1]$ اختیار می‌کنیم. بنابراین در حالت کلی یک مسأله $SILP$ پیوسته ($SILP1$) به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \text{Min : } & c^T x \\ \text{S. to : } & a(s)^T x \geq b(s), \quad s \in [0, 1], \quad x \in R^n; \end{aligned} \quad (2)$$

لازم به ذکر است که در (۲) همواره فرض می‌کنیم $a(s)$ و $b(s)$ توابعی پیوسته‌اند و می‌توانند نسبت به s غیرخطی نیز باشند).

ب) اگر S نامتناهی و شمارا باشد، آنگاه (۱) مسأله‌ای از نوع $SILP$ شمارا ($SILP2$) است که به صورت کلی زیر نمایش داده می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{Min : } & c^T x \\ \text{S. to : } & a_i^T x \geq b_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad x \in R^n. \end{aligned} \quad (3)$$

مسائل $SILP$ در این دسته‌بندی‌ها دارای دوگان نیز هستند و نظریه دوگانی در مورد آنها قابل بررسی است. وضعیت فضای متغیرها و مقادیر سمت راست برای مسائل $SILP1$ و $SILP1^*$ (دوگان $SILP1$) را می‌توان به صورت زیر خلاصه نمود ([۱]):

$$SILP1: \left[\begin{array}{c} R^n \\ R^n \end{array} \right] \left| \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array} \right| \left[\begin{array}{c} C[0, 1] \\ M_T[0, 1] \end{array} \right]_{SILP1^*}$$

که در آن $M_T[0, 1]$ فضای اندازه‌های برل منظم روی $[0, 1]$ است. به علاوه می‌توان فضای متغیرها و فضای مقادیر سمت راست را برای مسائل $SILP2$ و دوگان آن $SILP2^*$ را با نمودار زیر نمایش داد:

$$SILP2: \left[\begin{array}{c} R^n \\ R^n \end{array} \right] \left| \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array} \right| \left[\begin{array}{c} R^\infty \\ GFSS \end{array} \right]_{SILP2^*}$$

که در آن R^∞ فضای تمام دنباله‌ها روی R و $GFSS$ فضای تمام دنباله‌ها با تعدادی متناهی جمله ناصفر روی R می‌باشند.

۳. نمونه‌هایی از حضور و کارایی $SILP$

علاوه بر بهینه‌سازی به معنای عام، نظریه‌های تقریب و کنترل بهینه عرصه‌های ریاضی هستند که در آنها $SILP$ به وفور ظاهر می‌شوند. لیکن این مبحث کاربردهای زیادی در علوم دیگر نیز دارد که در زیر به چند نمونه به منظور آشنایی بیشتر اشاره می‌شود.

جریان شبکه پیوسته با زمان: بیشینه سازی جریان کالا بین دو نقطه معین مبداء و مقصد در شبکه حمل و نقل که کمان‌های آن دارای محدودیت‌های ظرفیتی مستقل از زمان هستند، مسأله‌ای از نوع FLP است. حال اگر ظرفیت کمان‌ها با زمان تغییر کند و امکان ذخیره‌سازی در گره‌های شبکه نیز موجود باشد، آنگاه مسأله از نوع $INLP$ خواهد بود. این مطلب را می‌توان از مدل ریاضی مسأله که به صورت زیر است نیز استنباط نمود:

$$\begin{aligned} Max : & \int_0^T [\sum_{i=1}^n x_i(t)] dt \\ S. to : & \sum_{i=1}^n x_i(t) \leq d(t), \quad t \in [0, T]; \\ & w_i(t) \geq 0, \quad t \in [0, T], \quad i = 1, \dots, n; \\ & 0 \leq x_i \leq f_i, \quad t \in [0, T], \quad i = 1, \dots, n; \\ & 0 \leq \int_0^t [r_i(\tau) - x_i(\tau) - w_i(\tau)] d\tau + s_i \leq c_i, \quad t \in [0, T], \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

که در آن r_i مخزن i ام، c_i ظرفیت r_i ، $r_i(t)$ میزان جریان ورودی به r_i ، $d(t)$ تقاضا در زمان t ، r_i مقدار درجه خروجی جریان از r_i جهت تأمین تقاضا، $w_i(t)$ میزان نشر از r_i در زمان t ، $x_i(t)$ مقدار درجه خروجی جریان از r_i در زمان t و s_i میزان ذخیره اولیه در r_i می‌باشند ([۱]).

طراحی مسیر ربات:

در بعضی مسائل مطرح در علم رباتیک به دنبال یافتن مسیری هستیم که ربات آن را در کمترین زمان ممکن طی نماید. برای این منظور باید تابعی تعیین کنیم که مجموع زمان حرکت ربات را برای مسیری معین کمینه سازد. فرم ریاضی این مسأله به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\begin{aligned} Min : & \int_0^1 B_{k,\xi}(t) dt \equiv \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n x_i(\xi_{i+k} - \xi_i) \\ S. to : & B_{k,\xi}(t) = \sum_{i=1}^n x_i B_{i,k,\xi}(t) \geq 0, \quad \forall t \in [0, 1], \quad x \in R^n. \end{aligned}$$

به وضوح این مسأله یک مسأله $SILP$ پیوسته است. در این مدل تابع هدف عملاً به t بستگی ندارد. $B_{k,\xi}(t)$ یک B -اسپلاین بوده و $B_{i,k,\xi}(t)$ ها برای هر $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ، توابع مخلوط برای B -اسپلاین نامیده می‌شوند که چند جمله‌ای‌هایی از درجه k با متغیر t می‌باشند. x_i ها نیز ضرایب B -اسپلاین و ξ بردار گره (نقاط) می‌باشد ([۲۷]).

تقریب توسط چندجمله‌ای‌ها:

یکی از مهمترین کاربردهای برنامه‌ریزی خطی نیمه نامتناهی در مسائل مربوط به تقریب یکنواخت توسط چندجمله‌ای‌ها (نظیر چندجمله‌ای‌های چبیشف) می‌باشد. مشخصاً می‌خواهیم تابع پیوسته f را که روی $[0, 1]$ تعریف شده است به وسیله ترکیبی خطی از توابع معین پیوسته g_1, g_2, \dots, g_n (تعریف شده بر $[0, 1]$) تقریب نمائیم. بنابراین، هدف کمینه کردن بیشترین تفاوت بین f و تابع تقریب (خطای مطلق) است، یعنی، $\minimize : \max |f(s) - P(s)|$ که در آن P یک ترکیب خطی از g_i ها است (تابع P ، تقریب یکنواخت یا تقریب مینی ماکس f نامیده می‌شود). مدلسازی این مسأله به صورت مسأله‌ای از نوع $SILP$ دشوار نیست زیرا اگر r بیشترین خطای مطلق باشد، آنگاه مسأله به فرم ذیل خواهد بود:

$$\begin{aligned} \text{Min} : & \quad r \\ \text{S. to} : & \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(s) + r \geq f(s), \quad s \in [0, 1], \\ & \quad - \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(s) + r \geq -f(s), \quad s \in [0, 1]. \end{aligned}$$

که در آن مجموعه اندیس $[0, 1]$ است. دوگان این مسأله را مطابق [۱] می‌توان به فرم زیر نمایش داد:

$$\begin{aligned} \text{Max} : & \quad \int_0^1 f(s) dw_1(s) - \int_0^1 f(s) dw_2(s) \\ \text{S. to} : & \quad \int_0^1 g_i(s) dw_1(s) - \int_0^1 g_i(s) dw_2(s) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ & \quad \int_0^1 dw_1(s) - \int_0^1 dw_2(s) = 1, \\ & \quad w_1, w_2 \geq 0, \quad w_1, w_2 \in M_r[0, 1]. \end{aligned}$$

در آن فضای اندازه‌های برل منظم روی $[0, 1]$ می‌باشد. این مسأله یک مسأله برنامه‌ریزی خطی نیمه نامتناهی پیوسته با $n + 1$ قید و تعداد نامتناهی متغیر است.

مسأله پورت فولیو در اقتصاد [۵]:

می‌خواهیم مبلغ K یورو را به n سهم برای یک دوره از سال اختصاص دهیم. x_i یورو را به سهم i ام نسبت می‌دهیم و انتظار داریم در پایان دوره، به ازای هر یک یورو سرمایه‌گذاری در سهم i ام، y_i یورو دریافت نماییم. هدف ماکزیمم کردن مقدار پورت فولیو $y^T x$ بعد از گذشت یک سال است که در آن $x = (x_1, \dots, x_n)$ و $y = (y_1, \dots, y_n)$. اما مشکل در این است که y از قبل نامعلوم

می‌باشد، هرچند که اغلب مدل‌های اقتصادی ادعا می‌کنند که بردار y در زیرمجموعه فشرده‌ای از R^n نظیر y تغییر خواهد کرد. با توجه به این مطلب، نشان داده می‌شود که مسأله، به حل مسأله برنامه‌ریزی خطی نیمه نامتناهی زیر منجر می‌گردد:

$$\begin{aligned} \text{Max}_{v,x} : & \quad v \\ \text{S. to} : & \quad y^T x - v \geq 0, \quad \forall y \in Y. \\ & \quad \sum_i x_i = K, \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

در کنار نمونه‌های فوق تعداد بسیاری از مسائل مهندسی مانند کنترل آلودگی ([۱۲])، طراحی مجموعه‌های سیگنال بهینه ([۱۶] و [۸] و [۲۶])، طراحی تولید ([۲۹] و [۱۷])، تئوری تقریب چیشف ([۱۱] و [۲۰])، طراحی مسیریات ([۱۸] و [۱۰] و [۲۸])، طراحی فیلتر ([۱۹])، کنترل بهینه ([۲۴]) و ([۲۱])، و مباحث مربوط به DEA ([۱۴])، نظریه احتمال ([۳])، و همچنین کاربردهای $SILP$ در مباحث برنامه‌ریزی فازی ([۱۳])، هر یک به نوعی می‌توانند به صورت مسائلی از انواع برنامه‌ریزی خطی نیمه نامتناهی مدلسازی شوند.

۴. $SILP$ پیوسته و شکاف دوگانی

دوگان مسأله $SILP$ پیوسته (۲)، $(SILP^*)$ ، به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{Max} : & \quad \int_0^1 b(s)dw(s) \\ \text{S. to} : & \quad \int_0^1 a(s)dw(s) = c \quad (۴) \\ & \quad w \geq 0, \quad w \in M_r[0, 1]. \end{aligned}$$

می‌دانیم که در مسائل برنامه‌ریزی خطی متناهی، بنا بر قضیه قوی دوگانی، همواره مقادیر بهینه متناهی تابع هدف برای مسأله‌های اولیه و دوگان برابر هستند. اما این ویژگی برای مسائل برنامه‌ریزی خطی با بعد نامتناهی همیشه برقرار نمی‌باشد. عدم برقراری چنین خاصیتی در این دسته از مسائل، «شکاف دوگانی» نامیده می‌شود.

متذکر می‌شویم هرگاه w اندازه اتمی^۱ و $s_i \in [0, 1]$ برای $i = 1, 2, \dots, k$ باشد، در این صورت جرم تمرکز یافته w را در s_i به شکل $w(s_i)$ نمایش می‌دهیم. مثال زیر به خوبی وجود شکاف دوگانی را برای یک مسأله $SILP$ نشان می‌دهد:

(۱) Atomic measure، فرض کنیم A یک مجموعه برل از فضای توپولوژیک Ω باشد و $z \in \Omega$. اندازه δ با تعریف زیر را یک اندازه اتمی یکانی روی A می‌نامند:

$$\delta(z) = \begin{cases} 1 & z \in A \\ 0 & z \notin A. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Min : } & x_1 \\ \text{S. to : } & sx_1 + s^2(1-s)x_2 \geq -s^2, \quad s \in [0, 1]. \end{aligned}$$

ملاحظه می‌شود که برای s های به اندازه کافی نزدیک به صفر مثلاً $s = 0.1$ ، مقادیر منفی x_1 در قید مسأله صدق نمی‌کند (مثلاً برای $s = 0.1$ و $x_1 = -1$ قید مسأله چنین است $-0.09 \geq -0.01$). لذا جواب $x_1 = x_2 = 0$ جواب $x_1 = x_2 = 0$ جواب بهینه مسأله اولیه فوق است و بنابراین مقدار تابع هدف نیز صفر می‌شود ([۱]). اما دوگان این مسأله به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \text{Max : } & \int_0^1 (-s^2) dw(s) \\ \text{S. to : } & \int_0^1 s dw(s) = 1, \\ & \int_0^1 s^2(1-s) dw(s) = 0, \\ & w \geq 0, \quad w \in M_r[0, 1]. \end{aligned}$$

چون w مثبت است، قید دوم، تمرکز جرم هر جواب شدنی دوگان را در 0 و 1 تحمیل می‌کند. این در حالی است که قید اول تضمین می‌کند که در نقطه $s = 1$ جرم یک وجود دارد. بنابراین مسأله دوگان دارای مقدار تابع هدف -1 است که به وسیله هر جواب شدنی w به دست می‌آید. همان گونه که مشاهده شد، برای مثال ذکر شده مقادیر تابع هدف در جواب‌های بهینه مسائل اولیه و دوگان یکسان نیستند. پس این مسأله دارای شکاف دوگانی است.

لذا بنا بر ضرورت باید شرایطی را بررسی کنیم که تحت آنها، یک مسأله $SILP$ پیوسته فاقد شکاف دوگانی باشد زیرا تحت این شرایط می‌توان برای حل این دسته مسائل از الگوریتمی شبیه به سیمپلکس بهره گرفت. برای $w \in M_r[0, 1]$ دو مجموعه زیر را که به ترتیب مخروط‌های لحظه‌ای M_A و M_B در R^n و R^{n+1} می‌نامیم، چنین تعریف می‌کنیم:

$$M_A = \left\{ \int_0^1 a(s) dw(s) : w \geq 0 \right\} \quad \text{و} \quad M_B = \left\{ \int_0^1 \bar{a}(s) dw(s) : w \geq 0 \right\}.$$

جایی که در آن

$$\bar{a}(s) = (a(s), b(s)) \quad \text{یا} \quad \bar{a}(s) = (a_1(s), a_2(s), \dots, a_n(s), b(s)) \quad \text{و} \quad a(s) = (a_1(s), a_2(s), \dots, a_n(s))$$

۱.۴. شرایط عدم وجود شکاف دوگانی

اکنون با توجه به مطالب فوق، شرایط عدم وجود شکاف دوگانی را می‌توان در گزاره زیر مشاهده نمود.

گزاره ۱: هر یک از سه شرط زیر برای اطمینان از یکسانی مقادیر بهینه $SILP^*$ و $SILP$ کافیت:

الف) مقدار بهینه $SILP^*$ متناهی و M_B بسته باشد.

ب) مقدار بهینه $SILP^*$ متناهی و c (بردار ضرایب تابع هدف) درون M_A باشد.
 ج) مقدار بهینه $SILP$ متناهی باشد و $x \neq 0$ ای موجود نباشد به طوری که $c^T x = 0$ و $a(s)^T x \geq 0$ برای $s \in [0, 1]$.
 گزاره ۲: اگر x_0 چنان موجود باشد که برای هر $s \in [0, 1]$ $a(s)^T x_0 > b(s)$ و مسأله $SILP$ مقدار بهینه متناهی داشته باشد، آنگاه مقادیر بهین $SILP$ و $SILP^*$ یکسانند.
 به علاوه شرط ضعیف‌تری نیز وجود دارد که امکان برقراری قسمت (الف) گزاره (۱) را فراهم می‌کند.
 گزاره ۳: M_B مخروط محدب تولید شده توسط $G = \{\bar{a}(s) : s \in [0, 1]\}$ است.

اثبات: مراجعه کنید به [۱].

تذکر: گزاره‌های (۲) و (۳) در حالت شمارا برقرار نیستند.
 می‌دانیم که مخروط محدب تولید شده توسط مجموعه فشرده‌ای که از مبدأ می‌گذرد، بسته است بنابراین نتیجه زیر را نیز خواهیم داشت.
 نتیجه ۱: اگر $SILP^*$ دارای مقدار متناهی باشد و به علاوه هیچ s_0 ای در $[0, 1]$ به جز صفر موجود نباشد که برای آن $a(s_0) = 0$ و $b(s_0) = 0$ ، آنگاه مقادیر بهینه $SILP$ و $SILP^*$ یکی هستند و مسأله $SILP^*$ یک جواب بهینه دارد.
 تعریف: فرض کنید P یک مخروط محدب مثبت باشد. برای هر x شدنی متعلق به P تعریف می‌کنیم:

$$B(x) = \{\xi \in X : x + \lambda\xi \in P, x - \lambda\xi \in P, \forall \lambda > 0\},$$

همچنین فضای پوچ ماتریس ضرایب A را با $N(A)$ نمایش می‌دهیم.
 قضیه ۱: فرض کنید مسأله LP یک جواب بهینه x داشته باشد و به علاوه فرض کنید بعد $N(A) \cap B(x)$ متناهی باشد. در این صورت LP یک جواب بهینه پایه‌ای دارد ([۱]).
 گزاره زیر نشان می‌دهد که اگر یک جواب بهینه وجود داشته باشد، آنگاه یک جواب بهینه پایه‌ای طبق قضیه فوق نیز موجود است.
 گزاره ۴: اگر یک جواب شدنی برای $SILP^*$ با مقدار تابع هدف c موجود باشد، آنگاه یک جواب شدنی با جرم متمرکز در تعدادی متناهی نقطه وجود دارد که همان مقدار را برای $SILP^*$ به دست می‌دهد.

با توجه به تعریف اندازه‌های اتمی، در اصل گزاره فوق ادعان می‌دارد که جواب بهینه، ترکیب متناهی از اندازه‌های اتمی است.
 از گزاره‌ها و نتایج فوق چنین برمی‌آید که اگر یک مسأله برنامه‌ریزی خطی نیمه نامتناهی شکاف دوگانی نداشته باشد، دارای جواب بهینه متناهی است در نتیجه می‌توان آن را از طریق الگوریتمی که

مشابه الگوریتم سیمپلکس است و «شبه سیمپلکس» نامیده می‌شود حل نمود. واضح است که اگر مسأله‌ای دارای شکاف دوگانی باشد، باید به طرق دیگری (مثلاً از طریق آزمون و خطا) حل شود.

۲.۴. الگوریتمی برای حل مسأله دوگان

همان‌گونه که از گزاره ۴ حاصل گردید، بدون از دست دادن کلیت مسأله، جواب $SILP^*$ را می‌توان به عنوان یک اندازه اتمی با جرم‌هایی متمرکز در تعدادی متناهی نقطه در نظر گرفت. برای هر اندازه اتمی u در $M_r[0, 1]$ ، تکیه‌گاه u به صورت $supp(u) = \{s : u(s) \neq 0\}$ تعریف می‌شود. اگر اندازه اتمی w یک جواب شدنی از $SILP^*$ (مسأله دوگان) باشد، تعریف می‌کنیم:

$$B(w) = \{u \in M_r[0, 1] : supp(u) \subset supp(w)\}.$$

این حالت پوچی ماتریس ضرایب A با توجه به (۴) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$N(A) = \{u \in M_r[0, 1] : \int_0^1 a(s)du(s) = 0\}.$$

می‌توان نتیجه گرفت که w (جواب شدنی دوگان) پایه‌ای است اگر و تنها اگر بردارهای $a(s_i)$ که $s_i \in supp(w)$ ، مستقل خطی باشند ([۱]). بنابراین، اگر w پایه‌ای باشد، $supp(w)$ نمی‌تواند شامل بیش از n عضو باشد، زیرا فضای مقادیر سمت راست، فضای R^n است. از دیگر سو می‌دانیم که یک جواب پایه‌ای شدنی w ناتباهیده است هرگاه تصویر $B(w)$ تحت ماتریس A با تصویر $M_r[0, 1]$ تحت ماتریس A یکسان باشد، زیرا بردارهای مستقل خطی $a(s_i)$ برای $s_i \in supp(w)$ ، فضای R^n را تولید می‌کنند. از آنجا که فضای مقادیر سمت راست مسأله $SILP^*$ مجموعه R^n است، پس A را می‌توان به صورت $A = (a_1(s) \ a_2(s) \ \dots \ a_n(s))$ (ماتریسی با ستون‌های $a_i(s)$ برای $i = 1, 2, \dots, n$) نمایش داد. اکنون ماتریس \hat{A} را که شامل ستون‌های $a(s_i)$ ، برای $s_i \in supp(w)$ است، در نظر می‌گیریم. از آنجا که بردارهای $a(s_i)$ مستقل خطی و مقدارشان n است، پس ماتریس پایه \hat{A} یک ماتریس $n \times n$ وارون پذیر خواهد بود. همچنین توجه داریم که $b(s)$ و $w(s)$ توابعی از s هستند. حال اگر بجای s ، مقادیر s_i از $supp(w)$ را قرار دهیم این توابع تبدیل به بردارهایی با n مؤلفه خواهند شد. فرض می‌کنیم \hat{w} برداری با مؤلفه‌های $w(s_i)$ و \hat{b} برداری با مؤلفه‌های $b(s_i)$ برای $s_i \in supp(w)$ باشد. به علاوه I را مجموعه اندیس‌های عناصر $supp(w)$ می‌گیریم، (بنابراین $I = \{1, 2, 3, \dots, n\}$). با استفاده از مطالب فوق، قید انتگرالی $\int_0^1 a(s)dw(s) = c$ در $SILP^*$ را می‌توان با توجه به تعریف اندازه اتمی به صورت $\sum_{s_i \in supp(w)} a(s_i)w(s_i) = c$ نمایش داد. بنابراین صورت ماتریسی این قیود به فرم $\hat{A}\hat{w} = c$ خواهد آمد.

