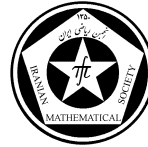


بسم الله الرحمن الرحيم



## فرهنگ و اندیشه ریاضی

ISSN 1022-6443

سال ۳۱، شماره ۲، پاییز ۱۳۹۱

(تاریخ انتشار: پاییز ۱۳۹۱)

شماره پیاپی: ۵۰

صاحب امتیاز: انجمن ریاضی ایران

مدیر مسئول: محمد جلوداری ممقانی

سردبیر: بهمن طباطبائی شوریجه

ویراستار ارشد: روح‌اله جهانی‌پور

مدیر اجرایی: سهیلا غلام آزاد

هیأت تحریریه:

روح‌اله جهانی‌پور، دانشگاه کاشان

رشید زارع نهندی، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم

پایه زنجان

شیوا زمانی، دانشگاه صنعتی شریف

احمد صفاپور، دانشگاه ولیعصر رفسنجان

بهمن طباطبائی شوریجه، دانشگاه شیراز

سهیلا غلام آزاد، پژوهشگاه مطالعات آموزش و

پرورش

منصور معتمدی، دانشگاه شهید چمران اهواز

احسان ممتحن، دانشگاه یاسوج

بامداد یاحقی، دانشگاه گلستان

حروفچینی: فارسی‌تک - دفتر انجمن ریاضی

همکار این شماره: فریده صمدیان

نشانی: تهران - صندوق پستی: ۴۱۸-۱۳۱۴۵

تلفن: ۸۸۸۰۷۷۷۵، ۸۸۸۰۷۷۹۵، ۸۸۸۰۸۸۵۵

iranmath@ims.ir

http://www.ims.ir

فرهنگ و اندیشه ریاضی نشریه علمی - ترویجی انجمن ریاضی ایران است که به چاپ و انتشار مطالبی می‌پردازد که هم جنبه‌های عام و فلسفی ریاضیات را ترویج دهند و هم بازگوکننده فرهنگ و روند ریاضیات حاکم بر جامعه ریاضی باشند. فرهنگ و اندیشه ریاضی از مقالات در زمینه‌های ریاضیات محض، ریاضیات کاربردی، تدریس، یادگیری و آموزش ریاضی، تاریخ و فلسفه ریاضی، علوم کامپیوتر، فیزیک نظری و کاربردهای ریاضیات در علوم دیگر که در چارچوب زیر نوشته شده باشند استقبال می‌کند:

• ارائه موضوعی فعال و مطرح در ریاضیات در قالبی که علاقه‌مندان به زمینه‌های پژوهشی را برای پیگیری موضوع مورد بحث آماده سازد؛

• ترجمه مقاله‌هایی از نوع یاد شده در بالا یا ترجمه مقالات کلاسیک ریاضی (ترجمه آزاد پذیرفته نمی‌شود)؛

• ارائه موضوعات آموزشی حاوی نکات و قضایا و برهان‌هایی ساده‌تر از آنچه در متون کلاسیک موجود است.

علاقه‌مندان می‌توانند سه نسخه از مقاله خود را با شرایط زیر به نشانی دفتر مجله ارسال نمایند:

• متن مقاله روی یک طرف کاغذ، یک خط در میان و با حاشیه کافی تحت ادیتور «فارسی تک» تایپ شود. در صورتی که مقاله فرستاده شده، پس از طی شدن مراحل داوری برای چاپ پذیرفته شود، فایل «اف - تک» مقاله می‌بایست از طریق پست الکترونیکی مجله ارسال شود.

• فرستادن اصل مقاله ترجمه شده همراه با ترجمه آن الزامی است.

• نام و نشان اصل مقاله ترجمه شده باید به صورت پاورقی در صفحه اول ترجمه مقاله ذکر شود.

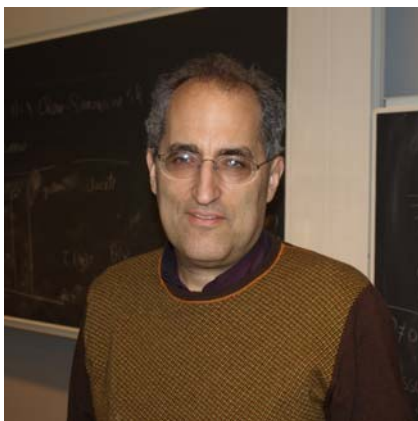
• اصطلاحات ریاضی به کار رفته باید بر طبق واژه‌نامه ریاضی و آمار انجمن ریاضی ایران چاپ مرکز نشر دانشگاهی باشد و اگر لغتی در این واژه‌نامه نیست، معادل انگلیسی آن در پاورقی داده شود.

• مقالات ارسالی به فرهنگ و اندیشه ریاضی نباید برای بررسی و چاپ به مجلات دیگر فرستاده شده باشد.

• مقاله ارسالی باید مشتمل بر نام و نام خانوادگی نویسنده (گان) یا مترجم (ان)، سمت علمی، آدرس کامل پستی و آدرس الکترونیکی باشد.

## فهرست مطالب

هندسه و توپولوژی در بعدهای ۳ و ۴ از دیدگاه نظریهٔ زایبرگ - ویتن (۲)؛	
حامد فرهادپور .....	۸
قضیهٔ پروانه؛	
منصور معتمدی .....	۲۷
نظریهٔ فضاهای برگمن: گذشته، حال و آینده (قسمت اول)؛	
علی آبکار .....	۴۷
شفاف‌سازی تصاویر با استفاده از تجزیهٔ مقادیر تکین و الگوریتم‌های بهینه‌سازی؛	
مازیار صلاحی، حبیبه رمضان نژاد آزارینی .....	۵۹



عکس روی جلد: ادوارد ویتن (Edward Witten)  
مربوط به مقالهٔ اول

- در ابتدای مقاله، چکیده‌ای در حداکثر ۲۰۰ کلمه شامل نکات اصلی بیان شده در مقاله، آورده شود.
- پس از چکیده، واژه‌ها و اصطلاحات کلیدی (حداکثر ۵ تا) مشخص شود.
- رده‌بندی موضوعی اولیه و ثانویهٔ مقاله، بر مبنای رده‌بندی موضوعی انجمن ریاضی آمریکا، ذکر شود.
- اسامی افراد خارجی در متن مقاله باید به صورت فارسی در پاورقی به زبان اصلی نوشته شود.
- به منظور تسریع در ویرایش و چاپ مقالات، اصول سجاوندی، نگارش و ویرایش فارسی را در نوشتن مقالات رعایت فرمائید.
- فهرست مراجع را در انتهای مقاله، به ترتیب حروف الفبای نام خانوادگی افراد تنظیم کنید نه به ترتیبی که در مقاله ارجاع می‌دهید. ضمناً در نوشتن مراجع، قالب زیر را رعایت کنید:
- الف) اگر مرجع ذکر شده، مقالهٔ لاتین است، عنوان مقاله به صورت رومن، نام مجله به صورت ایتالیک، شمارهٔ مجلد آن به صورت سیاه، سال چاپ داخل پرانتز و در انتها، صفحاتی که مقالهٔ مرجع در آنها چاپ شده است، تایپ شود.
- ب) اگر مرجع ذکر شده، کتاب لاتین است، نام کتاب به صورت ایتالیک تایپ شود.
- توجه کنید که تعداد صفحات مقالهٔ ارسالی در قالب صفحه‌بندی مجله، از ۲۵ صفحه نباید بیشتر باشد.
- هیأت تحریریه در رد، قبول، حک و اصلاح مقالات آزاد است.
- فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی امسال در سه شماره (بهار و پاییز و زمستان) منتشر و به اعضای حقیقی، حقوقی و مشترکین انجمن ریاضی ایران ارسال می‌شود.
- علاقه‌مندان به عضویت حقیقی و دانشگاه‌ها، مؤسسات و کتابخانه‌ها که تمایل به عضویت حقوقی یا اشتراک سالانه دارند می‌توانند با دبیرخانهٔ انجمن ریاضی ایران تماس حاصل نمایند.
- شماره‌های قبلی مجله را می‌توانید از دبیرخانهٔ انجمن ریاضی ایران خریداری فرمایید.

# هندسه و توپولوژی در بعدهای ۳ و ۴ از دیدگاه نظریه زایبرگ - ویتن (۲)

حامد فرهادپور

تقدیم به استاد گرامی دکتر احمد شفیعی ده آباد

## چکیده

در این مقاله، به دنبال قسمت اول آن که در شماره قبیل به چاپ رسید، به بیان تاریخچه، کاربردها و چشم‌اندازهای نظریه زایبرگ - ویتن روی خمینه‌های ۳ و ۴ - بعدی می‌پردازیم. به ویژه، تأکید بیشتری بر کارهای خیره‌کننده تاویر در هندسه و توپولوژی خمینه‌های هم‌متافته و سایا یعنی هم‌ارزی ناوردای زایبرگ - ویتن و ناوردای گروموف روی خمینه‌های هم‌متافته و همچنین اثبات انگاره ونشتین توسط وی داریم.

## ۱. متریک‌های اینشتینی

به هر خمینه ریمانی  $(X, g)$  یک عملگر خمیدگی  $R_g$  و به این عملگر، یک تانسور موسوم به تانسور ریچی نظیر می‌شود. در واقع، برای هر  $u, v \in TX$ ،  $Ric_g(u, v) := Trace R_g(u, \cdot, v, \cdot)$ ، اگر  $u \in TX$  یک بردار یکه باشد،  $Ric_g(u, u)$  را با  $Ric_g(u)$  نمایش داده و به آن خمیدگی ریچی  $X$  در راستای بردار  $u$  گویند. متریک ریمانی  $g$  روی خمینه هموار  $X$  را متریک اینشتینی گویند هرگاه  $\lambda \in \mathbb{R}$  یافت شود که  $Ric_g = \lambda g$  و علامت  $\lambda$  را علامت متریک اینشتینی می‌نامند. انحنای ریچی و متریک‌های اینشتینی به طور کاملاً طبیعی در هندسه ریمانی و نظریه گرانش ظاهر می‌شوند و یائو<sup>۱</sup> برای اثبات انگاره کالابی<sup>۲</sup>، به مطالعه آنها در هندسه مختلط پرداخت. بررسی این متریک‌ها

1) S. T. Yau 2) E. Calabi

در بعد ۴ بسیار پیچیده‌تر از دیگر ابعاد است.

همان‌طور که در قسمت قبل این مقاله ذکر شد، پس از پیدایش نظریهٔ زایبرگ - ویتن، پیشرفت‌های جدیدی در زمینهٔ متریک‌های اینشتینی به‌ویژه مسألهٔ وجود ورده‌بندی آن‌ها در بعد ۴ توسط لی برون صورت گرفت. به‌عنوان نمونه، وی در [27] به اثبات قضیهٔ زیر پرداخته است:

قضیهٔ خمینهٔ ۴ - بعدی هذلولوی مختلط بستهٔ  $(X, g_0)$  را در نظر بگیرید. در این صورت هر متریک اینشتینی روی  $X$  با  $g_0$  هموتتیک<sup>۱</sup> است. همچنین توجه کنید که خمینهٔ ریمانی  $(X, g_0)$  را یک خمینهٔ هذلولوی حقیقی گویند هرگاه انحناى مقطعی آن همواره برابر با  $-1$  باشد:  $-1 \equiv K(g_0)$ . همچنین منظور از خمینهٔ هذلولوی مختلط، یک خارج قسمت منظم<sup>۲</sup> از فضای هذلولوی مختلط  $H^n(\mathbb{C}) = \frac{U(n+1)}{U(1) \times U(n)}$  است. علاوه بر این‌ها، لی برون در [26] قضیهٔ عمیق زیر را نیز اثبات کرده است:

قضیه فرض کنید  $X$  یک خمینهٔ ۴ - بعدی هموار با شرط  $b_1^+(X) \geq 2$  باشد و یک ساختار  $\text{Spin}^c$  روی  $X$  مثل  $c = (\rho, S)$  یافت شود چنان‌که  $SW_X(c) \neq 0$ . در این صورت، با قرار دادن  $L := \det(S)$  موارد زیر را داریم:

الف) برای هر متریک  $g$  روی  $X$  داریم

$$\int_X S_g^\vee d\text{vol} \geq 32\pi^2 c_1^+(L)^2.$$

ب) با فرض  $c_1^+(L) \neq 0$  تساوی

$$\int_X S_g^\vee d\text{vol} = 32\pi^2 c_1^+(L)^2$$

برقرار است اگر و تنها اگر ساختار مختلط  $J$  روی  $X$  چنان یافت شود که

• ساختار  $\text{Spin}^c$  القایی از  $J$  همان ساختار فرض قضیه باشد؛

•  $g$  یک متریک با انحناى اسکالر ثابت باشد که با توجه به  $J$  کی‌لری است.

پ) تساوی  $\int_X S_g^\vee d\text{vol} = 32\pi^2 c_1(L)^2$  برقرار است اگر و تنها اگر  $g$  علاوه بر دو شرط قسمت (ب)، اینشتینی نیز باشد.

تذکر  $c_1^+(L)$  تصویر  $c_1(L)$  روی فضای دوفرمی‌های هارمونیک و خود دوگان یعنی  $\mathcal{H}^{\varepsilon,+}(\mathcal{X})$  را نشان می‌دهد.

لی برون در [27] نشان داده است که تعداد زیادی از خمینه‌های هموار ۴ - بعدی دارای متریک

اینشتینی نیستند. مدتی بعد سامبوستی<sup>۱</sup> با پیدا کردن یک مانع برای وجود چنین متریک‌هایی نشان داد که اکثر خمینه‌های ۴-بعدی متریک اینشتینی نمی‌پذیرند [52]. توضیحات بیشتر راجع به این مباحث در [24]، [25]، [26]، [27]، [28] و [51] آمده است.

## ۲. ناوردهای یامابه

در سال ۱۹۶۰ یامابه<sup>۲</sup> در راستای مطالعه متریک‌های اینشتینی به یک ناوردهای دیفرانسیلی روی خمینه‌های ریمانی دست یافت که بعدها توسط کوبایاشی دنبال و به ناوردهای یامابه مشهور گردید. فرض می‌کنیم  $M$  یک خمینه<sup>۳</sup>  $n$ -بعدی ( $n \geq 3$ ) فشرده باشد و تابعگون انحنا اسکالر کلی نرمال شده<sup>۴</sup> را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} \mathfrak{S} : \mathfrak{Met}(M) \rightarrow \mathbb{R} \\ \mathfrak{S}(g) = \text{vol}(g)^{\frac{(n-2)}{2}} \int_M s_g d\text{vol} \end{cases}$$

که در اینجا  $\mathfrak{Met}$  فضای همه متریک‌های ریمانی روی  $M$  را نشان می‌دهد. بسته<sup>۴</sup> نشان داد که متریک‌های اینشتینی روی  $M$  دقیقاً همان نقاط بحرانی تابعگون  $\mathfrak{S}$  هستند [3]. به کمک این تابعگون می‌توان ناوردهای دیفرانسیلی حقیقی - مقدار یامابه را به خمینه<sup>۵</sup>  $M$  وابسته کرد:

$$\mathcal{Y}(M) := \sup_{\Upsilon} \inf_{g \in \Upsilon} \mathfrak{S}(g),$$

که در اینجا  $\sup$  روی همه کلاس‌های هم‌دیس<sup>۵</sup> متریک‌های ریمانی گرفته شده است:

$$\Upsilon = [h] = \{uh | u : M \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}^+\}.$$

پتیان<sup>۶</sup> در سال ۲۰۰۰ نشان داد که اگر  $M$  یک خمینه<sup>۳</sup> ریمانی همبند ساده با بعد حداقل ۵ باشد، آن‌گاه  $\mathcal{Y}(M) \geq 0$  [48]. با کمی تلاش می‌توان ثابت کرد که  $\mathcal{Y}(M) > 0$  اگر و تنها اگر  $M$  دارای متریک با انحنا اسکالر مثبت باشد. بنابراین با توجه به کار پتیان می‌توان گفت در ابعاد بزرگتر یا مساوی ۵ همه<sup>۵</sup> خمینه‌های هموار همبند ساده لزوماً دارای متریک ریمانی با خمیدگی اسکالر مثبت هستند. بعد چهارم، در اینجا نیز ساز مخالف می‌زند. به عنوان نمونه، لی برون در [28] با استفاده از معادلات زایبرگ - ویتن نشان داد که تعداد زیادی از خمینه‌های ۴-بعدی همبند ساده وجود دارند که ناوردهای یامابه<sup>۲</sup> آن‌ها منفی است. علاوه بر این، وی با استفاده از قضایای تاویز در هندسه

1) A. Sumbusetti    2) H. Yamabe    3) Normalized total scalar curvature    4) A. Besse  
5) Conformal    6) J. Petean

هندسه و توپولوژی در بعدهای ۳ و ۴ از دیدگاه نظریهٔ زایبرگ - ویتن (۲) \_\_\_\_\_ ۴

همتافته ثابت کرد که خمینه‌های ۴ - بعدی مانند  $M$  با شرط  $\mathcal{V}(M) < 0$  وجود دارند که دارای فضای پوششی متناهی  $\bar{M}$  با شرط  $\mathcal{V}(\bar{M}) > 0$  می‌باشند.

### ۳. $\bar{\lambda}$ - ناوردهای پرلمان

پرلمان هنگام مطالعاتش روی شار ریچی<sup>۱</sup> به ناوردایی دیفرانسیلی برای خمینه‌های هموار موسوم به  $\bar{\lambda}$  - ناوردا دست یافت. به‌طور دقیق‌تر، فرض کنید که  $X$  یک خمینهٔ هموار فشردهٔ  $n$  - بعدی ( $n \geq 3$ ) باشد. متریک ریمانی  $g$  روی  $X$  را اختیار کرده و عملگر بیضوی  $\Delta_g + S_g$  را در نظر می‌گیریم که در اینجا  $\Delta_g = d^*d$  عملگر لاپلاس - بلترامی<sup>۲</sup> وابسته به  $g$  را نمایش می‌دهد. کمترین مقدار ویژهٔ عملگر  $\Delta_g + S_g$  را با  $\lambda_g$  نمایش می‌دهیم. با کمی زحمت می‌توان نشان داد که  $\lambda_g$  برحسب معادلات ریلی<sup>۳</sup> به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\lambda_g = \inf_u \frac{\int_X (S_g u^2 + 4|\Delta u|^2) d\text{vol}}{\int_X u^2 d\text{vol}},$$

که در اینجا  $\inf$  روی همهٔ توابع حقیقی هموار  $u$  روی  $X$  گرفته شده است. پرلمان نشان داد که کمیت  $\lambda_g v_g^{\frac{1}{n}}$  تحت شارش ریچی پایاست. در اینجا  $v_g$  حجم کلی  $(X, g)$  است. این امر، وی را به تعریف ناوردای دیفرانسیلی زیر موسوم به  $\bar{\lambda}$  - ناوردهای پرلمان رهنمون ساخت:

$$\bar{\lambda} := \sup_g \lambda_g v_g^{\frac{1}{n}},$$

که  $\sup$  روی همهٔ متریک‌های ریمانی هموار  $g$  روی  $X$  گرفته شده است. آکوتاگاوا<sup>۴</sup>، ایشیدا<sup>۵</sup> و لی برون به بررسی ارتباط ناوردهای پرلمان و ناوردهای یامابه پرداخته‌اند و ثابت کردند که: قضیه: فرض کنید  $X$  یک خمینهٔ هموار فشرده  $n$  - بعدی ( $n \geq 3$ ) باشد. در این صورت

$$\bar{\lambda}(X) = \begin{cases} \mathcal{V}(X), & \mathcal{V}(X) \leq 0 \\ +\infty, & \mathcal{V}(X) > 0. \end{cases}$$

### ۴. نظریهٔ زایبرگ - ویتن روی خمینه‌های ۳ - بعدی

کرونهایمر و مروکا علاوه بر اثبات انگارهٔ توم، نظریهٔ زایبرگ - ویتن را بر خمینه‌های ۳ - بعدی اعمال کردند. برای بررسی این نظریه برای خمینهٔ ۳ - بعدی  $M$ ، کافی است به بررسی معادلات

1) Ricci Flow 2) Laplace-Beltrami 3) Raleigh 4) K. Akutagawa 5) M. Ishida

زایبرگ - ویتن روی خمینه‌های ۴ - بعدی  $M \times S^1$  یا  $M \times \mathbb{R}$  پردازیم. آن‌ها همچنین نشان دادند که جواب‌های این معادلات موسوم به تک‌قطبی‌ها را می‌توان به صورت نقاط بحرانی یک تابعگون به نام تابعگون چرن - سایمونز - دیراک تعبیر کرد. این خاصیت که در بعد ۴ روی نمی‌دهد، کرونهاایمر و مروکا را به‌سوی نوعی همولوژی فلور موسوم به زایبرگ - ویتن رهنمون شد. مشابه حالت ۴ - بعدی، آن‌ها به معرفی ناوردهای زایبرگ - ویتن روی خمینه‌های ۳ - بعدی پرداختند. برای خمینه ۳ - بعدی  $M$  این ناوردا به صورت نگاشت  $SW_M : \text{Spin}^c(M) \rightarrow \mathbb{Z}$  تعریف می‌شود. دیری نباید که بسیاری از تحقیقات در توپولوژی در ابعاد پایین به این قسمت معطوف شد. شرح مفصلی از این ماجراها در کتاب [21] آمده است.