تاکنون وجود جواب برای مسأله (۴) به شرط عدم وجود شکاف دوگانی به اثبات رساندیم. اکنون برآنیم که روشی برای دست یابی به این جواب ارائه دهیم. این روش جزو دسته روش‌های تکراری

است و با انتخاب یک پایه آغازین، شروع می‌شود. سپس در هر تکرار جوابی شدنی به دست می‌دهد که باعث بهبود وضعیت تابع هدف می‌گردد آن چنان که این جواب‌ها به صورت یک دنباله متناهی به جواب بهینه همگرا می‌شوند. در این روند فضای شدنی، همیشه پیوسته در نظر گرفته می‌شود و هیچگاه از گسسته‌سازی استفاده نمی‌شود. بر مبنای آنچه که در خصوص جواب پایه‌ای ذکر شد، این روش را به صورت یک الگوریتم بیان می‌کنیم:

گام ۱) جوابی پایه‌ای شدنی به عنوان جواب آغازین با ماتریس پایه‌ای \hat{A} انتخاب شود. این جواب را می‌توان با آزمون و خطا و یا با استفاده از برخی روش‌ها که منجر به ساختن ماتریس پایه‌ای \hat{A} می‌شود، تعیین نمود. به عنوان نمونه می‌توان ابتدا $SILP^*$ را با یک مسأله FLP تقریب نمود، آنگاه جواب بهینه این مسأله FLP را یافت و سپس آن را به یک جواب آغازین مسأله $SILP^*$ گسترش داد.

گام ۲) دستگاه $\hat{A}\hat{w} = c$ حل گردد.

گام ۳) برای هر $s \in [0, 1]$ مقدار $w^*(s) = b(s) - a(s)^T(\hat{A}^{-1})^T\hat{b}$ (تابع هزینه تقلیل یافته) محاسبه شود. اگر برای هر $s \in [0, 1]$ ، $w^* \leq 0$ ، آنگاه جواب فعلی بهینه است و الگوریتم متوقف می‌گردد. در غیر این صورت گام بعدی اجرا گردد.

گام ۴) عضو $s_0 \in [0, 1]$ چنان یافت شود که $w^*(s_0)$ بیشینه مثبت باشد، آنگاه $w(s_0)$ به عنوان متغیر ورودی از حل دستگاه $\hat{w} = \hat{w} - \delta d$ تعیین شود.

گام ۵) مقدار $d_i = [\hat{A}^{-1}a(s_0)]_i$ برای هر $i \in I$ محاسبه شود. اگر برای هر $i \in I$ ، $d_i \leq 0$ ، آنگاه جواب بهینه، نامتناهی است و حل مسأله متوقف می‌گردد، در غیر این صورت (یعنی هرگاه حداقل یک $i \in I$ وجود داشته باشد که $d_i > 0$) به مرحله بعد می‌رویم.

گام ۶) اندیس متغیر خروجی با انجام آزمون کمینه‌سازی زیر به دست آید:

$$\delta = \frac{\hat{w}_r}{d_r} = \min\left\{\frac{\hat{w}_i}{d_i}, d_i > 0, \forall i \in I\right\}.$$

گام ۷) از رابطه $\hat{w} = \hat{A}^{-1}(c - \delta a(s_0))$ محاسبه شود. اکنون w یک جواب شدنی جدید برای $SILP^*$ است و داریم $\text{supp}(w) = (\text{supp}(w) \cup \{s_0\}) - \{s_r\}$.

گام ۸) به گام اول باز گردید.

۳.۴. مثال

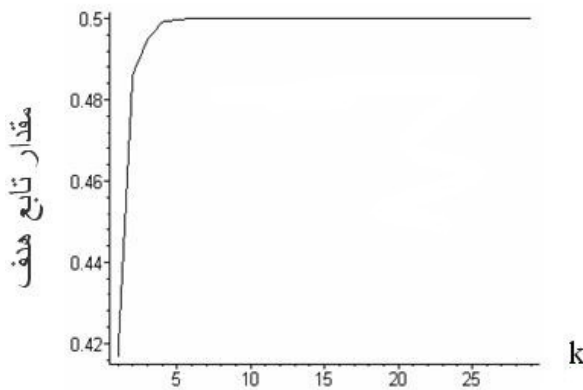
کارایی الگوریتم بیان شده برای حل دوگان یک مسأله برنامه‌ریزی خطی نیمه نامتناهی پیوسته را در عمل با حل مثالی از این نوع نشان می‌دهیم. صورت مسأله از [۱] انتخاب شده است:

$$\begin{aligned} \text{Min :} & \quad x_1 + x_2 \\ \text{S. to :} & \quad (1-s)x_1 + sx_2 \geq s(1-s), \\ & \quad s \in [0, 1]. \end{aligned}$$

دوگان این مسأله عبارت است از:

$$\begin{aligned} \text{Max : } & \int_0^1 s(1-s)dw(s) \\ \text{S. to : } & \int_0^1 (1-s)dw(s) = 1 \\ & \int_0^1 s dw(s) = 1 \\ & w \geq 0, \quad w \in M_r[0, 1]. \end{aligned}$$

از طریق آزمون و خطا پایه اولیه مسأله دوگان به صورت $\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\}$ $\text{supp}(w)$ به دست آمده است. بر مبنای این جواب مطابق الگوریتم ارائه شده، برنامه شبه سیمپلکس برای حل مسأله دوگان بدین شرح نگاشته شد: در این برنامه به منظور حل دستگاه‌هایی نظیر $\hat{A}\hat{w} = c$ ، $\hat{A}^T x = \hat{b}$ که مدام با آنها سروکار داریم، از زیربرنامه *DLSARG* موجود در کتابخانه *MSIMSL* در بسته نرم‌افزاری *Visual Fortran* استفاده گردید.



شکل ۱. منحنی نمایش مقادیر بهین تابع هدف بر حسب تکرارها برای مثال ۳.۴

همچنین برای به دست آوردن بیشینه $w^*(s)$ (تابعی هزینه تقلیل یافته) و همچنین s نقطه بیشینه ساز آن، ابتدا $w^*(s)$ را مطابق آنچه که گذشت به صورت $w^*(s) = b(s) - a(s)^T(\hat{A}^{-1})^T \hat{b}$ تشکیل دادیم. سپس با استفاده از مشتق تابع $w^*(s)$ (نسبت به s) نقطه بیشینه ساز s را معین نمودیم. بدین منظور در برنامه اصلی، از زیربرنامه *ZPORC* موجود در کتابخانه *MSIMSL* جهت به دست آوردن ریشه‌های مشتق تابع $w^*(s)$ استفاده نمودیم. در برنامه شرط قرار گرفتن ریشه‌ها در $[0, 1]$ نیز اعمال گردید. با قراردادن این ریشه‌ها، برای $w^*(s)$ موجود در برنامه، هر بار بیشترین مقدار مثبت تابع تعیین می‌گردید. به علاوه در هر تکرار s ی که مقدار بیشینه تابع در آن رخ می‌داد به عنوان s معرفی می‌شد. در نهایت برنامه بعد از ۲۹ تکرار به مقدار بهین ۰/۵ در نقطه

۰/۵ = s_0 رسید. منحنی نمایش مقادیر به دست آمده برای تابع هدف بر حسب تکرارها در شکل (۱) نشان داده شده است. چنانچه مشاهده می‌شود، مقدار تابع هدف سیر صعودی خود را با افزایش تکرارها می‌پیماید و از تکرار ۶ به بعد تغییرات بسیار کم صورت می‌گیرد تا این که مقدار بهین تابع هدف در دو تکرار ۲۸ و ۲۹ به مقدار یکسان ۰/۵ می‌رسد.

۵. $SILP$ شمارا

مسئله $SILP$ شمارا ($SILP$) و دوگان آن ($SILP^*$) به صورت زیر معرفی می‌شوند:

$$\begin{aligned} \text{Min : } & c^T x \\ \text{S. to : } & a_i^T x \geq b_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, x \in R^n. \end{aligned} \quad (1.5)$$

به طوری که c و a_i برای $i = 1, 2, 3, \dots$ بردارهایی n مؤلفه‌ای هستند و

$$\begin{aligned} \text{Max : } & \sum_{i=1}^{\infty} w_i b_i \\ \text{S. to : } & \sum_{i=1}^{\infty} w_i a_i = c \\ & w_i \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{فقط تعداد متناهی از } w_i \text{ ها غیر صفرند})$$

اکنون مخروطهای لحظه‌ای را برای $SILP^*$ که به ترتیب در R^n و R^{n+1} می‌باشند، چنین تعریف می‌کنیم:

$$M_A = \{ \sum_{i=1}^{\infty} w_i a_i : w_i \geq 0 \}, \quad (2.5)$$

$$M_B = \{ (\sum_{i=1}^{\infty} w_i a_i, \sum_{i=1}^{\infty} w_i b_i) : w_i \geq 0 \}, \quad (3.5)$$

شرایط عدم وجود شکاف دوگانی برای مسئله $SILP$ را به‌طور مشابه می‌توان از گزاره ۱ بخش ۱.۴ نتیجه گرفت.

گزاره ۱.۵. دنباله جواب‌های بهین مسائل متناهی $SILP_k^*$ ($SILP_k^*$ ها مسائل FLP هستند که از مسئله نیمه نامتناهی $SILP^*$ مطابق گام (۱) در ذیل به دست می‌آیند) به جواب بهین مسئله $SILP^*$ همگرا است.

الگوریتم حل دوگان مسئله $SILP$ شمارا

با توجه به شرح مسئله $SILP$ شمارا و مقایسه آن با حالت پیوسته، اغلب گام‌های الگوریتم این گونه مسائل یکسان هستند. در اینجا گام‌های الگوریتم حل مسئله $SILP^*$ بیان می‌شود:

گام (۱) یک جواب پایه‌ای شدنی با ماتریس پایه‌ای \hat{A} انتخاب شود. برای تعیین این جواب می‌توان مسئله $SILP^*$ را به یک مسئله FLP تبدیل نمود. آنگاه جواب بهین حاصل از حل مسئله FLP طبق قضیه ۱ بخش ۱.۴، یک جواب پایه‌ای برای مسئله $SILP^*$ خواهد بود.

گام (۲) دستگاه $\hat{A}\hat{w} = c$ حل گردد.

گام ۳) برای هر $i = 1, 2, \dots$ مقدار $w_i^* = b_i - a_i^T (\hat{A}^{-1})^T \hat{b}$ محاسبه شود. اگر برای هر i ، $w_i^* \leq 0$ ، آنگاه جواب فعلی بهینه است و الگوریتم متوقف می گردد، در غیر این صورت گام بعدی اجرا گردد.

گام ۴) اندیس k چنان یافت شود که برای آن w_k^* بیشترین مقدار مثبت را داشته باشد. حال متغیر w_k به عنوان متغیر ورودی انتخاب و در مرحله بعد اجرا شود.

گام ۵) برای هر $i \in \text{supp}(w)$ ، $d_i = [\hat{A}^{-1} a_k]_i$ محاسبه شود. اگر برای هر $i \in \text{supp}(w)$ ، $d_i \leq 0$ ، آنگاه جواب فعلی بهینه و نامتناهی است و الگوریتم متوقف شود. در غیر این صورت (یعنی اگر حداقل یک $i \in \text{supp}(w)$ وجود داشت که $d_i > 0$)، آنگاه گام بعد اجرا گردد.

گام ۶) اندیس متغیر خروجی، از آزمون زیر به دست آید:

$$\delta = \frac{\hat{w}_r}{d_r} = \min\left\{\frac{\hat{w}_i}{d_i}, \quad d_i > 0, \quad i \in \text{supp}(w)\right\}$$

گام ۷) از رابطه $\hat{w} = \hat{A}^{-1}(c - \delta a_k)$ محاسبه شود.

گام ۸) $\hat{w} = \hat{w} + \delta e_k$ یک جواب شدنی جدید برای $SILP^*$ خواهد بود و به علاوه داریم:

$$\text{supp}(\hat{w}) = (\text{supp}(w) \setminus \{k\}) \cup \{r\}$$

این جواب را با جواب آغازین جایگزین و دوباره به گام اول باز گردید. این عمل را آن قدر ادامه دهید تا جواب بهین مسأله حاصل شود.

در حل دوگان مسأله $SILP$ شمارا با استفاده از الگوریتم مشروح فوق مشکل عمده ای وجود دارد. این مشکل ناشی از متناهی بودن مجموعه اندیس S می باشد به این معنی که در حل مسأله $SILP^*$ (که مسأله ای با تعداد قیود متناهی و تعداد متغیرهای نامتناهی است) پیدا کردن بیشترین مقدار مثبت w_i^* (تابعی هزینه تقلیل یافته) برای $i = 1, 2, \dots$ کاری دشوار است. این خود نیز می تواند دلیلی برای استفاده از شیوه تکرار و روش همگرایی، که در بخش بعدی به آن می پردازیم، باشد.

۶. روش همگرایی راهی برای تقریب مناسب جواب

در اکثر کاربردها، تقریب مناسب جواب یک مسأله برنامه ریزی خطی نامتناهی، با جواب مسأله ای متناهی از همین نوع (نظیر کاربردهای نظریه کنترلی ([۲۴]، [۲۳]، [۲۲]، [۱۸]) از اهداف اصلی است. چنین کاری، عملاً بدون عبور از گذرگاه واسطه ای برنامه ریزی خطی نیمه نامتناهی ناممکن می نماید. به علاوه با استفاده از روش هایی نظیر بهره گیری از مجموعه توابع چگال شمارای مناسب در فضای جواب مسأله $SILP$ پیوسته، نظیر مثال های بخش ۳ و [۲۲]، این مسائل را به مسأله $SILP$ شمارا تبدیل می کنند.

بنابراین می‌توان با انتخاب تعداد متناهی k از قیود، جواب مسأله $SILP$ شمارا را با یک جواب FLP با k قید تقریب نمود. گزاره ۱.۵ نشان می‌دهد که هر چه تعداد این قیدها بیشتر باشد، یعنی k افزایش یابد جواب دقیق‌تر خواهد بود. بنابراین با حل متوالی مسائل FLP مربوطه و بررسی روند تغییرات جواب‌های آنها در ازای افزایش k ، می‌توان به رفتار جواب یک مسأله $SILP$ پی برد. این ایده را در حل مسائل $SILP$ ، روش همگرایی می‌نامیم.

۱.۶. بیان الگوریتمی روش همگرایی

مسأله اولیه و دوگان برنامه‌ریزی خطی پیوسته $SILP_1$ و $SILP_1^*$ را مجدداً در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم مسأله فاقد شکاف دوگانی باشد. پس جواب بهینه موجود است و تمام گزاره‌های ذکر شده در بخش سوم نیز صادق می‌باشند. الگوریتم روش همگرایی برای حل این مسأله را به صورت گام‌های زیر بیان می‌کنیم:

گام ۱) با استفاده از یکی از تکنیک‌های ریاضی، مسأله را می‌توان به مسأله‌ای با تعداد قیود شمارا تبدیل نمود (در مورد مسأله دوگان، با توجه به این که جواب به صورت ترکیبی خطی از اندازه‌های اتمی است این گام بدین طریق نیز قابل بررسی است). مثلاً (حتی در حالت کلی) می‌توان یکی از روش‌های زیر را به کار بست:

الف - انتخاب یک مجموعه چگال شمارا در مجموعه اندیس S (با توپولوژی مناسب نظیر توپولوژی حاصل از نرم) یا $M_r[0, 1]$ ، به صورت مستقیم؛

ب - انتخاب مجموعه‌ای از توابع چگال شمارا (مثلاً مجموعه‌ای تام با استفاده از توپولوژی همگرایی یکنواخت) برای آن دسته از مسائلی که در آنها $a(s)$ و $b(s)$ بر اساس توابع دلخواه از یک فضای معین با بعد متناهی تعریف می‌شوند؛

ج - هر دو مورد فوق (خصوصاً برای مسائلی که تعداد قیود و متغیرها نامتناهی هستند).

گام ۲) انتخاب فقط تعداد متناهی قید، مسأله را به مسأله‌ای از نوع FLP تبدیل می‌کند که جواب آن با استفاده از روش سیمپلکس قابل دستیابی است (این جواب برای حالت دوگان بیشتر و برای حالت اولیه کمتر از مقدار بهینه کلی مسأله می‌باشد).

گام ۳) افزایش مداوم قیود، دنباله‌ای از جواب‌های حاصل از گام ۲) را به دست می‌دهد. به دلیل انتخاب مجموعه چگال در گام ۱)، این دنباله به ناچار به جواب مسأله $SILP$ شمارا همگرا می‌باشد. این جواب همگرا نیز بنا به خاصیت چگال به کار گرفته شده در تدوین مسأله در گام ۱)، جواب مسأله اصلی را به صورت همگرایی (و با تقریبی بسیار مناسب) به دست می‌دهد. همگرایی چنین دنباله‌هایی از جواب مسائل FLP حاصله در نمونه‌های مختلف نظیر [۲۱] بارها به نمایش گذاشته شده است.

۲.۶ مثال ارائه مثالی عددی در خصوص حل مسائل $SILP$ شمارا، خصوصاً مثالی که جواب آن

حداقل از یک روش شناخته شده دیگر موجود باشد، امری مشکل است؛ به عنوان نمونه حتی در دو مرجع مهم [۱] و [۷] هیچ مثالی ارائه نشده است. این در حالی است که یکی از شیوه های تحقیق، مقایسه نتایج حاصل از روش ها و شیوه های مختلف با نتایج مدون است. بنابراین از آنجا که یکی از پرتطورترین شاخه های ریاضی و مهندسی برای مسائل *SILP* نظریه کنترل بهینه می باشد، مسأله ای از این نوع انتخاب گردیده است. مسأله مورد نظر در خصوص تعیین کنترل بهینه برای یک سیستم انتشار (دیفیوژن) می باشد که در مرجع [۲۲] مطرح شده است.

معمولاً مسائل کنترل بهینه به طور ذاتی به صورت مسائل برنامه ریزی خطی نامتناهی ظاهر می شوند. مطابق [۲۱] نخست این مسائل را بر مبنای روش نشان دادن به مسأله ای از نوع *SILP* پیوسته تبدیل می کنند. سپس مسأله به یک *SILP* شمارا تبدیل می شود با تقریب این مسأله جدید، جواب تقریباً بهینه از طریق تقریب یک مسأله *FLP* به دست می آید. برای ارائه یک مثال عددی، سیستم کنترلی هدایت شده توسط معادله انتشار به صورت یک مسأله کنترل بهینه از [۳۰] در نظر گرفته شده است. این مسأله از این جهت که یک سیستم کنترلی با کنترل مرزی است و شرایط اولیه را نیز دربردارد، برای بیان این روش از کلیت قابل توجهی برخوردار است.

بنا به [۳۰] پس از انجام مراحل فوق، نقاط مجهول Z_m به تعداد M و z_n به تعداد N از تقسیم بازه های تشکیل دهنده $\Omega = A \times B \times D \times (0, 1)$ و $\omega = V \times \partial D \times (0, 1)$ به دست می آیند. با یک گسسته سازی ثابت، در تمام مسائل *FLP* حاصل، تعداد نقاط (گره ها)، که معادل تعداد متغیرها در مسأله اولیه می باشند را ثابت در نظر می گیریم. بنابراین مسائل اولیه *FLP* حاصل برای ثابت های $M, M_1, M_2, M_3, M, N, M, M$ و a_j ها و b_k ها به صورت زیر در خواهند آمد:

$$\begin{aligned} \text{Min : } & I(\mu, \nu) := \sum_{m=1}^M \alpha_m f_0(Z_m) + \sum_{n=1}^N \beta_n f_1(z_n) \\ \text{S. to : } & \sum_{m=1}^M \alpha_m F_i(Z_m) + \sum_{n=1}^N \beta_n G_i(z_n) = \gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, M_1; \\ & \sum_{m=1}^M \alpha_m \xi_j(Z_m) = a_j, \quad j = 1, 2, \dots, M_2; \\ & \sum_{n=1}^N \beta_n \zeta_k(z_n) = b_k, \quad k = 1, 2, \dots, M_3; \\ & \alpha_m, \beta_n \geq 0, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad n = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (1.6)$$

α_m و β_n ها ضرایب نامنفی و مجهول بوده و تمام توابع F_i, G_i, ξ_j, ζ_k و دیگر پارامترها در [۳۰] معرفی شده اند. همچنین مسأله کنترل بهینه سیستم انتشار با شرایط اولیه، مرزی و انتهایی مورد نظر به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned} u_t(x, t) - \text{div}\left(\frac{x^\gamma}{1+t^\gamma} \nabla u(x, t)\right) &= \frac{\|\nabla u(x, t)\|_E^\gamma + 1}{1+x^\gamma + u(x, t)^\gamma} \\ u_x(0, t) &= 0, \quad u_x(1, t) = v(t); \quad \forall t \in (0, 1), x \in (0, 1). \end{aligned}$$

دامنه سیستم فوق $D = [0, 1]$ است و لذا $\partial D = \{0, 1\}$ ، یعنی مرز دامنه تنها شامل دو نقطه $s = 0$ و $s = 1$ است. با توجه به شرط مرزی $u_x(0, t) = 0$ می توان نتیجه گرفت که همیشه

برنامه‌ریزی خطی نیمه نامتناهی، الگوریتم‌های حل و کاربردها _____ ۵۰

کنترل روی مرز $s = 0$ برابر صفر است. با شرط پایانی $u(., T = 1) = 0.75 = g(x)$ ، هدف یافتن کمینه برای مسأله (۱.۶) است به طوری که $f_0 := \frac{u^2 + \|\nabla u\|_E^2}{1 + \sin^2(ut)}$ و $f_1 \equiv 0$. با انتخاب $A = [0, 1]$ و $B = [-5, 5] \times [-5, 5]$ و $V = [-10, 10]$ ، از تقسیم هر یک از بازه‌های تشکیل دهنده $\Omega = A \times B \times D \times (0, 1)$ به 10^5 قسمت، 10^5 حجره به دست می‌آید. همچنین به تعداد $M = 10^5$ نقطه $Z_m = (u_m, w_m, x_m, t_m)$ که نقاط وسط هر یک از حجره‌های حاصل می‌باشند، انتخاب گردیدند. در گسسته سازی $\omega = V \times \partial D \times (0, 1)$ ، با توجه به این که بر مرز $s = 0$ کنترل صفر است، پس $s_n = 0$ و $v_n = 0$ و بازه زمانی $(0, 1)$ را به 10 قسمت مساوی تقسیم شد تا 10 نقطه $z_n = (v_n, s_n, t_n)$ اختیار گردند. روی مرز $s = 1$ ، بازه کنترلی V به 20 و بازه زمانی به 10 قسمت تقسیم شد و تعداد 200 نقطه $z_n = (v_n, 1, t_n)$ (نقاط وسط هر یک از حجره‌ها) انتخاب شدند. از این رو $N = 10 + 200 = 210$ نقطه $z_n = (v_n, s_n, t_n)$ در ω برگزیده شدند. پس به تعداد $M + N = 10^5 + 210$ متغیر در مسائل اولیه و در نتیجه به همین تعداد، قید در مسائل دوگان مرتبط با مسائل اولیه وجود خواهند داشت.

اکنون به تشریح یکی از مسائل حل شده از این دسته می‌پردازیم. با تقسیم مربع $[0, 1] \times [0, 1]$ به 16 مربع مساوی، توابع ξ در روابط (۱.۶) را توابع مشخصه بر این مربع‌ها و همچنین با تقسیم $\Gamma_T = \{0, 1\} \times [0, 1]$ به 4 بازه مساوی، توابع ζ را نیز توابع مشخصه بر این بازه‌ها اختیار می‌کنیم؛ لذا تعداد قیود مسأله 30 قید خواهد شد. حال بنا به آنچه که گذشت، مسأله برنامه‌ریزی خطی اولیه مورد نظر چنین خواهد بود:

$$\begin{aligned} \text{Min : } & \sum_{m=1}^{10^5} \alpha_m f_0(Z_m) \\ \text{S. to : } & \sum_{m=1}^{10^5} \alpha_m F_i(Z_m) + \sum_{n=1}^{210} \beta_n G_i(z_n) = \gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, 10; \\ & \sum_{m=1}^{10^5} \alpha_m \xi_j(x_m, t_m) = \frac{1}{16}, \quad j = 1, 2, \dots, 16; \\ & \sum_{n=1}^{210} \beta_n \zeta_k(s_n, t_n) = \frac{1}{4}, \quad k = 1, 2, 3, 4; \\ & \alpha_m \geq 0, \beta_n \geq 0, m = 1, 2, \dots, 10^5, n = 1, 2, \dots, 210. \end{aligned} \quad (2.6)$$

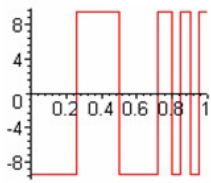
با حل این مسأله مقدار بهینه تابع هدف 0.6906235930098309 به دست آمد. از حل مسأله برنامه‌ریزی خطی اولیه متناهی، مقادیر β_n ‌ها نیز به دست می‌آیند؛ آنگاه با استفاده از آنها تابع کنترل مطابق روش ذکر شده در [۲۱] قابل رسم است؛ توجه داریم که بر مرز $s = 0$ کنترل نیز صفر می‌باشد. آنگاه مطابق روند بیان شده فوق تعداد 40 مسأله برنامه‌ریزی خطی متناهی نظیر (۲.۶) بر مبنای افزایش تعداد قیود مطابق روش همگرایی، مطرح و حل گردیدند که تعدادی از این نتایج در زیر آورده شده است:

مقدار بهینه	تعداد قیود
۰/۶۲۰ ۲۶۶ ۰۹۷ ۵۹۹ ۷۶۷ ۸	۸
۰/۶۶۷ ۳۵۱ ۹۵۹ ۴۵۳ ۹۲۴ ۰	۱۴
۰/۶۷۱ ۸۷۷ ۷۹۵ ۹۰۵ ۶۶۶ ۵	۲۲
۰/۶۹۰ ۹۰۴ ۴۸۱ ۹۱۰ ۷۵۷ ۳	۴۴
۰/۶۹۰ ۹۲۶ ۵۵۲ ۴۷۸ ۹۲۱ ۸	۶۰
۰/۶۹۱ ۳۹۴ ۴۳۴ ۸۲۳ ۴۹۵ ۱	۷۶
۰/۶۹۲ ۰۵۸ ۵۹۷ ۸۸۴ ۹۲۴ ۵	۸۶
۰/۶۹۳ ۲۵۵ ۳۷۱ ۹۲۰ ۴۳۴ ۱	۹۰
۰/۶۹۳ ۳۷۷ ۳۷۰ ۷۹۴ ۹۴۸ ۵	۹۱
۰/۶۹۴ ۰۷۵ ۱۵۹ ۵۲۸ ۸۱۹ ۸	۹۳
۰/۶۹۴ ۱۰۰ ۳۷۸ ۳۸۷ ۵۵۵ ۰	۹۴

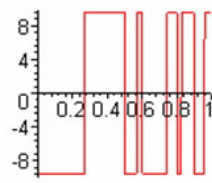
در تمام مسائل، نحوه گسسته سازی فضا ثابت فرض شده است. لازم به ذکر است که با این فرض پس از طی مراحل، افزایش دو دسته از قیود از نوع توابع مشخصه امکان پذیر نبود؛ زیرا با افزایش شبکه بندی در هر یک از اجزاء فضاهای مرتبط به بیش از 20 حجره، نظر به ثابت بودن تعداد گره ها، مسائل FLP نشدنی می شدند. لذا افزایش قیود در جهت ازدیاد توابع ψ ادامه یافت. این روند را تا جایی ادامه دادیم که اختلاف تعداد مورد نظری از جوابها از حدی مطلوب کمتر باشد (شرط توقف) (لازم به ذکر است که در روش نشان دادن میزان نزدیکی جواب مسئله FLP به جواب مسأله اصلی هنوز مسأله ای باز است).

همان گونه که ملاحظه می شود با افزایش قیود (و در نتیجه محدود شدن فضای جواب)، مقدار جواب بهینه نیز در حال افزایش می باشد. از نحوه افزایش جوابهای بهینه به دست آمده از جدول فوق نتیجه می شود که $0/7$ کران بالای نزدیک مسأله است. لذا دنباله جوابها از پایین به مقدار Min مسأله اولیه نیمه نامتناهی و از بالا به مقدار Max مسأله دوگان نیمه نامتناهی همگرا می باشد. در ازای هر یک از جوابهای به دست آمده برای مسائل FLP ، یک تابع کنترل بهینه متناظر از روش ذکر شده در [۲۱] با کمک نرم افزار Maple 8 رسم گردید. نمودارهای به دست آمده به صورت قطعه ای ثابت با دو مقدار ثابت $9/5 -$ و $9/5$ می باشند. خاطر نشان می شود که در نمودارهای زیر، محور افقی مربوط به متغیر زمان و محور عمودی مربوط به متغیر کنترل v می باشد و اعداد زیر نمودارها بیانگر تعداد قیود مسأله FLP متناظر می باشند. با مشاهده روند تغییر این نمودارها و این که افزایش تعداد قیود دسته دوم (همانگونه که اشکال نشان می دهند) موجب افزایش تعداد سویچ ها می شود، می توان نتیجه گرفت که کنترل بهینه مسأله $SILP$ (یا حالت کلی $INLP$) در شرایط این مسأله، تابعی قطعه ای ثابت دو مقداری (با مقادیر $9/5 -$ و $9/5$) است. به علاوه این توابع دارای

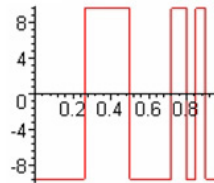
تعداد زیادی سویچ در انتها می‌باشد که به صورت متناوب این دو مقدار را اختیار می‌کند.



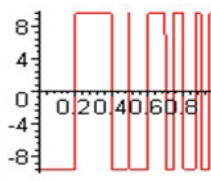
86



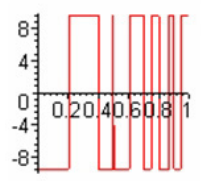
90



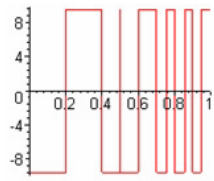
91



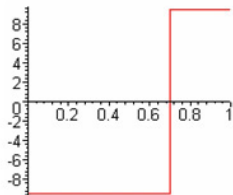
92



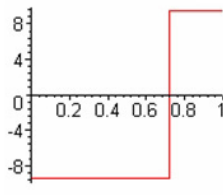
93



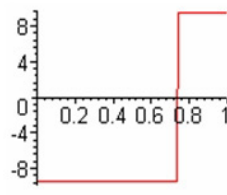
94



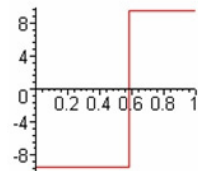
8



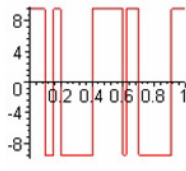
14



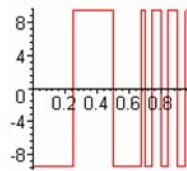
22



44



60



76

مراجع

- [1] Anderson, E. J. and Nash, P., *Linear Programming in Infinite Dimensional Space*, Theory and Application, John Wiley and Sons, 1987.
- [2] Charnes, A. ,Cooper, W. W. and Kortanek, K. O., *Duality in semi-infinite programs and some works of Haar and Caratheodory*, *Managment Sci*,9,209-228, 1963.
- [3] Dall' Aglio M., *On Some Applications of SILP to Probability and Statistics, semi-infinite programming*, *Eds.Gobernal/Lopez*. (Alicante 1999), 237-254, *Non-convex Optim.Appl.*, 57, Kluwer Acad.Publ., Dordretch, 2001.
- [4] Duffin, R. J. and Karlovitz, L. A., *An infinite linear program with a duality gap*. *Managment Sci.*, 12, 122-134, 1965.
- [5] Genotte, G., *Optimal portfolio choices under incomplete information*, the journal of Finance 41(3), 733-746, 1986.
- [6] Glashoff, K., *Duality theory of semi-infinite programming*, in R Hehich(ed)*semi-infinite programming*, Springer-Verlag ,Berlin, 1979.
- [7] Glashoff, K. and Gustafson, S. A., *Linear Optimization and Approximation*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [8] Gockenbach, M. S. and Kearsley, A. J., *Optimal signal sets for non-Gaussian detectors*. *SIAM Journal on Optimization*, **Vol.9, No.2**, pp.316-326, 1999.
- [9] Haar, A., *Uber linear ungleichungen*, *Acta.Math.* (Szeged),2,1-14, 1924.
- [10] Haaren, A. and Retagen, E., *A semi-infinite programming Algorithm for Robot trajectory planning*, Ph.D. Thesis, University of Trier, 1992.
- [11] Hettich, R., *An implementation of a discretization methods for semi-infinite programming*, *Mathematical Programming*, **Vol.34, No. 3**, pp. 354-361, 1986.
- [12] Hettich, R. and Kortanek, K. O., *Semi-infinite programming: Theory, methods and applications*, *SIAM Review*, **Vol. 35, No.3**, pp. 380-429, 1993.
- [13] Inuiguchi M., Tanino T. *Fuzzy Linear Programming With Interactive Uncertain Parameters*, *Reliable Computing* ,**Vol. 10, No. 5**, pp.357-367, 2004.

- [14] Jess A., Jongen, H. T., Neralic, L., and Stein, O., *A semi-infinite programming model in data envelopment analysis*, Optimization 49,369-385, 2001.
- [15] Krabs, W., *Optimization and Application*. Wisley, New York, 1979.
- [16] Lawrence, C. T., *A Computationally efficient feasible sequential quadratic programming algorithm*, Ph.D. Thesis, Institute for Systems Research, University of Maryland, 1998.
- [17] Li, Y. and Wang, D., *A SILP model for earliness/tardiness production planning with simulated annealing*, Mathl. Comput. Modelling, **Vol. 26**, pp.35-42, 1997.
- [18] Marin, S. P., *Optimal parametrization for curves for robot trajectory design*, IEEE Transactions on Automatic Control, **Vol. 33**, pp. 209-214, 1988.
- [19] Potchinkov, A. W., *The design of nonrecursive digital filters via convex optimization*, 1998.(http://citeseer.ist.psu.edu/potchinkov98_design.html)
- [20] Reemtsen, R. W., *Discretization methods for the solution of semi-infinite programming problems*, Journal of Optimization Theory and Applications, **Vol. 71, No. 1**, pp.85-103, 1991.
- [21] Rubio J. E., *Control and Optimization: the linear treatment of nonlinear problems*. Manchester University Press, Manchester, 1986.
- [22] Rubio, J. E., *The global control of nonlinear diffusion equations*. SIAM J. Control and Optimization, **Vol. 1, No. 33**, pp308-322, 1995.
- [23] Rudolph, H., *Global solution in optimal control via SILP*, Lecture Note in Control and Inform. Sci.143, Springer-Verlag, New York, pp.394-402, 1990.
- [24] Rudolph, H., *The SILP relaxation method in optimal control theory: General Boundary Condition*. Z. Anal. Anwendungen, I, II(11): 143-152, pp.431-436, 1992.
- [25] Sanchez-Soriano J., Llorca N., Tijs S. and Timmer J., *Semi-infinite assignment and transportation games*. *Semi-infinite programming*, Eds. Goberna/Lopez, (Alicante, 1999), 349-363, Nonconvex Optim. Appl., 57, Kluwer Acad. Puble., Dordrecht, 2001.
- [26] Vaz, A. I. F., Fernandes, E. M. G. P. and Gomes, M. P. S. F., *Optimal signal sets via Semi-Infinite Linear Programming*, InvestigaçãO Operacional, **Vol. 22, No.1**, pp.87-101, 2002.

- [27] Vaz, A.I.F., *Robot trajectory planning with semi-infinite programming*, *parissept. 26-29, O.R.P, 2001*. (<http://mapage.noos.fr/orp-3/proceed.html>)
- [28] Von Stryk, O. and Schlemmer, M., *Optimal control of the industrial robot manutec*, R. Bulirsch, D. Kraft (eds.): *Computational Optimal Control*, International Series of Numerical Mathematics, **Vol. 115**, pp.367-382, 1994.
- [29] Wang, G. A., *A SILP model for Earliness/Tardiness production planning with a genetic algorithm*, *Computers and Mathematics with Applications*, **Vol. 31**, **No. 8**, pp.95-106, 1996.

[۳۰] فخارزاده جهرمی، ع.، اعلام پور، ع. و ترابی، پ. کارایی روش گلاشف - گوستاوسون برای تقریب بهتر در حل مسائل کنترل بهینه به روش نشانیدن. *مجله علوم دانشگاه شهید چمران اهواز*، شماره ۱۰، زمستان ۱۳۸۱.

سارا ابراهیمی، saraaau@gmail.com
دانشگاه آزاد اسلامی واحد آشتیان، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

علیرضا فخارزاده جهرمی، a_fakharzadeh@sutech.ac.ir
دانشگاه صنعتی شیراز، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی

ماتریس نمایی e^{At} در فیزیک

طاهره زارع - جواد بهبودیان

چکیده

در این مقاله پس از معرفی تابع نمایی، به تعریف ماتریس نمایی e^{At} که در آن A یک ماتریس $n \times n$ است، می‌پردازیم. در ادامه ویژگی‌های مهم آن را بررسی می‌کنیم و به اختصار چند روش محاسبه ماتریس نمایی e^{At} را ارائه می‌دهیم. در پایان کاربردهای ماتریس نمایی e^{At} در فیزیک را مطرح می‌نمائیم.

۱ مقدمه

تعریف ۱.۱. تابع نمایی

راه‌های گوناگونی برای تعریف تابع نمایی $\exp(x)$ که در آن x عددی حقیقی است، وجود دارد. یک روش e^x را به صورت سری توانی

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (1)$$

تعریف می‌کند که برای تمام مقادیر x همگرا است.

حال اگر قرار دهیم $x = 1$ ، $\exp(1)$ یا به طور خلاصه e به دست می‌آید که به «عدد نپر»^۱ معروف است. e عددی اصم است و مقدار تقریبی آن تا سه رقم اعشار برابر است با 2.718 . ثابت شده است که: $e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \left(\frac{1}{x}\right)\right)^x$.

روش دیگری که توسط نپر در قرن هفدهم مطرح شد، این است که ابتدا لگاریتم طبیعی را به صورت انتگرال $\log y = \int_1^y \frac{1}{x} dx$ ، $y > 0$ بیان و سپس تابع نمایی را وارون این تابع تعریف

1) Napier

می‌کند، پس معنی $y = e^x$ عبارت است از $x = \log_e y$. لازم به ذکر است که لگاریتم‌هایی با مبنای طبیعی e را «لگاریتم طبیعی» یا «لگاریتم - نپری» می‌نامند و آن را به صورت \log_e یا به طور خلاصه \ln نمایش می‌دهند. به طور کلی تمام روش‌های تعریف تابع نمایی معادل هستند، بدین معنی که همگی تابعی را تولید می‌کنند که دارای خواص بنیادی یکسان هستند.

تعریف ۲.۱. ماتریس نمایی e^{At}

یکی از راه‌های طبیعی تعریف ماتریس نمایی e^{At} استفاده از تابع نمایی e^x است. فرض کنیم A یک ماتریس $n \times n$ و I ماتریس همانی و t یک عدد حقیقی باشد، اگر در رابطه (۱) به جای x از At و به جای 1 از I استفاده کنیم، این مجموع همگرا به یک ماتریس $n \times n$ می‌شود که آن را با e^{At} نمایش می‌دهیم:

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots \Rightarrow e^{At} = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$$

لازم به ذکر است که، چون هر درایه ماتریس e^{At} به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ می‌باشد و بنابراین سری ماتریس فوق نیز همگراست.

۲ ویژگی‌های ماتریس نمایی e^{At}

۱.۲. فرض کنیم A و B ماتریس‌های مختلط مقدار $n \times n$ ، a ، b و t اعداد مختلط دلخواه باشند و همچنین ماتریس همانی I و ماتریس صفر را در نظر بگیریم. ماتریس نمایی در ویژگی‌های زیر صدق می‌کند:

۱. $e^0 = I$

۲. $e^{Aa} \cdot e^{Ab} = e^{A(a+b)}$

۳. $(e^{At})(e^{-At}) = I$

۴. $\frac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At}$

۵. $\det(e^A) = e^{tr(A)}$

که در آن $tr(A)$ اثر A مجموع درایه‌های روی قطر اصلی A است.

۶. اگر A^T ، ترانهاده A باشد آن‌گاه $\exp(A^T) = (\exp A)^T$

۷. اگر $AB = BA$ آن‌گاه $e^A \cdot e^B = e^{A+B}$

۸. اگر A یک ماتریس معکوس‌پذیر باشد آن‌گاه $e^{ABA^{-1}} = Ae^B A^{-1}$

۹. $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

مثال ۲.۲: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ، به آسانی می‌توان نشان داد که برای $n = 1, 2, \dots$ $A^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{bmatrix}$ است. بنابراین داریم:

$$I_n + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots + \frac{1}{n!}A^n = \begin{bmatrix} 1 + \frac{2}{1!} + \dots + \frac{2^n}{n!} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{(-1)}{1!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \end{bmatrix}$$

با استفاده از خاصیت تابع نمایی نتیجه می‌گیریم: $e^A = \begin{bmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{bmatrix}$.

مشاهده می‌شود که برای ماتریس قطری A ، e^A قطری است و درایه‌های روی قطر اصلی آن برابرند با نماهای روی قطر اصلی A . اگر B مشابه A باشد (که در این صورت می‌نویسیم $A \sim B$) یعنی اگر ماتریس معکوس‌پذیر P وجود داشته باشد به طوری که $B = P^{-1}AP$ داریم: $B^n = P^{-1}A^nP$ برای هر $n = 1, 2, \dots$ بنابراین

$$I + \frac{1}{1!}B + \frac{1}{2!}B^2 + \dots + \frac{1}{n!}B^n = P^{-1} \left(I + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \dots + \frac{1}{n!}A^n \right) P$$

پس $e^B = P^{-1}e^A P$. در مورد مثال قبل داریم: $e^B = P^{-1} \begin{bmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{bmatrix} P$

بنابراین اگر A و B مربع باشند و $A \sim B$ آن‌گاه $e^A \sim e^B$. به علاوه اگر $B = P^{-1}AP$ آن‌گاه $e^B = P^{-1}e^A P$.

۳.۲. برای هر ماتریس A ، وارون‌پذیر است.

برای اثبات کافی است به مقادیر ویژه آن توجه کنیم. اگر λ یک مقدار ویژه ماتریس A باشد، آن‌گاه $e^{\lambda t}$ مقدار ویژه متناظر آن برای e^{At} است و عددی مانند $e^{\lambda t}$ هرگز برابر صفر نیست. بنابراین $\det e^{At} \neq 0$ یعنی e^{At} وارون‌پذیر است و طبق ویژگی ۳ وارون e^{At} ، ماتریس e^{-At} است.

نکته ۴.۲. اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد، در مورد ماتریس نمایی e^{At} داریم:

$$\det(e^{At})^{-1} = \frac{1}{\det e^{At}} \quad .1$$

اگر $(e^{At})^T$ ترانزپوز ماتریس e^{At} باشد آن‌گاه

$$\det(e^{At})^T = \det e^{At} \quad .2$$

نکته ۵.۲. اگر A و B دو ماتریس مربع باشند، و $e^{At} \sim e^{Bt}$ آن‌گاه داریم:

$$\det e^{At} = \det e^{Bt}$$

نکته ۶.۲. اگر A یک ماتریس مربع بالا مثلثی از مرتبه n و تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن

صفر باشد، آنگاه $A^n = 0$. (چنین ماتریسی را یک ماتریس «بوج توان» می نامند). در این صورت داریم:

$$e^A = I_n + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!}A^{n-1}$$

قضیه ۷.۲. اگر $B = B(t)$ یک ماتریس $n \times n$ از توابع مشتق پذیر باشد آنگاه $(e^B)' = B'e^B = e^B \cdot B'$ اگر و تنها اگر $BB' = B'B$.