## ۵. ناوردهای کسون - والکرو انگاره کرونهاایمر

در سال ۱۹۸۵، کسون<sup>۱</sup> یک ناوردا برای خمینه‌های ۳ - بعدی با همولوژی کروی ارائه داد. شرح جالبی از این مطلب در [53] آمده است. هفت سال بعد، یکی از دانشجویان دکتری وی به نام والکرو<sup>۲</sup> این ناوردا را به خمینه‌های ۳ - بعدی با همولوژی کروی گویا تعمیم داد. حاصل کار را ناوردای کسون - والکرو می‌نامند. همچنین بر اساس کارهای یوهان لیم<sup>۳</sup> برای مطالعه ناوردهای زایبرگ - ویتن، تعریف این ناوردا به همه خمینه‌های ۳ - بعدی قابل توسیع است ([29]). نکته مهمی که در مورد ناوردای زایبرگ - ویتن  $SW_M : \text{Spin}^c(M) \rightarrow \mathbb{Z}$  باید به آن توجه شود، این است که در حالت  $b_1(M) \geq 2$ ، مقدار این ناوردا به ساختار ریمانی خمینه  $M$  و همچنین جمله اختلالی موجود در معادله خمیدگی بستگی ندارد. اما در حالت  $b_1(M) = 0, 1$  ارتباط عمیقی بین ساختار ریمانی روی  $M$  و مقدار ناوردا وجود دارد. در این حالات به کمک فرمول‌های گذراز دیوار<sup>۴</sup>، مقدار ناوردا قابل محاسبه است ([30]).

کرونهاایمر بر اساس محاسبه ناوردای زایبرگ - ویتن و ناوردای کسون برای کلاسی از خمینه‌های ۳ - بعدی با همولوژی کروی موسوم به خمینه‌های بریسکورن<sup>۵</sup>، متوجه مساوی بودن این دو ناوردا در این حالت شد و انگاره خویش را به صورت زیر بیان کرد:

انگاره کرونهاایمر ناوردای زایبرگ - ویتن برای خمینه‌های ۳ - بعدی با همولوژی کروی با ناوردای کسون یکی است.

لیم ([29]) به این انگاره جواب مثبت داد. در واقع، او به کمک ایده‌های تاویز در مورد ارتباط ناوردای کسون با نظریه پیمانها و همچنین کارهای منگ و تاویز در ارتباط با ناوردای

---

1) A. Casson 2) K. Walker 3) Y. Lim 4) Wall-crossing formula 5) Brieskorn

هندسه و توپولوژی در بعدهای ۳ و ۴ از دیدگاه نظریهٔ زایبرگ - ویتن (۲) \_\_\_\_\_ ۶

زایبرگ - ویتن و تاب میلنور [38]، نشان داد که ناوردای زایبرگ - ویتن در دو اصل که ناوردای کسون را به صورت یکتا مشخص می‌کنند، صدق می‌کند. بد نیست توجه کنید که کمی قبل از لیم، ویمین شن<sup>۱</sup> تساوی این دو ناوردا را به پیمانۀ ۲ ارائه داده بود ([6]).

## ۶. فرمول‌های گذر از دیوار

همان‌طور که در قسمت قبل بیان شد، ناوردای زایبرگ - ویتن در حالتی که  $b_1(M) = 0, 1$  باشد به متریک ریمانی روی  $M$  بستگی دارد. مشابه حالت ۴ - بعدی فضای متریک‌های ریمانی روی  $M$  را می‌توان به صورت حجره<sup>۲</sup>هایی افزایش کرد. با گذر از دیوار و رفتن از حجره‌ای به حجره دیگر، مقدار ناوردا تغییر می‌کند. فرمول‌هایی که مقدار این تغییر را به دست می‌دهند به فرمول‌های گذر از دیوار مشهور هستند و به دست آوردن آن‌ها مستلزم استفاده از مفهوم شارش طیفی است. لیم در [30] این فرمول‌ها را در هر دو حالت  $b_1 = 0$  و  $b_1 = 1$  به دست آورده است.

کمی بعد، نیکولاس<sup>۳</sup> با به دست آوردن ناوردای زایبرگ - ویتن برای یک کلاس از خمینه‌های با همولوژی کروی گویا<sup>۴</sup> موسوم به فضاهای عدسی، متوجه شد که مقدار این ناوردا را می‌توان به کمک دو ناوردای کسون - والکر و تاب رایدماستر<sup>۵</sup> به دست آورد ([45]). او درست بودن تعمیم این مطلب به خمینه‌های ۳ - بعدی با همولوژی کروی گویا را به صورت پرسشی مطرح کرد و چندی بعد به اثبات آن پرداخت ([46]). جزئیات بیشتر راجع به این مطالب در [41]، [42] و [43] آمده است. به موازات وی، ماتیلده مارکولی<sup>۶</sup> و بای لینگ ونگ<sup>۷</sup> در [36] به بررسی ارتباط بین ناوردای زایبرگ - ویتن و ناوردای کسون - والکر پرداختند.

## ۷. کاربردها در هندسهٔ سایا

کرونهایمر و مروکا در [22] به تعریف معادلات و ناوردای زایبرگ - ویتن روی خمینه‌های ۴ - بعدی مرزدار و فشرده پرداختند که مرز آن‌ها یک خمینه<sup>۳</sup> - بعدی سایا است. توجه کنید که ناوردای تعریف شده در این حالت، مقادیر خود را در یک گروه همولوژی موسوم به گروه زایبرگ - ویتن فلور همولوژی اتخاذ می‌کند. آن‌ها در این مقاله به بررسی ارتباط بین نظریهٔ زایبرگ - ویتن و کارهای الیاشبرگ<sup>۸</sup> و ترستن در رابطه با ساختارهای سایای تایت<sup>۹</sup> و برگ‌بندی<sup>۱۰</sup>

1) Weimin Chen 2) Chamber 3) Liviu I. Nicolaesco 4) Rational homology sphere  
5) K. Reidemeister 6) Matilde Marcoli 7) Bai-Ling Wang 8) Yakov Eliashberg  
9) Tight 10) Foliation



خمینه‌های سایا و همچنین نرم ترستن و رویه‌های نشانده شده در خمینه‌های ۳- بعدی پرداخته‌اند. به‌عنوان نمونه، یکی از فضایی‌های آن‌ها را بیان می‌کنیم. قبل از آن، توجه کنید که خمینه‌های سایای  $(M, \xi)$  را به‌طور هم‌متافته بردنی گویند هرگاه خمینه‌های هم‌متافته‌ای چون  $(X, \omega)$  و وابریختی  $\varphi: M \rightarrow \partial X$  چنان یافت شود که  $\varphi^*(\omega)|_\xi$  همواره مثبت باشد. کرونهایمر و مروکا با توسعه کارهای تاووز به روی خمینه‌های هم‌متافته مرزدار، قضیه‌ی زیر را ثابت کردند:

قضیه فرض کنید  $M$  یک خمینه‌ی جهت‌دار ۳- بعدی باشد. در این صورت، حداکثر تعداد متناهی کلاس هم‌توپی از ساختارهای سایای روی  $M$  وجود دارد به‌طوری که هر کلاس حداقل دارای یک ساختار سایای به‌طور هم‌متافته بردنی باشد.

لیسکا<sup>۱</sup> و ماتیک<sup>۲</sup> در [32] به‌کمک بررسی خمیدگی عددی روی خمینه‌ی مرزدار  $X$  به محاسبه‌ی ناوردای زایبرگ - ویتن روی  $X$  پرداختند. در واقع، آن‌ها نشان دادند ناوردای زایبرگ - ویتن روی خمینه‌ی ۴- بعدی  $X$  با مرز سایا در دو حالت زیر صفر است:

- یکی از مؤلفه‌های همبندی  $\partial X$  دارای متریک با خمیدگی عددی مثبت باشد.
- $b_4(X) = 0$ .

علاوه بر این، لیسکا به‌کمک نظریه‌ی زایبرگ - ویتن اولین مثال از خمینه‌های سایای ۳- بعدی بدون ساختار به‌طور هم‌متافته بردنی را ارائه داد ([31]).

## ۸. رویه‌های نشانده‌شده در خمینه‌های ۳- بعدی و نرم ترستن

مشابه حالت ۴- بعدی می‌توان مسئله‌ی بررسی رویه‌ها در خمینه‌های ۳- بعدی را نیز مطرح کرد. یکی از ابزارهای مهم در مطالعه‌ی این دسته از مسائل، مفهومی به نام نرم ترستن است ([63]). کرونهایمر و مروکا با استفاده از معادلات زایبرگ - ویتن روی خمینه‌های سایا، کران‌هایی برای نرم ترستن به‌دست آوردند ([23]). قبل از هر چیز، بهتر است به تعریف این نرم پردازیم.

تعریف فرض کنید  $M$  یک خمینه ۳- بعدی فشرده و جهت‌دار باشد و رده‌ی همولوژی  $\sigma \in H_2(M, \mathbb{Z})$  را اختیار کنید. نرم ترستن  $\sigma$  را با  $\|\sigma\|$  نمایش داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|\cdot\| : H_2(M, \mathbb{Z}) \rightarrow [0, +\infty)$$

$$\|\sigma\| := \min_S \left\{ \sum_{S_\alpha} \chi(S_\alpha) - \chi \right\}.$$

در اینجا  $\min$  روی همه‌ی رویه‌های نشانده‌شده در  $M$  که رده‌ی  $\sigma$  را نمایش می‌دهند، گرفته شده است.

$S_\alpha$ ها نیز مؤلفه‌های  $S$  با گونهٔ حداقل یک را نشان می‌دهند. همچنین نرم ترستن دوگان<sup>۱</sup> را روی  $\alpha \in H^2(M, \mathbb{Z})$  با  $\|\alpha\|^*$  نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|\cdot\|^* : H^2(M, \mathbb{Z}) \rightarrow [0, +\infty)$$

$$\|\alpha\|^* := \sup_S \left\{ \frac{\langle \alpha, [S] \rangle}{\chi(S) - \chi} \right\}$$

که در آن،  $\sup$  روی همهٔ رویه‌های  $S$  همبند جهت‌دار نشانده شده در  $M$  گرفته شده است. با استفاده از روش‌های کرونهاایمر و مروکا در اثبات انگارهٔ توم به کمک معادلات زایبرگ - ویتن، نتایج زیر توسط دیوید اکل<sup>۲</sup> به دست آمده است ([2]).

• اگر  $E$  یک کلاف خطی مختلط روی  $M$  باشد و ناورداهای زایبرگ - ویتن متناظر با آن ناصفر باشند، آن‌گاه برای هر  $\sigma \in H_2(M, \mathbb{Z})$  داریم

$$\|\sigma\| \geq \langle c_1(E), \sigma \rangle.$$

حتی می‌توان با شرط ضعیفتری نیز این نتیجه را به دست آورد.

• اگر  $E$  یک کلاف خطی مختلط با پایهٔ  $M$  باشد و معادلات زایبرگ - ویتن متناظر با آن دارای جواب باشند، در این صورت برای هر  $\sigma \in H_2(M, \mathbb{Z})$  داریم

$$\|\sigma\| \geq \langle c_1(E), \sigma \rangle.$$

این کران‌ها نقش مهمی در توپولوژی هندسی به ویژه در مطالعهٔ خمینه‌های سه بعدی با توجه به رویه‌های نشانده شده در آن‌ها بازی می‌کنند. کاربردهایی از این نرم در مراجع مذکور آمده است.

علاوه بر نرم ترستن، نرم دیگری موسوم به نرم الکساندر<sup>۳</sup> نیز روی  $H^2(M, \mathbb{Z})$  قابل تعریف است. مک‌مولن با روش‌های کاملاً هندسی نشان داده است که نرم الکساندر همواره کوچک‌تر از نرم ترستن است. استفان ویدوسی<sup>۴</sup> نیز با توجه به کار تاویز و منگ راجع به ارتباط بین ناوردای زایبرگ - ویتن و تاب میلنور، اثبات دیگری برای این نامساوی ارائه داده است ([44]).

## ۹. تاب میلنور

مفهوم تاب برای یک همبافت سادگی در دههٔ ۳۰ میلادی توسط فرانز<sup>۵</sup> و رایدماستر برای مطالعهٔ فضاهای عدسی معرفی شد. فضاهای عدسی  $L(p, q)$  که با ثابت نگاه‌داشتن  $p$  و تغییر  $q$  به دست می‌آیند، همگی دارای گروه‌های بنیادی و همولوژی یکسان می‌باشند. اگرچه همسانریخت

---

1) Dual Turstun norm   2) D. Auckly   3) Alexander   4) S. Vidussi   5) W. Franz

و حتی هم‌ارز هموتوبی نیستند. به کمک تاب می‌توان فضاهای لنز هم‌ارز هموتوبی ولی غیرهمسانریخت را از هم تمییز داد. علاوه بر این، می‌توان آن‌ها را با تقریب همسانریختی رده‌بندی کرد ([42]). این که تاب واقعاً چیست یا حتی چگونه محاسبه می‌شود، در [42] و [64] آمده است. از دیدگاه جبری، تاب تعمیمی از مفهوم دترمینان است. از دیگر زمینه‌هایی که تاب به‌طور طبیعی و عمده در آن‌ها ظاهر می‌شود، می‌توان به گروه‌های وایتهد و نظریه جبری  $K$  اشاره کرد. شرح مبسوطی از این موارد نیز به قلم میلنور در [39] آمده است. با توجه به این که نوعی از تاب موسوم به  $R$  - تاب یا تاب میلنور را نیز خود وی معرفی کرده است. جالب است بدانیم که منگ و تاویز پرده از ارتباطی عمیق بین تاب میلنور و ناوردای زایبرگ - ویتن روی خمینه‌های ۳ - بعدی برداشتند. در واقع این دو با تعبیری مناسب یکی هستند [38]. این امر توجه توپولوژی‌دان‌ها را دوباره به مفهوم تاب معطوف کرد. به‌ویژه، ولادیمیر تورائف<sup>۱</sup> که از دیرباز نیز به مطالعه ارتباط چندجمله‌ای‌های الکساندر و تاب در نظریه گره پرداخته بود ([64]). دانلدسن نیز به بررسی کارهای منگ و تاویز از دیدگاه نظریه‌های میدان کوانتومی پرداخته است ([8]).

## ۱۰. همولوژی فلور

در نظریه مورس می‌توان با مطالعه نقاط بحرانی توابع مورس روی خمینه‌ها، به نتایج توپولوژیکی دست یافت. مثلاً می‌توان با انتساب یک همبافت زنجیری<sup>۲</sup> به یک تابع مورس و محاسبه گروه‌های همولوژی حاصل، به همان همولوژی معمولی خمینه رسید. دو رویکرد عمده به نظریه مورس وجود دارد. یکی چسباندن دستواره<sup>۳</sup> که در کتاب میلنور آمده است و دیگری مطالعه شار گرادیان تابع مورس. روش اول اگرچه هندسی‌تر است اما قابل توسعه به خمینه‌های باناخ نامتناهی - بُعد نیست، اما روش دوم چنین قابلیت را داراست. حاصل کار را معمولاً نظریه مورس بی‌نهایت بعدی می‌نامند. نابغه جوان، فلور<sup>۴</sup>، برای اثبات انگاره آرنولد و مطالعه نظریه اینستانتون متوجه این امر شد که جواب‌های معادلات اینستانتون در نظریه دانلدسن را می‌توان به صورت نقاط بحرانی یک تابعگون روی فضای حالت تعبیر کرد. این امر، فلور را به خلق اثری ماندگار موسوم به همولوژی فلور روی خمینه‌های همبند ساده رهنمون گردید ([13]).

به دنبال وی، تاویز به بیان نظریه در حالت کلی پرداخت. شرحی از این ماجرا به روایت دانلدسن در [9] آمده است. صرف‌نظر از جزئیات تکنیکی، تقریباً بناکردن همه انواع همولوژی فلور دارای شمای کلی به صورت زیر هستند:

- گام اول: پیش از هر چیز احتیاج به یک فضای توپولوژیک  $S$  از اشبائی است که همولوژی

1) V. G. Turaev 2) Chain Complex 3) Handle Attachment 4) A. Floer

فلور آن‌ها قرار است تعریف شود، به همراه یک رابطهٔ هم‌ارزی روی  $S$  که هر کلاس هم‌ارزی آن، همبند مسیری باشد. همچنین یک کلاف تار  $S \xrightarrow{\Pi} \tilde{S}$  که تارهای آن همگی انقباض‌پذیرند و می‌توانند در صورت لزوم، ساختارهای کمکی را که در تعریف گروه همولوژی نیاز می‌شوند ارائه دهند.

- گام دوم: به عنصر کلی  $X$  در یک کلاس هم‌ارزی در  $S$  و  $\tilde{X} \in \Pi^{-1}(X)$ ، یک همبافت زنجیری آزاد مثل  $(CF_*(\tilde{X}), \partial)$  نسبت داده می‌شود. این همبافت زنجیری به‌طور طبیعی  $\mathbb{Z}/2$  - مدرج است. ولی در برخی موارد دارای یک همبافت  $\mathbb{Z}$  - مدرج نیز هستیم. همولوژی وابسته به این همبافت را همولوژی فلور نامیده و با  $HF_*(\tilde{X})$  نمایش می‌دهیم.
- گام سوم: برای تعریف دیفرانسیل در این همبافت، نیاز به یک جهت سراسری داریم که توسط یک جهت  $O_p$  روی هر مولد  $p$  از همبافت معین می‌شود. تعویض جهت  $O_p$  باعث می‌شود که تمام ضرایب وابسته به  $p$  که در تعریف دیفرانسیل ظاهر شده‌اند، تغییر علامت دهند. این امر باعث می‌شود که همولوژی حاصل، مستقل از انتخاب جهت سراسری باشد. با توجه به این مطلب، اگر همبافت زنجیری را دوباره توسط مولدهای  $(p, O_p)$  با رابطهٔ  $(p, O_p) \sim -(p, O_p)$  تعریف کنیم، می‌توان از انتخاب جهت سراسری نیز صرف‌نظر کرد.

حال فرض کنیم  $X_0$  و  $X_1$  دو شیء هم‌ارز کلی در  $S$  باشند و  $\tilde{X}_i \in \Pi^{-1}(X_i)$  را انتخاب کرده‌ایم و فرض کنید  $\Upsilon := \{X_t | t \in [0, 1]\}$  خمی از اشیاء هم‌ارز در  $\tilde{S}$  باشد که  $X_0$  را به  $X_1$  وصل می‌کند. در این صورت، یک ترفیع نوعی از  $\Upsilon$  در  $\tilde{S}$  مثل  $\tilde{\Upsilon}$  یافت می‌شود که  $\tilde{X}_0$  را به  $\tilde{X}_1$  وصل کرده و یک نگاشت زنجیری به صورت  $CF_*(\tilde{X}_0) \rightarrow CF_*(\tilde{X}_1) : \Phi(\tilde{\Upsilon})$  القا می‌کند که به نگاشت امتداد<sup>۳</sup> موسوم و دارای سه خاصیت زیر است:

هموتوپی: دو خم هموتوپ  $\tilde{\Upsilon}_0$  و  $\tilde{\Upsilon}_1$  با نگاشت‌های زنجیری  $\Phi(\tilde{\Upsilon}_0)$  و  $\Phi(\tilde{\Upsilon}_1)$  یک هموتوپی زنجیری به صورت زیر القا می‌کنند:

$$K : CF_*(\tilde{X}_0) \rightarrow CF_{*+1}(\tilde{X}_1)$$

$$\partial K + K\partial = \Phi(\tilde{\Upsilon}_0) - \Phi(\tilde{\Upsilon}_1)$$

الحاق: اگر انتهای  $\tilde{\Upsilon}_1$  و ابتدای  $\tilde{\Upsilon}_0$  منطبق باشند، آن‌گاه  $\Phi(\tilde{\Upsilon}_0\tilde{\Upsilon}_1)$  با  $\Phi(\tilde{\Upsilon}_0)\Phi(\tilde{\Upsilon}_1)$  هموتوپ زنجیری است.

ثابت: اگر  $\tilde{\Upsilon}$  خم ثابت باشد، آن‌گاه  $\Phi(\tilde{\Upsilon})$  نگاشت همانی است. با توجه به این سه خاصیت، دیده می‌شود که اگر  $X_0$  و  $X_1$  هم‌ارز باشند،  $HF_*(\tilde{X}_0)$  با  $HF_*(\tilde{X}_1)$  یکسان است.