اثبات: [2]

لویی کانتور^۱ با ارائه مثالی [6] نشان داد که در حالت کلی قاعده زنجیری برای توابعی که شامل توابع نمایی ماتریسی اند، برقرار نیست. تابع ماتریسی $A(s)$ را می سازیم که:

$$\frac{d}{dt} \exp \left(\int_0^t A(s) ds \right) \neq \left[\exp \left(\int_0^t A(s) ds \right) \right] \cdot A(t), \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} \exp \left(\int_0^t A(s) ds \right) \neq A(t) \cdot \left[\exp \left(\int_0^t A(s) ds \right) \right]. \quad (3)$$

برای مثال تابع ماتریسی $A(t) = \begin{bmatrix} t & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، $-\infty < t < +\infty$ در رابطه های (۲) و (۳) صدق می کند.

۳. روش های به دست آوردن ماتریس نمایی e^{At}

قضیه ۱.۳. فرض کنید A و B ماتریس های ثابت $n \times n$ و $n \times m$ باشند، در این صورت مسأله مقدار اولیه $y(0) = B$ و $y'(t) = Ay(t)$ جواب ماتریسی $n \times m$ منحصر به فرد در بازه $-\infty < t < \infty$ دارد. جواب مذکور با فرمول $y(t) = e^{At} \cdot B$ داده می شود. در حالت کلی تر، جواب مسأله مقدار اولیه $y(a) = B$ و $y'(t) = Ay(t)$ عبارت است از:

$$y(t) = e^{A(t-a)} \cdot B$$

اثبات: [۱]

قضیه ۲.۳. اگر A یک ماتریس $n \times n$ با مقادیر ویژه $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ باشد، آنگاه $e^{At} = \sum_{k=1}^n e^{\lambda_k t} L_k(A)$ که $L_k(A)$ یک چندجمله ای لاگرانژ درجه $n-1$ نسبت به A است که به وسیله فرمول ذیل داده می شود:

$$L_k(A) = \prod_{j=1, j \neq k}^n \frac{A - \lambda_j I}{\lambda_k - \lambda_j}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

اثبات: [۱]

1) Liu, Contor

قضیه ۳.۳. اگر ماتریس $n \times n$ A با مقادیر ویژه $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ بتواند قطری شود، آنگاه $e^{At} = \sum_{k=1}^n e^{\lambda_k t} L_k(A)$. در قضیه قبل معرفی شده است) در نتیجه

$$A^r = \sum_{k=1}^n \lambda_k^r L_k(A), \quad r \geq 0$$

$$p(A) = \sum_{k=1}^n p(\lambda_k) L_k(A), \quad p(\lambda)$$

اثبات: [1]

در صورتی که ماتریس A دارای مقادیر ویژه تکراری باشد قضیه زیر را داریم:
 قضیه ۴.۳. اگر A ماتریس $n \times n$ باشد که تمام مقادیر ویژه آن برابر با λ هستند، آنگاه

$$e^{At} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I)^k$$

اثبات: [1]

قضیه ۵.۳. قضیه کیلی هامیلتون برای ماتریس‌ها

فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ و $c(x)$ چندجمله‌ای مشخصه آن باشد، در این صورت $c(A) = 0$ یا به عبارت دیگر A در معادله مشخصه اش صدق می‌کند.

روش پوتزر^۱ [1] برای محاسبه ماتریس‌های e^{At} ، در مورد تمام ماتریس‌های مربع A اعتبار دارد. این روش بر اساس قضیه کیلی هامیلتون است.

قضیه ۶.۳. فرض کنیم $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه ماتریس A هستند. دنباله‌ای از چندجمله‌ای‌ها برحسب A را با ضابطه ذیل تعریف می‌کنیم:

فرض کنیم $p_0(A) = I$ به ازای $k = 1, 2, \dots, n$ و $p_k(A) = \prod_{m=1}^k (A - \lambda_m I)$. در این صورت

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} r_{k+1}(t) \cdot p_k(A)$$

که در آن ضرایب اسکالری $r_1(t), \dots, r_n(t)$ به طریق بازگشتی از دستگاه مثلثی معادلات دیفرانسیل مرتبه اول خطی ذیل تعیین می‌شوند:

$$r_1'(t) = \lambda_1 r_1(t), \quad r_1(0) = 1$$

$$r_{k+1}'(t) = \lambda_{k+1} r_{k+1}(t) + r_k(t), \quad r_{k+1}(0) = 0$$

برای $k = 1, 2, \dots, (n-1)$.

روشی که توسط ادوارت و فولمر^۲ [4] برای محاسبه ماتریس نمایی e^{At} ارائه شده است، زمانی کارآیی دارد که A مشابه یک ماتریس قطری باشد و اهمیت این روش، در سادگی تدریس آن است،

ولی از آنجایی که برای استفاده از این روش نیاز به محاسبه $n - 1$ توان از ماتریس A داریم، زمانی که A بزرگ باشد، عملی نیست. این روش، وقتی که ماتریس A مقادیر ویژه تکراری داشته باشد اساسی به نظر می‌رسد. [4]

قضیه ۷.۳. درایه‌های ماتریس e^{At} در معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n ام، $y = c(D)y = 0$ صدق می‌کنند که در آن $c(x) = \det(xI - A)$ چندجمله‌ای مشخصه A است و $D = \frac{d}{dt}$.

این حکم نتیجه قضیه کیلی هامیلتون است و در حقیقت برای $k = 1, 2, \dots$ داریم $\frac{d^k}{dt^k}(e^{At}) = A^k e^{At}$ و در نتیجه: $\frac{d^k}{dt^k}(e^{At})|_{t=0} = A^k$ و $\frac{d^k}{dt^k}(e^{At})|_{t=0} = I$ برای $k = 1, 2, \dots$.

بنابراین جواب یگانه مسأله مقدار اولیه مرتبه n ام، $c(D)G(t) = 0$ است که

$$G(0) = I, G'(0) = A, \dots, G^{(n-1)}(0) = A^{n-1}.$$

برای شرح این روش فرض می‌کنیم که A ، n مقدار ویژه متفاوت $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ دارد.

جواب عمومی معادله دیفرانسیل $c(D)G(t) = 0$ به صورت

$$G(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}$$

می‌باشد که c_k ها، $k = 1, 2, \dots$ ، ماتریس‌های $n \times n$ ثابت هستند، n شرط اولیه زیر برای تشکیل یک دستگاه n معادله خطی برای n ماتریس مجهول c_k وجود دارد

$$I = c_1 + c_2 + \dots + c_n$$

$$A = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \dots + \lambda_n c_n$$

$$A^2 = \lambda_1^2 c_1 + \lambda_2^2 c_2 + \dots + \lambda_n^2 c_n$$

\vdots

$$A^{n-1} = \lambda_1^{n-1} c_1 + \lambda_2^{n-1} c_2 + \dots + \lambda_n^{n-1} c_n$$

یک راه‌حل این دستگاه معادلات این است که ماتریس c_k را توسط چندجمله‌ای‌هایی از درجه $n - 1$ در ماتریس A به دست آوریم.

حال، فرض کنیم A ، k مقدار ویژه متفاوت $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ و λ_k با تکرارهای به ترتیب s_1, s_2, \dots

و s_k دارد. در این حالت جواب عمومی معادله $c(D)G(t) = 0$ به صورت

$$(c_{11} + c_{12} + \dots + t^{s_1-1} c_{1s_1}) e^{\lambda_1 t} + \dots + (c_{k1} + t c_{k2} + \dots + t^{s_k-1} c_{ks_k}) e^{\lambda_k t}$$

می‌باشد و به همین ترتیب اثبات ادامه پیدا می‌کند.

روشی که توسط لئونارد^۱ [5] برای محاسبه ماتریس نمایی e^{At} عنوان شده، دو قضیه را مطرح می‌کند، که قضیه اول وجود یک جواب خصوصی برای مسأله مقدار اولیه معادلات دیفرانسیل

1) Leonard

ماتریسی را تضمین می‌کند. قضیه دوم، روشی برای محاسبه ماتریس نمایی e^{At} با استفاده از جواب‌های معادله دیفرانسیل اسکالری مرتبه n ارائه می‌دهد که در این روش مقادیر ویژه ماتریس A تکراری می‌باشند.

قضیه ۸.۳. اگر A یک ماتریس $n \times n$ ثابت با چندجمله‌ای مشخصه $p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_1\lambda + c_0$ باشد، آنگاه $\varphi(t) = e^{At}$ جواب یکتای معادله دیفرانسیل ماتریسی مرتبه n ،

$$\varphi^{(n)} + c_{n-1}\varphi^{(n-1)} + \dots + c_1\varphi' + c_0\varphi = 0 \quad (4)$$

است، که در شرایط اولیه

$$\varphi(0) = I, \varphi'(0) = A, \varphi''(0) = A^2, \dots, \varphi^{(n-1)}(0) = A^{n-1} \quad (5)$$

صدق می‌کند.

برای اثبات این قضیه فرض می‌کنیم φ_1 و φ_2 جواب‌های معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n ام (۴) باشند که در شرایط اولیه (۵) صدق می‌کنند. قرار می‌دهیم $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ ، در این صورت φ با شرایط اولیه $\varphi(0) = \varphi'(0) = \dots = \varphi^{(n-1)}(0) = 0$ در رابطه (۴) صدق می‌کند. حال از قضیه کیلی هامیلتون استفاده و اثبات قضیه را کامل می‌کنیم.

قضیه ۹.۳. فرض کنیم A یک ماتریس $n \times n$ ثابت با چندجمله‌ای مشخصه $p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_1\lambda + c_0$ باشد. در این صورت

$$e^{At} = x_1(t)I + x_2(t)A + x_3(t)A^2 + \dots + x_n(t)A^{n-1}$$

که $x_k(t)$ ، $1 \leq k \leq n$ ، جواب‌های معادله دیفرانسیل اسکالر مرتبه n ،

$x^{(n)} + c_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + c_1x' + c_0x = 0$ هستند که در شرایط اولیه زیر صدق می‌کنند.

$$\begin{array}{ccc} x_1(0) = 1 & x_2(0) = 0 & x_n(0) = 0 \\ x_1'(0) = 0 & x_2'(0) = 1 & x_n'(0) = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(0) = 0 & x_2^{(n-1)}(0) = 0 & x_n^{(n-1)}(0) = 0 \end{array}$$

برای اثبات این قضیه از چندجمله‌ای مشخصه $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ استفاده کرده و تابع φ را چنین تعریف می‌کنیم

$$\varphi(t) = x_1(t)I + x_2(t)A + x_3(t)A^2 + \dots + x_n(t)A^{n-1}$$

که در آن $x_k(t)$ ها برای $1 \leq k \leq n$ ، جواب یکتای معادله دیفرانسیل اسکالری مرتبه n ام

$$x^{(n)} + c_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + c_1x' + c_0x = 0$$

می‌باشند. با استفاده از قضیه قبل اثبات را ادامه می‌دهیم.

تعریف ۱۰.۳. یک ماتریس $n \times n$ از توابع که در آن هر سطر بعد از سطر اول، از مشتق‌گیری درایه‌های سطر قبلی حاصل می‌گردد، یک ماتریس «رانسکین» نامیده می‌شود که به افتخار ریاضیدان لهستانی ج. م. ه. - رانسکی (۱۷۷۸-۱۸۵۳) نامگذاری شده است. لازم به ذکر است که این ماتریس در موارد مورد نظر ما معکوس‌پذیر است [1].

ماتریس رانسکین $w[y; t]$ برای n تابع مختلط مقدار هموار y_1, \dots, y_n از متغیرهای حقیقی ماتریس $n \times n$ زیر است. (تابع هموار تابعی است که دارای مشتق پیوسته باشد.)

$$w[y; t] = \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

۱۱.۳. هریس [9]، روشی را برای محاسبه ماتریس نمایی e^{At} به کمک ماتریس رانسکین ارائه داده است، که بر اساس قضیه کیلی هامیلتون می‌باشد. در حقیقت e^{At} جواب ماتریسی مسأله مقدار اولیه $\frac{dX}{dt} = AX$ ، $-\infty < t < +\infty$ ، $X(0) = I$ می‌باشد، که در آن I ماتریس همانی $n \times n$ است. وی با توجه به این نکته که ماتریس رانسکین معکوس‌پذیر است، دو نمایش برای ماتریس نمایی e^{At} عنوان می‌کند.

در این روش، از نرم‌افزار متمتیکا استفاده می‌کنیم و با بررسی یک مثال به این نکته پی می‌بریم که تغییر کوچکی در درایه‌های یک ماتریس $n \times n$ (مثلاً اگر هر درایه را به مقدار 0.0001 کاهش دهیم) منجر به تغییر چشمگیری در درایه‌های ماتریس نمایی آن می‌شود.

۴. کاربرد ماتریس نمایی e^{At} در فیزیک

در این بخش به معنای فیزیکی معادله

$$\frac{du}{dt} = Au \quad (6)$$

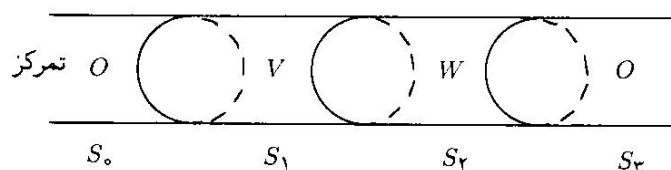
به ازای $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ می‌پردازیم و رابطه آن را با ماتریس نمایی e^{At} بررسی می‌کنیم [۱].

معادله دیفرانسیل یک فرایند «پخش» را توصیف می‌کند، که با تقسیم یک لوله به طول بی‌نهایت به چهار قسمت دیده می‌شود. دو قسمت وسط متناهی‌اند، و دو قسمت انتهایی نیمه نامتناهی‌اند. (شکل (۱)) در زمان $t = 0$ ، قطعات متناهی شامل غلظت‌های V_0 و W_0 از یک محلول شیمیایی است. در همین زمان برای تمام زمان‌ها، غلظت در دو قطعه نیمه نامتناهی صفر با

حجم نامتناهی است. این تصور درستی را از متوسط غلظت در این قطعات نامتناهی - حتی بعد از این که ماده شیمیایی شروع به پخش کرده باشد - می دهد، پخش در زمان $t = 0$ شروع می شود و از قانون زیر پیروی می کند.

«در هر زمان t ، میزان پخش بین دو قطعه مجاور برابر تفاضل غلظت ها است.»

تصور می کنیم که در میان هر قطعه، غلظت یکنواخت باقی می ماند. این فرآیند برحسب زمان پیوسته است، اما از نظر فضا گسسته است؛ تنها مجهول ها $V(t)$ و $W(t)$ در دو قطعه داخلی S_1 و S_2 است.



شکل ۱: یک الگوی پخش

غلظت V به دو طریق تعبیر می شود، با پخش به توی قطعه چپ S_0 و با پخش به تو یا خارج S_2 . بنابراین نرخ خالص تغییر (سرعت تغییر غلظت) به صورت زیر است:

$$\frac{dV}{dt} = (W - V) + (0 - V) = -2V + W$$

چون غلظت در S_0 همواره صفر است. همچنین:

$$\frac{dW}{dt} = (0 - W) + (V - W) = V - 2W$$

بنابراین، این دستگاه دقیقاً به مثال $\frac{du}{dt} = Au$ در معادله (۶) برازش دارد.

$$u = \begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix}, \quad \frac{du}{dt} = \begin{bmatrix} -2V + W \\ V - 2W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} u$$

ابتدا مقادیر و بردارهای ویژه را به دست می آوریم:

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = (-3) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه $\lambda_1 = -3$ و $\lambda_2 = -1$ بیان کننده چگونگی جواب هستند. آنها میزان استهلاک غلظت را نشان می دهند و $\lambda_1 = -3$ مهم تر است، زیرا تنها یک مجموعه استثنایی از شرایط اولیه می تواند به «استهلاک فوق العاده» با میزان e^{-3t} منجر می شود. در واقع، آن شرایط باید از بردار ویژه $(1, -1)$ آمده باشند. اگر آزمایش فقط برای غلظت های نامنفی صادق باشد، استهلاک فوق العاده غیرممکن است و حداقل مقداری که سرعت تغییر غلظت می تواند داشته باشد، باید برابر e^{-t} باشد. جوابی که با این نرخ مستهلک می شوند، متناظر با بردار ویژه $(1, 1)$ است، و بنابراین دو غلظت در $t \rightarrow \infty$ برابر می شوند.

مراجع

- [۱] گیلبرت استرانگ، جبر خطی و کاربردهای آن، مترجمین: حجت رضایی پزند، ابوالقاسم بزرگ نیا، مشهد دانشگاه فردوسی مشهد، ۱۳۸۲.
- [2] T. M. Apostol (1997), Linear Algebra-A First Course, with Application to Differential Equations, Wiley, New York.
- [3] J. J. Duistemaat and J. A. C. Kolk, Lie Groups, springer, 2000.
- [4] S. N. Elaydi and W. A. Harris, JR. (1998), on the computation of A^N , SIAM Rev., 40, pp. 965-976.
- [5] E. P. Fulmer (1975), Computation of the matrix exponential, Amer. Math. Monthly, 82. pp. 156-156.
- [6] L. E. Leonard (1996). The matrix exponential, SIAM Rev., 38, pp. 507-512.
- [7] J. H. Liu, A remark on the chain rule for exponential matrix functions, College. Math. J., 34 (2003), 141-143.
- [8] C. Moler and C. Vanloan (1978), Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, SIAM Rev., 20, pp. 801-836.
- [9] J. H. Wilkinson and C. Reinsch (1971), Linear Algebra, Handbook for Automatic Computation 2, Springer-Verlag, Berlin.
- [10] A. William. Harris (2001), Matrix Eponentails-Another Approach, SIAM (Rev., 43. No. 4, pp. 694-706.
- [11] A. D. Ziebur (1970), On determining the structure of A by analyzing e^{At} , SIAM Rev., 12, pp. 78-102.

در پائیز اتفاق می افتد!

احسان ممتحن

اکنون در مقابل درب باغی ایستاده‌ام که دیوارهای بلندش آن را از جهان خارج جدا می‌سازد. باغ در ارتفاعات کوهستانی و در میان جنگلی از بلوط‌های وحشی واقع شده است. جنگلی که در اوایل پائیز به رنگ طلائی و سرخ درآمده است. جوی بزرگی که از برف آب‌های قله مرتفع سرچشمه می‌گیرد از میان باغ می‌گذرد و سپس تا دامنه کوه ادامه می‌یابد و در آنجا به رودخانه می‌ریزد.

دیروز نامه‌ای از دوستم دریافت کرده بودم که برای دیدن دبستانش مرا دعوت کرده بود. مدت‌ها منتظر چنین فرصتی بودم. صبح زود به راه افتادم و تا آنجا که جاده اجازه می‌داد با ماشین رفتم. و بعد ماشین را پارک کردم. از چوپانی که همان نزدیکی برای گوسفندانش نی می‌زد و موهایش مثل کاکل ذرت زرد بود خواهش کردم مواظب ماشین باشد. و راه کوهستان را در پیش گرفتم و پس از دو ساعت کوه‌پیمائی به باغ رسیدم.

به نگاهبانان نامه دعوتم را نشان می‌دهم و وارد باغ می‌شوم. دوست سقراط صولتم به پیشواز می‌آید.

می‌گوید: پس نامه به دستتان رسید؟ این هم از دبستان ما که اینقدر کنجکاو بودید آن را ببینید. دوست داشتید باچشمان خود ببینید که ما چطور روزمان را به شب می‌رسانیم. اکنون فرصت مناسبی است تا عطش کنجکاو خود را فرو نشانید.

باغ بزرگ بود و پراز درختان سرو و نارنج. اینجا و آنجا سکوهائی سنگی برای نشستن در نظر گرفته شده بود. هر گوشه‌ای از باغ گروه‌های کوچکی گرد هم آمده بودند. اما صدایشان در هیاهوی شاد گنجشکان به گوش نمی‌رسید. پائیز بود اما با این حال عطر بهار نارنج آدم را مست و مدهوش می‌ساخت. چیز عجیبی بود. اما نه عجیب‌تر از چهره و رفتار دوستم که مدام مرا به فکر سقراط می‌انداخت. تقریباً حوالی ظهر بود که به باغ رسیدم اما در باغ دشوار بود که تشخیص دهی چه وقت از روز است. طراوت و خنکای صبحگاهی باغ را یکسره فرا گرفته بود. به دوستم می‌گویم چرا این باغ در پائیز حال و وضع بهاری دارد. می‌خندد و پاسخ می‌دهد باز هم شَم کار آگاهی‌تان گل کرد. عمده درختان این باغ درختانی همیشه سبز چون نارنج و سرو هستند. بنابراین وضع باغ در هر موقع

از سال کم و بیش همین طور است. می گویم پس بوی بهار نارنج را چه می گوئی؟ این چیز عجیبی نیست. دستانش را بر شکم می گذارد و از خنده روده بر می شود. قدری خودم را می بازم. درست گفته ام هیچ درخت نارنجی در پائیز شکوفه نمی دهد اما او به چه می خندد. طبق معمول فکرم را می خواند، دستی بر شانه ام می نهد و می گوید چندتائی از نارنج های این باغ جهش ژنی کرده اند همان طور که در یک خانواده ناگهان یکی از فرزندان نابغه می شود. آنها یک بار در بهار و بار دیگر در پائیز شکوفه می کنند.

گفت: چون شما ریاضیدان هستید بهتر است به آن گوشه برویم که دوست ریاضیدانم با شاگردانش مشغول گفتگوست.