این یکسانی در حالت کلی، طبیعی نیست اما با توجه به انقباض پذیری  $\Pi^{-1}(X)$ ، می توان نشان داد که  $HF_*(\bar{X})$  تنها به  $X$  بستگی دارد. به همین دلیل، معمولاً آن را با  $HF_*(X)$  نمایش می دهند. به عنوان نمونه، می توان از همولوژی های فلور زیر یاد کرد:

- زایبرگ - ویتن فلور همولوژی؛
- هیگارد فلور همولوژی<sup>۱</sup>؛
- فلور همولوژی گرهی<sup>۲</sup>؛
- همولوژی سایای نشانده شده<sup>۳</sup>.

لازم به ذکر است که زایبرگ - ویتن فلور همولوژی در راستای کارهای کرونهاپمر و مروکا، مارکولی و ونگ روی نظریه زایبرگ - ویتن، به وجود آمده است ([21] و [35]). هیگارد فلور همولوژی، توسط اثر وچ و سابو معرفی گردیده است ([47]). همچنین همولوژی سایای نشانده شده را هاجینگ<sup>۴</sup> در راستای کارهای مشترک با سالیوان<sup>۵</sup> معرفی کرده است که در واقع، نسخه ای از همولوژی سایاست ([17]). انجام محاسبات در این سه همولوژی این انگاره را قوت بخشیده است که این سه همولوژی با هم یکسان هستند و بخشی از تحقیقات جاری در توپولوژی با بعدها پایین روی این انگاره متمرکز شده است.

## ۱.۱. همولوژی سایا

همولوژی سایا<sup>۶</sup> در واقع بخشی از شاهکار الباشبرگ، گیونتال<sup>۷</sup> و هافر<sup>۸</sup> یعنی نظریه میدان همتافته<sup>۹</sup> است [12]. در ادامه، فرض کنیم  $(M, \xi)$  نشان دهنده یک خمینه فشرده و جهت پذیر  $M$  با بعد  $2n + 1$  و مجهز به ساختار سایای  $\xi$  است. یکی از مسائل توپولوژی سایا تمییز دادن بین ساختارهای سایای روی خمینه  $M$  است. به طور کلاسیک تعدادی ناوردا به  $\xi$  وابسته می شوند که بیشتر آن ها توپولوژیک هستند. قرار می دهیم

$$\mathcal{T} = \{J : \xi \rightarrow \xi | J^2 = -I, d\alpha(J, J) = d\alpha(., .), d\alpha(., J) > 0\}$$

که  $\alpha$  فرم سایای وابسته به  $\xi$  است.  $\mathcal{T}$  فضای ساختارهای تقریباً مختلط سازگار روی  $\xi$  را نشان می دهد. می توان نشان داد که این فضا ناتهی و انقباض پذیر است. کلاس چرن وابسته به کلاف

1) Heegaard Floer Homology    2) Knot Floer Homology    3) ECH (Embedded Contact Homology)    4) M. Hutchings    5) M. Sullivan    6) Contact Homology    7) Alexander, Givental    8) Helmut H. W. Hofer    9) Symplectic Field Theory

مختلط  $(\xi, J)$  یعنی  $c(\xi)$  یکی از این ناورداهای توپولوژیک است. حال  $T^3$  را اختیار کنید و روی آن ساختارهای سایای  $\xi_n = \ker(\cos n\theta dx + \sin n\theta dy)$  را در نظر بگیرید. به کمک ناورداهای کلاسیک نمی‌توان این ساختارها را از هم تمییز داد. مثلاً کلاس چرن همهٔ این ساختارها متحد با صفر است. این مسأله نیاز به ابزارهای پیشرفته‌تری دارد. مثلاً کاندا<sup>۱</sup> در [18] یکی نبودن این ساختارها را نشان داده است. همولوژی سایا نیز به خوبی از عهدهٔ چنین کارهایی بر می‌آید. برای تعریف همبافت و دیفرانسیل در همولوژی سایا نیاز به مفاهیمی از دینامیک ریب، اندیس کونلی - زندر<sup>۲</sup> و خم‌های تمامریخت در همتافته‌سازی  $M$  و... وجود دارد که شرح آن‌ها در این مقال نمی‌گنجد. خم‌های شبه‌تمامریخت، اول بار توسط گروموف معرفی شده‌اند ([15]). ساخت فضای پیمانهای از این خم‌ها در [49] آمده است. اما بررسی این خم‌ها به علت پیچیدگی رفتار آن‌ها به مدتی بعد موکول شد یعنی تا زمانی که هافر برای اثبات انگارهٔ ونشتین روی  $S^3$  به مطالعهٔ آن‌ها پرداخت ([16]).

به عنوان چند کاربرد از همولوژی سایا، یادآور می‌شویم که آستیلوسکی<sup>۳</sup> در [65] نشان داده است که روی  $S^{4k+1}$  بی‌نهایت ساختار سایای متمایز وجود دارد. همچنین بورخیوس<sup>۴</sup> نشان داد که  $T^5$  و  $T^2 \times S^{2k+1}$  نیز چنین هستند. توجه کنید که محاسبهٔ گروه‌های همولوژی سایا پیچیدگی‌هایی نیز دارد. بورخیوس در رسالهٔ دکتری خود با دیدگاه نظریهٔ مورس - بت<sup>۵</sup> به این مسأله پرداخته است.

## ۱۲. هندسه و توپولوژی همتافته

بعد از این که هندسهٔ همتافته و به معنای توسعه‌یافته‌ترش، هندسهٔ پواسون، نقش خود را در مکانیک کلاسیک و مکانیک کوانتومی و نظریهٔ کوانتش<sup>۶</sup> نشان داد، تحقیقات روی توپولوژی همتافته متمرکز شد. دو سؤال عمده در این زمینه مطرح می‌شود:

۱ - وجود ساختارهای همتافته: آیا یک خمینهٔ هموار مثل  $X$  دارای ساختار همتافته می‌باشد یا نه؟

۲ - یکتایی ساختار همتافته: یک خمینهٔ همتافته مثل  $(X, \omega)$  دارای چند ساختار همتافته دیگر با تقریب همتافتریختی<sup>۷</sup> است؟

سؤال اول بیشتر به نظریهٔ موانع<sup>۸</sup> مربوط می‌شود. مثلاً به‌طور کلاسیک دو مانع توپولوژیک ابتدایی

1) Y. Kanda 2) Conley-Zehnder Index 3) I. Ustilovsky 4) F. Bourgeois 5) Morse-Bott  
6) Quantization 7) Symplectomorphism 8) Obstruction Theory

جهت‌پذیری  $X$  و بدیهی نبودن  $H^2(X, \mathbb{R})$  وجود دارند. در مورد سوال دوم، داریو نشان داده است که از بررسی خواص موضعی  $X$  نمی‌توان ساختارهای هم‌تافته را از هم تمییز داد، چراکه همه ساختارهای هم‌تافته موضعاً یکی هستند. بنابراین برای مطالعه این مسأله، باید به جستجوی حقایق سراسری پردازیم. گروموف، داندلسن، تاویرز، فلور، مک‌داف، سالامون<sup>۱</sup>، تیان<sup>۲</sup> و روان از جمله افرادی هستند که به‌طور عمیق به تحقیق در توپولوژی هم‌تافته پرداخته و دارای اندیشه‌های پیشرو در این زمینه‌اند. تا قبل از سال ۱۹۸۵، به غیر از اثبات انگاره آرنولد در چند حالت خاص، پیشرفت عمده‌ای در این زمینه به‌وجود نیامد تا این‌که در این سال، گروموف با معرفی خم‌های شبه‌تمامریخت<sup>۳</sup>، نوردایی را برای خمینه‌های هم‌تافته معرفی کرد. وی در [15] به معرفی این ناوردا و همچنین تعدادی از کاربردهای آن در توپولوژی هم‌تافته پرداخته است. آنالیز بیضوی از ابزارهای اساسی گروموف در بناکردن این نظریه است. گام اساسی بعدی توسط فلور و در راستای اثبات انگاره آرنولد برداشته شد. متأسفانه مرگ زودهنگام فلور به وی مجال ادامه و تکمیل کارهایش را نداد. اما امروزه کارایی نظریه فلور نه تنها در توپولوژی هم‌تافته بلکه در دیگر زمینه‌ها مانند نظریه پیمان‌ه روی خمینه‌های مرزدار، آشکار گردیده است. نظریه زایبرگ – ویتن روی خمینه‌های هم‌تافته خود حکایت دیگری است. شگرفترین کارها در این زمینه از آن تاویرز است. وی با آنالیز موشکافانه فضای جواب‌های این معادلات، به تعمیم ناوردهای زایبرگ – ویتن و ارتباط آن‌ها با ناوردهای گروموف پرداخته و به نتیجه‌های شگفت‌انگیزی در توپولوژی هم‌تافته دست یافته است. در ادامه، به تعریف نوردای گروموف روی خمینه‌های هم‌تافته می‌پردازیم. خمینه هم‌تافته<sup>۴</sup>  $(X, \omega)$  را در نظر می‌گیریم و یک ساختار تقریباً مختلط  $\omega$  – سازگار روی  $X$  مثل  $J$  انتخاب می‌کنیم و برای هر  $e \in H^2(X, \mathbb{Z})$  قرار می‌دهیم:

$$\mathcal{M}_{Gr}(X, \omega, J, e) := \{\Sigma \mid P.D([\Sigma]) = e \text{ که شبه‌تمامریخت باشد}\}$$

در این صورت، قضیه زیر را داریم که اثبات آن در [86] آمده است.  
قضیه الف) برای یک  $J$  کلی فضای  $\mathcal{M}_{Gr}(X, \omega, J, e)$  یک خمینه هموار با بعد زوج  $2d$  است که

$$2d = -c_1(K_X).e + e.e.$$

ب) برای یک مجموعه  $d$  عضوی کلی از نقاط  $X$  مثل  $\Omega$ ,

$$H_\Omega(e) := \{\Sigma \in \mathcal{M}_{Gr}(X, \omega, J, e) \mid \Omega \subset \Sigma\}$$

مجموعه‌ای متناهی است که به هر نقطه آن عضوی از  $\{\pm 1\}$  نظیر می‌شود.

اکنون آماده‌ایم تا به تعریف ناوردای گروموف بپردازیم.

تعریف فرض کنید  $(X, \omega)$  یک خمینه ۴-بعدی هم‌تافته است. در این صورت، ناوردای گروموف روی  $X$  را با نگاشت  $Gr_X : H^{\vee}(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$  نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bullet (Gr_1) \text{ اگر } d < 0 \text{ قرار می‌دهیم } : Gr_X \equiv 0$$

$\bullet (Gr_2)$  اگر  $d = 0$ ، آن‌گاه برای یک  $J$  نوعی،  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{Gr}(X, \omega, J, e)$  مجموعه‌ای متناهی است که به هر نقطه از آن، عضوی از  $\{\pm 1\}$  نظیر می‌شود. در این حالت قرار می‌دهیم:

$$Gr_X(e) := \sum_{\mathcal{M}} \pm 1;$$

$\bullet (Gr_3)$  اگر  $d > 0$ ، برای یک  $J$  و  $\Omega$  نوعی،  $H_{\Omega}(e)$  یک مجموعه متناهی است و به هر نقطه از آن، عضوی از  $\{\pm 1\}$  نظیر می‌شود. در این حالت قرار می‌دهیم:

$$Gr_X(e) := \sum_{H_{\Omega}(e)} \pm 1.$$

این تعریف با قضیه زیر کامل می‌شود.

قضیه ناوردای  $Gr_X : H^{\vee}(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$  تنها به زوج  $(X, \omega)$  بستگی دارد، یعنی مقدار  $Gr_X$  مستقل از انتخاب ساختار تقریباً مختلط  $J$  و مجموعه  $\Omega$  (در حالت  $d > 0$ ) است که در تعریف آن به کار رفته‌اند. علاوه بر این، اگر  $\{\omega_t | t \in [0, 1]\}$  خانواده‌ای پیوسته از فرم‌های هم‌تافته روی  $X$  باشد، مقادیر  $Gr_X$  در حالات  $\omega_0$  و  $\omega_1$  بر هم منطبق‌اند. همچنین  $Gr_X$  تحت وابریختی‌های  $X$  ناورداست، یعنی اگر  $\varphi : X \rightarrow X$  یک وابریختی باشد، مقدار  $Gr_X(e)$  (تعریف شده به وسیله  $\omega$ ) و مقدار  $Gr_X(\varphi^*e)$  (تعریف شده به وسیله  $\varphi^*\omega$ ) با تقریب علامت برابرند.

اثبات این قضیه و جزئیات بیشتر راجع به ناوردای گروموف، در [15]، [50] و [56] آمده است.

تاویز صورت دیگری از ناوردای گروموف را معرفی کرده است که به ناوردای تاویز - گروموف معروف است ([58]). در ادامه، ناوردای اخیر را نیز با  $Gr_X$  نمایش می‌دهیم. تاویز نشان داده است که ناوردای زایبرگ - ویتن و ناوردای تاویز - گروموف روی خمینه‌های هم‌تافته بر هم منطبق‌اند:

قضیه (تاویز) فرض کنید  $X$  یک خمینه ۴-بعدی هم‌تافته و فشرده با شرط  $b^+ > 1$  باشد. در این صورت،  $SW_X = Gr_X : H^{\vee}(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ .

اثبات این قضیه بسیار طولانی است. در واقع، این قضیه نماد نظریه‌ای است که امروزه به نظریه تاویز روی خمینه‌های هم‌تافته معروف است. بنای این نظریه و اثبات این قضیه



در قالب مقالات [57]، [58]، [59] و [60] آمده است. در واقع، تاویز با در نظر گرفتن معادلات اختلال یافته زایبرگ - ویتن و این فرض که  $\psi_r = (\alpha_r, \beta_r)$ ، جوابی از این معادلات متناظر با پارامتر  $(r \in [1, +\infty))$  باشد، ثابت می‌کند که با میل دادن  $r$  به سمت  $+\infty$ ، مکان هندسی  $(\alpha_r^{-1}(0))$  یک خم شبه تمام ریخت را نمایش می‌دهد که به خم تاویز معروف است.

### ۱۳. چند کاربرد

کارهای عمیق تاویز، نتایج مهمی را نیز به ارمغان آورده است (مراجع [20]، [21] و [44] را ببینید). به عنوان نمونه،

- گروموف و لاوسن نشان دادند که  $m\mathbb{C}P^2 \# n\overline{\mathbb{C}P^2}$  ( $m > n$  یا  $m = n$ ) دارای متریک با خمیدگی عددی مثبت می‌باشد. ولی ویتن در [67] نشان داد که در حالت خمیدگی عددی مثبت، ناوردای زایبرگ - ویتن صفر است. بنابراین می‌توان حکم کرد که ناوردای زایبرگ - ویتن  $m\mathbb{C}P^2 \# n\overline{\mathbb{C}P^2}$  صفر است. پس این خمینه دارای هیچ ساختار هم‌تافته‌ای نیست، زیرا طبق قضایای تاویز، خمینه‌های هم‌تافته دارای ناوردای زایبرگ - ویتن ناصفر هستند. همان‌طور که در قسمت قبل اشاره شد، خمینه‌های با ناوردای زایبرگ - ویتن ناصفر دارای هیچ متریک با خمیدگی عددی مثبت نیستند، پس بنابراین قضایای تاویز، می‌توان حکم کرد که خمینه‌های هم‌تافته نیز دارای چنین متریکی نیستند.

- تاویز برای محاسبه ناوردای زایبرگ - ویتن روی خمینه‌های هم‌تافته نشان می‌دهد که در حالت‌هایی که بعد فضای پیمانه‌ای ناصفر است، ناوردای زایبرگ - ویتن صفر است و این یعنی همه خمینه‌های هم‌تافته، نوع ساده هستند و این خود تأییدی است بر انگاره نوع ساده.

- در دهه هفتاد میلادی، یائو با روش‌های پیشرفته‌ای در هندسه کی‌لری، نشان داد که  $\mathbb{C}P^2$  تنها دارای یک ساختار کی‌لری است ([49])، یعنی این‌که هر ساختار کی‌لری روی  $\mathbb{C}P^2$  با ساختار کی‌لری استاندارد روی آن، یکسان است. گروموف و مک‌داف با استفاده از نظریه خود کوشیدند تا این مطلب را به ساختارهای هم‌تافته تعمیم دهند. اگرچه ایشان موفق به این کار نشدند، اما به محک زیر دست یافتند:

- قضیه (گروموف و مک‌داف) اگر  $\omega$  ساختار هم‌تافته‌ای روی  $\mathbb{C}P^2$  باشد که متناظر با آن، کره هم‌تافته نشانده شده‌ای در  $\mathbb{C}P^2$  وجود داشته باشد، آن گاه  $\omega$  با ساختار هم‌تافته استاندارد یکریخت است ([49]).

- لالونده<sup>۱</sup> و مک‌داف، رده‌بندی مشابهی را برای ساختارهای هممتافته روی رویه‌های خط‌کشی شده<sup>۲</sup> انجام دادند. در واقع، آن‌ها ثابت کردند ([49])  
قضیه فرض کنید  $(X, \omega)$  یک رویهٔ خط‌کشی شده باشد. در این صورت،  $(X, \omega)$  همواره با  $(X, \omega')$  همتافریخت است که در آن  $\omega'$  عضو دلخواهی از  $H^2(X, \mathbb{R})$  است.  
 $(X, \omega)$  را رویهٔ خط‌کشی شده گویند هرگاه فضای تام، یک  $S^2$  - کلاف باشد.
  - تاویز در راستای اثبات  $SW = Gr$  نشان داد که چنین کرهٔ هممتافته‌ای همواره وجود دارد و طبق قضیهٔ گروموف و مک‌داف، می‌توان حکم کرد که همهٔ ساختارهای هممتافته روی  $\mathbb{C}P^2$  با ساختار استاندارد یکرخیخت‌اند.
  - لیو<sup>۲</sup> و لی<sup>۳</sup> نشان دادند که ساختارهای هممتافته روی  $\mathbb{C}P^2 \#_n \overline{\mathbb{C}P^2}$  ( $2 \leq n \leq 9$ ) در حد هم‌ارزی یکی هستند. سؤالی که مطرح می‌شود این است که آیا واقعاً ساختارهای هممتافتهٔ ناهم‌ارز وجود دارند یا نه؟ روآن<sup>۵</sup> وجود چنین ساختارهایی را در بعدهای بالا نشان داده است. اما اولین مثال از چنین ساختارهای ناهم‌ارز روی خمینه‌های ۴ - بعدی هممتافته را مک‌مولن<sup>۶</sup> و تاویز در [37] با استفاده از نظریهٔ زایبرگ - ویتن نشان داده‌اند.
- تذکر دو ساختار هممتافته  $\omega_1$  و  $\omega_2$  روی  $X$  را هم‌ارز گویند هرگاه وابریختی  $\varphi: X \rightarrow X$  موجود باشد که  $\varphi^* \omega_1 = \omega_2$  و خانوادهٔ همواری از فرم‌های هممتافته مثل  $\{\omega_t | t \in [0, 1]\}$  موجود باشد که  $\omega$  را به  $\omega_1$  وصل می‌کند:
- ناوردای گروموف برای همهٔ خمینه‌های هممتافته از بعد دلخواه تعریف شده است و ناوردای زایبرگ - ویتن روی خمینه‌های ۴ - بعدی، با توجه به رابطهٔ  $SW = Gr$  تاویز این پرسش عمیق را مطرح ساخت که تا چه حد می‌توان این دو ناوردا را تعمیم داد، یعنی این‌که آیا ناوردای گروموف را می‌توان روی همهٔ خمینه‌های هموار زوج - بعدی تعریف کرد؟ یا این‌که آیا ناوردای زایبرگ - ویتن در ابعاد بالاتر نیز قابل تعریف است یا نه؟
  - ناصفر بودن ناوردای زایبرگ - ویتن برای خمینه‌های هممتافته این گمان را به وجود آورد که هر خمینه با ناوردای زایبرگ - ویتن ناصفر لزوماً دارای ساختار هممتافته است. کاتشچیک، مورگان و تاویز در [19] با ساختن خمینه‌ای ناهممتافته که ناوردای ناصفر دارد، این گمان را رد کردند.

• روش‌هایی که تاویز در اثبات انگاره ونشتین برای جستجوی مدارهای ریب به کار گرفته است، به‌نوعی نسخه‌ای ۳- بعدی از روش‌های وی برای جستجوی خم‌های تاویزی در بعد ۴ است.

## ۱۴. معادلات زایبرگ - ویتن و انگاره ونشتین

در ادامه، به بیان انگاره ونشتین، تاریخچه، تلاش‌ها و رهیافت‌هایی که در راستای بررسی آن تاکنون صورت گرفته می‌پردازیم. برای شروع، اشاره‌ای کوتاه به انگاره آرنولد خالی از لطف نیست به‌ویژه این‌که در قسمت توپولوژی هم‌تافته نیز از آن یاد کردیم.

بدون اغراق می‌توان گفت دو انگاره بر تاج هندسه هم‌تافته می‌درخشند: اولی انگاره آرنولد و دیگری انگاره ونشتین. این دو انگاره، حدود سه دهه برجسته‌ترین هندسه‌دانان و فیزیک‌دان‌ها را به پژوهش‌هایی عمیق واداشت و پیشرفت‌های بزرگی را در هندسه و فیزیک در پی داشت. انگاره آرنولد در واقع تعمیمی از آخرین قضیه هندسی پوانکاره در رابطه با کران پایین برای تعداد نقاط ثابت هم‌تافریختنی‌هاست. به‌طور دقیق‌تر:

انگاره آرنولد (۱۹۶۶) فرض کنید  $(X, \omega)$  یک خمینه هم‌تافته فشرده  $2n$ - بعدی و  $f : X \rightarrow X$  یک هم‌تافریختنی دقیقاً هم‌توپیک<sup>۱</sup> با نگاشت همانی باشد. در این صورت

$$\text{Card}\{p \in X \mid f(p) = p, \det(f_*p) \neq 0\} \geq \sum_{i=0}^{2n} \dim H^i(X, \mathbb{R}).$$

اگر  $\{h_t : X \rightarrow \mathbb{R}\}_{t \in \mathbb{R}}$  یک خانواده هموار با دوره تناوب یک  $(h_{t+1} = h_t)$  از نگاشت‌های هموار روی  $X$  باشد، میدان برداری وابسته به زمان  $v_t$  تعریف شده با  $dh_t(v_t, \circ) = \omega(v_t, \circ)$  را در نظر گرفته و ایزوتروپی تولید شده توسط آن را با  $\rho : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$  نمایش می‌دهیم. تابع  $f : X \rightarrow X$  را دقیقاً هم‌توپیک با نگاشت همانی گوئیم هرگاه برای چنین خانواده  $h_t$  داشته باشیم  $f = \rho$ .

انگاره آرنولد از اواخر دهه هفتاد میلادی به تدریج شروع به اثبات شد. به‌عنوان چند نمونه از کارهای شاخص می‌توان به کارهای الیاشبرگ، کونلی و زندر، فلور، سیکارو<sup>۲</sup>، ونشتین<sup>۳</sup>، هافر و سالامون و آنوا<sup>۴</sup> اشاره کرد. این انگاره سرانجام در سال ۱۹۹۶ توسط لیو و تیان<sup>۵</sup> اثبات گردید ([33]). سه سال بعد نیز اثبات دیگری توسط فوکایا<sup>۶</sup> و آنوارائه گردید. اثباتی از این انگاره توسط سالامون در [50] آمده است.

---

1) Exactly Homotopic    2) J. C. Sikarov    3) A. Weinstein    4) K. Ono    5) G. Tian  
6) K. Fukaya

برای بیان انگاره و نشیمن و مروری بر کارهای انجام شده برای اثبات آن، به چند تعریف نیاز داریم.  
تعریف. خمینه  $2n + 1$  - بعدی  $M$  را در نظر بگیرید. ۱ - فرمی  $a \in \Omega^1(M)$  را فرم سایا روی  $M$  گویند هرگاه  $a \wedge (da)^n \neq 0$ . در صورت وجود چنین فرمی، زوج  $(M, a)$  خمینه سایا خوانده می شود.

تعریف. فرض کنید  $(M, a)$  یک خمینه سایا و میدان برداری یکتای  $R \in \mathfrak{X}(M)$  با شرط  $i_R da = 0$  تعریف شده باشد.  $R$  را میدان برداری ریب<sup>۱</sup> و خمهای انتگرال بسته آن را مدارهای ریب<sup>۲</sup> می نامند.

برای هر  $p \in M$  هسته تابع  $a$  را با  $\xi_p$  نمایش می دهیم:

$$\xi_p := \{v \in T_p M \mid a_p(v) = 0\}.$$

با توجه به این که فرم  $a$  همه جا ناصفر است،  $\xi_p$  یک زیرفضای برداری  $2n$  - بعدی از  $T_p M$  است. می توان نشان داد  $\xi = \sqcup_{p \in M} \xi_p$  یک زیرکلاف برداری  $TM$  است. کلاف  $\xi$  را ساختار سایا روی  $M$  می نامند. همه خمینه ها لزوماً دارای ساختار سایا نیستند. اما در سال ۱۹۷۱، ژان مارتینه<sup>۳</sup> به کمک جراحی نشان داد که هر خمینه جهت پذیر<sup>۳</sup> - بعدی لزوماً دارای ساختار سایاست. در آن زمان، گمان بر این بود که رده بندی ساختارهای سایا روی خمینه های ۳ - بعدی کار مشکلی نیست، اما گذر زمان نشان داد که این مسأله تا چه اندازه دشوار است حتی در مورد  $S^2$ . شرحی از این ماجراها به قلم الیاشبرگ در [11] آمده است.

حال به بیان تاریخچه انگاره و نشیمن و مروری بر شاخص ترین کارهای انجام شده برای مطالعه آن می پردازیم. در سال ۱۹۵۰، زایفر<sup>۴</sup> سؤالی مطرح کرد: «اگر  $X$  یک میدان برداری همه جا ناصفر روی  $S^2$  باشد، آیا این میدان برداری دارای مدارهای متناوب است؟» در سال ۱۹۶۶، ویلسون<sup>۵</sup> نشان داد که در بعدهای بالاتر یعنی روی  $S^{2n-1}$  ( $n \geq 3$ ) میدان های برداری همه جا ناصفری بدون مدار متناوب وجود دارند. در سال ۱۹۷۴، شویتزر<sup>۶</sup> یک میدان برداری از رده  $C^1$  بدون هیچ مدار متناوبی را به عنوان مثال نقض این سؤال ارائه داد. سرانجام بیست سال بعد، کاپربرگ<sup>۷</sup> مثال نقضی از رده  $C^\infty$  معرفی کرد. سرانجام و نشیمن با توجه به کارهای رایینو<sup>۸</sup> به این نتیجه رسید که برای جستجوی مدارهای متناوب باید به اطلاعات دینامیکی متوسل شد و حدسی را به صورت زیر مطرح کرد ([66]):

انگاره و نشیمن فرض کنید  $(M, a)$  یک خمینه  $2n + 1$  - بعدی بسته، جهت پذیر و سایا باشد.

1) Reeb vector field    2) Reeb Orbit    3) J. Martinet    4) H. Seifert    5) F. W. Wilson  
6) P. A. Shweitzer    7) K. Kuperberg    8) P. Rabinowitz

در این صورت، میدان برداری ریب وابسته به این ساختار سایا دارای حداقل یک مدار متناوب است. اولین گام عمده را کلود ویتربو<sup>۱</sup> برداشت و انگاره را در سال ۱۹۸۷ برای ابررویه‌های  $\mathbb{R}^{2n}$  اثبات کرد. در سال بعد، هافر و ویتربو انگاره را در حالت کلاف کتناژانت اثبات کردند. هافر در سال ۱۹۹۳، پروژه معناداری را با روش‌هایی کاملاً متفاوت نسبت به کارهای قبلی انجام شده، برای اثبات انگاره شروع کرد. به عنوان نمونه، وی توانست با مطالعه خم‌های شبه‌هلمومورف در هم‌تافته شده خمینه ۳- بعدی  $M$ ، به انگاره در سه حالت زیر پاسخ دهد ([16]):

- $M = S^3$  این که  $M$  توسط  $S^3$  پوشیده شود؛
- $\Pi_2(M) \neq 0$  دومین گروه بنیادی  $M$  را نشان می‌دهد؛
- وقتی ساختار سایا فراتابیده<sup>۲</sup> باشد.

در سال ۱۹۹۶، ویمین شن انگاره را در حالت ابررویه‌های سایا در یک خمینه ۴- بعدی هم‌تافته اثبات نمود ([6]). لازم به ذکر است که وی از قضایای وجودی تاویز در مورد خم‌های شبه‌تمامریخت سود برده است.

تعریف فرض کنید  $(M, \xi)$  یک خمینه ۳- بعدی سایا باشد. در این صورت، ساختار سایای  $\xi$  را فراتابیده گویند هرگاه دیسک نشانده‌شده‌ای در  $M$  مثل  $D$  چنان یافت شود که

$$\bullet T(\partial D) \subset \xi|_{(\partial D)}$$

- برای هر  $p \in \partial D$  داشته باشیم  $T_p \not\subset \xi_p$ .

ساختار سایای  $\xi$  را تایت گویند هرگاه فراتابیده نباشد.

در مقاله عمیق [10]، الیاشبرگ همه ساختارهای فراتابیده را رده‌بندی کرد و نشان داد که این رده‌بندی اساساً یک مسأله نظریه هموتوپی است. علاوه بر این، وی نشان داد که  $S^3$  تنها دارای یک ساختار تایت و تعداد شمارایی ساختار فراتابیده است. ساختارهای تایت روی  $\mathbb{R}^3$  را نیز الیاشبرگ رده‌بندی کرده است. مسأله رده‌بندی ساختارهای تایت هنوز باز است. در سال ۲۰۰۵، قسیم عباس<sup>۳</sup> و کایلپاک<sup>۴</sup> و هافر به معرفی یک دستگاه معادلات دیفرانسیل پاره‌ای روی خمینه  $M$  پرداختند و نشان دادند که انگاره ونشتین درست است اگر و تنها اگر این دستگاه دارای جواب ثابت نباشد. آن‌ها همچنین این انگاره را برای نوعی از ساختارهای سایا موسوم به ساختار سایای تخت<sup>۵</sup> اثبات کردند ([1]).

---

1) C. Viterbo 2) Over twisted 3) Cassim. Abbas 4) K. Ceilieback 5) Planar contact structure

در همان سال، گی<sup>۱</sup>، انگاره را در مورد خمینه‌های سه بعدی با تاب غیرصفر به مفهوم گیراکس<sup>۲</sup> اثبات کرد ([14]). تلاش دیگری نیز توسط کالین<sup>۳</sup> و هوندا<sup>۴</sup> صورت گرفت ([5]). سرانجام، در اکتبر ۲۰۰۶، تاویز با ارائهٔ مقاله [61] با عنوان

“The Seiberg-Witten equations and the Weinstein conjecture”

به این انگاره روی خمینه‌های سه بعدی در کلی‌ترین حالت، پاسخ داد. از آنجا که وی از معادلات زایبرگ - ویتن برای جستجوی خم‌های انتگرال یک میدان برداری استفاده کرده است، می‌توان به زبان ساده کار وی را استفاده از معادلات دیفرانسیل پاره‌ای برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی نامید.

در ادامهٔ مطلب، فرض می‌کنیم که  $(M, a)$  یک خمینهٔ ۳-بعدی مجهز به فرم سایای  $a$  باشد و کلاف برداری تعریف شده توسط  $Ker(a)$  را با  $K^{-1}$  نشان می‌دهیم. تاویز در مقالهٔ اخیر خود، نشان داده است که روی خمینه‌های سایای فشرده، مدارهای ریب بسته، به وفور یافت می‌شوند. قضیهٔ اساسی زیر گویای این مطلب است.

قضیه (تاویز) ردهٔ همولوژی  $H^2(M, \mathbb{Z})$  را به گونه‌ای تثبیت کنید که  $e - \frac{c_1(K)}{4}$  تابدار باشد. در این صورت، یک مجموعهٔ ناتهی از مدارهای ریب بسته مثل  $\mathcal{R}(e)$  و نگاشت  $n_e : \mathcal{R}(e) \rightarrow \mathbb{Z}$  به گونه‌ای وجود دارند که مجموع وزن دار صوری این مدارها با ضرایب مربوطه، دوگان پوانکارهٔ  $e$  را در  $H_1(M, \mathbb{Z})$  نمایش می‌دهد:

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{R}(e)} n_e(\gamma)\gamma = P.D(e)$$

که  $P.D : H^2(M, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(M, \mathbb{Z})$  نشان دهندهٔ دوگان پوانکاره است.

تاویز صورت دیگری از این قضیه را که در آن  $e - \frac{c_1(K)}{4}$  تابدار نیست، در مقالهٔ بعدی خود اثبات کرده است ([62]). همچنین لازم به ذکر است که تاویز در راستای اثبات انگارهٔ ونشتین، گام عمده‌ای نیز در زمینهٔ اثبات یکی بودن زایبرگ - ویتن - فلور همولوژی و همولوژی سایای نشانده شده برداشته است. اگرچه تاویز برای رسیدن از تک‌قطبی‌ها به مدارهای ریب، راه پر پیچ و خمی را پیموده است، اما به طور کلی می‌توان گفت وی برای اثبات قضیهٔ اخیر از ابزارهای زیر استفاده کرده است:

- معادلات زایبرگ - ویتن روی خمینه‌های سایا؛
- شارش طیفی؛

---

1) D. Gay 2) E. Giroux 3) V. Colin 4) K. Honda

- نظریهٔ فردهولم؛
- زایبرگ - ویتن - فلور همولوژی سایا؛
- روش‌های تقریب توماس پارکر<sup>۱</sup> در هسته‌های گرمایی<sup>۲</sup>؛
- معادلات ورتکس<sup>۳</sup>.

## مراجع

- [1] C. Abbas, K. Cieliebak and H. Hofer, *The Weinstein conjecture for planar contact structures in dimension three*, preprint arXiv:math.SG/0409355v2, March 2005.
- [2] D. Auckley, "The Thurston norm and three-dimensional Seiberg-Witten theory", *Osaka J. Math.*, **33**(1996), 737-750.
- [3] A. Besse, *Einstein Manifolds, Ergebnisse der Mathematik und ihrer*, Springer-Verlag, 1987.
- [4] F. Bourgeois, *A Morse-Bott approach to contact homology*, Ph.D. thesis, Stanford University, 2002.
- [5] V. Colin and K. Honda, "Reeb vector fields and open book decompositions I: the periodic case", preprint, 2005.
- [6] W. Chen, "Casson's invariant and Seiberg-Witten gauge theory", *Turk. J. Math.* **21**(1997), 61-81.
- [7] W. Chen, "Pseudo-holomorphic curves and the Weinstein conjecture", *Comm. Anal. Geom.*, **8**(2000), 115-131.
- [8] S. K. Donaldson, "Topological field theories and formulae of Casson and Meng-Taubes", In: Proceedings of the Kirbyfest (Berkeley, CA, 1998), *Geom. Topol. Monogr.*, **2**, Geom.Topol., Coventry, 1999, 87-102 (electronic).
- [9] S. K. Donaldson. *Floer homology groups in Yang-Mills theory*, Volume 147 of Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 2002. With the assistance of M. Furuta and D. Kotschick.

---

1) T. H. Parker    2) Heat kernels    3) Vortex

- [10] Y. Eliashberg, "Classification of overtwisted contact structures on 3-manifolds", *Invent. Math.*, **98**(1989), 623-637.
- [11] Y. Eliashberg, "Contact 3-manifolds twenty years since J. Martinet's work", *Ann. Inst. Fourier*, **42**(1992), 165-192.
- [12] Y. Eliashberg, A. Givental and H. Hofer, "Introduction to symplectic field theory", *Geom. Funct. Anal.*, Special Volume, Part II (2000), 560-673.
- [13] A. Floer, "An instanton invariant for 3-manifolds", *Comm. Math. Phys.*, **118** (1988), 215-240.
- [14] D. Gay, "Four dimensional symplectic cobordisms containing three handles", *Geometry and Topology*, **10**(2006), 1749-1759.
- [15] M. Gromov, "Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds", *Invent. Math.*, **82**(1985), 307-347.
- [16] H. Hofer, "Pseudo-holomorphic curves in symplectizations with applications to the Weinstein conjecture in dimension three", *Invent. Math.*, **114**(1993), 515-563.
- [17] J. M. Hutchings and M. Sullivan, "Rounding corners of polygons and embedded contact homology", *Geometry and Topology*, **10**(2006), 169-266.
- [18] Y. Kanda, "The classification of tight contact structures on the 3-torus", *Comm. Anal. Geom.*, **5**(1997), 413-438.
- [19] D. Kotschick, J. W. Morgan, C. H. Taubes, "Four-manifolds without symplectic structures but with non-trivial Seiberg-Witten invariants", *Math. Res. Lett.*, **2**(1995), 119-124
- [20] D. Kotschick. "The Seiberg-Witten invariants of symplectic four-manifold (after C. H. Taubes)", *Seminaire Bourbaki*, Vol. 1995/96, 195-220.
- [21] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka, *Monopoles and Three-Manifolds*, Cambridge University Press, 2007.
- [22] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka. "Monopoles and contact structures". *Invent. Math.*, **130**(1997), 209-255.



- [23] P. B. Kronheimer, T. S. Mrowka, "Scalar curvature and the Thurston norm", *Math. Res. Lett.*, **4**(1997), 931-937.
- [24] C. LeBrun, "On the scalar curvature of complex surfaces", *Geom. Funct. Anal.*, **5:3**(1995), 619-628.
- [25] C. LeBrun, "Einstein metrics and Mostow rigidity", *Math. Res. Lett.*, **2**(1995), 1-8.
- [26] C. LeBrun, "Polarized 4-manifolds, extremal kahler metrics, and Seiberg-Witten theory", *Math. Res. Lett.*, **2**(1995), 653-662.
- [27] C. LeBrun, "Four-manifolds without Einstein metrics", *Math. Res. Lett.*, **2**(1996), 133-147.
- [28] C. LeBrun, "Yamabe constants and the Seiberg-witten perturbed equations", *Comm. An. Geom.*, **5**(1997), 535-553.
- [29] Y. Lim, "The equivalence of Seiberg-Witten and Casson invariants for homology 3-spheres", *Math. Res. Lett.*, **6**(1999), 631- 643.
- [30] Y. Lim, "Seiberg-Witten invariants for 3-manifolds in the case  $b_1 = 0$  or  $1$ ", *Pac. J. Math.*, **195**(2000), 179-204.
- [31] P. Lisca, "Symplectic Fillings and positive scalar curvature", *Geometry and Topology*, **2**(1998), 103-116.
- [32] P. Lisca and G. Matic, "Tight contact structures and Seiberg-Witten invariants", *Invent. Math.*, **129**(1997), 509-525.
- [33] G. Liu and G. Tian, "Floer homology and Arnold conjecture", *J. Diff. Geom.*, **49**(1998), 1-7.
- [34] M. Marcolli, *Seiberg-Witten gauge theory*, Texts and Readings in Math. vol. 17, Hindustan Book Agency, New Delhi, 1999.
- [35] M. Marcolli and B.L.Wang, "Equivariant Seiberg-Witten Floer homology", *Comm. Anal. Geom.*, **9**(2001), 451-639.
- [36] M. Marcolli and B. L. Wang, "Seiberg-Witten and Casson-Walker invariants for rational, homology 3-spheres", *Geom. Dedicata*, **91**(2002), 45-58.

- [37] C. McMullen and C.H. Taubes, "4-manifolds with inequivalent symplectic form and 3-manifolds with inequivalent fibrations", *Math. Res. Lett.*, **6**(1999), 681-696.
- [38] G. Meng and C. H. Taubes, "SW=Milnor torsion", *Math. Res. Lett.*, **3**(1996), 661-674.
- [39] J. W. Milnor, "Whitehead torsion", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **72**(1966), 358-428
- [40] T. S. Mrowka, P. Ozsvath and B. Yu. "Seiberg-Witten monopoles on Seifert fibered spaces", *Comm. Anal. Geom.*, **5**(4)(1997), 685-791.
- [41] L. I. Nicolaescu, "Seiberg-Witten invariants of 3-manifolds (Part 1)", unpublished notes, <http://www.nd.edu/~lnicolae/>.
- [42] L. I. Nicolaescu, *The Reidemeister torsion of 3-manifolds*, de Gruyter Studies in Mathematics, vol. 30, Walter de Gruyter, Berlin, 2003.
- [43] L. I. Nicolaescu, "Adiabatic limits of the Seiberg-Witten equations on Seifert manifolds", *Comm. Anal. Geom.*, **6**(1998), 331-392.
- [44] L. I. Nicolaescu, *Notes on Seiberg-Witten Theory*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 28, Amer. Math. Soc., 2000.
- [45] L. I. Nicolaescu, "Seiberg-Witten theoretic invariants of lens spaces", arXiv : math., DG/9901071.
- [46] L. I. Nicolaescu, "Seiberg-Witten invariants of rational homology spheres", arXiv : math., GT/0103020.
- [47] P. S. Ozsvath and Z. Szabo, *Lectures on Heegaard Floer homology*, Floer Homology, Gauge Theory and Low Dimensional Topology, Clay Mathematics Proceedings(2006), 29-70.
- [48] J. Petean, "The Yamabe invariant of simply connected manifolds", *J. Reine Angew. Math.*, **523**(2000), 225-231.
- [49] D. A. Salamon, *Spin geometry and Seiberg-Witten invariants*, to appear in Birkhauser-Verlag.