و با دست کنجی از باغ را نشان داد. نزدیک تر که شدیم توانستم چهره افراد حاضر در جمع را تشخیص دهم. سه نفر بر روی سکوی سنگی بزرگی نشسته بودند، یکی از آنها مردی است با موهای سپید و ریش بلند، باشکوه و پر جذبه و دو نفر دیگر جوان هستند. از گونه هایشان شادابی و سرزندگی هویداست. معلوم است که شخص مسن تر را بسیار محترم می دارند. تخته سیاه بسیار بزرگی در کنارشان به دیوار آویزان است و از نوشته های روی تخته سیاه پیداست که پیش از آن که ما وارد شویم مشغول حل مسأله ای بودند. در میانه، میز مرمرین بزرگی قرار دارد و پیرمرد، که به نظر استادی فرزانه می آید با مداد بر آن تصاویری رسم کرده است. به حلقه آنها وارد شدیم و بر روی دو کرسی سنگی مجاور جای گرفتیم.

دوست من: مایلم دوست ریاضیدانم را به شما معرفی کنم. او در دانشگاه تدریس می کند. اما دوست داشت دبستان ما را هم از نزدیک ببیند.

پیرمرد باشکوه با مهربانی و احترام مکانی در میان خود و دو جوان برای من گشود: «بیائید اینجا». دو جوان پر نشاط نیز هریک جای خود را تعارف می کنند. سپاسگزاری می کنم و در کنار آن مرد جای می گیرم.

استاد: از این که ریاضیدانی به جمع ما پیوسته است بسیار خوشحالیم. شنیده ام که دوست ما گاه پیش شما می آید و درباره موضوعات مورد علاقه اش با شما گفتگو می کند. من اما دُم به تله اش نمی دهم زیرا جز حل مسأله درباره چیز دیگری گفتگو نمی کنم. تنها هنگامی که مسأله حل می کنم احساس زنده بودن به من دست می دهد. تجربه دیگری که بتواند با حل مسأله برابری کند نداشته و ندارم.

دوست من: آری او را تنها حل مسأله راضی می کند و بس.

استاد: و نمی دانم چگونه تو حاضری وقتت را صرف چیز دیگری به جز مسأله حل کردن کنی. و بعد رو به من کرد و گفت اگر او به ریاضیات می پرداخت مقام بلندی می یافت چنان که در جوانی هم مسأله حل کن اعجوبه ای بود. اما حیف که کنجکاویش را مرزی نیست. فرشته فلسفه او را از پرداختن به هر چیز دیگری منع می کند. مرا اما الهه ریاضیات تنها به حل کردن مسأله فرمان

داده است و بس.

من: تخصص شما چیست؟

استاد: قدری دشوار است که بگویم چه تخصصی دارم. درست‌تر آن است که بگویم تخصصم ریاضیات است اما اگر اصرار دارید که از تخصصی نام برم باید بگویم هندسه. می‌دانید، من به نسلی از ریاضیدانان متعلقم که علاقتشان بسیار گسترده بود. ما هم در دوران رشد و تربیتمان و هم پس از آن در حوزه‌های پژوهشی خود تجارب بسیار متنوعی داشتیم. با این حال معمولاً زندگی فکریم را در مرز میان فیزیک و ریاضیات سپری می‌کنم. آنجا می‌ایستم و با دقت خواص زیبایی را در هر دو عالم ریاضی و فیزیک رصد می‌کنم. راستی، این دو جوان، داور و دیهیم (با دست آنها را معرفی می‌کند)، می‌خواستند مسأله‌ای را حل کنند که شما وارد شدید. اجازه دهید از آنها بخواهم که مسأله خود را مطرح سازند.

دیهیم: می‌خواهیم بدانیم آیا مجموعه‌ی تامی وجود دارد که فاقد هرگونه عدد گویا باشد؟

داور: من همان اول به او پاسخ دادم اما او اصرار داشت مسأله را به اتفاق شما بررسی کنیم شاید چیزهای بیشتری بیاموزیم.

استاد: پیش از آن که حل تو را بشنویم آیا مایلی خود سؤال را قدری مورد بررسی دقیق‌تر قرار دهیم؟

هر دو جوان: آری با کمال میل.

استاد: پس شما می‌خواهید در مجموعه‌ی اعداد گنگ، مجموعه‌ای تام بیابید. مجموعه‌ای که نه تنها همه‌ی نقاط حدی خود را شامل است بلکه همه‌ی نقاطش نیز حدی هستند. به نظر شما، جدا از زیبایی درونی، این کار به چه دردی می‌خورد؟

دیهیم: مجموعه‌های تامی که تاکنون شناخته‌ایم همه شامل اعداد گویا بوده‌اند. منظورم بازه‌های بسته و مجموعه‌ی کانتور است. در مجموعه‌ی کانتور اعداد گویای فراوانی از جمله $\frac{1}{2}$ وجود دارند. اکنون می‌خواهیم مجموعه‌ی تامی بسازیم که فاقد هرگونه عدد گویائی باشد. منظورمان را از «به چه درد می‌خورد»، متوجه نمی‌شوم.

استاد: منظورم دیدن مسأله در چشم‌اندازی وسیع‌تر بود. به نظر شما این مسأله با کدام یک از مسائل مهم ریاضیات در ارتباط است؟

دیهیم: نمی‌دانیم. بسیار خوب است که چنین چیزی را بدانیم. این مسأله با کدام مسأله مهم در ارتباط است؟

استاد: فکر می‌کنم با فرض پیوستار کانتور. کانتور در 1890 فرض پیوستارش را مطرح کرد: هر زیر مجموعه‌ی ناشمارای \mathbb{R} هم عدد با خود \mathbb{R} است. از طرفی می‌دانیم که عدد اصلی هر مجموعه‌ی تام 2^{\aleph_0} است. یعنی برابر با عدد اصلی \mathbb{R} . حال اگر در اعداد گنگ مجموعه‌ی تامی چون P سراغ بگیرید چه اتفاقی خواهد افتاد؟

داور: در واقع $\mathbb{R} \subset \mathbb{Q}^c \subset P$. چون P با \mathbb{R} هم توان است پس \mathbb{Q}^c با \mathbb{R} هم توان است.
 استاد: برای لحظه‌ای تصور کن که مضاف بر اعداد گنگ اگر هر مجموعه‌ی ناشمارایی یک زیر مجموعه‌ی تام می‌داشت، فرض پیوستار اثبات می‌شد. از مجموعه‌های ناشمارا، یکی هم مجموعه‌ی اعداد گنگ است.

من: توجه کنید، هم اکنون علاوه بر مطالبی که طرح شد از قضیه‌ی شرودر - برنشتاین نیز استفاده کردید و گرنه اثبات کامل نمی‌شد.

استاد: کاملاً درست است و استفاده از قضیه‌ی شرودر - برنشتاین یعنی استفاده از اصل انتخاب. البته من گفتم «اگر بتوان در هر مجموعه‌ی ناشمارا مجموعه‌ای تام سراغ گرفت». حال راه حل خودت را بگو، بعد دوباره به این موضوع باز می‌گردیم.

داور (در حالی که گه گاه با مداد بر میز مرمیرین می‌نوشت): من از مجموعه‌ی سه‌سه‌ای کانتور الهام گرفتم. همان کاری را که کانتور در فرآیند ساخت مجموعه‌اش از بازه‌ی $[0, 1]$ کرده است در مورد بازه‌ی $A = [\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ انجام داده‌ام و مجموعه‌ی مورد نظر را به دست آوردم. نخست دنباله‌ی همه‌ی اعداد گویای A را با $\{r_n\}$ نشان دادم و دنباله‌ای از مجموعه‌های بسته $\{A_n\}$ چنان ساختم که $A \subseteq A_{n+1} \subseteq A_n$ (ب) چنان باشد که r_n به آن متعلق نباشد اما همه‌ی اعداد گویایی که به A_n تعلق دارند نقاط درونی‌اش باشند (ج) هر اجتماع متناهی از بازه‌های بسته باشد. برای ساخت A_1 از A ، می‌توان چنین عمل کرد: چون r_1 نقطه‌ی درونی A است پس اعداد گنگ x و y موجودند که $\sqrt{2} < x < r_1 < y < \sqrt{3}$. حال بازه‌ی (x, y) را از A کنار می‌گذاریم. پس خواهیم داشت $A_1 = [\sqrt{2}, x] \cup [y, \sqrt{3}]$. اکنون گیریم که A_n را ساخته‌ایم و می‌خواهیم A_{n+1} را بسازیم. اگر $r_{n+1} \notin A_n$ که A_{n+1} را همان A_n قرار می‌دهیم در غیر این صورت r_{n+1} یکی از نقاط درونی A_n است و بنا به طرز ساخت ما، A_n ، اجتماع تعدادی بازه‌ی بسته مجزاست. پس r_n باید دریکی از این بازه‌ها مثل I قرار داشته باشد. اما این بازه به شکل $[c, d]$ است حال اعداد گنگ x_n و y_n را به این شرط در نظر می‌گیریم که $c < x_n < r_{n+1} < y_n < d$. اکنون A_{n+1} عبارت خواهد بود از $A_n \setminus (x_n, y_n)$. به عبارتی دیگر تمام بازه‌های موجود در A_n دست نخورده سر جایشان باقی می‌مانند الا $[c, d]$ که جایش را به $[y_n, d] \cup [c, x_n]$ می‌دهد. حال اشتراک تمام A_n ها مجموعه‌ای تام و فاقد نقطه‌ی گویا است. زیرا بنا بر قضیه‌ی اشتراکی کانتور غیر تهی است و بسته هم هست و هر نقطه‌اش نیز نقطه‌ای حدی است.

استاد: حل زیبایی است و کاملاً درست. هرچند که نشان دادن این که تمام نقاط مجموعه‌ی شما حدی است خود به یکی دو جمله‌ی دیگر نیاز دارد. کنار گذاشتن تعداد شمارایی نقطه به این شیوه مریبی اختیار به یاد بازی ماتسورا^۱ می‌اندازد. راستی چرا از این راه حل راضی نیستید (خطاب به

(۱) بازیکن آ صاحب اعداد گنگ $[0, 1]$ و بازیکن ب صاحب اعداد گویای آن است. یکی از بازیکن‌ها (فرقی نمی‌کند کدامیک) بازه‌ی بسته‌ای با طول کمتر یا مساوی از $\frac{1}{2}$ در $[0, 1]$ انتخاب می‌کند. سپس بازیکن دیگر بازه‌ی بسته‌ای با طول کمتر یا مساوی $\frac{1}{4}$ در داخل بازه‌ی انتخابی بازیکن قبلی انتخاب می‌کند و به همین ترتیب ←

جوان دیگر)

دیهیم: چیزی که مرا ناراحت کرده آن است که او از همان اول سراغ اثبات مسأله رفت نه رد آن. می‌خواهم بدانم چرا قدری درباره‌ی درستی مسأله تردید به خرج نداد؟ چطور به لحاظ شهودی فهمید که چنین مجموعه‌ای ممکن است وجود داشته باشد؟

داور: هیچ امر راز آلودی در کار نیست، هر چند منظور تو را از شهود در نمی‌یابم. اگر منظور تو اینست که در میان مجموعه‌های تامی که تا به حال دیدیم، یعنی فاصله‌های بسته و مجموعه کانتور هیچ یک فاقد نقطه گویا نبوده، مطلبی است درست. اما روش ساخت مجموعه کانتور به ما آموخت که ممکن است به ترتیب تعداد شمارائی بازه را بیرون گذاشت و به مجموعه‌ای تام رسید. از اینجا تا ایده حل من راه درازی نیست. من تنها به این اندیشیدم که ممکن است بتوان همه اعداد گویای $[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ را یکی پس از دیگری بیرون گذاشت و به مجموعه‌ای تام دست یافت. دو نقطه ابتدا و انتهای بازه را هم از اعداد گنگ انتخاب کردم زیرا در فرآیند ساخت کانتور نقاطی از این دست در مجموعه تام باقی می‌مانند. او بازه $[0, 1]$ را گرفته و سپس یک سوم میانی آن را حذف می‌کند و به مجموعه $F_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ می‌رسد. در مرحله بعد یک سوم میانی هر یک از بازه‌های بسته F_1 را بیرون می‌آورد و به $[0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{8}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$ می‌رسد و این فرایند را ادامه می‌دهد تا به دنباله‌ای از مجموعه‌های بسته که ذکر خیرشان رفت می‌رسد، یعنی $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$. بعد تمامی آنها را با هم اشتراک می‌دهد یعنی $F = \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$.

استاد: می‌دانید کانتور این مجموعه را برای چه ساخته است؟ می‌دانید که این طرز ساخت اصولاً از آن کانتور نیست؟

داور: خیر به تاریخچه کار کانتور رجوع نکرده‌ام. برای حل این مسأله هم به چنین اطلاعاتی نیاز نداشتم.

دیهیم: با این حال من همواره به تو می‌گویم که داشتن درک تاریخی از هر موضوع از جمله مجموعه کانتور و مجموعه‌های تام بصیرت بیشتری به ما خواهد داد.

داور: من تنها به حل مسأله علاقمندم. این که فلانی چه کرد و بعد بهمانی آن را ادامه داد به چه درد من می‌خورد. این که بدانم کانتور چطور به مفهوم مجموعه‌های تام رسید چه نفعی دارد. همین که تعریف مجموعه تام را بدانم و بعد مسأله‌ای در آن باره به چنگ بیاورم که سخت و تأمل برانگیز باشد مرا کافی است. استاد آیا درست نمی‌گویم؟

استاد: تو در این مرحله از زندگی سرشار از احساس غرور و شادمانی ناشی از حل مسائل هستی.

→ بازیکن‌ها در بازه‌های انتخابی یکدیگر بازه‌های کوچکتر انتخاب می‌کنند. اشتراک این بازه‌های بسته تو در تو بنا به قضیه اشتراکی کانتور تهی نیست و یک تک‌نقطه‌ای است. اگر این تک‌نقطه گویا بود بازیکن ب و در غیر این صورت بازیکن آ برنده بازی است. اثبات می‌شود که استراتژی ب هرچه که باشد بازیکن آ می‌تواند برنده شود.

دشوار است که از تو بخواهیم به بحث‌های تاریخی علاقه نشان دهی. برای ریاضی خواندن نیاز به هیچ انگیزه‌ای نداری، برعکس بازداشتن تو از ریاضیات نیاز به تلاش فراوان دارد. اما من اکنون، در روزگار پیری، به این نتیجه رسیده‌ام که آگاهی ما از تاریخچه یک قضیه یا یک نظریه می‌تواند به درک ما از آن کمک شایانی کند. البته نمی‌توانم ادعایم را اثبات کنم. اما بسیاری از ریاضیدان‌ها را می‌شناسم که با خواندن مقالات کلاسیک و جافتاده به ایده‌های مهمی دست یافته‌اند. می‌گویند و ایرشتراس کتاب توابع متعالی آبل را هر شب با خود به رختخواب می‌برده و تا لحظه خواب آن را مطالعه می‌کرده است.

داور: مطالعه آثار جافتاده ریاضی باز هم مطالعه ریاضی است نه تاریخ ریاضی و من با این موضوع مشکلی ندارم اما با ستایش این ریاضیدان و آن ریاضیدان چرا. نظیر کتاب مردان ریاضی اثر بیل. از یک سو زندگی ریاضیدان‌ها را آنچنان مهیج نشان می‌دهد و نبوغ آنها را می‌ستاید که شیفته آن می‌شوی و از سوی دیگر خواننده را ناامید می‌کند. انگار به زبان بی‌زبانی می‌گوید: «هر کس وزن مغزش از سه کیلو کمتر است وارد نشود». من نیز اگر به درستی در موقعیتش قرار گیرم و آموزش‌های لازم را ببینم می‌توانم اثری مهم در ریاضیات ایجاد کنم.

استاد رو به دوست من کرد و با چشمانش از او استمداد طلبید.

دوست من (خندان): والله من چه بگویم، اینها دست پخت خود هستند. با این حال اگر فکر می‌کند تاریخ ریاضی یعنی ستودن این و آن حق دارد که تاریخ ریاضیات را جدی نگیرد. اما تاریخ ریاضی و بطور عام تاریخ علم را چنین تعریف نمی‌کنند. پیشنهاد من این است که به عوض یک بحث انتزاعی در باب مفید بودن یا نبودن تاریخ ریاضی از یکی از شما دو نفر (با دست به من و استاد اشاره کرد) بخواهم تاریخچه مجموعه کانتور را بازگو کنید. اگر احساس کردیم که دانستن آن مفید است دیگر نیازی به بحث بیشتر نیست. تو آیا با این پیشنهاد موافقی؟

داور: کاملاً.

استاد رو به من کرد و گفت آیا مایلید پیش از آن که بحث را ادامه دهیم زمینه تاریخی کار کانتور را شرح دهید تا دوست جوان ما بستر تاریخی موضوع را لمس کند. یا این که شما نیز به تاریخ این موضوع بی‌علاقه‌اید؟

من: البته من چندان در تاریخ ریاضیات زبده نیستم اما دست بر قضا تاریخچه این یکی را خوب می‌دانم. در فاصله سال‌های ۱۸۷۰ تا ۱۸۸۵ از خاک مطالعه توپولوژی خط حقیقی دو پرسش بنیادی جوانه زده بودند: ۱) شرایطی که تحت آن تابعی انتگرال پذیر باشد و ۲) یکتائی سری‌های مثلثاتی. در هنگامه پاسخ به این دو پرسش به ظاهر مجزا بود که مجموعه کانتور کشف شد. نخستین گام در پاسخ به سؤال اول را گئورگ برنهارد ریمان (۱۸۶۶ - ۱۸۲۶) برداشت. از دل یکی از شرط‌هایی که ریمان برای انتگرال پذیری توابع مطرح کرده بود جوانه‌های نظریه اندازه سربرون کردند. گام اساسی بعدی در این زمینه را هرمان هانکل (۱۸۷۳ - ۱۸۳۹) در اوایل دهه ۱۸۷۰ برداشت. هانکل، در ادامه کار ریمان، نشان داد که انتگرال‌پذیری یک تابع به سرشت مجموعه

نقاطی مربوط به تابع بستگی دارد. این عین عبارت اوست: «یک تابع انتگرال پذیریمان است اگر و تنها اگر به طور نقطه وار ناپیوسته باشد» که با اصطلاحات امروزی یعنی آن که به ازای هر $\delta > 0$ مجموعه نقاطی مانند x که در آنها تابع در هر همسایگی x نوسانی بیش از δ دارد هیچ جا چگال باشند. هانکل چنین می پنداشت که مجموعه های هیچ جا چگال \mathbb{R} شکل و شمایل کلی اشان همچون شکل و شمایل $\{\frac{1}{p^n}\}$ است ([۲]).

داور و دیهیم: اما این نادرست است.

استاد: بله اما این مربوط به آغاز شکل گیری تعریف مجموعه های هیچ جا چگال است. اگر امروز درک روشنی از این مفاهیم داریم به خاطر تلاش های چنین دانشمندانی است. لطفاً ادامه دهید.

من: به خاطر همین پیش فرض، هانکل گمان برد می توان مجموعه های هیچ جا چگال را در بازه هایی که طولشان به هر اندازه که بخواهیم کوچک می شود جای داد. نکته ای که شاگردانتان نادرستی اش را متوجه شدند. با وجودی که پژوهش های هانکل بسیار مهم بودند، اما آنچه او را گمراه کرد، نداشتن بصیرت کافی درباره تنوع فراوان مجموعه های نامتناهی، به ویژه مجموعه های هیچ جا چگال بود. این اشتباه بر جای ماند تا آنکه اچ. جی. اسمیت (۱۸۸۳-۱۸۲۶)، استاد هندسه در آکسفورد، در سال ۱۸۷۵ مقاله ای منتشر کرد. در آنجا، اسمیت برای نخستین بار مجموعه هیچ جا چگالی ساخت که بسیار پیچیده تر از $\{\frac{1}{p^n}\}$ بود. آنچه را که شما در مورد برداشتن پی در پی یک سوم های میانی از بازه $[0, 1]$ گفتید در واقع روش ساخت اسمیت بود. متأسفانه ریاضیدانان اروپا اهمیت کار اسمیت را در نیافتند. حدود ده سال بعد که این مجموعه توسط کانتور از نو کشف شد آهسته آهسته توجه ریاضیدانان را برانگیخت ([۲]).

دیهیم و داور: خود کانتور چطور به این مجموعه دست یافت.

من: گئورگ کانتور (۱۹۱۸ - ۱۸۴۵)، پس از نوشتن رساله ای در باب نظریه اعداد در برلین به سال ۱۸۶۷، به سراغ توپولوژی مجموعه نقاط آمد. او زیر نظر ادوارد هاینه (۱۸۸۱ - ۱۸۲۱) در دانشگاه هاله شروع به پژوهش در باب یکتائی سری های مثلثاتی کرد. مسأله یکتائی سری های مثلثاتی این است: اگر به ازای همه x ها به استثنای آنهایی که در مجموعه ای مثل P هستند داشته باشیم $0 = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ ، آیا لزوماً همه ضرایب a_n و b_n صفر هستند؟ پاسخ هاینه این بود: بله به شرط آن که: «همگرایی سری فوق نسبت به مجموعه P یکنواخت و P متناهی باشد» ([۲]).

دیهیم و داور: همگرایی نسبت به مجموعه P یکنواخت باشد یعنی چه؟

من: یعنی همگرایی سری فوق روی هر بازه فاقد مجموعه متناهی P یکنواخت باشد. کانتور در حل مسأله بسیار پیش رفت. او در مقالاتی به سال های ۱۸۷۰ و ۱۸۷۱، فرض یکنواختی همگرایی را برداشت و به تفکر در حالتی که P مجموعه ای نامتناهی باشد پرداخت. به این منظور به توپولوژی

بنیادی خط حقیقی با دقت خیره شد تا بفهمد اساساً مجموعه‌های نامتناهی چطور موجوداتی هستند. در مقاله‌ای به سال ۱۸۷۲، کانتور مفهوم نقطهٔ حدی یک مجموعه را به همان شکل که ما امروز می‌دانیم تعریف کرد و مجموعهٔ تمام نقاط حدی مجموعهٔ P را مجموعهٔ P' نامید. لذا P'' مشتق P' است و $P^{(2)}$ مشتق P'' است و همین طور تا آخر. کانتور نشان داد که اگر عدد طبیعی n موجود باشد به نحوی که $P^{(n)} = \emptyset$ و سری $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ همه جا به جز احتمالاً روی P صفر شود، آنگاه همهٔ ضرایب سری صفر می‌شوند ([۲]).