- [50] D. A. Salamon, *Lecture notes on Floer homology*, in "Symplectic Geometry and Topology", IAS/Park City Mathematics Series, 7(1999), 143-229.
- [51] A. Sambusetti, *Einstein manifolds, volume rigidity and Seiberg Witten theory*, Seminaire de theorie spectrale et geometrie, Grenoble, Volume 17(1999), 163-184.
- [52] A. Sambusetti, "An obstruction to the existence of Einstein metrics on 4-manifolds", *Math. Ann.*, **311**(1998), 533-548.
- [53] N. Saveliev, *Lectures on the topology of 3-manifolds*. De Gruyter Textbook, Walter de Gruyter, Berlin, 1999.
- [54] C. H. Taubes, "The Seiberg-Witten invariants and symplectic forms," *Math. Res. Letters*, **1**(1994), 809-822.
- [55] C. H. Taubes, "More constraints on symplectic forms from Seiberg-Witten invariants," *Math. Res. Letters*, **2**(1995), 9-13.
- [56] C. H. Taubes, "The Seiberg-Witten and the Gromov invariants," *Math. Res. Lett.*, **2**(1995), 221-238.
- [57] C. H. Taubes, "SW  $\Rightarrow$  Gr: from the Seiberg-Witten equations to pseudo holomorphic curves", *J. Amer. Math. Soc.*, **9**(1996), 845-918.
- [58] C. H. Taubes, "Counting pseudo-holomorphic submanifolds in dimension 4", *J. Diff. Geom.*, **44**(1996), 819-893.
- [59] C. H. Taubes, "Gr  $\Rightarrow$  SW: from pseudo-holomorphic curves to Seiberg-Witten solutions", *J. Diff. Geom.*, **51**(1999), 203-334.
- [60] C. H. Taubes, "Gr = SW : Counting curves and connections", *J. Diff. Geom.*, **52** (1999), 453-609.
- [61] C. H. Taubes, "The Seiberg-Witten equations and the Weinstein conjecture", *Geometry and Topology*, **11**(2007), 2117-2202.
- [62] C. H. Taubes, "The Seiberg-Witten equations and the Weinstein conjecture II: More closed integral curves for the Reeb vector field", Preprint(2007), arxiv: math/0702366 V2.

- [63] W. Thurston, "A norm for the homology of 3-manifolds", *Mem. Amer. Math. Soc.*, **59**(1986), no. 339, 99-130.
- [64] V. G. Turaev, *Introduction to combinatorial torsions*, Lectures in Mathematics, ETH Zurich, Birkhauser, 2001.
- [65] I. Ustilovsky, "Infinitely many contact structures on  $S^{2m+1}$ ", *Int. Math. Res. Notices*, **14**(1999), 781-792.
- [66] A. Weinstein, "On the hypotheses of Rabinowitz's orbit theorems", *J. Diff. Eqs.*, **33**(1979), 353-358.
- [67] E. Witten, "Monopoles and four-manifolds", *Math. Res. Letters*, **1**(1994), 769-796.

---

حامد فرهادپور

پژوهشگاه دانشهای بنیادی، پژوهشکده ریاضیات

hfarhadpour@ipm.ir

## قضیه پروانه

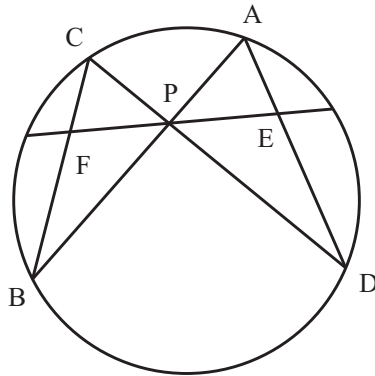
منصور معتمدی

به پاس ایام تحصیل در شیراز  
و آنچه از آن به یاد ماند ...

### ۱. مقدمه

ویلیام هرشل<sup>۱</sup> ستاره‌شناس معروف و کاشف سیاره اورانوس در نامه‌ای که در تاریخ هفتم آوریل سال ۱۸۰۵ به ویلیام والاس<sup>۲</sup> نوشت [۹]، خواستار حل مسأله زیر شد:

از نقطه  $P$  وسط وتر یک دایره، دو وتر  $AB$  و  $CD$  رسم می‌شوند. اگر  $AD$  و  $BC$  این وتر را به ترتیب در نقاط  $E$  و  $F$  قطع کنند، ثابت کنید  $PE = PF$ .



شکل ۱

---

1) William Hershel 2) William Wallace

ظاهراً نخستین حل مکتوب و مستند این مسأله از آن ویلیام والاس است [۹]. ده سال بعد، همین مسأله با شماره ۱۰۲۹ در یک نشریه روزانه از انتشارات دانشگاه کمبریج چاپ شد. یکی از نخستین حل‌کنندگان آن، هورنر<sup>۱</sup> است که به خاطر ابداع روش تقریبی یافتن ریشه‌های چندجمله‌ای‌ها شهرت دارد. برخی عقیده دارند که یک چینی در این مورد بر هورنر مقدم بوده است [۲ ص. ۶۲].

در صفحه ۷۸ مرجع [۱۱]، قضیه کلی‌تری اثبات شده که قضیه پروانه نتیجه‌ای از آن است. مؤلف در پانوش آن صفحه اشاره می‌کند که قضیه کلی‌تر توسط مکی [۱۴] اثبات و در سال ۱۸۸۴ در نشریه انجمن ریاضی ادینبورو چاپ شده است. این مسأله در دهه‌های ۲۰ و ۳۰ میلادی توجه بسیاری از علاقه‌مندان حل مسأله را به خود جلب کرد و بار دیگر در سال ۱۹۴۳ بار دیگر در بخش مسائل مقدماتی ماهنامه آمریکایی ریاضیات با شماره E571، مطرح گردیده است. در شماره فوریه سال ۱۹۴۴ همان ماهنامه، پنج راه حل مختلف برای این مسأله ارائه شد و از آن پس، با نام «قضیه پروانه» شناخته می‌شود. کلامکین<sup>۲</sup> حدس زده بود که قضیه پروانه می‌تواند به بیضی نیز تعمیم یابد. وی در سال ۱۹۶۹، به‌طور مشترک با چاکاریان و سالی [۸] این حدس را اثبات کرد. ایوز [۱۰] اثباتی با استفاده از مفهوم قطب و قطبی برای این قضیه ارائه داده و آن را برای مقاطع مخروطی نیز اثبات کرده است. اینک اثبات‌های گوناگونی برای این قضیه وجود دارد که در برخی از آن‌ها از هندسه مقدماتی یا تصویری استفاده می‌شود و در برخی دیگر، از هندسه تحلیلی و اعداد مختلط. تعمیم‌های مختلف این قضیه نیز قابل توجه‌اند که بعضی به پیدایش مفاهیم جدید منتهی شده‌اند. هدف این نوشتار، ارائه برخی از اثبات‌ها و تعمیم‌های این قضیه است.

## ۲. پیشیناز

در این بخش، به یادآوری بعضی مطالب مورد نیاز، به‌ویژه در هندسه تصویری می‌پردازیم. یک کشف اساسی در هندسه تصویری این است که اگر چهار نقطه  $A, B, C, D$  بر یک خط راست باشند و این چهار نقطه را مطابق شکل ۳ با استفاده از نگاهت تصویر به مرکز یک نقطه خارج از خط گذرنده از نقاط  $A, B, C$  و  $D$  به نقاط  $A', B', C', D'$  روی خط دیگری تصویر کنیم، آن‌گاه کمیت خاصی به نام نسبت ناهمساز این چهار نقطه وجود دارد که مقدارش تحت عمل تصویر، ناورد است. بدین ترتیب با یک ویژگی مربوط به مجموعه‌ای از چهار نقطه بر یک خط راست روبه‌رو هستیم. نسبت ناهمساز نه یک طول است، نه نسبت دو طول، بلکه نسبت دو تا از این گونه نسبت‌هاست.

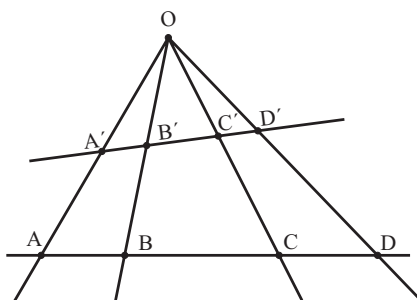
1) Horner 2) Murry Kelamkin



شکل ۲

اگر نسبت‌های  $\frac{CA}{CB}$  و  $\frac{DA}{DB}$  را در نظر بگیریم، نسبت آن‌ها  $(ABCD) = \frac{CA}{CB} / \frac{DA}{DB}$  بنا به تعریف، نسبت ناهمسان‌چهار نقطه  $A, B, C, D$  است که به همین ترتیب در نظر گرفته می‌شوند. جهتی را روی خط به‌عنوان جهت مثبت در نظر گرفته و توافق می‌کنیم که طول‌های اندازه‌گیری شده در این جهت مثبت و در جهت مخالف، منفی باشند. اکنون نشان می‌دهیم که نسبت ناهمسان‌چهار نقطه تحت عمل تصویر ناورداست، یعنی اگر  $A, B, C, D$  و  $A', B', C', D'$  نقاط متناظر روی دو خط باشند که با عمل تصویر به هم مربوط شده‌اند، آن‌گاه

$$\frac{CA}{CB} / \frac{DA}{DB} = \frac{C'A'}{C'B'} / \frac{D'A'}{D'B'}$$



شکل ۳

با استفاده از مفاهیم مقدماتی هندسه می‌توان تساوی فوق را ثابت کرد. کافی است توجه کنیم که مساحت هر مثلث برابر است با حاصل ضرب قاعده در ارتفاع و نیز برابر است با نصف حاصل ضرب هر دو ضلع دلخواه مثلث در سینوس زاویه بین آن دو. پس در شکل ۳ داریم

$$S_{OCA} = \frac{1}{2}h.CA = \frac{1}{2}OA.OC \sin(\widehat{COA}),$$

$$S_{OCB} = \frac{1}{2}h.CB = \frac{1}{2}OB.OC \sin(\widehat{COB}),$$

$$S_{OAD} = \frac{1}{4}h \cdot DA = \frac{1}{4}OA \cdot OD \sin(\widehat{DOA}),$$

$$S_{OBD} = \frac{1}{4}h \cdot DB = \frac{1}{4}OB \cdot OD \sin(\widehat{DOB}).$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} \frac{CA}{CB} \cdot \frac{DA}{DB} &= \frac{CA}{CB} \cdot \frac{DB}{DA} = \frac{OA \cdot OC \sin(\widehat{COA})}{OB \cdot OC \sin(\widehat{COB})} \cdot \frac{OB \cdot OC \sin(\widehat{DOB})}{OA \cdot OC \sin(\widehat{DOA})} \\ &= \frac{\sin \widehat{COA} \cdot \sin \widehat{DOB}}{\sin \widehat{COB} \cdot \sin \widehat{DOA}}. \end{aligned}$$

پس نسبت ناهمساز  $A, B, C$  و  $D$  فقط به زاویه‌های روبه‌رو به پاره‌خط‌های واصل بین  $A, B, C$  و  $D$  بستگی دارد. از آنجا که این زاویه‌ها برای هر چهار نقطه  $A', B', C', D'$  تصاویر  $A, B, C$  و  $D$  به مرکز  $O$ ، یکی هستند، نتیجه می‌گیریم که نسبت ناهمساز در روند عمل تصویر، تغییر نمی‌کند. با توجه به این ویژگی، به تعریف زیر توجه می‌کنیم.

تعریف ۱.۲. نسبت ناهمساز چهار خط که در یک نقطه هم‌رس‌اند، نسبت ناهمساز محل برخورد آن چهار خط با یک خط دلخواه است.

تعریف ۲.۲. هرگاه برای چهار نقطه  $A, B, C$  و  $D$  واقع بر یک خط راست، داشته باشیم  $(ABCD) = -1$ ، گوئیم نسبت ناهمساز این چهار نقطه، همساز (توافقی) است و  $D$  مزدوج همساز یا توافقی  $C$  نسبت به  $A$  و  $B$  است.

تعریف ۳.۲. (چهارضلعی کامل) هرگاه چهار خط در صفحه مطابق شکل ۴ دوه‌دو در شش نقطه متمایز یکدیگر را قطع کنند، آن‌ها را اضلاع یک چهارضلعی کامل و نقاط تقاطع را شش رأس آن می‌نامیم. دو رأس را متقابل می‌نامیم هرگاه پاره‌خط شامل آن دو رأس، بخشی از یک ضلع نباشد. پاره‌خط شامل دو رأس متقابل، قطر نامیده می‌شود. تعداد قطرهای برابر ۳ است.

قضیه ۴.۲. در چهارضلعی کامل، هر قطر به وسیله دو قطر دیگر به نسبت توافقی تقسیم می‌شود.

اثبات. کافی است توجه کنیم که با تصویر کردن از  $E$ ، داریم

$$x = (ABCD) = (IFHD)$$

و با تصویر کردن از  $G$ ، داریم

$$(IFHD) = (BACD).$$



اما  $(BACD) = \frac{1}{(ABCD)}$  پس  $x = \frac{1}{x}$ . در نتیجه  $x = 1$  یا  $x = -1$ . چون  $C$  و  $D$  نقاط  $A$  و  $B$  را از هم جدا می‌کنند، یعنی  $C$  بین  $A$  و  $B$  است، نسبت ناهمسان  $x$  منفی است و از این رو باید برابر  $-1$  باشد. ■



شکل ۴

مفهوم نسبت ناهمسان چهار نقطه بر روی یک خط را می‌توان به چهار نقطه بر یک دایره تعمیم داد.

تعریف ۴.۲. هرگاه  $A, B, C, D$  مطابق شکل ۵ نقاط واقع بر یک دایره و  $O$  نقطه‌ای بر روی کمان  $AD$  باشد که شامل  $B$  و  $C$  نیست، نسبت ناهمسان این چهار نقطه برابر با

$$\frac{\sin \widehat{COA} \cdot \sin \widehat{DOB}}{\sin \widehat{COB} \cdot \sin \widehat{DOA}}$$

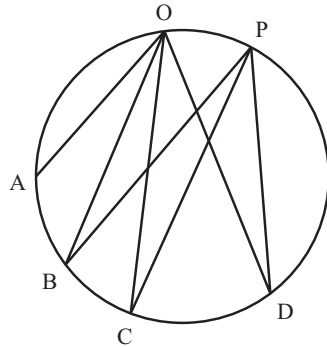
تعریف می‌شود.

قضیه ۵.۲. (شال<sup>۱</sup>) برای چهار نقطه واقع بر یک دایره، نسبت ناهمسان یک دسته خطوط از نقطه پنجم، بستگی به انتخاب نقطه پنجم ندارد.

اثبات. اگر  $O$  و  $P$  دو نقطه دلخواه بر دایره در کمان  $AD$  باشند که شامل  $B$  و  $C$  نیست، با توجه به همنهشتی زاویه‌های محاطی متقابل به یک کمان، نتیجه بدیهی است.

قطب و قطبی یکی از تبدیلات مهم هندسه به‌شمار می‌آید. تعریف مشهور کلاسیک آن در زیر بیان می‌شود [۲ ص. ۱۶۹ یادداشت‌های مترجم].

1) Chasles



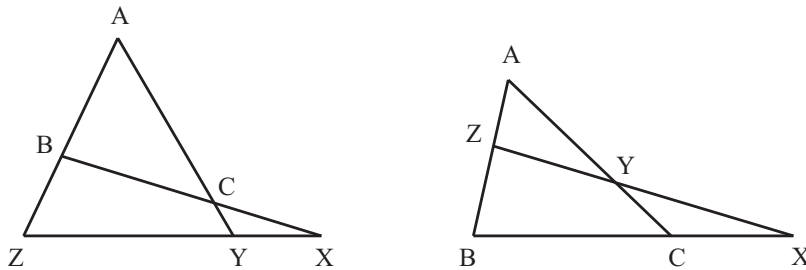
شکل ۵

تعریف ۶.۲. مکان هندسی مزدوج توافقی نقطه در صفحه دایره‌ای مفروض نسبت به دو نقطه تقاطع قاطعی که از آن نقطه می‌گذرد با دایره، قطبی آن نقطه نسبت به دایره نامیده می‌شود.

به موجب این تعریف، قطبی نقطه بر حسب این‌که داخل یا خارج یا روی دایره باشد نسبت به دایره، به ترتیب خط نامحدود، پاره خط و نقطه است و مرکز دایره، قطبی ندارد. با قبول فرض نقطه‌های موهومی و خط بینهایت صفحه و این‌که قطبی هر نقطه از دایره را مماس مرسوم از آن نقطه بر دایره بدانیم، به موجب این تعریف، قطبی نقطه نسبت به دایره در هر حال، خط نامحدود است. این تعریف برای هر منحنی درجه دوم، اعم از دو خط و یا هر مقطع مخروطی می‌تواند به کار رود. کافی است به جای دایره، دو خط متقاطع، بیضی، هذلولی یا سهمی گذاشته شود. در پایان این بخش، قضیه معروف منلائوس را یادآوری می‌کنیم.

قضیه ۶.۲. (منلائوس) هرگاه سه نقطه  $X$ ،  $Y$  و  $Z$  واقع بر اضلاع  $BC$ ،  $CA$  و  $AB$  (یا واقع بر امتداد آن‌ها) از مثلث  $ABC$ ، بر یک خط راست واقع باشند، آن‌گاه

$$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = +1.$$

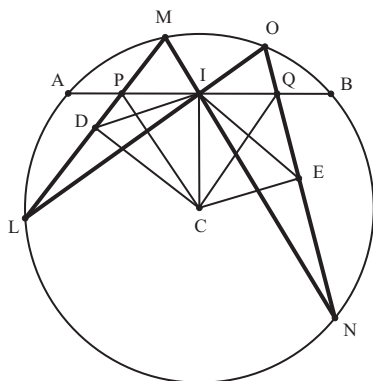


شکل ۶

به عکس اگر چنین رابطه‌ای برای سه نقطه  $X, Y$  و  $Z$  واقع بر اضلاع مثلث  $ABC$  برقرار باشد، این سه نقطه بر یک خط راست واقع‌اند.

### ۳. اثبات‌ها و تعمیم‌ها

اثبات اول. (هورنر [۳]) بگیریم  $E$  و  $D$  به ترتیب نقاط وسط پاره‌خط‌های  $ML$  و  $ON$  باشند. از آنجا که  $ID$  و  $IE$  میانه‌های متناظر دو مثلث متشابه  $MLI$  و  $CIN$  هستند،  $\widehat{QEI} = \widehat{PDI}$ . اینک



شکل ۷

چهارضلعی‌های  $ICEQ$  و  $DCIP$  محاطی هستند و از این رو،  $\widehat{QEI} = \widehat{PDI}$  و  $\widehat{PDI} = \widehat{PCI}$ . در نتیجه  $\widehat{ICQ} = \widehat{PCI}$ . بنابراین دو مثلث قائم‌الزاویه  $ICQ$  و  $ICP$ ، همنهشت هستند و  $IP = IQ$ . ■

یادداشت ۱.۳. راه‌حلی (اثباتی) برای این مسأله (قضیه) در مجموعه مجله‌های یکان درج شده که همان اثبات هورنر است [۱].

دومین اثبات، اثبات ویلیام والاس است [۹].

اثبات دوم. در شکل ۸،  $C$  وسط پاره‌خط  $AB$ ،  $I$  و  $H$  به ترتیب محل تلاقی  $GD$  و  $FE$  با  $AB$  است. خط  $KHL$  را موازی  $DG$  رسم می‌کنیم تا  $DF$  را در  $K$  و امتداد  $GE$  را در  $L$  قطع کند. از آنجا که

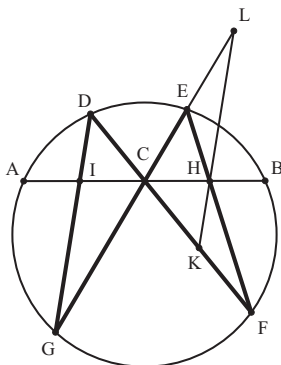
$$\widehat{HLE} = \widehat{CGI} = \widehat{HFK},$$

مثلث‌های  $LEH$  و  $HFK$  متشابه‌اند و

$$\frac{LH}{HE} = \frac{HF}{HK}.$$

پس

$$HF \cdot HE = LH \cdot HK = AH \cdot HB = (AC + CH)(AC - CH).$$



شکل ۸

همچنین مثلث  $CID$  با مثلث  $CHK$  و مثلث  $CHL$  با مثلث  $CIG$  متشابه است و بنابراین

$$\frac{KH}{HC} = \frac{DI}{IC}, \frac{LH}{HC} = \frac{GI}{IC}.$$

با ضرب طرفین نظیر در دو تساوی اخیر، داریم

$$\frac{KH \cdot LH}{HC^2} = \frac{DI \cdot GI}{IC^2}.$$

اما همان طور که دیدیم

$$KH \cdot LH = AC^2 - HC^2, DI \cdot GI = AC^2 - IC^2.$$

بنابراین

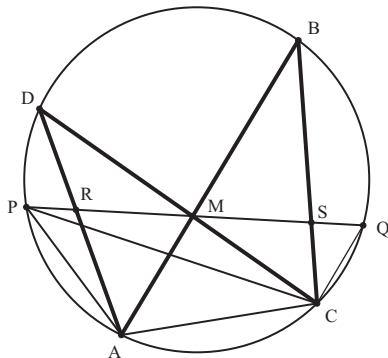
$$\frac{AC^2}{HC^2} = \frac{AC^2}{IC^2}$$

و در نتیجه  $HC = IC$ .

اثبات سوم بر مبنای نسبت ناهمساز طرح ریزی شده است.

اثبات سوم. بنابر تعریف ۲.۱ و قضیه شال، داریم  $(PRMQ) = (PMSQ)$ ، یعنی

$$\frac{PM}{MR} \cdot \frac{PQ}{QR} = \frac{PS}{SM} \cdot \frac{PQ}{QM}$$



شکل ۹

و از این رو،

$$\frac{PM}{MR} \cdot \frac{QR}{PQ} = \frac{PS}{SM} \cdot \frac{QM}{PQ}$$

اما بنابه فرض،  $PM = MQ$  پس  $RQ \cdot MS = PS \cdot RM$  که به تساوی

$$RM \cdot MS + MQ \cdot MS = PM \cdot RM + MS \cdot RM$$

یا

$$MQ \cdot MS = PM \cdot RM$$

می‌انجامد. از آنجا که  $MQ = MP$ ، پس  $MS = MR$ .  
 اثبات چهارم. (با استفاده از قضیه منلائوس) مثلث  $HMK$  را که توسط  $FG$  و  $DE$  قطع شده است در نظر می‌گیریم. از دو رابطه

$$\frac{CH}{CK} \cdot \frac{GK}{GM} \cdot \frac{FM}{FH} = 1, \quad \frac{CH}{CK} \cdot \frac{DK}{DM} \cdot \frac{EM}{EH} = 1$$

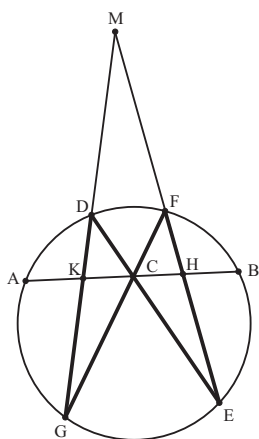
به دست می‌آوریم که

$$\frac{CH \cdot GK \cdot DK \cdot FM \cdot EM}{CK \cdot FH \cdot EH \cdot GM \cdot DM} = 1.$$

اما  $FM \cdot EM = GM \cdot DM$  پس

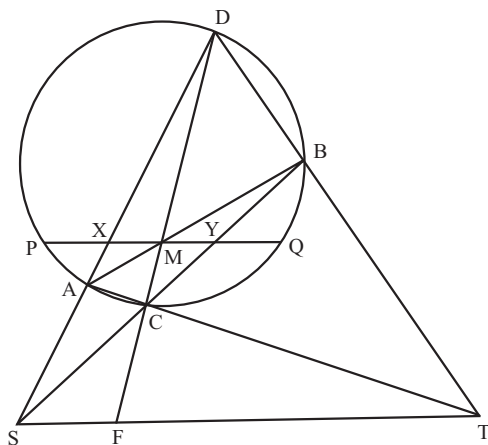
$$\begin{aligned} \frac{CH^2}{CK^2} &= \frac{FH \cdot EH}{GK \cdot DK} = \frac{AH \cdot BH}{AK \cdot BK} = \frac{(AC + CH)(AC - CH)}{(AC + CK)(AC - CK)} \\ &= \frac{AC^2 - CH^2}{AC^2 - CK^2} \end{aligned}$$

و بنابراین  $CH = CK$ .



شکل ۱۰

اثبات پنجم. (با استفاده از مفهوم قطب و قطبی) فرض کنیم  $S$  و  $T$  نقاط تقاطع  $AD$  با  $BC$  و  $AC$

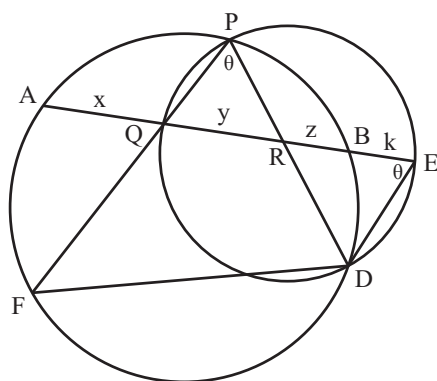


شکل ۱۱

با  $BD$  باشند. در این صورت،  $ST$  قطبی  $M$  نسبت به دایره مفروض است. به ویژه این بدان معنی است که اگر  $O$  مرکز دایره مفروض باشد،  $OM$  بر  $ST$  عمود است. از آنجا که  $M$  وسط  $PQ$  است،  $PQ$  نیز بر  $OM$  عمود است و از این رو،  $ST$  با  $PQ$  موازی است. اما به موجب تعریف،  $F$  مزدوج  $M$  نسبت به  $C$  و  $D$  بر  $ST$  واقع است. در نتیجه  $SD$ ،  $SC$ ،  $SM$  و  $SF$  یک دسته همساز تشکیل می دهند. هر خطی، چنین دسته خطوطی را در مزدوج های توافقی قطع می کند. به ویژه  $PQ$  آن را در  $M$ ،  $Y$ ،  $X$  و بی نهایت قطع می کند (زیرا  $ST$  موازی  $PQ$  است و می دانیم که نسبت ناهمسان همسان) نسبت به انعکاس، ناورداست). از اینجا نتیجه می شود که  $MX = MY$ . ■

اثبات ششم. (با استفاده از لم هاروکی<sup>۱)</sup> لم زیر که خود، به تنهایی قابل توجه است، می تواند در اثبات قضیه پروانه مورد استفاده قرار گیرد. ابتدا به بیان و اثبات آن می پردازیم.

لم ۲.۳. (هاروکی) فرض کنیم  $AB$  و  $FD$  وترهای نامتقاطع در یک دایره باشند و  $P$  نقطه متغیری در کمان  $AB$  به جز  $F$  و  $D$  باشد. در این صورت، برای هر نقطه  $P$ ، خطوط  $PF$ ،  $PD$  وتر  $AB$  را در سه قطعه به طول های  $x$ ،  $y$  و  $z$  چنان قطع می کند که نسبت  $\frac{yz}{x}$  برابر با مقدار ثابتی مانند  $k$  است. اثبات. (I) در شکل ۱۲ دایره ای که از  $P$ ،  $Q$  و  $D$  می گذرد، امتداد  $AB$  را در  $E$  قطع می کند.



شکل ۱۲

در این دایره، وتر  $QD$  در نقاط  $E$  و  $P$  با زاویه  $\theta$  مشخص می شود. اینک با تغییر  $P$ ، زاویه  $FPD$

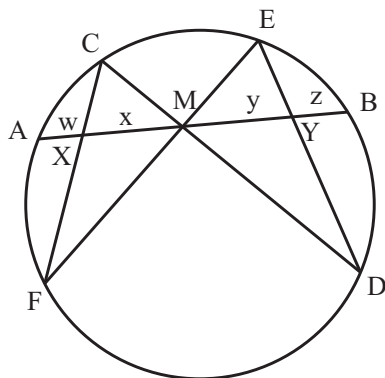
1) Haruki

در دایره مفروض ثابت باقی می ماند. در نتیجه برای هر موقعیت  $P$ ، دایره دوم همواره از نقطه ثابت  $E$  می گذرد. بنابراین پاره خط  $BE$  همواره طول ثابت  $k$  را خواهد داشت. اینک در وترهای متقاطع  $AB$  و  $PD$  در دایره مفروض، داریم  $(x + y)z = PR.RD$  و در دایره دوم  $PR.RD = y(z + k)$ . پس

$$(x + y)z = z(z + k)$$

که به سادگی از آن نتیجه می شود  $xz = yk$  و از این رو  $\frac{xz}{y} = k$ .

(II) در این اثبات، از نسبت های ناهمساز استفاده می شود و فرض می کنیم  $AB = m$ . ابتدا  $PA$  و  $PB$  را رسم می کنیم. از آنجا که زوایای  $APF$ ،  $FPD$  و  $DPA$  با تغییر  $P$  در کمان  $AB$ ، ثابت باقی می ماند، نسبت ناهمساز  $(AFDB)$  ثابت باقی می ماند. بنابراین  $\frac{xz}{ym}$  مقدار ثابتی است. پس  $\frac{xz}{y}$  نیز مقدار ثابتی است. ■



شکل ۱۳

قضیه پروانه نتیجه ای از لم هاروکی است، زیرا با توجه به شکل ۱۳ داریم

$$\frac{w(y + z)}{x} = k = \frac{(w + x)z}{y}$$

اما چون  $M$  وسط  $AB$  است، پس

$$y + z = w + x$$

و در نتیجه

$$\frac{w}{x} = \frac{z}{y}$$



با اضافه کردن ۱ به طرفین این تساوی، به دست می آوریم

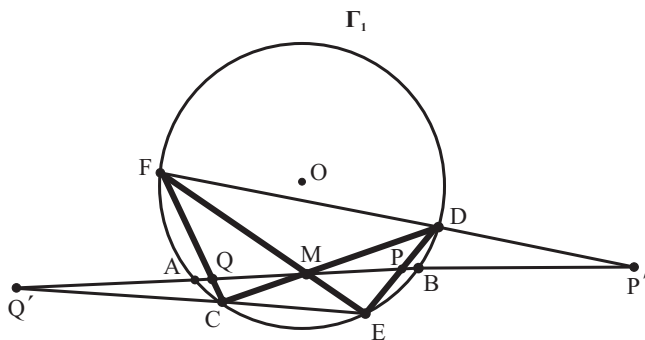
$$\frac{w+x}{x} = \frac{z+y}{y}$$

■ که از آن، تساوی  $\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$  به دست می آید پس  $x = y$ .

یادداشت ۳.۳. اثبات دوم لم هاروکی، در واقع همان اثبات قضیه شال است و از این رو، می توان این لم و قضیه شال را در اساس یکی دانست. به این نکته نیز باید توجه کرد که در اثبات اول مقدار ثابت  $k$  برحسب طول پاره خطی خارج از دایره مفروض مشخص می شود.

در ادامه، اثباتی را برای قضیه پروانه بیان می کنیم که کاربرد مناسب هندسه تحلیلی را نشان می دهد. این اثبات، ابتدا در [۴] و سپس در [۳] آورده شده است و می توان آن را به مقاطع مخروطی نیز تعمیم داد.

اثبات هفتم. (هندسه تحلیلی) فرض کنیم  $\Gamma_1$  دایره ای مفروض باشد. دستگاه محورهای مختصات را با مبدأ  $M$  (وسط  $AB$  و  $OM$ ) در نظر می گیریم که در آن،  $O(O, d)$  مرکز دایره است. اگر شعاع این



شکل ۱۴

دایره برابر با  $r$  باشد، معادله آن چنین است:

$$\Sigma_1 \equiv x^2 + (y - d)^2 - r^2 = 0.$$

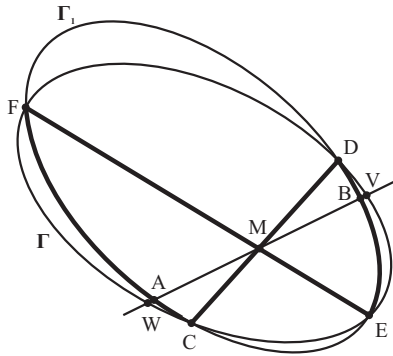
خطوط  $CD$  و  $EF$  که از مبدأ می گذرند، یک مقطع مخروطی تبهگون  $\Gamma_2$  را به وجود می آورند که معادله آن به شکل زیر است:

$$\Sigma_2 \equiv ax^2 + 2bxy + by^2 = 0.$$

اینک برای هر  $k$  و  $l$  معادله

$$\Sigma \equiv k\Sigma_1 + l\Sigma_2 = 0$$

یک مقطع مخروطی  $\Gamma$  را نشان می‌دهد که از محل تلاقی  $\Gamma_1$  و  $\Gamma_2$  یعنی  $C, D, E, F$  می‌گذرد. هر مقطع مخروطی گذرنده بر  $C, D, E, F$  نیز به این شکل قابل نمایش است.



شکل ۱۵

فرض کنیم مقطع مخروطی  $\Sigma = 0$  را در  $W$  و  $V$  قطع کند. معادله  $AB$ ، به صورت  $y = 0$  است و

$$\Sigma_1(x, 0) = x^2 + d^2 - r^2, \quad \Sigma_2(x, 0) = ax^2.$$

پس طول‌های  $W$  و  $V$  ریشه‌های  $\Sigma(x, 0) = 0$  هستند، یعنی

$$k(x^2 + d^2 - r^2) + lax^2 = 0$$

از آنجا که این معادله فاقد جمله درجه یک است، داریم  $\overline{MV} + \overline{MW} = 0$  و

$$VM = MW. \quad (1)$$

اینک (۱) برای تمام مقاطع مخروطی که از  $C, D, E, F$  می‌گذرند، برقرار است و زوج خطوط  $ED$  و  $CF$  نیز چنین مقطعی است، پس تساوی  $PM = MQ$  از (۱) به دست می‌آید. زوج خطوط  $CE$  و  $DF$  نیز مقطع مخروطی گذرنده بر  $C, D, E, F$  است. اگر این خطوط،  $AB$  را همان‌طور که در شکل نشان داده شده است، در نقاط  $P'$  و  $Q'$  قطع کنند، آن‌گاه تساوی  $P'M = MQ'$  نیز از (۱) به دست می‌آید.

فرض کنیم به جای دایره، یک مقطع مخروطی سره به معادله

$$\Sigma_1 \equiv Ax^2 + 2hxy + By^2 + 2Gx + 2Fy + C = 0$$

داده شده باشد. نمادها را همان نمادهای قبلی فرض می‌کنیم. داریم

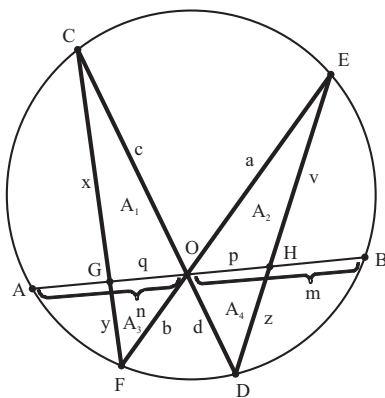
$$\Sigma(x, 0) = k(Ax^2 + 2Gx + C) + lax^2.$$

اگر مختصات  $A$  و  $B$  به ترتیب  $(-\alpha, 0)$  و  $(\alpha, 0)$  باشد، آن‌گاه عبارت  $\Sigma_1(-\alpha, 0) = \Sigma_1(\alpha, 0) = 0$  ایجاب می‌کند که  $G = 0$ . پس معادله  $\Sigma_1(x, 0) = 0$  دارای جمله درجه یک نیست و بقیه اثبات مانند قبل است. ■

قضیه ۴.۳. (تعمیم قضیه پروانه) فرض کنیم از نقطه  $M$  وسط وتر  $AB$  در مقطع مخروطی  $\Gamma_1$  دو وتر دیگر  $CD$  و  $EF$  رسم شده است. اگر مقطع مخروطی گذرنده بر  $C, D, E, F$  را در  $V$  و  $W$  قطع کند، آن‌گاه  $VM = MW$ .

در پانوشت صفحه ۷۸ مرجع [۱۲]، مؤلف توجه خواننده را به مقاله‌ای که توسط کندی<sup>۱</sup> در ۱۸۹۸ چاپ شده [۴]، جلب کرده است:

قضیه ۵.۳. (کندی) نقطه دلخواه  $O$  را بر وتر  $AB$  انتخاب می‌کنیم. اگر مطابق شکل ۱۶،  $CF$  و  $ED$  وتر  $AB$  را به ترتیب در  $G$  و  $H$  قطع کنند، آن‌گاه نسبت حاصل ضرب طول پاره‌خط‌های محصور بین دایره و دو وتر متناسب با تفاضل (مجموع آن‌ها است).



شکل ۱۶

1) Candy

اثبات. فرض کنیم  $A_1, A_2, A_3$  و  $A_4$  به ترتیب مساحت  $CGO, EDH, GOF$  و  $ODH$  را نشان دهد. فرض کنیم  $m, OB = m, OA = n, OH = p, OG = a, OF = c, OD = d, CG = x, GF = y, EH = v$  و  $Hd = z$  در این صورت، چون

$$\widehat{C} = \widehat{E}, \widehat{F} = \widehat{D}, \dots$$

پس

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{cx}{av}, \frac{A_2}{A_3} = \frac{by}{dz},$$

$$\frac{A_1}{A_4} = \frac{cq}{dp}, \frac{A_2}{A_3} = \frac{bq}{ap}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\frac{A_1 A_2}{A_2 A_3} = \frac{bcq^2}{adp^2} = \frac{bcxy}{advz}$$

و به دست می‌آوریم

$$\frac{q^2}{p^2} = \frac{xy}{vz} = \frac{AG \cdot GB}{AH \cdot HB},$$

$$\frac{(n-q)(m+p)}{(n+p)(m-p)} = \frac{mn - q(m-n) - q^2}{mn - p(m-n) - p^2}.$$

از این رو،

$$mn(p-q) = pq(m-n). \quad (2)$$

پس

$$\frac{mn}{pq} = \frac{m-n}{p-q}$$

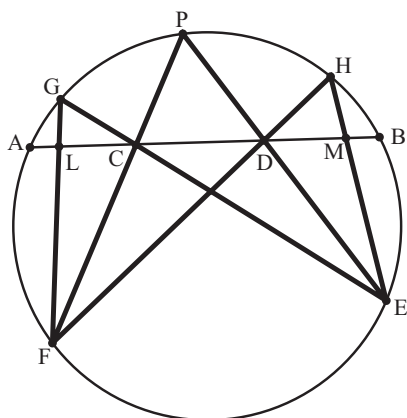
و حکم ثابت می‌شود. ■

نتیجه ۶.۳. قضیه پروانه.

اثبات. در این حالت، نقطه  $O$  در میان قضیه را می‌توان وسط  $AB$  انتخاب کرد که در این صورت، داریم  $m-n=0$ . اینک با توجه به (۲) نتیجه حاصل است. ■

نتیجه ۲. (قضیه پروانه با سه بال): فرض کنیم وتر  $AB$  در دایره  $O$  در  $C$  و  $D$  به سه قسمت مساوی تقسیم شود. فرض کنیم  $P$  یک نقطه دلخواه به جز  $A$  و  $B$  روی دایره باشد. اگر  $PC$  و  $PD$  دایره را به ترتیب در  $E$  و  $F$  و  $EC$  و  $FD$  دایره را در  $H$  و  $G$  قطع کنند و اگر  $GF$  و  $HE$  را به ترتیب در  $L$  و  $M$  قطع کنند، آنگاه  $AL = BM$ .

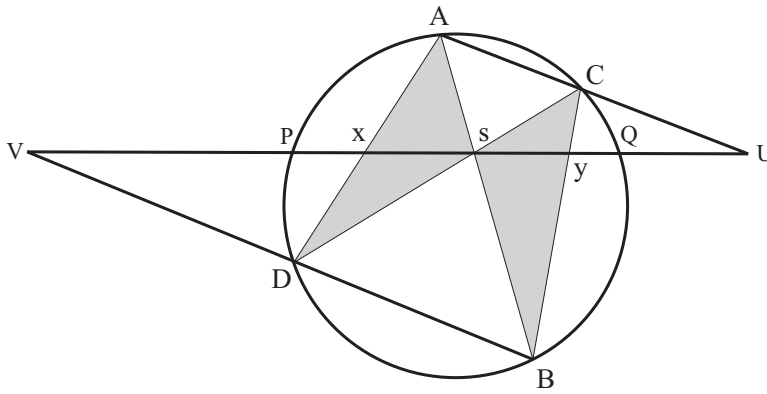
اثبات. در این حالت، قرار می‌دهیم  $AC = n = ۱$ ،  $CB = m = ۲$  و  $CD = p = ۱$  که نتیجه می‌شود  $LC = q = \frac{۲}{۳}$ . به همین ترتیب، در چهارضلعی  $PFHE$  نتیجه خواهیم گرفت که  $DM = \frac{۲}{۳}$ . پس  $AL = MB$ ، زیرا  $AC = DB$ . ■



شکل ۱۷

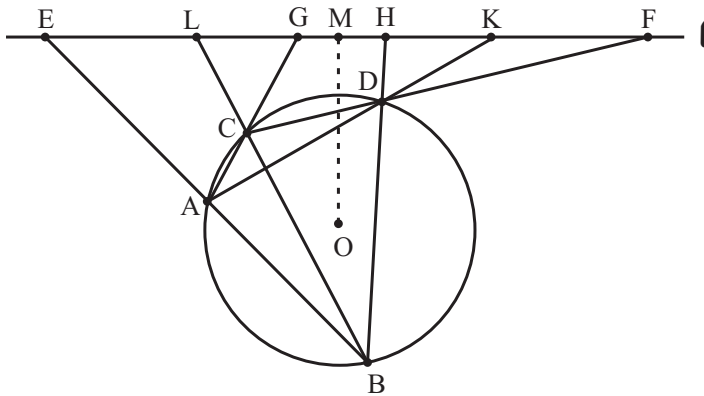
#### ۴. ویژگی پروانه و سرشت‌نمایی بیضی

همان‌گونه که تاکنون شرح داده شد، قضیه کلاسیک پروانه مبین این است که هرگاه وترهای  $AB$  و  $CD$  در دایره  $\Gamma$  در نقطه  $S$  وسط  $PQ$  متقاطع باشند، آنگاه  $S$  وسط پاره‌خط‌های  $XY$  و  $UY$  که از تقاطع  $AD$ ،  $BC$ ،  $AC$  و  $BD$  به ترتیب در  $X$ ،  $Y$ ،  $U$  و  $Y$  به دست می‌آیند، نیز هست. در شکل فوق، نقطه  $S$ ، بدنه و مثلث‌های  $ADS$  و  $BCS$  بال‌های پروانه هستند. در [۱۷] نشان داده شده است که خط  $PQ$  را می‌توان با هر خط دیگری  $l$  در صفحه دایره  $S$  را با تصویر مرکز  $\Gamma$  بر روی  $l$  جایگزین کرد (شکل ۱۸). در [۵] و [۱۷] تعمیم‌های دیگری به هر مقطع مخروطی داده شده است. در این مورد، تنها به بیان قضیه زیر بسنده می‌کنیم که در [۱۷] اثباتی با استفاده از اعداد مختلط برای آن ارائه شده است.