دبیم و داور: چه تعمیم قدرتمندی از قضیهٔ هاینه.

من: در فاصلهٔ سال‌های ۱۸۷۹ تا ۱۸۸۴، کانتور ۶ مقالهٔ زنجیره‌ای (در واقع یک مقالهٔ ۶ قسمتی) با عنوان «دربارهٔ رویه‌های نقطه‌ای خطی نامتناهی»، منتشر کرد که نخستین مطالعهٔ نظام‌مند توپولوژی مجموعه نقاط خط حقیقی بود. در این مقالات کانتور سه مفهوم مهم را معرفی کرد. در نخستین مقاله مجموعه‌های همه جا چگال را تعریف کرد. او مثال‌های متعددی از جمله $\{ \frac{2^{n+1}}{3^m} \}$ ارائه داد و به رابطهٔ میان مجموعه‌های همه جا چگال و مشتق آنها پرداخت. یعنی $P \subseteq (a, b)$ همه جا چگال در (a, b) است هرگاه $P' = (a, b)$. در پنجمین مقاله، کانتور دربارهٔ افراز یک مجموعه به دو بخش تحویل‌پذیر و تام سخن می‌گوید. تعریف او از یک مجموعهٔ تام هنوز در میان ریاضی‌خوانان متداول است: P مجموعه‌ای تام است اگر $P = P'$. پس از معرفی مجموعه‌های تام کانتور اظهار می‌دارد که مجموعه‌های تام لزوماً همه جا چگال نیستند. همین جاست که به عنوان نمونه مجموعهٔ خودش را به صورت همه اعداد حقیقی دربارهٔ $[0, 1]$ که در بسط سه‌سه‌ای آنها تنها ۰ و ۲ به کار رفته باشد معرفی می‌کند. چیزی که امروزه می‌دانیم با مجموعهٔ اسمیت یکی است.

دوست من: نفهمیدم چرا کانتور برای نشان دادن اینکه همهٔ مجموعه‌های تام لزوماً همه جا چگال نیستند سراغ این مجموعهٔ پیچیده رفته است. می‌توانست یک بازهٔ بسته مثلاً $[0, 1]$ را ارائه دهد.

استاد: اما این بازهٔ بسته در خودش همه جا چگال است. کانتور دنبال مجموعهٔ تامی بود که در هیچ، تأکید می‌کنم در هیچ بازه‌ای چگال نباشد. دوست من: که اینطور. خواهش می‌کنم ادامه دهید.

من: اتفاقاً کانتور خود متذکر می‌شود که این مجموعه نامتناهی است و در هیچ بازه‌ای هر چقدر هم که کوچک باشد همه جا چگال نیست. هنوز معلوم نیست که کانتور چطور به این نتیجه رسیده است. اما فکر می‌کنم برای مطالعهٔ مسأله‌ای که طرح شد زمینهٔ تاریخی ذکر شده کافی باشد.

دوست من (خطاب به داور): حال چه می‌گوئی؟

داور: خوب راستش دانستن این نکات خالی از لطف هم نبود و حتی می‌توانم بگویم مفید بودند. اما جای لحظاتی که با یک مسألهٔ سخت کلنجار می‌روم را نمی‌گیرد. جایگزین آن احساس درونی نمی‌شود. من می‌خواهم خودم کانتور باشم، خودم با مشکلات روبرو شوم. اما اذعان می‌کنم که باید

قدری درباره دیدگاهم تجدید نظر کنم.

دوست من (رو به استاد): باز جای شکرش باقی است. اما درباره مسأله: حال که خاطراتم را مرور می‌کنم می‌بینم من و تو این مسأله را سالها پیش حل کرده بودیم. وقتی دو شاگرد جوان بودیم. درست مثل این دو. حتماً تو آن راه حل را بیاد داری.

استاد: نه تنها آن را به یاد دارم بلکه تعمیم‌هایی از آن را نیز به خاطر می‌آورم. ایده آن راه حل چنین بود: اگر بتوان مجموعه کانتور، \mathbb{K} را با عددی مثل α جمع کرد به نحوی که $\mathbb{K} + \alpha \subset (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ به هدف خود نائل شدیم. زیرا این مجموعه همچنان تام باقی می‌ماند اما فاقد نقطه گویاست.

من: مدتی پیش در یکی از مجلات ریاضی، ریاضیدانی از دانشگاه برکلی همین سؤال را مطرح کرده بود. منتها اضافه کرده بود که کافی نیست وجود چنین عددی را ثابت کنیم بلکه باید آن عدد را دقیقاً معرفی کنیم ([5]).

داور: البته دیهیم پس از راه حل من به طور مبهمی به این راه حل فکر کرده است. حتی عددی را هم برای این موضوع پیشنهاد کرده است اما هنوز نتوانسته‌ایم ثابت کنیم که جمع این عدد با اعضای مجموعه کانتور همواره عددی گنگ می‌شود.

استاد: آن عدد چیست؟

دیهیم: قرار دهید $\alpha = 0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots$ که در آن $\alpha_i = 1$ اگر $i = n! + n$ و در غیر اینصورت $\alpha_i = 0$.

چشمان استاد پیر از خوشحالی برق زد.

استاد: چطور پیدایش کردی؟

دیهیم: با محاسبه. می‌خواستم عددی در بسط سه‌سه‌ای اعضای کانتور که در آنها تنها ۰ و ۲ به کار رفته، پس از جمع چنان بی‌نظمی و آشوبی ایجاد کند که حاصل عددی گنگ شود. هنوز هم فکر می‌کنم این عدد چنین کند. همانطور که می‌بینید وضع این عدد به گونه‌ای است که بین ۱ ظاهر شده در یک مکان و ۱ بعدی اقیانوسی از صفرها شناورند. این صفرها اولاً در عمل جمع با اعضای مجموعه کانتور کار را ساده‌تر می‌کنند و ثانیاً ۱‌های این عدد آنچنان بی‌نظم ظاهر می‌شوند که در هنگام جمع، اعضای مجموعه کانتور را به اعدادی گنگ مبدل می‌سازند.

داور: استاد، حال او پس از یافتن این عدد تماشائی بود. هر چه کاغذ داشتیم را با رشته‌های طولانی از ۰ ها و ۲ ها به شیوه‌های گوناگون در سطری می‌نوشت و بعد آنها را با عدد خودش جمع می‌کرد.

استاد: کار درست را همو کرده است. معمولاً از دل محاسبات دشوار است که حقایق زیبای ریاضی آشکار می‌شوند. خوب بیایید به برهان خلف متوسل شویم. اگر این عدد نتواند همه نقاط مجموعه کانتور را در فرآیند جمع با خودش به اعدادی گنگ تبدیل کند چه می‌شود؟

داور: در آن صورت عدد گویای غیر صفر r وجود خواهد داشت که $r - \alpha$ عضو \mathbb{K} شود.

دیهیم: پس در بسط $r - \alpha$ باید تنها 0 و 2 ظاهر شوند.

استاد (با دست به دیهیم اشاره می کند که به کنار تخته سیاه برود): بنویس $x = 0.x_1x_2x_3\dots = r - \alpha$ از طرفی چون r گویا بود بنابراین دارای بسط سه سه ای نامختومی به شکل $r = r_0.r_1r_2\dots r_l(\overline{r_{l+1}\dots r_{l+m}})$ است. چون r دارای بسط نامختوم است پس باید برای k که $l + 1 \leq k \leq l + m$ داشته باشیم $r_k \neq 0$. این نکته روشن است که اگر $k \equiv n \pmod{m}$ آنگاه $r_k = r_n$. اکنون به گمان شما درباره r_k چه می توان گفت.

داور: چون شما r را در مبنای سه نوشته اید. پس تنها ارقام ظاهر شده در بسط سه سه ای آن عبارتند از $0, 1, 2$. چون r_k صفر نبود پس تنها یا باید 1 باشد یا 2 .

استاد: کاملاً درست. باید در هر یک از این دو حالت به تناقض برسیم. پس فرض کنیم $r_k = 1$. اگر بتوان نشان داد که در این حالت در بسط سه سه ای x یک ظاهر می شود کار تمام است. میخواهم از ایده اقبانوس صفرهای تو (خطاب به دیهیم) استفاده کنم. این ابزاری را که می گویم برایم مهیا کن.

دیهیم: چه ابزاری؟

استاد: میخواهم اعداد طبیعی $n_1 < n_2$ را چنان مهیا کنی که اولاً هر دو با k همزهشت باشند و ثانیاً عدد طبیعی q را چنان برایم بیابی که $q + 1 < n_1 < n_2 < (q + 1) + q + 1$. اگر بتوانی چنین کنی، اولاً در بسط سه سه ای r ، در مکان های n_1 و n_2 ، عدد 1 ظاهر می شود اما در همین مکان ها در بسط α صفر قرار دارد. تصور کن دو تا یک و میانشان اقبانوسی صفر و بالای سرش درست آنجا که در α صفر ظاهر شده است در بسط r دو تا یک قرار دارد.

برای مدتی سکوت برقرار شد. شاگردان به کنار تخته سیاه رفتند. محاسباتی انجام دادند. و در نهایت خوشحال برگشتند.

داور: چون می خواستید هم n_1 و هم n_2 با m همزهشت باشند و از $q + 1$ بزرگتر باشند چنین کردیم. قرار دادیم $q = m + k$ ، $y = \frac{q}{m} + 1$ ، $n_1 = (y + 1)m + k$ و $n_2 = (y + 2)m + k$. این اعداد همه خواست شما را برآورده می سازند.

استاد: ممنون. حال مشاهده می کنیم که چون بسط های اعشاری

$r = r_0.r_1r_2r_3\dots$ و $r = r_0.r_1r_2\dots r_{n_1}\alpha_{n_1+1}\alpha_{n_1+2}\dots$ به شکل نشان داده شده است، پس $x = r - \alpha > r_0.r_1r_2\dots r_{n_1} - 0.\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n_1}$ این یک مطلب. از سوی دیگر می دانیم که $r < r_0.r_1r_2\dots r_{n_1}\overline{2}$ پس $x = r - \alpha < r_0.r_1r_2\dots r_{n_1} - 0.\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n_1} + \frac{1}{3^{n_1}}$ این هم مطلب دوم. حال از این دو چه نتیجه ای می گیریم؟

دیهیم: این نتیجه که

$$r_{0..r_1 r_2 \dots r_{n_1}} - 0.\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n_1} < x < r_{0..r_1 r_2 \dots r_{n_1}} - 0.\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n_1} + \frac{1}{3^{n_1}}$$

پس $x_{n_1} = r_{n_1} - \alpha_{n_1} = 1 - 0 = 1$ در بسط سه‌سهای x که قرار بود عضوی از مجموعه کانتور باشد یک ظاهر شده است که تناقض است.

استاد: می‌بینی دقیقاً حدس شما درست از آب درآمد. حالت دیگر یعنی $r_k = 2$ نیز راهی مشابه دارد. آن را به عهده خودتان می‌گذارم. اما قصه هنوز پایان نگرفته است. این راه حل هنوز نکات آموختنی فراوان دارد. تنها موهبت ظاهری این راه حل نیست که آن را برجسته می‌کند امکاناتی که پیش روی ما می‌گذارد از خود راه حل مهم‌تر است: منظورم امکان تعمیم دادن است. روش حل خود فریاد بر می‌آورد که «مرا تعمیم دهید». برای این کار بیائید مجموعه کانتور را زیر ذره بین بگذاریم و آن را خوب تماشا کنیم. شما بگوئید مجموعه کانتور چه خواصی داشت؟

دوست من: پیش از آن که مسأله را تعمیم دهی من دو سؤال داشتم. نخست آن که عددی که هم‌اکنون شاگرد تو ارائه کرد نوعی عدد لیوویل بود. اگر $f: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ دنباله‌ای دلخواه باشد، آنگاه $z = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1+f_j}{3^j}$ یک عدد لیوویل است. البته باید آن را در مبنای سه، یعنی بصورت $z = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1+f_j}{3^j}$ ببینیم. پرسش اول این است که آیا تمام اعداد لیوویل که به این شکل هستند در جمع با مجموعه کانتور رفتاری α وار از خود نشان نمی‌دهند؟ آیا تمامی این اعداد یا به طور کلی اعدادی که در بسط سه‌سهای آنها اقبانوسی از صفرهاست که عدد یک با بی‌نظمی این جا و آنجا خودی نشان می‌دهد همین خاصیت را ندارند؟ و دومین سؤال این که می‌توان به جای جمع، α را در مجموعه کانتور ضرب کرد. آیا مجموعه حاصل از این ضرب زیر مجموعه اعداد گنگ می‌گردد؟ اگر نه، عدد دیگری برای این کار یافته می‌شود؟ اصلاً اگر بخواهم عددی ارائه دهید که هم جمع آن و هم ضرب آن مجموعه کانتور را به زیرمجموعه‌ای از اعداد گنگ تبدیل کند حرف حسابتان چیست؟

دیهیم و داور از خنده ریسه می‌روند و استاد هم که مرد پرجذبه‌ای است و کمتر می‌خندد دیگر نمی‌تواند جلوی خودش را بگیرد. جمع ما به اغتشاش می‌کشد. هر کس چیزی می‌گوید. استاد منتظر می‌ماند تا کم کم آرامش به گروه ما باز گردد و بعد ادامه می‌دهد.

استاد: می‌دانی درباره‌ی تو چه فکر می‌کنم؟ پس از این همه سال هنوز همان شیطان ناقلاهی تمام عیار باقی مانده‌ای. با این حال هم من و هم تمامی شاگردانم تو را دوست می‌داریم. و اما درباره‌ی سئوالات نیم‌جدی‌ات که قرار بود دوتا بیشتر نباشند اما بسیار بیشتر شدند. اندکی بعد خواهیم دید که وجود اعدادی که ضربشان در مجموعه کانتور منجر به اعدادی گنگ شود حتمی است. اما این که عددی را برای این کار معرفی کنیم مسأله‌ای برای این دو است. در مورد پرسش اول تو نیز باید بگویم که به نظر می‌رسد پاسخ مثبت باشد اما اثبات آن از عددی به عدد دیگر سهل‌تر یا دشوارتر است. عدد α از این نظر عدد خوش رفتاری بود. شاید هم بتوان اثباتی ارائه کرد که نشان دهد کلیه اعدادی از این خانواده می‌توانند با مجموعه کانتور جمع شوند و هر بار حاصل عددی گنگ باشد.

این دو باید دربارهٔ سؤال‌هایت بیاندیشند و نتیجه را به من یا تو اطلاع دهند. باری سخن از تعمیم به میان آوردم. داشتیم می‌پرسیدم مجموعهٔ کانتور چه خواصی دارد؟

داور و دیهیم با هم (به طوری که صدایشان در هم طنین انداز می‌شد): این مجموعه درون تهی است، تام است، یعنی نه تنها بسته است بلکه هر نقطه‌اش نیز نقطه‌ای حدی است و من اضافه می‌کنم: واندازهٔ آن صفر است.

استاد: همین جا صبر کنید. گفتید که این مجموعه درون تهی است؟ و بسته است؟ خوب، اکنون تصور کنید به شما مجموعه‌ای بسته و درون تهی چون A داده‌اند. می‌توانید عدد حقیقی مناسبی مثل α بیابید که $A + \alpha \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ؟ ممکن است اندکی راهنمایی دریافتن راه حل به ما کمک کند. این راهنمایی در حقیقت یکی از مهمترین اکتشافات دربارهٔ توپولوژی خط حقیقی است. مرور شما بر تاریخچهٔ مجموعهٔ کانتور به راستی جامع بود. آیا ممکن است به قضایای رسته‌ای بشر نیز اشاره‌ای کنید.

من: با کمال میل. یک زیرمجموعه از اعداد حقیقی چون A را هیچ جا چگال گوئیم هرگاه در هیچ بازه‌ای چگال نباشد. اجتماع هر تعداد متناهی مجموعهٔ هیچ جا چگال و همین طور بستار یک مجموعهٔ هیچ جا چگال، باز هم هیچ جا چگال‌اند. البته لزومی ندارد که اجتماع شمارش پذیر (نامتناهی) مجموعه‌های هیچ جا چگال باز هم مجموعه‌ای هیچ جا چگال باشد، مانند \mathbb{Q} . اما اگر مجموعه‌ای اجتماع شمارش پذیری از مجموعه‌های هیچ جا چگال باشد آن را از رستهٔ اول^۱ می‌نامیم. آن دسته از زیرمجموعه‌های \mathbb{R} که از رستهٔ اول نباشند را از رستهٔ دوم^۲ می‌نامیم. در ۱۸۹۹، بئر^۳ نشان داد که «متمم هر مجموعه از رستهٔ اول در اعداد حقیقی چگال است، هیچ بازه‌ای از رستهٔ اول نیست و اشتراک هر دنباله‌ای از مجموعه‌های باز چگال باز هم چگال است و دست آخر این که هر زیرمجموعهٔ یک مجموعه از رستهٔ اول از رستهٔ اول است.»

استاد: متشکرم. اگر فرض کنید که برای مجموعهٔ بسته و درون تهی و لذا هیچ جا چگال A ، هیچ چنین عددی یافت نمی‌شود به چه تناقضی می‌رسیم؟

پس از کمی سکوت دو جوان رو به استاد کردند و آن که تند و تیز بود پاسخ داد:

داور: فرض کنیم چنین α ای یافت نشود، در آن صورت برای هر عدد حقیقی α ، با $(A + \alpha) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ مواجه می‌شویم. یعنی $\alpha + a = r$. حال ادعا می‌کنیم که در این صورت $\mathbb{R} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (A + r)$. اگر $\alpha \in \mathbb{R}$ بنا بر فرض $(-\alpha + A) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. پس عدد گویای r_0 موجود است که $-\alpha + a = r_0$ یا $a - r_0 = \alpha$ یعنی $\alpha \in A + (-r_0)$ پس $\alpha \in A + (-r_0) \subset \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (A + r)$. لذا $\mathbb{R} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (A + r)$. اما بنا بر قضیهٔ رسته‌ای بئر از رستهٔ دوم است حال آن که طرف دوم از رستهٔ اول است و این تناقض نشان می‌دهد که حتماً α یافت می‌شود.

1) First Category 2) Second Category 3) R. Baire

من: اگر به جای «بسته و درون تهی بودن» شرط «اندازهٔ صفر بودن» را در نظر می‌گرفتیم بازهم این راه حل پاسخ می‌داد؟ منظورم آن است که اگر مجموعه A اندازهٔ صفر داشته باشد آنگاه عددی حقیقی مثل α وجود دارد که $A + \alpha \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. کافی بود به برهان خلف تا این جا می‌رسیدیم که $\mathbb{R} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (A + r)$. بنا بر خواص اندازهٔ لیگ اندازهٔ مجموعهٔ سمت راست صفر است حال آن که خط حقیقی اندازه‌اش بی‌نهایت است. دوست من (در حالی که به قهقهه افتاده و دستش را روی دلش گذاشته بود چشمکی به من زد و گفت): البته از تعمیم تو نتیجه‌ای به دست می‌آید که از تعمیم این دو حاصل نمی‌شد و آن این نتیجه است که: برای هر زیر مجموعهٔ شمارا از اعداد حقیقی همانند S ، عددی چون β وجود دارد که $S + \beta$ فاقد اعداد گویا است. اگر طرفداران اصالت سود اینجا بودند می‌گفتند تعمیم تو بهتر است چون نتایج بیشتری دارد. داور و دیهیم در حالی که سر تکان می‌دادند و خنده‌شان گرفته بود: همین طور است. هر مجموعهٔ شمارا دارای اندازهٔ صفر است اما لزوماً بسته و درون تهی نیست.

استاد: هر چند نکتهٔ قابل تأملی بیان داشت اما بهوش باشید تا این شیطان ناقلا فریبتان ندهد. او می‌خواهد به شیوهٔ خاص خودش بحث را به سمت فلسفهٔ اخلاق ببرد. من که خود بارها قربانی این شیوه بوده‌ام دوباره توجه شما را به این سو فرامی‌خوانم. همین اثبات با اندکی جرح و تعدیل نشان می‌دهد که اگر A بسته و درون تهی باشد، عددی چون α یافت می‌شود که $\alpha A \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. هدف شما رسیدن به مجموعه‌ای فاقد نقطهٔ گویا بود با خواصی که باید حفظ شوند. ضرب نیز خواص بسته بودن و درون تهی بودن را حفظ می‌کند.

من: دربارهٔ مجموعه‌های اندازه صفر چه؟ درست است که انتقال اندازهٔ یک مجموعه را تغییر نمی‌دهد اما متأسفانه ضرب در اغلب اوقات اندازهٔ یک مجموعه را دگرگون می‌کند.

دیهیم: حتی اندازهٔ یک مجموعهٔ اندازه صفر را؟

من: آه حق با شماست. پاسخ برای مجموعه‌ای اندازه صفر مثبت است.

استاد: اگر بیاد داشته باشید پیش از شنیدن راه حل‌های مختلف اشاره‌ای به فرض پیوستار کانتور شد. فکر می‌کنم شما (اشاره به دو شاگرد جوان) آنقدر مشتاق بررسی راه حل‌هایتان بودید که به آن نکته چندان توجهی مبذول نداشتید. مایلم قدری در آن زمینه صحبت کنیم. از نظر من، کاری که هم اکنون موفق به انجام آن شدید آن بود که نشان دادید اعداد گنگ، \mathbb{Q}^c ، زیرمجموعه‌های تام دارد. حداقل یک نتیجه از کار شما این بود. پس در حقیقت نشان دادید که \mathbb{Q}^c هم عدد با \mathbb{R} است. چنین نیست؟

داور: آری اما این نکته را به روش‌های ساده‌تر نیز می‌توان نشان داد.