شکل ۱۸

قضیه ۱.۴. فرض کنیم  $A, B, C, D$  چهار نقطه بر دایره  $K$  به مرکز  $O$  باشند. فرض کنیم  $M$  تصویر متعامد  $O$  بر روی خط راست  $l$  باشد. اگر  $M$  وسط دو نقطه  $E = l \cap AB$  و  $F = l \cap CD$  باشد، آن گاه  $M$  وسط نقاط  $G = l \cap AC$  و  $H = l \cap BC$  نیز هست.



شکل ۱۹

یادداشت ۲.۴. در حالتی که خط  $l$ ، دایره  $K$  را قطع کند، همان قضیه کلی تری به دست می آید که در مقدمه به آن اشاره شد و در [۱۲] صفحه ۷۸ درج شده است.

اینک به مفاهیم زیر توجه می کنیم. گوییم زوج  $(l, S)$  شامل خط  $l$  و نقطه  $S$  بر آن دارای خاصیت پروانه نسبت به چهارضلعی  $ABCD$  است هرگاه  $S$  نقطه مشترک وسط  $l \cap l_f$  و  $l \cap l_d$  و  $l \cap l_a$  و  $l \cap l_c$  باشد.

باشد که در آن  $l_a, l_b, l_c, l_d$  به ترتیب محل تلاقی با خطوط  $AB, BC, CA, DA, AC$  و  $BD$  است. در چنین حالتی می نویسیم  $ABCD \bowtie (l, S)$  و گوئیم خط  $l$  نسبت به چهارضلعی  $ABCD$  در نقطه  $S$  دارای خاصیت پروانه است. بدیهی است که خطوط  $l$  و چهارضلعی چنان هستند که خطوط  $l_a, l_b, l_c, l_d$  و  $l$  نقاط تعریف شده در صفحه باشند.

نوشتار خود را با قضیه زیر که نشان می دهد ویژگی پروانه می تواند بیضی را سرشت نمایی کند به پایان می بریم. اثبات این قضیه در مرجع [۱۳] یافت می شود.

قضیه ۳.۴. (کلامکین) هر خم بسته، کراندار و مقعر که دارای ویژگی پروانه باشد، یک بیضی است.

## مراجع

- [۱] رضایی، علی، «راه حلی برای یک مسأله مشهور»، یکان، شماره ۱۷، مرداد ۱۳۴۴، ص ۳۱.
- [۲] کوکس تیر، ه. س. م.، گریترز، س. ل. بازآموزی و باز شناخت هندسه، ترجمه عبدالحسین مصحفی، انتشارات دفتر کمک آموزشی و کتابخانه ها، چاپ نهم، ۱۳۷۶.
- [3] L. Bankoff, "The Metamorphism of the Butterfly Problem", *Math. Mag.*, **60**(1987), 195-210.
- [4] A. L. Candy, "A general theorem relating to transversals and its consequences", *Annals of math.*, **11**(1896), 175-176.
- [5] Z. Cerin, "A generalization of the Butterfly theorem from circles to conics", *Math. Communications*, **6**(2001), 161-164.
- [6] Z. Cerin, "Lines with the Butterfly property", *Math. Communications*, **8**(2003), 35-41.
- [7] Z. Cerin, Ginn Maris, Gianvella, "On improvement of the Butterfly theorem", *Far East J. Math. Sci.*, **23**(2006), 69-85.
- [8] G. D. Chakerian, G. T. Sally, M. S. Klamkin, "On the Butterfly Property", *Math. Mag.*, **42**(1969), 21-28.

- [9] Alex D. D. Craik and J. O' Connor, "Some unknown documents associated with William Wallace (1768-1843)", *Journal of the British Society for the History of Mathematics*, **26**(2011), 17-28.
- [10] Howard Eves, *Fundamentals of Geometry*, Allyn and Bacon, 1964, pp. 136-137.
- [11] William I. Jacobson, "The Butterfly problem-Extension, generalization", *Math. Mag.*, **42**(1969), 17-21.
- [12] R. A. Johnson, *Modern Geometry*, Houghton, Mifflin, Boston, 1924. (Reprinted by Dover, New York, as *Advanced Euclidean Geometry*.)
- [13] M. S. Klamkin, "An extension of Butterfly theorem", *Math. Mag.*, **38**(1965), 206-208.
- [14] Makay, *Proc. Edinburgh Math Soc.* III(1884-1885), 38.
- [15] K. Satyanara, "A simple proof of the Butterfly problem", *Crux Mathematicorum*, **7**(1981), 292.
- [16] A. Sliepcevic, "A new generalization of the Butterfly theorem", *Journal for Geometry and Graphics*, **6**(2002), 61-68.
- [17] V. Volence, "A generalization of Butterfly theorem", *Mathematical Communications*, **5**(2000), 157-160.
- [18] V. Volence, "The Butterfly theorem for conics", *Mathematical Communications*, **7**(2002), 35-38.

---

منصور معتمدی

اصفهان، خانه ریاضیات اصفهان

Motamedi\_m@scu.ac.ir



# نظریه فضاهای برگمن: گذشته، حال و آینده (قسمت اول)

علی آبکار

## ۱. مقدمه

موضوع جدید فضاهای برگمن عبارت است از ترکیب استادانه نظریه توابع تحلیلی با آنالیز تابعی و نظریه عملگرها. این نظریه علاوه بر آن که دارای مفاهیم مشترک زیادی با نظریه فضاهای هاردی است، دارای عناصر جدیدی مانند هندسه هذلولوی، هسته‌های بازمولد<sup>۱</sup> و تابع‌های گرین دو-همساز است. در دهه‌های قبل، آن بخش‌هایی از نظریه توابع و نظریه عملگرها که به فضاهای هاردی مربوط می‌شد، کاملاً قابل فهم و توصیف بود؛ مفاهیمی مانند صفرمجموعه‌ها<sup>۲</sup>، نظریه تجزیه<sup>۳</sup>، درونیابی، زیرفضاهای ناوردا، عملگرهای تاپلیتز و هنکل<sup>۴</sup> و غیره. متأسفانه اغلب روش‌هایی که در مورد فضاهای هاردی به کار می‌رفت، در مورد این خویشاوند نزدیک آن‌ها، یعنی فضاهای برگمن فاقد کارایی لازم بودند. از این رو، بیشتر ریاضی‌دانان فکر می‌کردند که پیشرفت در نظریه فضاهای برگمن غیرممکن است. خوشبختانه، در آستانه قرن جدید با معرفی تابع‌های اکسترمال<sup>۵</sup> توسط هدنمالم<sup>۶</sup> بن‌بست موجود شکست و راه برای مطالعه بیشتر این فضاها باز شد. متعاقباً کوشش‌های بوریچف<sup>۷</sup>، آلمان<sup>۸</sup>، ریشتنر<sup>۹</sup>، ساندبرگ<sup>۱۰</sup>، شاپیرو<sup>۱۱</sup>، کاوینسون<sup>۱۲</sup>، دیورن<sup>۱۳</sup>،

---

1) Reproducing kernels    2) Zero sets    3) Factoring theory    4) Toeplitz and Hankel operators  
 5) Extremal functions    6) Hedenmalm, H.    7) Borichev, A.    8) Aleman, A.  
 9) Richter, S.    10) Sundberg, C.    11) Shapiro, H. S.    12) Khavinson, D.    13) Duren, P. L.

زیب<sup>۱</sup>، کورنبلوم<sup>۲</sup>، ژو<sup>۳</sup>، شیمورین<sup>۴</sup> و بسیاری دیگر، منجر به پیدایش یک نظریه بسیار غنی شد. در سال‌های اخیر دو کتاب درسی در مقطع دکتری در این موضوع به نگرارش در آمده است ([5] و [8])، اما هنوز تعداد زیادی مسأله حل نشده در این زمینه وجود دارد که مبارزطلبی می‌کنند. در این مقاله، سعی خواهیم کرد محققین جوان را با مقدمات ورود به این دنیای تازه آشنا کنیم. از باب احترام به ریاضی‌دانان پیش‌کسوت، متذکر می‌شویم که اولین مقاله به زبان فارسی در این زمینه در سال ۱۳۷۳ در همین مجله به چاپ رسید ([۱۶]).

## ۲. فضاهای برگمن

فرض کنید  $\Omega$  ناحیه‌ای کران‌دار در صفحه مختلط  $\mathbb{C}$  باشد و  $0 < p < \infty$ . فضای برگمن  $A^p(\Omega)$  متشکل است از همه تابع‌های تحلیلی بر  $\Omega$  که  $|f|^p$  نسبت به اندازه مساحتی در  $\Omega$  انتگرال پذیر است؛ به عبارت دیگر

$$A^p(\Omega) = \left\{ f \in \text{Hol}(\Omega) : \int_{\Omega} |f(z)|^p dx dy < +\infty \right\}.$$

نظریه فضاهای برگمن با کار پیشروانه استفان برگمن (۱۸۹۵ – ۱۹۷۷) شروع شد که اساساً به حالت خاص  $p = 2$  و به دامنه‌های  $\mathbb{C}^n$  به‌ازای  $n > 2$  محدود می‌شد. روشن است که در این وضع،  $A^2(\Omega)$  با ضرب داخلی

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(z) \overline{g(z)} dA(z)$$

یک فضای هیلبرت است (در اینجا اندازه حجمی لبگ در فضای  $\mathbb{C}^n$  است). در نتیجه، دستگاه‌های یکامتعامد از تابع‌ها و هسته‌های باز مولد نقش مهمی در مطالعه فضاهای برگمن ایفا می‌کردند. کتابی که خود استفان برگمن نگاشته است ([2])، مرجع خوبی در این زمینه است.

از این به بعد فرض خواهیم کرد که ناحیه  $\Omega$  قرص یک‌ه‌باز  $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$  در صفحه مختلط است. اندازه مساحتی لبگ نرمال شده را با  $dA(z) = \frac{dx dy}{\pi}$  نشان خواهیم داد. بنابراین،  $A^p(\mathbb{D}) = A^p$  متشکل است از همه تابع‌های تحلیلی  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  که برای آن‌ها

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA(z) < \infty.$$

$$\|f\|_{A^p} = \left( \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA(z) \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{نرم در } A^p \text{ به صورت}$$

تعریف می‌شود. اگر  $p \geq 1$ ، عبارت بالا یک نرم واقعی و  $A^p$  به همراه این نرم، فضایی باناخ است. در حالتی که  $0 < p < 1$ ، متر  $d(f, g) = \|f - g\|_{A^p}^p$  را به یک فضای متری کامل تبدیل می‌کند. از تعریف روشن است که  $A^p(\mathbb{D})$  زیرمجموعه‌ای از  $L^p(\mathbb{D})$  است. از این رو، برخی مؤلفین به جای  $A^p$  از نماد  $L_a^p$  استفاده می‌کنند: زیرنویس  $a$  حرف اول کلمه انگلیسی analytic است. لازم است متذکر شویم که در برخی نوشتجات ریاضی قدیمی‌تر، از نماد  $B^p$  برای فضاهای برگمن استفاده می‌کردند. این نماد امروزه کمتر مورد استفاده قرار می‌گیرد، زیرا از شکل‌های مختلف حرف  $B$  برای نشان دادن فضاهای بلوک<sup>۱</sup> و فضاهای بیسف<sup>۲</sup> نیز استفاده می‌شود.

### ۳. فضاهای برگمن استاندارد

فضای هیلبرت  $A^2$  به فضای برگمن استاندارد شهرت دارد. ضرب داخلی در این فضا به صورت

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{D}} f(z) \overline{g(z)} dA(z)$$

تعریف می‌شود. اگر  $f$  و  $g$  به ترتیب دارای سری‌های تیلر  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  و  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$  باشند، آن‌گاه محاسبه‌ای ساده نشان می‌دهد که

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \overline{b_n}}{n+1}.$$

به ویژه،

$$\|f\|_{A^2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1}.$$

فرض کنیم  $w$  نقطه دلخواهی در قرص یکه باز باشد. تابع خطی  $\varphi_w : A^2 \rightarrow \mathbb{C}$  با ضابطه  $\varphi_w(f) = f(w)$  را در نظر می‌گیریم.  $\varphi_w$  را تابع خطی مقدار یابی<sup>۳</sup> در نقطه  $w$  می‌نامند. با استفاده از خاصیت میانگین تابع‌های تحلیلی و نامساوی کوشی - شوارتس، داریم

$$\begin{aligned} |\varphi_w(f)| = |f(w)| &= \left| \frac{1}{\pi r^2} \int_{\mathbb{D}(w;r)} f(z) dx dy \right| \\ &\leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{\mathbb{D}(w;r)} |f(z)| \cdot 1 dx dy \\ &\leq \frac{1}{\pi r^2} \left( \int_{\mathbb{D}(w;r)} |f(z)|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\mathbb{D}(w;r)} 1^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi} r} \|f\|_{A^2}. \end{aligned}$$

نظریه فضاهاى برگمن: گذشته، حال و آینده (قسمت اول) \_\_\_\_\_ ۵۰

بنابراین  $\varphi_w$  یک تابع خطی کران دار است و  $\|\varphi_w\| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}r}$  (عدد مثبتی است که قرص به مرکز  $w$  و به شعاع  $r$  در داخل  $\mathbb{D}$  قرار می‌گیرد). اکنون از قضیه نمایش ریس برای فضاهاى هیلبرت نتیجه می‌شود که تابع یکتای  $K_w \in A^2$  وجود دارد که به ازای هر  $f \in A^2$  داریم

$$\varphi_w(f) = \langle f, K_w \rangle$$

یا

$$f(w) = \int_{\mathbb{D}} f(z) \overline{K_w(z)} dA(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} f(z) \overline{K_w(z)} dx dy.$$

تابع  $K_w(z)$  را هسته برگمن<sup>۱</sup> می‌نامند. از تساوی بالا معلوم است که هسته برگمن دارای خاصیت «باز تولید کنندگی<sup>۲</sup>» است. با تعویض نقش‌های  $w$  و  $z$  درمی‌یابیم که

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} f(w) \overline{K_z(w)} dA(w).$$

با محاسبه‌ای، البته نه چندان واضح!، معلوم می‌شود که هسته برگمن برای قرص یک‌ه‌باز دارای صورت صریح زیر است (به [5] یا [8] رجوع شود):

$$K_z(w) = \frac{1}{(1 - \bar{z}w)^2}.$$

داشتن عبارتی صریح برای هسته برگمن و بهره‌مندی از عبارتی برحسب ضرایب تیلر برای نرم تابع داده شده  $f \in A^2$ ، از مزایای برخوردارى  $A^2$  از ساختار هیلبرتی است (پایه یک‌ممتعامد  $\{\sqrt{n+1}z^n\}_{n=0}^{\infty}$  نقشی مهم در محاسبه هسته برگمن بازی می‌کند).

#### ۴. فضاهاى هاردی

چون از فضاهاى  $L^p$  و  $A^p$  سخن به میان آمد، لازم است فضاهاى هاردی  $H^p$  را همین‌جا معرفی کنیم. ملاحظه خواهیم کرد که  $H^p \subseteq A^p \subseteq L^p$ ، در نتیجه مطالعه  $A^p$  بدون مطالعه  $H^p$  و گاه مقایسه آنها خالی از لطف است. لازم است متذکر شویم که این نظریه توسط اساتیدی مانند آقایان دکتر طاهر قاسمی هنری، دکتر ارسلان شادمان و مرحوم دکتر کریم صدیقی به دانشجویان آموزش داده می‌شد. مرجع اصلی تدریس معمولاً یکی از کتاب‌های دیورن، گارنت<sup>۳</sup>، کوزیس<sup>۴</sup> یا هافمن<sup>۵</sup> بوده است (مشخصات کتاب‌ها در مراجع آمده است).

گوییم تابع تحلیلی  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D} : f$  به فضای هاردی  $H^p$  تعلق دارد هرگاه

1) Bergman kernel    2) Reproducing property    3) Garnett, J. B.    4) Koosis, P.  
5) Hofmann, K.

$$\sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta < \infty.$$

نرم تابع  $f \in H^p$  به صورت

$$\|f\|_{H^p} = \sup_{0 < r < 1} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}}$$

تعریف می‌شود. توجه کنید که اگر به ازای  $0 < r < 1$ ، تابع  $f_r : \mathbb{T} = \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  را با ضابطه

$$f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta})$$

تعریف کنیم، آنگاه

$$\|f\|_{H^p} = \sup_{0 < r < 1} \|f_r\|_{L^p(\mathbb{T})}.$$

در حالت خاص که  $H^p$ ،  $p = \infty$  به فضای توابع تحلیلی کران‌دار تبدیل می‌شود:

$$H^\infty = \{f \in Hol(\mathbb{D}) : \sup_{|z| < 1} |f(z)| < \infty\}.$$

نرم در این فضا به صورت

$$\|f\|_{H^\infty} = \sup_{|z| < 1} |f(z)|$$

تعریف می‌شود. از تعریف روشن است که  $H^\infty \subseteq H^p$  ( $0 < p < \infty$ ). مشابه آنچه در فضای  $A^p$  داشتیم، به ازای  $1 \leq p$ ، فضای باناخ و به ازای  $0 < p < 1$ ، یک فضای متری کامل است. در حالت  $p = 2$ ، فضای هیلبرت است. با محاسبه‌ای ساده، معلوم می‌شود که تابع

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

$$\|f\|_{H^2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty.$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم که  $H^2 \subseteq A^2$ . در حالتی که  $p$  عدد مثبت دلخواهی باشد، از نابرابری

$$\begin{aligned} \|f\|_{A^p}^p &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p r dr d\theta \\ &\leq \int_0^1 \|f\|_{H^p}^p r dr = \frac{1}{2} \|f\|_{H^p}^p \end{aligned}$$

درمی‌یابیم که  $H^p \subseteq A^p$ . در واقع  $H^p$  یک زیرفضای بسته  $A^p$  است.

## ۵. دورهیافت متفاوت

در مطالعه هر یک از این فضاهای باناخ، دورهیافت متفاوت وجود دارد. یکی رهیافت «نظریه توابع» و دیگری رهیافت «نظریه عملگرها». اگر منظور، بررسی ویژگی‌های فردی عناصر فضا باشد، کار ما در حوزه نظریه توابع قرار می‌گیرد. مثلاً بحث تجزیه تابع‌ها در یک فضا، رفتار ضرایب تیلر عناصر یک فضا، رفتار مرزی عناصر فضا و غیره. این مطالعات را گاهی «آنالیز سفت<sup>۱</sup>» می‌گویند. در رهیافت دوم، عناصر فضا به‌عنوان اشیاء منفرد مورد نظر نیستند، بلکه زیرفضاها، عملگرهای تعریف شده بر آن‌ها، تفکیک‌پذیری فضا، توصیف زیرفضاها و غیره مورد بررسی قرار می‌گیرد. این نوع آنالیز را «آنالیز نرم<sup>۲</sup>» هم می‌نامند. دیدگاه اول خیلی قدیمی و سنتی است. مثلاً تجزیه تابع‌های فضای هاردی به تابع‌های «درونی» و «برونی» کاری است که در حوزه نظریه توابع قرار می‌گیرد، لیکن توصیف برلینگ از زیرفضاهای ناوردای  $H^2$  کاری است که در حوزه نظریه عملگرها قرار می‌گیرد. لازم است متذکر شویم که فضاهای  $H^\infty$ ،  $H^p$  و  $A^p$  مصداق‌هایی از یک مبحث کلی‌تر به نام فضاهای باناخ متشکل از توابع تحلیلی یا فضاهای تمام‌ریخت<sup>۳</sup> هستند. یک مصداق مهم دیگر این فضاها، فضای دیریشله<sup>۴</sup> است. به‌طور کلی، وقتی صحبت از یک فضا به میان می‌آید، ساختار فضای برداری توپولوژیک آن مورد نظر است. در نتیجه مطالعه موضوع، بیشتر از دیدگاه دوم صورت می‌پذیرد. عنوان توصیفی دیگری که به این مبحث اشاره می‌کند، نظریه عملگرها در فضاهای توابع است. کتابی که ژو با همین عنوان نوشته است، حاوی اطلاعات جامعی در این زمینه است ([15]).