استاد (با دست شاگردانش را به شکیبائی دعوت می‌کند): تاریخچهٔ کار کانتور نشان داد که او در ۱۸۸۳ مجموعه‌های تام را معرفی کرد و هفت سال بعد در ۱۸۹۰ فرض پیوستارش را مطرح ساخت. کمی تخیل نشان می‌دهد چگونه کانتور پس از هفت سال به ایدهٔ فرض پیوستار رسید. دست کم این حدس من است. ریاضیدانان متوجه شده بودند که هر مجموعهٔ تامی به اندازهٔ \mathbb{R} عضو دارد.

پس فرض پیوستار برای مجموعه‌های تام درست از آب در می آید. خوب چرا دیگر زیر مجموعه‌های نا شمارا نه؟ اگر شما بودی چه می کردی؟

داور: سعی می کردم ثابت کنم هر مجموعه نا شمارائی شامل یک مجموعه تام است. و آن وقت فرض پیوستار اثبات می شد.

استاد: البته با کمک قضیه شرودر - برنشتاین - کانتور. برای لحظه‌ای خودتان را جای کانتور بگذارید و بیاندیشید: بازه‌ها، اگر بسته باشند که خود تام هستند و اگر باز باشند می توان در آنها بازه‌ای بسته و لذا مجموعه‌ای تام یافت. از این هم بیشتر، اگر مجموعه ما بازه نباشد اما شامل یک بازه شود، یعنی به یک معنی لاغری درون تهی نباشد دوباره می توانی آن را با \mathbb{R} هم عدد کنی. پس می ماند مجموعه‌های درون تهی یا لاغری که نتوان در آنها بازه‌ای قرار داد.

دیهیم: مجموعه اعداد گنگ با این که درون تهی است اما از این حیث رو سفید از آب در آمد.

استاد: نکته همین جاست. مثال کانتور نشان می دهد که مجموعه‌های تام هیچ جا چگال یا لاغری وجود دارند. گام بعدی می توانست این باشد: اگر ممکن بود در هر مجموعه نا شمارای درون تهی، مجموعه تامی درون تهی قرار داد در حقیقت ثابت می شد که همه مجموعه‌های نا شمارا چه درون تهی و چه درون ناتهی با \mathbb{R} هم توان هستند. مجموعه‌های نا شمارائی چون مجموعه اعداد گنگ که شامل مجموعه تام هستند خود مهر تأییدی بر این باور بودند. فکر کنم چنین شد که کانتور فرض پیوستارش را حدس زد. راستی یادم رفت که بگویم قضیه کانتور - بندیکسون نیز مهر تأیید دیگری بر این باور بود چرا که بنا بر آن: هر مجموعه نا شمارای بسته‌ای را می توان به شکل اجتماع یک مجموعه شمارا و یک مجموعه تام نوشت. پس فرض پیوستار برای بسیاری از مجموعه‌ها، مجموعه‌های باز و بسته، مجموعه اعداد گنگ و بسیاری مجموعه‌های دیگر درست بود.

دوست من: حیف که مجموعه‌ها مثل در نیستند که یا باز باشند یا بسته و گرنه فرض پیوستار کانتور اثبات می شد.

داور: حتماً مجموعه‌های پیچیده‌ای هستند که سر راه این ایده سنگ انداخته اند. چون می دانیم که فرض پیوستار اثبات پذیر نیست.

استاد: بله، اما باید دقیق تر از این سخن گفت، فرض پیوستار در منطق مرتبه اول تصمیم ناپذیر است، نه منطق مرتبه دوم ([۱]). فلیکس هاوسدورف در کتاب نظریه مجموعه‌هایش \mathbb{R} را به شکل اجتماع دو مجموعه مجزا از هم A و B نوشت به نحوی که نه A و نه B ، هیچکدام، شامل زیرمجموعه تام نبود ([۳]). پس از چنین تلاش‌هایی معلوم شد که کار بسیار دشوارتر از این حرفه‌است. فرض پیوستار پهلوان پنبه نبود. چهل و هشت سال بعد از طرح فرض پیوستار کورت گودل، در ۱۹۳۸، نشان داد که این فرض با بقیه اصول نظریه مجموعه‌ها سازگار است و ۲۳ سال پس از کار گودل، کوهن^۱ به کمک روش تحمیل خود استقلال نفیض فرض پیوستار را کامل کرد.

1) Paul J. Cohen

او نشان داد که نقیض فرض پیوستار و بقیه اصول مجموعه‌ها از جمله اصل انتخاب سازگارند به شرط آن که سازگاری خود اصول نظریه مجموعه‌ها را فرض بگیریم. اخیراً امیدهایی در قلب ریاضیدانان زنده شده است که شاید بتوان با دستکاری اصول نظریه مجموعه‌ها مسائل تصمیم‌ناپذیر به ویژه فرض پیوستار را واقعاً حل کرد. البته بیشتر ریاضیدانان صاحب نظر، مثل گودل، کوهن و وودین^۱ معتقدند فرض پیوستار غلط است ([۱])، [۶] و [۷]. خیلی وقت نیست که ریاضیدانی بنام کریس فرایلینگ^۲ سعی کرده است نادرستی فرض پیوستار را با یک آزمایش فکری جالب ثابت کند ([۱]، فصل یازدهم). دوست من: فکر کنم اکنون بتوانم به شما (اشاره به دو جوان) بگویم که چرا تلاش برای دیدن یک مسأله در متن تاریخی‌اش و به عنوان بخشی از تلاش مردان ریاضی مهم است. بدون این چشم‌انداز شما تنها مسأله‌ای را حل کردید که بیش از صد سال از کشف آن و حتی از کشف تعمیم‌هایی که امروز به آن رسیدیم می‌گذرد. اما حال که قادر شدیم در یک چشم‌انداز تاریخی به تلاش‌هایمان بنگریم از احساس همدلی با کانتور و ریاضیدانانی که فرض پیوستار را درست تلقی می‌کردند غرق شادی می‌شویم. در ماجراجویی‌های فکری‌شان و در شکست‌ها و پیروزی‌هایشان شرکت می‌کنیم. گوئی در همان فضای رقیقی نفس می‌زنیم که روزگاری کانتورها و هاوسدورف‌ها در آن نفس می‌زدند. فرهنگ دانش تنها به همین شکل از نسلی به نسل دیگر منتقل شده تا به ما رسیده است. اگر خودمان را از این چشم‌انداز وسیع محروم کنیم ممکن است ریاضی بدانیم اما دیگر به فرهنگ اصیلی که قرن‌ها چرخ دانش و ریاضیات را به جنبش در آورده است تعلق نخواهیم داشت. ارزش دیگر این نوع نگاه فروتنی است. وقتی می‌بینیم غول‌ها اشتباه می‌کنند آیا نباید متواضع‌تر باشیم؟ به همین علت این‌کُن^۳ ریاضیات را دبستان بزرگ فروتنی می‌نامد. اصولاً «نبوغ واقعی چیزی جز فضیلت فوق‌العاده فروتنی در حوزه تفکر نیست»^۴.

استاد: «جانا سخن از زبان ما می‌گوئی».

داور: من با شما در این باب موافقم و اگر مطالعه تاریخ ریاضی به این شکل به خدمت گرفته شود با کمال میل در تحصیل آن خواهم کوشید.

بحث از نظریه مجموعه‌ها مرا یکباره به یاد کارگاهی انداخت که چندی قبل در آن شرکت کرده بودم:

من: اخیراً برای شرکت در کنفرانسی به پایتخت رفته بودم. در سخنرانی یک نظریه مجموعه‌دان حرفه‌ای شرکت کردم؛ از چیزهای عجیب اما جالبی صحبت می‌کرد. هدفش استفاده از روش بازگشتی در توپولوژی بود. مجموعه نقاطی را به نام نقاط سایه‌دار و مجموعه نقاطی را با نام نقاط اجتناب پذیر تعریف کرد. اما آنچه برای من جالب بود آن بود که دسته‌ای از مجموعه‌های او علاوه بر ویژگی‌های دیگر همگی مجموعه‌های تامی بودند فاقد هرگونه نقطه گویا ([۴]).

هر دو جوان: مقاله‌اش را برای ما بفرستید.

1) W. Hugh Woodin 2) C. Freiling 3) A. Cones

(۴) این عبارت از سیمون وی است.

قول دادم به محض رسیدن به دانشگاه این مقاله را برایشان ارسال کنم. وقت رفتن بود. استاد از جای برخاست و حدس مرا تأیید کرد. قد بلندترین ما به شانه اش هم نمی رسید. خداحافظی کردیم. دوستم مرا تا جاده باریک جلوی باغ همراهی کرد و همان جا از هم جدا شدیم. با غریزه آب همراه شدم تا مرا سالم و سلامت به پائین کوه برساند. از بیرون باغ تا دامنه کوه پر بود از درختان بلوط کهنسال. از دور ماشینم را می بینم که بر دامن طبیعت وصله ای ناجور است. کنار تک درخت بلوطی پارکاش کرده بودم. چوپان نازنین با موهائی به رنگ کاکل ذرت هنوز آنجا بود.

چوپان: آقا خیلی دیر کردی. دلواپس شدم. با خودم گفتم بروم، نروم. دیگر غروب شده و از موقع به آغل رفتن گوسفندانم خیلی گذشته.

من: شرمنده ام. مهمان بودم و متوجه گذر زمان نشدم.

از همان اول مرا بخشیده است. دعوت می کند تا در کنار آتش او بنشینم. از قوری دود زده ای برایم چای می ریزد و قوری را باز در کنار هیزم های نیم سوخته جای می دهد. بعد دستمال پراز قصبک خود را می گشاید و تعارفم می کند.

می گوید: به عوض قند.

چون می بیند با کنجکاوئی به گوسفندانمش نگاه می کنم برایم می گوید: آقا این ها خیلی برام عزیزن. آن بزغاله او آخر بهار بدنیا آمد. آن بره سوز^۱ چهار ماهه است. سن همه آنها را می دانم. حتی به یاد می آورم که کجا و چطور به دنیا آمدند. میش هایم هم در بهار و هم در پائیز می زایند. بچه هایشان که به دنیا می آیند راه رفتن سختشان است. با همین توبره به خانه می آورمشان و در اتاق با خودم می خوابند.

شب پرده سیاه خود را پهن کرده است و ستاره ها چون گل های زرین بر آن می درخشند. با مهربانی و به اصرار دعوت می کند تا میهمانش باشم. تشکر می کنم و قول می دهم باز به ملاقاتش آیم. تا کنار ماشین بدرقه ام می کند، رویش را می بوسم و راهی شهر می شوم.

مراجع

- [1] James Robert Brown, *Philosophy of Mathematics, A contemporary introduction to the world of proofs and pictures*, second edition, Routledge, 2008.
- [2] Julian F. Fleron, *A Note on the History of Cantor Set and Cantor Function*, *Mathematics Magazine*, Vol 67, No. 2, (Apr. 1994), pp. 136–140.
- [3] F. Hausdorff, *Mengenlehre*, Zweite Auflage, Berlin-Leipzig, 1927.

(۱) سوز برون حوض. به معنی سبز، اما در میان چوپانان رنگی است میان خاکستری و سبز یا به عبارتی نوعی خاکستری است که به سبز متمایل است.

- [4] I. Kalantari and L. Welch, *A Blend of Methods of Recursion Theory and Topology: Part II*, submitted.
- [5] Problem 1036: Proposed by: R. M. Robinson, University of California, Berkeley. C.A., Amer. Math. Monthly, Vol 101, no 2, Feb(1994).
- [6] کورت گودل، فرضیه پیوستار کانتور چیست؟، ترجمه ضیاء موحد، نشر ریاضی، سال ۲، شماره ۱، فروردین ۱۳۶۸.
- [7] هیو وودین، فرضیه پیوستار، بخش ۱، ترجمه نفیسه کسروی، نشر ریاضی، سال ۱۳، شماره ۲، مهر ۱۳۸۱.

احسان ممتحن

گروه ریاضی، دانشگاه یاسوج

momtahan_e@hotmail.com

حدس بس؟ اجماع پیش رو دربارهٔ اثبات حدس‌های پوانکاره و هندسی‌سازی*

الین جکسون

مترجم: سید محمد باقر کاشانی

آیا حدس پوانکاره^۱ و حدس هندسی‌سازی ترستون^۲ ثابت شده است؟ از زمانی که گریگوری پرلمان^۳ مقاله‌های اکنون مشهور خود را در پایگاه قرارداد، بیش از سه سال است که این سؤال در ذهن ریاضیدانان می‌باشد. در نیمه تابستان ۲۰۰۶، هنگامی که زمان برگزاری کنفرانس بین‌المللی ریاضیدانان در مادرید نزدیک می‌شد و حدس و گمان دربارهٔ مدال‌های فیلدز اذهان را به خود مشغول کرده بود، بعضی از متخصصین که در خلال سه سال گذشته عبارت‌های محتاطانه‌ای (دربارهٔ اثبات‌ها) ارائه می‌دادند به صورت روزافزونی مطمئن می‌شدند که سرانجام حدس‌ها ثابت شده‌اند. به ویژه، بسیاری معتقدند حدس پوانکاره اکنون یک قضیهٔ اصیل است. وضعیت (اثبات) حدس هندسی‌سازی تا اندازه‌ای کمتر واضح است، ولی خوشبینی زیادی وجود دارد که این نتیجه نیز به زودی نهایی می‌شود.

پول و افتخار

برای ریاضیدانان، یک میلیون دلاری که مؤسسه ریاضی کیلی (CMI) برای حل حدس پوانکاره پیشنهاد کرده است صرفاً امری صوری است. جایزهٔ واقعی افتخاری است که از حل مسأله‌ای

*) Conjectures No More? Consensus Forming on the Proof of the Poincaré and Geometrization Conjectures. Notices of the AMS., Vol 53, No 8, Sep 2006, 897-901.

الین جکسون (Allyn Jackson) نویسندهٔ ارشد و جانشین ویراستار مجلهٔ Notices می‌باشد. آدرس الکترونیک او عبارت است از: axj@ams.org

1) Henri Poincaré 2) Thurston 3) Grigory Perelman

که بیش از یک قرن ریاضی‌دانان را به مبارزه می‌طلبید، نصیب می‌شود. این حدس به سال ۱۹۰۴ برمی‌گردد، هنگامی که هانری پوانکاره حدس زد که ویژگی ساده همبند بودن از نظر توپولوژیک، کره سه بُعدی را از سایر خمینه‌های سه بُعدی فشرده متمایز می‌کند. از آن زمان تاکنون تلاش‌های ناموفق زیادی برای اثبات حدس پوانکاره به عمل آمده است، برخی از آن‌ها توسط ریاضیدانان مشهوری مانند ای. موئز^۱، سی. پاپاکیریاکپولوس^۲، وی. پونارو^۳ و سی. رورک^۴ به عمل آمده است. حدود شش ماه قبل از انتشار اولین مقالهٔ پرلمان در شبکهٔ جهانی وب، اثبات نادرستی توسط ام. دان وودی^۵ از دانشگاه ساوتهمپتون در ۲۰۰۲ ارائه شد. تقریباً بلافاصله پس از انتشار خبر اثبات دان وودی (مقاله‌ای در آوریل سال ۲۰۰۲ در نیویورک تایمز چنین سرخطی داشت «ریاضیدان باهوش بریتانیایی ممکن است مسأله را حل کرده باشد»)، این اثبات کنار گذاشته شد.

در حقیقت، آن قدر اثبات‌های نادرست از حدس پوانکاره ارائه شده است که جان استالینگز^۶ از دانشگاه کالیفرنیا، برکلی، مقاله‌ای تحت عنوان «چگونه حدس پوانکاره را ثابت نکنیم» را که در ۱۹۶۶ نوشته بود، در پایگاهش قرار داد و در آن حملهٔ ناموفق خودش (برای اثبات حدس پوانکاره) را به عنوان اختطاری به دیگران توصیف کرد که ممکن است به همان ایده رو آورند. ویژگی مشترک بیشتر تلاش‌های نافرجام تکیه بر بخش‌های صرفاً توپولوژیک است. ولی جان مورگان^۷ از دانشگاه کلمبیا یادآوری کرده است که، «به نظر می‌رسد چنین مسأله‌ای تسلیم آن گونه بحث‌ها نمی‌شود.» او اعلام کرد که برای حل این مسأله به ابزارهایی خارج از توپولوژی یعنی ابزارهایی از هندسه و آنالیز لازم است.

برخلاف تلاش‌های نافرجام متعدد برای اثبات حدس پوانکاره، به نظر می‌رسد، قبل از این که کار پرلمان ظاهر شود، هیچ کس به طور جدی ادعا نکرده بود که می‌تواند حدس کامل هندسی‌سازی ترستن را حل کند. در حقیقت، این حدس خیلی عمیق‌تر و غنی‌تر از حدس پوانکاره است و آن را به عنوان حالت خاصی دربردارد. حدس هندسی‌سازی ابتدا در دههٔ ۱۹۷۰ توسط ویلیام ترستن، که اکنون در دانشگاه کُرئیل است، ارائه شد، این حدس روشی برای رده‌بندی همهٔ خمینه‌های سه بُعدی فراهم می‌کند. تیزبینی قابل تحسین ترستن این بود که توجه کرد که هندسه چگونه می‌تواند برای درک توپولوژی سه خمینه‌ها مورد استفاده واقع شود. حدس هندسی‌سازی می‌گوید که هر سه خمینه می‌توانند به قطعه‌هایی به طور اصولی یکتا تجزیه شوند چنان که هر یک از این قطعه‌ها دارای ساختاری هندسی است که توسط یکی از هشت مدل هندسی داده می‌شود. حدس قبل از کار پرلمان کاملاً باز نبود. این (حدس) در بسیاری از حالت‌ها حل شده بود. ترستن خودش آن را برای خمینه‌هایی که به اندازهٔ کافی جا دارند (تعریف ص ۲۲۸ از [میلنر] را ببینید)، حل کرد. ریاضیدانان متعددی نسبت به حل کامل حدس برای شش مدل از هشت مدل هندسی (ص ۲۲۹ از [میلنر] را ببینید.) تلاش‌های موفقی داشته‌اند. دو مدل هندسی باقی‌مانده عبارتند از مدل‌های کروی و

1) E. Moise 2) C. Papakyriakopoulos 3) V. Poenaru 4) C. Rourke 5) M. Dunwoody

6) John Stallings 7) John Morgan

هذلولوی که متریک‌های آن‌ها به ترتیب دارای خمیدگی‌های ثابت مثبت و منفی است. حدس پوآنکاره در ذیل حالت متریک‌های با خمیدگی ثابت مثبت قرار می‌گیرد (یک بررسی تاریخی عالی [میلنر] است).

باین پیش زمینه، هنگامی که پرلمان مقاله‌هایش را در arXiv قرار داد، اولی را در نوامبر ۲۰۰۲، دومی را در مارس ۲۰۰۳ و سومی را در جولای ۲۰۰۳ [پرلمان ۳-۱]، ریاضیدانان به طور طبیعی بدبین بودند. با وجود این، تلاش‌های او از ابتدا کاملاً جدی گرفته شد. یک دلیل این است که پرلمان ریاضیدان مورد اعتمادی است که قبلاً سهمی برجسته در آنالیز هندسی داشته است. او در کنفرانس بین‌المللی ریاضیدانان، ICM، ۱۹۹۴ در زوریخ سخنران مدعو بود که در بخش هندسه یک سخنرانی دربارهٔ فضاها با خمیدگی دارای کران پائین ارائه داد. در ۱۹۹۶ او برندهٔ یکی از ده جایزه‌ای شد که انجمن ریاضی اروپا به ریاضیدانان جوان برجسته هر چهار سال یک بار اهدا می‌کند (پرلمن از پذیرش آن جایزه خودداری کرد). دلیل دیگری که کار پرلمان جدی گرفته شد این است که کار وی با برنامهٔ کاملاً مشهور برای به کار بردن شارریچی برای اثبات حدس هندسی سازی جور در می‌آمد. آغازگر این برنامه ریچارد همیلتن^۱ است، که اکنون در دانشگاه کلمبیاست و یکی از سخنرانان عمومی در کنفرانس بین‌المللی ریاضیدانان، ICM، ۲۰۰۶، در مادرید خواهد بود. چکیدهٔ سخنرانی همیلتن بیان می‌کند که برنامهٔ شارریچی توسط او و شینگ - تانگ یاو از دانشگاه هاروارد تدوین شده است. این ایده که نخستین بار در یک مقالهٔ همیلتن در سال ۱۹۸۲ [همیلتن] توصیف شد، عبارت است از کاربرد شارریچی، یک معادلهٔ دیفرانسیل جزئی که صورت غیرخطی معادلهٔ حرارت است، برای همگن‌سازی هندسهٔ سه خمینه‌ها به منظور نشان دادن این که درده‌بندی ترستن می‌گنجند. عموماً اعتقاد بر این بود که از نظر فلسفی، رویکرد همیلتن باید به هدف برسد. این باور همچنان که همیلتن و دیگران مقدار زیادی از آنالیز مورد نیاز را فراهم آورند، تقویت می‌شد. سخت‌ترین مانع بررسی تکینگی‌هایی بود که می‌توانست در شارریچی به وجود آید. این مانع بود که پرلمان را بر آن داشت تا، با معرفی ایده‌های عمیق جدید در آنالیز هندسی، پدیدهٔ چنان شگفت‌انگیزی بیافریند. (توصیفی عالی دربارهٔ شارریچی [اندرسن] است).

جذبۀ پرلمان

در بهار سال ۲۰۰۳، پس از آن که مقاله‌های اول و دوم او در پایگاه ظاهر شد، پرلمان سخنرانی‌هایی در دانشگاه‌های مختلف آمریکا، از جمله دانشگاه کلمبیا، موسسهٔ صنعتی ماساچوست، و دانشگاه پرینسون ارائه داد، به علاوه چند سخنرانی در دانشگاه استونی بروک ایراد کرد. پس از این سخنرانی‌ها به زودی او به موطن خود سن پترزبورگ برگشت، و از آن زمان فقط سخنرانی‌های معدودی در این زمینه ارائه داده است. او سؤال‌های ریاضی را با پیغام الکترونیکی پاسخ می‌داد، ولی بعضی از ریاضیدانان گزارش می‌کنند که پس از مدتی حتی این نوع ارتباط را هم متوقف کرده است.

1) Richard Hamilton

روشن نیست که پرلمان از اعلام و تحسین موفقیت‌هایش چه برداشتی کرده است. بسیاری از مقاله‌ها درباره کارهای او در نشریات مشهور چاپ شده است. اگرچه او ظاهراً هرگز مصاحبه‌ای با گزارشگران نکرده است.

وقتی که ریاضیدانان شروع به خواندن دقیق مقاله‌هایش کردند، آن‌ها را سخت و عمیق یافتند. جان لات^۱ از دانشگاه میشیگان می‌گوید «اگر به تعدد زمینه‌های جدیدی که پرلمان در چند صفحه معدود شکافته است، توجه کنیم ملاحظه خواهیم کرد که مقاله‌ها با دقت بسیار زیادی نوشته شده‌اند.» «با وجود این، آن‌ها چنان نوشته نشده‌اند که به آسانی بتوان کامل بودن بحث‌هایش را پذیرفت.» مورگان توجه می‌دهد که پرلمان بعضی از تکنیک‌های ظاهراً استاندارد ولی تا اندازه‌ای ماهرانه را برای این که بتفصیل بررسی شوند، حذف می‌کند. او اعلام می‌دارد که گاهی بحث‌هایی با عباراتی توجیه می‌شود که مشابه بحث‌های پیشین‌اند، ولی همیشه واضح نیست که بحث‌های قبلی دقیقاً چگونه با آنها سازگارند. در رأس این مشکلات، وجود چند اشتباه آشکار در مقاله است، اگرچه هیچکدام جدی نیست. به نظر می‌رسد پرلمان هرگز مقاله‌هایش را برای چاپ به مجله‌ای ارسال نکرده است. اگر او چنین می‌کرد، احتمالاً بدون تجدیدنظر اساسی پذیرفته نمی‌شدند. به محض ظاهر شدن مقاله‌های پرلمان در وبگاه، ریاضیدانان تلاش برای فهم و بررسی آن‌ها را آغاز کردند. در ژوئن ۲۰۰۳، لات همراه با بروس کلاینر^۲ که اکنون در دانشگاه ییل است وبگاهی را ایجاد کردند که در آن همچنان که به دقت در مطالعه مقاله‌های پرلمان پیشرفت می‌کردند، یادداشت‌های خود را درباره آن‌ها ارائه می‌دادند. در اواخر ۲۰۰۳ مؤسسه ریاضی امریکایی در پلوالثو و مؤسسه تحقیقات ریاضی در برکلی به طور مشترک کارگاهی را درباره مقاله اول پرلمان پشتیبانی کردند، کارگاه دیگری، درباره مقاله دوم پرلمان در تابستان ۲۰۰۴ در دانشگاه پرینسون برگزار شد. مؤسسه کیلی، که علاقه آشکاری به اطلاع از صحت کار پرلمان دارد، هزینه کارگاه پرینسون را فراهم کرد، همچنین یک مدرسه تابستانی یک ماهه در تابستان سال ۲۰۰۵ در MSRI برگزار نمود. به علاوه، مؤسسه کیلی از لات و کلاینر که به افزایش و در دسترس قرار دادن یادداشت‌های خود در وبگاه ادامه می‌دادند، و نیز به مورگان و گنگ تیان^۳ از دانشگاه پرینستون که در حال نوشتن کتابی درباره کار پرلمان در زمینه حدس پوانکاره بودند، کمک‌های مالی ارائه نمود.

در ژوئن ۲۰۰۵، جرارد پسون^۴ از دانشگاه گرنوبل یک سخنرانی بورباکی درباره کار پرلمان ارائه داد، که در سری Asterisques، سپتامبر ۲۰۰۶ چاپ خواهد شد. در پاییز ۲۰۰۵، زی - پینگ ژو^۵ از دانشگاه زانگشان یک سری سخنرانی شش ماهه در دانشگاه هاروارد ارائه داد، که در آن محتوای مقاله‌ای که او همراه با اچ - دی کائو^۶ از دانشگاه Lehigh نوشته‌اند و در شماره ژوئن ۲۰۰۶ Asian J. Math. چاپ شده است، توضیح می‌داد. کارگاه‌ها و مدرسه‌های تابستانی دیگری درباره موضوع بجز سخنرانی‌های متعدد در دیپارتمان‌های ریاضی و کنفرانس‌ها، برگزار شده است.

1) John Lott 2) Bruce Kleiner 3) Gang Tian 4) Gérard Besson 5) Xi-Ping Zhu
6) H. D. Cao

گروه‌های مطالعاتی دربارهٔ مقاله‌های پرلمان در کشورهای مختلف از جمله چین، فرانسه، آلمان و امریکا تشکیل شده است. در حالی که به نظر می‌رسد مقاله‌های پرلمان هرگز به معنی معمولی دآوری نشده است، از زمانی که در پایگاه قرار گرفته‌اند به مدت سه سال و نیم زیر بررسی دقیق بوده‌اند. گذشت آسان زمان بدون این که کسی مشکل جدی در کارش بیابد حداقل برای بسیاری از افراد (ریاضیدانان) غیر متخصص، منجر به این حکم شده است که آن‌ها باید درست باشند. مثلاً کوچی فیوجیوارا^۱ از دانشگاه توکیو متخصص این موضوع نیست، ولی او معتقد است و استدلال می‌کند به دو دلیل کار پرلمان باید درست باشد «از نظر فلسفی اگر چیزی غلط بود، چنان که رویکرد (پرلمن) نمی‌توانست صحیح باشد، پس از سه سال یکی باید می‌توانست مشکل فلسفی را بیابد» فرجیوارا اضافه می‌کند که پرلمان یک متخصص کاملاً مشهور در موضوع خمیدگی ریچی است و مقاله‌های قبلی‌اش قابل اعتماد بوده‌اند و اشتباهی در آن‌ها یافت نشده است. البته، این نوع اطمینان ویژه افراد غیر متخصص است. متخصصین باید خیلی سخت تلاش کنند.

تکمیل جزئیات

جان مورگان در مصاحبه‌ای در ماه مه ۲۰۰۶ اعلام کرد «آن‌ها باید به خاطر اثبات حدس پوانکاره به پرلمان مدال فیلدز بدهند»، «من معتقدم بحث درست است، و فکر می‌کنم، همهٔ کسانی که به طور جدی آن را مطالعه کرده‌اند با من هم عقیده باشند. این کار به وضوح هیجان‌انگیزترین مطلبی است که در چهار سال اخیر، از زمانی که مدال‌های فیلدز قبلی اهدا شد، در ریاضیات ظاهر شده است». مورگان همچنین اعلام کرد کتابی که او و تیان در حال نوشتن آن هستند و در اوایل ۲۰۰۷ منتشر می‌شود، یک توصیف کامل از اثبات پرلمان از حدس پوانکاره، ارائه می‌دهد. مورگان اضافه کرد که او شک ندارد که پرلمان می‌تواند حدس هندسی‌سازی را نیز ثابت کند، ولی او شخصاً اثبات آن را به دقت بررسی نکرده است برعکس کاری که برای اثبات حدس پوانکاره انجام داده است.

در واقع، بسیاری از ریاضیدانان اعتماد بیشتری به اثبات حدس پوانکاره دارند تا اثبات هندسی‌سازی. پرلمان خودش راه میان‌بری برای حدس پوانکاره فراهم آورده است، در حالی که به مطالب خیلی گسترده‌تری برای اثبات حدس کامل هندسی‌سازی نیاز است. عده‌ای بر این باورند که بهترین راه برای اطمینان از این که حدس پوانکاره واقعاً ثابت شده است این است که اثبات حدس هندسی‌سازی بررسی شود. بنابراین وضعیت اثبات حدس هندسی‌سازی چگونه است؟

در ماه مه سال ۲۰۰۶، کلاینر و لات مقاله‌ای در arXiv با عنوان «یادداشت‌هایی دربارهٔ مقاله‌های پرلمن» قرار دادند. آن‌ها می‌گویند مقاله‌شان، همراه با مقالهٔ ۲۰۰۵ تألیف تی. شیویا^۲ و تی. یاماگوچی^۳ جزئیات بحث‌های پرلمان برای حدس هندسی‌سازی را فراهم می‌کند. لات هشدار می‌دهد که قبل از این که بتوان حکم پذیرش فراگیر کار پرلمان (دربارهٔ حدس هندسی‌سازی)

1) Koji Fujiwara 2) T. Shioya 3) T. Yamaguchi

را صادر کرد باید کار مورد کنکاش بیشتری توسط جامعه ریاضی قرار گیرد. مقاله کلاینر - لات مبتنی بر مجموعه یادداشتهایی است که آن‌ها از تابستان ۲۰۰۳ در پایگاه اینترنتی قرار می‌دادند. در خلال سه سالی که آن‌ها یادداشت‌ها را تکمیل و عمومی می‌کردند، کلاینر و لات تصحیحات و پیشنهادهایی از بسیاری از ریاضیدانان دریافت کرده‌اند. آن‌ها قصد دارند مقاله‌شان را به یک مجله تسلیم کنند. در اواخر آوریل ۲۰۰۶ مجله آسیایی ریاضی Asian . J. Math. در پایگاهش از چاپ آتی مقاله ژو و کائو با عنوان «یک اثبات کامل از حدس‌های پوانکاره و هندسی‌سازی - کاربردی از نظریه همپلتن - پرلمان از شارریچی» خبر داد. آگهی شامل چکیده مقاله بود، که اعلام کرد: در این مقاله، یک اثبات کامل از حدس‌های پوانکاره و هندسی‌سازی ارائه می‌دهیم. این کار متکی به همه کارهای بسیاری از آنالیز - هندسی‌دان‌ها در خلال سی سال گذشته است. این اثبات باید به عنوان موفقیت کامل نظریه همپلتن - پرلمان از شارریچی در نظر گرفته شود؛ مقاله ۳۳۰ صفحه‌ای که در شماره ژوئن سال ۲۰۰۶ مجله آسیایی چاپ شده در دسترس می‌باشد. مقاله ژو - کائو به صورت یک پیش چاپ در دسترس قرار نگرفت، ولی کار ارائه شده در مقاله در سخنرانی‌های ژو در هاروارد در خلال سال تحصیلی ۲۰۰۶ - ۲۰۰۵ توصیف شد.

عده‌ای به زمان کم بین تاریخ تسلیم مقاله ژو - کائو، دسامبر ۲۰۰۵ و تاریخ پذیرش آن، آوریل ۲۰۰۶ مورد توجه قرار داده‌اند و اظهار نگرانی کرده‌اند که آیا چنین مقاله مهمی با بیش از ۳۰۰ صفحه می‌تواند به صورت جدی در چنین زمان کوتاهی بررسی شده باشد. یائو که یکی از داوران اصلی «مجله آسیایی» است در مصاحبه ماه مه ۲۰۰۶ گفت که مقاله در حدود یک سال در دسترس بوده است و «ما خیلی دقت کرده‌ایم تا قبل از این که مطمئن شویم که همه چیز درست است، آن را چاپ و منتشر نکنیم» - (از یائو) سؤال شد که آیا مقاله به صورت معمولی داوری شده است، یائو گفت که چنین شده است و توجه داد که مجله آسیایی استاندارد خیلی بالایی دارد.

اگرچه زمان کافی بر مقاله ژو - کائو برای این که تحت بررسی دقیق جامعه ریاضی قرار گیرد، سپری نشده است، آن مقاله به خاطر پوشش تبلیغاتی مطبوعات چینی در ژوئن ۲۰۰۶ به طور وسیعی شهرت یافت. سر خط مقاله‌ای در سرویس خبری شین هوا در سوم ژوئن ۲۰۰۶ چنین است «ریاضیدانان چینی معمای سراسری را حل می‌کنند». جمله اول مقاله به این صورت است: «دو ریاضیدان چینی قطعه‌های نهایی حل معمایی که دانشمندان سراسر جهان را برای بیش از یک قرن به خود مشغول کرده بود، در کنار هم قرار دادند».

کائو توجه رسانه‌ها به کار مشترکش با ژو را بیش از حد ارزیابی می‌کند. برخی از مقاله‌های خبری چینی به انگلیسی ترجمه شده و در پایگاه اینترنتی قرار گرفته است. در این مقاله‌ها، موفقیت‌های ژو و کائو که هر دو چینی هستند، مورد تأکید قرار گرفته‌اند، در حالی که موفقیت‌های پرلمان با برجستگی کمتری ذکر شده است. در یک مطلب از خبرگزاری شین هوا که در ۲۱ ژوئن ۲۰۰۶ چاپ شد، حتی نام پرلمان ذکر نشده است. این پوشش خبری پس از آن آغاز شد که یائو

در سوم ژوئن ۲۰۰۶ یک کنفرانس خبری در پکن برگزار کرد و در آن کار ژو و کائو را معرفی کرد. یاو بعداً گفت سخنان او در بعضی از ارزیابی‌های رسانه‌ها نادرست نقل شده و او آنچه در رسانه‌ها گفته شده تأیید نمی‌کند. در بیستم ژوئن ۲۰۰۶، او یک سخنرانی عمومی درباره موضوع در مرکز ریاضی مورنینگ در آکادمی چینی علوم در پکن ارائه کرد، که اسلایدهای آن در پایگاه این مرکز به آدرس <http://www.mcm.ac.cn/Active/yav - new.pdf> موجود است.

تخصیص جوایز

با این همه بازیگر، چه کسی افتخار اثبات این نتایج ماندگار را از آن خود می‌کند؟ این سؤال ساده‌ای نیست. غالباً در ریاضیات افتخار یک نتیجه به کسی داده می‌شود که ایده‌های قاطعی را که باعث موفقیت اثبات می‌شود، ارائه دهد حتی اگر آن شخص هرگز اثبات کامل را ننوشته باشد. به عنوان یک مثال تاریخی، رابین کربای^۱ از دانشگاه کالیفرنیا، برکلی، به قضیه اربیفلد^۲ ترستن اشاره می‌کند. ترستن این نتیجه را با به کار بردن بحثی که کربای آن را «به طور قطعی و فاقد جزئیات» ارزیابی می‌کند، در یک مقاله سال ۱۹۸۲ در بولتن انجمن ریاضی آمریکا توصیف کرد [ترستن]. قضیه اربیفلد حدس هندسی‌سازی را در بر می‌گیرد هنگامی که یک گروه گسسته بر خمینه‌ای سه بعدی با نقاط ثابت عمل کند و این حالت‌های زیادی را پوشش می‌دهد، ولی حدس پوآنکاره را در بر نمی‌گیرد. پس از سپری شدن بیش از دوازده سال بدون یک اثبات کامل، کربای قضیه اربیفلد را به لیست خیلی مشهورش در توپولوژی افزود و اعلام کرد که این قضیه مسأله‌ای باز است. دو گروه مختلف از ریاضیدانان به طور مستقل اثبات‌های کاملی از قضیه ارائه دادند (یک گروه عبارتند از دی. کوپر^۳، سی. هادسن^۴ و اس. کرچهوف^۵ و گروه دوم عبارتند از ام. بویلیو^۶ بی. لیب^۷ و جی. پرتی^۸). کربای گفت «این کار بسیار زیادی بود، بخش‌هایی از مطالب اجمالی ترستن پیشرفت کرد و جامعه کارهایشان را گرامی می‌دارد». ولی قضیه به عنوان قضیه ترستن شناخته می‌شود».

جهان ریاضی منتظر است ببیند آیا پرلمان مدال فیلدز را به خاطر کارش دریافت خواهد کرد؟ قانون سنتی متداول که توسط کمیته مدال فیلدز پیروی می‌شود این است که دریافت کننده در سالی که مدال اهدا می‌شود بیش از چهل سال نداشته باشد. پرلمان در ژوئن سال ۲۰۰۶ چهل ساله می‌شود. بعضی معتقدند حتی بدون در نظر گرفتن حدس‌های پوآنکاره و هندسی‌سازی، پرلمان یقیناً کار کافی انجام داده است که مستحق مدال فیلدز باشد.

مورگان اعلام کرد «آنچه کار پرلمان درباره توسعه تکینی در شارریچی ارائه می‌دهد، پیشرفت عظیمی است که به تنهایی او را به عنوان یک کاندیدای جدی دریافت مدال فیلدز مطرح می‌کند». حدس پوآنکاره یکی از هفت مسأله جایزه‌دار هزاره CMI است، که در سال ۲۰۰۰ اعلام شد.

1) R. Kirby 2) Orbifold 3) D. Cooper 4) C. Hodgson 5) S. Kerckhoff 6) M. Boileau
7) B. Leeb 8) Joan Porti

تا زمان ارائه کار پرلمن، هیچ حل جدی برای هیچ یک از این مسائل ارائه نشده بود، بنابراین هیچ جایزه‌ای هم داده نشده بود. قانون‌های جایزه بیان می‌کند که یک حل ارائه شده باید در یک «مجله داورى شده با اعتبار جهانی» چاپ شود و این که این حل چاپ شده باید دو سال قبل از این که CMI تعلق جایزه به آن را بررسی کند در دسترس باشد. قانون‌ها چنان بیان شده‌اند که لازم نیست شخصی که برای برنده شدن جایزه در نظر گرفته می‌شود، مؤلف حل (مسئله) چاپ شده باشد، جی. کارلسن^۱، رئیس مؤسسه ریاضی کیلی توجه می‌دهد و می‌گوید «این حقیقت که پرلمان یک روش نامعمول را اتخاذ کرده و مقاله‌هایش را در arxiv قرار داده ولی به یک مجله تسلیم نکرده، مانعی برای تعلق جایزه به او نیست».

او گفت در زمان مناسب، مؤسسه کلی تمام مطالب در دسترس را بررسی می‌کند و درباره صحت اثبات حدس پوانکاره قضاوت می‌کند. فقط پس از آن، دادن جایزه انجام می‌شود. سؤالی که مؤسسه کلی با آن مواجه است این است که آیا جایزه را فقط به پرلمان بدهد یا دیگران را هم به عنوان دریافت کننده جایزه مشمول دریافت جایزه نماید - شاید همیلتن؟ کارلسن گفت هنوز برای او زود است که درباره این احتمالات بیندیشد.

ولی بدون شک جهان ریاضی به اندیشیدن و بحث درباره کار فوق‌العاده مهم پرلمان ادامه می‌دهد. یک مطلب واضح است: پرلمان سهم عظیمی نسبت به موضوع دارد. بسیاری از کارهایی که او انجام داده را بدون آن که تسلیم یک مجله نماید، بدون آن که زیاد سخنرانی کند، کاملاً موضوع مورد بحث را که درکش آسان نیست، روشن می‌کند. «پرلمان فردی غیرمعمولی و خیلی تیزهوش است و این روشی است که او انتخاب کرده است.» کارلسن توجه می‌دهد که «من فکر می‌کنم مهمترین مطلب این است که او آن سه مقاله را نوشت و آن‌ها را در arxiv قرار داد، و این که به ریاضیدانان هدیه‌ای بزرگ و ایده‌های جدید زیاد و مطالبی که درباره آن‌ها باید فکر کرد، ارائه داد.»

توضیح مترجم. با توجه به تاریخ چاپ اصل مقاله (سپتامبر ۲۰۰۶) همه مطالب آن، گزارش وضعیت آن زمان حدس (ها) بوده است ولی اکنون که این ترجمه به چاپ می‌رسد بعضی از مطالب آن به منزله بیان تاریخ ریاضیات می‌باشد. از جمله این که اکنون می‌دانیم «حدس پوانکاره» آن زمان به «قضیه پوانکاره» تبدیل شده است.

تشکر. از ویراستار محترم جناب آقای دکتر محمد جلوداری ممقانی به خاطر ویرایش این ترجمه صمیمانه تشکر و قدردانی می‌نمایم.

مراجع

[Anderson] MICHAEL ANDERSON, Geometrization of 3 - manifolds via the Ricci flow, *Notices* 2 (2004), 184 - 93.

1) J. Carlson

- [Besson] GÉRARD BESSON, Preuve de la conjecture de Poincaré en déformant la métrique par la courbure de Ricci, d'après G. Perelman, *Astérisque* **307**, Société Mathématique de France (to appear September 2006).
- [Cao - Zhu] HUAI-DONG CAO and XI-PING ZHU, A complete proof of the Poincaré and Geometrization Conjectures - Application of the Hamilton - Perelman Theory of the Ricci flow, *Asian J. Math.* **10** (2006), 145 - 492.
- [Kleiner - Lott] BRUCE KLEINER and JOHN LOTT, Notes on Perelman's papers, arXiv: math.DG/0605667, 25 May 2006.
- [Hamilton] R. S. HAMILTON, Three - manifolds with positive Ricci curvature, *J. Differential Geom.* **17** (1982), 695 - 729.
- [Milnor] JOHN MILNOR, Towards the Poincaré Conjecture and the classification of 3 - manifolds, *Notices* **10** (2003), 1226 - 33.
- [Perelman 1] G. PERELMAN, The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, <http://arxiv.org/abs/math.DG/0211159>, 11 November 2002.
- [Perelman 2] —, Ricci flow with surgery on three - manifolds. <http://arxiv.org/abs/math.DG/0303109>, 10 March 2003.
- [Perelman 3] —, Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three - manifolds, <http://arxiv.org/abs/math.DG/0307245>, 17 July 2003.
- [Shioya - Yamaguchi] T. SHIOYA and T. YAMAGUCHI, Volume collapsed three - manifolds with a lower curvature bound, *Math. Ann.* **333** (2005), 131 - 55.
- [Thurston] WILLIAM P. THURSTON, Three - dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **6** (1982), 357 - 81.