## ۶. مطالعه فضاهای هاردی

مطالعه ویژگی‌های ساختاری عناصر  $H^p$  در سال‌های بین ۱۹۱۵ تا ۱۹۳۰ انجام پذیرفت. این کار با مقاله‌ای مهم از گ. ه. هاردی آغاز شد. هاردی نشان داد که هر تابع  $f \in H^p$  تقریباً همه‌جا بر  $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$  دارای حد شعاعی است و به علاوه تابع مرزی

$$f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta})$$

نمی‌تواند بر زیرمجموعه‌ای با اندازه مثبت از  $\mathbb{T}$  متحد با صفر باشد مگر این‌که  $f \equiv 0$  (مقاله [7] از هاردی). البته، این کار در ادامه مطلبی بود که فاتو<sup>۵</sup> شاگرد ه. لِبگ<sup>۶</sup> در سال ۱۹۰۶ انجام داده بود.

---

1) Hard analysis    2) Soft analysis    3) Holomorphic spaces    4) Dirichlet space  
5) P. Fatou    6) H. Lebesgue

فانو ثابت کرده بود که هر تابع تحلیلی کران دار در قرص یکه، تقریباً همه جا بر دایره یکه دارای حد نامماسی<sup>۱</sup> است. با این حال، هنوز اصطلاح فضای هاردی ابداع نشده بود تا این که، فردریک ریس<sup>۲</sup> در سال ۱۹۲۳ در مقاله ای این فضاها را فضاهای هاردی نامید. دلیل نام گذاری این بود که هاردی در مقاله سال ۱۹۱۵ ثابت کرده بود که  $\|f_r\|_{L^p(\mathbb{T})}$  تابعی صعودی نسبت به  $r$  است، یعنی برای هر تابع تحلیلی  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  و عددهای  $0 < r_1 < r_2 < 1$  داریم

$$\int_0^{2\pi} |f(r_1 e^{i\theta})|^p d\theta \leq \int_0^{2\pi} |f(r_2 e^{i\theta})|^p d\theta.$$

این حکم، امروزه به نابرابری هاردی شهرت دارد (برای دیدن اثباتی از آن به صفحه ۳۳۷ از [13] رجوع نمایید). در سال ۱۹۲۳، ریس روش خارج کردن صفرها یا فاکتورگیری به وسیله یک حاصلضرب بلاشکه<sup>۳</sup> را معرفی کرد. این، آغازی بود برای توصیف صفرمجموعه های فضاهای هاردی  $H^p$  (یا فضاهای برگمن  $A^p$ ): دنباله  $\{z_k\}$  از نقاط قرص یکه را یک صفرمجموعه برای فضای هاردی (یا فضای برگمن) نامیم هرگاه تابعی مانند  $f$  در  $H^p$  (یا در  $A^p$ ) یافت شود که دقیقاً بر  $\{z_k\}$  صفر شود. در واقع، ثابت شد که  $\{z_k\}$  یک صفرمجموعه در  $H^p$  است اگر و تنها اگر  $\{z_k\}$  در شرط

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|) < \infty$$

موسوم به شرط بلاشکه صدق کند. نکته قابل توجه در این مورد، مستقل بودن شرط بلاشکه از  $p$  است. به عبارت دیگر، هر صفرمجموعه  $H^p$ ، صفرمجموعه  $H^q$  هم هست.

با پیدایش آنالیز تابعی در دهه ۱۹۳۰، مسائل دیگری در مورد فضاهای هاردی طرح و حل شد. به ویژه در سال ۱۹۴۹، آرنه برلینگ<sup>۴</sup> ریاضی دانی از دانشگاه اوپسالا<sup>۵</sup> در سوئد در مقاله ای در مجله آکتا ماتیماتیکا<sup>۶</sup> توانست توصیفی از ساختار زیرفضاهای ناورد در  $H^2$  ارائه کند. یادآوری می کنیم که زیرفضای بسته  $M$  از  $H^p$  را ناورد نامیم هرگاه  $zM \subseteq M$ ، یعنی  $M$  تحت ضرب در چند جمله ای ها بسته باشد. عملگر  $zf \rightarrow f$  را عملگر انتقال<sup>۷</sup> می نامند. ضمناً عملگری بر فضای دنباله ای  $\ell^2$  (دنباله هایی که مربع قدر مطلق عناصر آن ها جمع پذیر است) که بردار  $(a_1, a_2, \dots)$  را به بردار  $(0, a_1, a_2, \dots)$  می برد، نیز عملگر انتقال نام دارد. توجه کنید که اگر  $f$  را با دنباله ضرایب تیلر آن یکی بگیریم، آن گاه هر  $f$  با عضوی از  $\ell^2$  یکسان گرفته می شود. در این وضع،  $zf$  با دنباله  $(0, a_1, a_2, \dots)$  یکی است. بنابراین عملگر انتقال بر  $\ell^2$ ، همان عملگر  $zf \rightarrow z$  بر  $H^2$  است!

1) Nontangential limit 2) Riesz, F. 3) Blaschke product 4) Arne Beurling 5) Uppsala university 6) Acta Mathematica 7) Shift operator

برلینگ در این مقاله، اصطلاحات تابع درونی<sup>۱</sup> و تابع برونی<sup>۲</sup> را معرفی کرد. او ثابت کرد که هر زیرفضای ناوردای فضای هاردی غیر از  $\{0\}$  توسط یک تابع درونی پدید می آید. به عبارت دیگر، زیرفضا به صورت  $u.H^2 = \{uf : f \in H^2\}$  است. تقریباً در همان زمان، کاونسون<sup>۳</sup> و شاپیرو<sup>۴</sup> به طور مستقل، نظریه مسائل اکستریمال دوگانی<sup>۵</sup> را در فضاهای  $H^p$  معرفی کردند. این کار سبب شد تا بسیاری از مسائل را بتوان در قالبی هماهنگ و در چارچوب آنالیز تابعی حل کرد. حدود سال ۱۹۶۰، لنارت کارلسون<sup>۶</sup>، ریاضی دانی از اوپسالا – محل کار آرنه برلینگ – توانست مسأله درونیابی<sup>۷</sup> در فضای  $H^2$  را حل کند. متعاقباً شاپیرو و شیلدنز<sup>۸</sup> همان کار را برای فضای  $H^p$  انجام دادند. یک جنبه بسیار مهم این کارها، تأثیر متقابل آنالیز نرم و آنالیز سخت بود که به موضوع جذابیت بیشتری می داد.

## ۷. موانع در مطالعه فضاهای برگمن

فضاهای برگمن که به عنوان همناهایی جدید برای فضاهای هاردی تلقی می شوند، دارای مسائل و مشکلات ویژه خود بودند که ذیلاً به برخی از آنها اشاره می کنیم. در سال های آغازی پیدایش این نظریه، معلوم شد که از جهت های زیادی فضاهای برگمن خیلی پیچیده ترند. برخی از این پیچیدگی ها به قرار زیر است:

(الف) تابع ها در فضای برگمن می توانند رفتار مرزی نامناسب داشته باشند؛ در مقایسه با تابع ها در فضای هاردی که تقریباً همه جا بر مرز دارای حد شعاعی هستند. مثلاً تابع

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n+1}}$$

به فضای برگمن  $A^2$  تعلق دارد، زیرا

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} < \infty.$$

یک بحث احتمالاتی نشان می دهد که با تغییر دادن تصادفی علامت های ضرایب تیلر این تابع، قریب به یقین به تابعی می رسیم که به  $A^2$  تعلق دارد، ولی تقریباً همه جا بر مرز فاقد حد شعاعی است (برای جزئیات بیشتر به صفحه ۸۸ از [5] رجوع کنید). با کمی زحمت بیشتر، می توان حکم مشابهی برای فضای  $A^p$  اثبات کرد. در نتیجه برای مطالعه  $A^p$ ، یکی از روش ها که اتکا به تابع های مرزی است، فاقد کارایی است.

---

1) Inner function    2) Outer function    3) Khavinson, D.    4) Shapiro, H. S.    5) Dual extremal problems  
6) L. Carleson    7) Interpolation    8) A. L. Shields



(ب) توصیف صفرمجموعه‌ها در فضاهای برگمن غیرعملی است؛ در مقایسه با فضاهای هاردی که صفرمجموعه‌ها در شرط ساده بلاشکه (مستقل از  $p$ ) صدق می‌کنند. در تلاش برای فهم صفرمجموعه‌های فضاهای برگمن، هورویتس<sup>۱</sup> در رساله دکتری خود در دانشگاه میشیگان که تحت راهنمایی پتر دیورن در سال ۱۹۷۴ انجام گرفت نشان داد که:

(۱) برای  $p < q$ ، صفرمجموعه‌هایی در  $A^p$  وجود دارند که برای  $A^q$  صفرمجموعه نیستند؛

(۲) دو صفرمجموعه در  $A^q$  یافت می‌شود که اجتماع آن‌ها یک صفرمجموعه نیست.

هر دو حکم بالا در تبیین آشکار با گزاره‌های شناخته شده برای فضای  $H^p$  است و منجر به نتایج متفاوتی می‌شوند. مثلاً اگر  $A$  یک صفرمجموعه در  $A^2$  و

$$M = \{f \in A^2 : f(a) = 0 \quad \forall a \in A\}$$

زیرفضای صفرنیباد<sup>۲</sup> متناظر با آن باشد، آن‌گاه  $M$  یک زیرفضای ناوردای غیر بدیهی است.

فرض کنیم  $B$  یک صفرمجموعه در  $A^2$  باشد که  $A \cup B$  یک صفرمجموعه نیست. اگر  $N$  زیرفضای صفرنیباد متناظر با  $B$  باشد، آن‌گاه  $M$  و  $N$  غیربدیهی‌اند، ولی  $M \cap N$  زیرفضایی بدیهی است. این وضع در فضای هاردی  $H^2$  اتفاق نمی‌افتد، زیرا طبق قضیه برلینگ، هر زیرفضای ناوردای غیربدیهی توسط یک تابع درونی (در این مورد خاص، توسط یک حاصلضرب بلاشکه) پدید می‌آید. متذکر می‌شویم که وقتی توصیف جامعی از صفرمجموعه‌ها وجود نداشته باشد، امید به داشتن یک نظریه تجزیه ایده آل، واهی است. در همین راستا، هورویتس تلاش کرد تا جایگزینی برای حاصلضرب بلاشکه بیابد: گیریم  $\{z_k\}$  زیر دنباله‌ای از صفرمجموعه متناظر با تابع  $f \in A^p$  باشد. به ازای هر  $k \geq 1$  قرار می‌دهیم

$$b_k(z) = \frac{|z_k|}{z_k} \cdot \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k z} \quad z_k \neq 0$$

و

$$h(z) = \prod_k b_k(z)(2 - b_k(z)).$$

هورویتس نشان داد که حاصلضرب بالا، یعنی  $h$  همگراست و  $\frac{f}{h} \in A^p$ . بنابراین اگر  $\frac{f}{h} = g$ ، آن‌گاه  $f = hg$ . این تجزیه‌ای مشابه تجزیه یک تابع در  $H^p$  به یک حاصلضرب بلاشکه در تابعی از  $H^p$  است ( $f = Bg$ ). اما عیب بزرگ کار در این بود که تابع مقسوم‌علیه، یعنی  $h$  به  $A^p$  تعلق نداشت! مقاله هورویتس ([10]) در جای بسیار معتبری چاپ شد و در زمان خود پیشرفت خوبی به حساب می‌آمد، لیکن بخت و اقبال با نویسنده یار نبود و تجزیه وی مزیت تابع بلاشکه را نداشت.

1) Horowitz 2) Zero-based

(پ) زیرفضاهای ناوردای فضای برگمن لزوماً توسط یک تابع پدید نمی آیند. این نیز در تبیین آشکارا دانش قبلی ما از ساختار زیرفضاهای ناوردای  $H^p$  است. گوییم زیرفضای  $M$  از  $H^p$  یا  $A^p$  توسط تابع  $f$  تولید می شود هرگاه

$$M = [f] = cl\{p(z)f(z) : f \in H^p \text{ (or } A^p)\}.$$

چنین زیرفضای ناوردایی را تک مولد<sup>۱</sup> می نامند.

طبق قضیه مشهور برلینگ، هر زیرفضای ناوردای  $H^p$  توسط یک تابع درونی پدید می آید. از طرف دیگر، به متمم بعد  $zM$  در  $M$ ، یعنی به  $\dim \frac{M}{zM}$  شاخص<sup>۲</sup> زیرفضای  $M$  می گویند. ضمناً طبق قضیه ای از ریشتر [12]، هر زیرفضای تک مولد دارای شاخص ۱ است. بنابراین در فضاهای هاردی، همه زیرفضاها، غیر از  $\{0\}$ ، دارای شاخص ۱ می باشند. در تبیین آشکارا این موضوع، در سال ۱۹۸۵ آپوستل<sup>۳</sup>، برکوویچی<sup>۴</sup>، فویاش<sup>۵</sup> و پیرسی<sup>۶</sup> نشان دادند که فضای برگمن  $A^2$  دارای زیرفضایی با شاخص دلخواه  $1 \leq n \leq \aleph_0$  است! به عبارت دیگر، مشبکه<sup>۷</sup> زیرفضاهای ناوردای  $A^2$  دارای زیرمشبکه ای است که با مشبکه همه زیرفضاهای ناوردای یک فضای هیلبرت با بعد  $\aleph_0$  یکریخت است. به قول دانالد ساراسون<sup>۸</sup> در [14]، «به نظر می رسد که این مشبکه به نحو قابل ملاحظه ای وحشی تر است».

تصور می کنم که خواننده سخت گیر نیز متقاعد شده باشد که فضای برگمن، فضایی متفاوت است. در مقام مقایسه، اگر  $L^p$  را به اقیانوسی بزرگ تشبیه کنیم، فضای برگمن دریایی طوفانی و فضای هاردی رودخانه ای آرام است. اغلب مسائل جدی در فضای هاردی حل و بایگانی شده اند، لیکن در فضای برگمن هنوز مسائل پرچالش وجود دارند. پیترو دیورن در مقدمه کتاب [5] می نویسد: «تلاش در جهت ایجاد یک نظریه متناظر با نظریه مسائل اکستریمال دوگانی به دلیل عدم وجود توصیفی از پوچساز<sup>۹</sup>  $A^p$  در  $L^p$ ، با شکست مواجه شده بود و آن دسته از روش های آنالیز تابعی که در بحث درونیابی در فضاهای هاردی توفیق کسب کرده بودند، در فضاهای برگمن ثمربخش نبودند. به طور خلاصه، با وجود این که در فضاهای هاردی تا دهه ۱۹۷۰، مسائل زیادی به خوبی تجزیه و تحلیل شده بودند، همتهای آنان در فضاهای برگمن عموماً غیرقابل حل تلقی می شدند. به غیر از برخی پیشرفت های پراکنده، انتظارات پایین و جو حاکم پراز یاس و بدبینی بود.» در قسمت دوم این مقاله خواننده را با پیشرفت های اساسی صورت پذیرفته در دهه ۹۰ میلادی و بعد از آن، آشنا خواهیم کرد. همچنین به طرح برخی مسائل باز و مبارز طلب مبادرت خواهیم کرد.

1) Singly generated 2) index 3) C. Apostol 4) Bercovici 5) Foias 6) Percy  
7) lattice 8) Sarason, D. 9) annihilator

## مراجع

- [1] Apostol, C., Bercovici, H., Foias, C., Percy, C., "Invariant subspaces, dilation theory, and the structure of the Predual of a dual algebra, I", *J. Functional Anal.*, **63**: 3(1985), 369-404.
- [2] Bergman, S., *The kernel function and conformal mapping*, revised ed., Mathematical Surveys 5, American Mathematical Society, Providence, 1970.
- [3] Beurling, A., "On two problems concerning linear transformations in Hilbert spaces", *Acta Math.*, **81**(1949), 239-255.
- [4] Duren, P. L., *Theory of  $H^p$  spaces*, Academic Press, 1970.
- [5] Duren, P. L., Schuster, A., *Theory of Bergman spaces*, American Mathematical Society, Mathematical Surveys and Monographs, Volume 100, Providence, RI, 2004.
- [6] Garnett, J. B., *Bounded analytic functions*, Academic Press, 1981.
- [7] Hardy, G. H., "On the mean value of the modulus of an analytic function", *Proc. London Math. Soc.*, **14**(1915), 269-277.
- [8] Hedenmalm, H., Korenblum, B., Zhu, K., *Theory of Bergman spaces*, Springer-Verlag, 2000.
- [9] Hoffman, K., *Banach spaces of analytic functions*, Prentice Hall, 1962.
- [10] Horowitz, Ch., "Zeros of functions in the Bergman spaces", *Duke Math. J.*, **41**(1974), 643-710.
- [11] Koosis, P., *Lectures on  $H^p$  spaces*, Cambridge University Press, 1980.
- [12] Richter, S., "Invariant subspaces in Banach spaces of analytic functions", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **304**(1987), 585-616.
- [13] Rudin, W., *Real and complex analysis*, Mc Graw Hill, 1987.
- [14] Sarason, D., *Holomorphic spaces: a brief and selective survey*, MSRI, 1998.

[15] Zhu, K., *Operator theory in function spaces*, Marcel-Dekker, New York, 2007.

[۱۶] صدیقی، کریم و خانى رباطى، بهمن، «فضاهای برگمن»، فرهنگ و اندیشه ریاضی،  
جلد ۱۳، بهار ۱۳۷۳، ۳۲-۱۳

---

علی آبکار

قزوین، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره) - صندوق پستی ۲۸۸

abkar@ikiu.ac.ir

# شفاف‌سازی تصاویر با استفاده از تجزیه مقادیر تکین و الگوریتم‌های بهینه‌سازی

مازیار صلاحی، حبیبه رمضان‌نژاد آزارینی

## چکیده

شفاف‌سازی تصاویریکی از مسائل مهم پردازش تصویر به شمار می‌رود و از نوع مسائل وارون است. روش‌های کلاسیک برای حل این نوع مسائل، روش‌های گسسته‌سازی هستند که به دلیل بدحالت بودن ماتریس ضرایب، معمولاً به جواب قابل قبول منجر نمی‌شوند. در اینجا ابتدا به معرفی مقدمات مورد نیاز جبرخطی در پردازش تصویر می‌پردازیم و سپس مفاهیم اولیه تصویر را بیان می‌کنیم. در ادامه، رفتار روش‌های منظم‌سازی، تجزیه مقادیر تکین و تجزیه مقادیر تکین برشی را در حل این مسائل بررسی می‌کنیم و به مقایسه آن‌ها می‌پردازیم.

## ۱. مقدمه

در تصویربرداری، اغلب به دلایل متفاوتی از داشتن یک تصویر شفاف محروم می‌شویم که از جمله آن‌ها می‌توان به محدودیت میزان دریافت نور توسط لنز دوربین، حرکت کردن تصویرگر و یا شیئی که از آن تصویربرداری می‌شود، وجود گرد و غبار در محیط محل عکسبرداری، دور بودن جسم از دوربین و... اشاره کرد. از طرف دیگر، گاهی اوقات می‌خواهیم از تصویر یا اطلاعاتی که به صورت عکس در اختیار داریم، محافظت کنیم به طوری که تصویر قابل رؤیت نباشد و هر گاه نیاز به بازبینی آن باشد، بتوانیم آن را به حالت اولیه برگردانیم. با این فرض، شناخت روش‌هایی که

بتوان تصویری را غیرشفاف<sup>۱</sup> کرد و سپس تصویری شفاف<sup>۲</sup> از آن به دست آورد، ضرورت دارد. در سال‌های اخیر، مطالعات گسترده‌ای در این زمینه به عمل آمده است. به عنوان مثال، افرادی چون هنس<sup>۳</sup>، نگی<sup>۴</sup>، اولری<sup>۵</sup> و ... با کمک روش‌های تکراری به بازسازی تصاویر پرداخته‌اند ([۳]).

در این مقاله، ابتدا به معرفی برخی مقدمات جبرخطی مورد نیاز در شفاف‌سازی تصاویر می‌پردازیم. سپس مقدمه‌ای از تصویر را بیان می‌کنیم و با استفاده از روش‌هایی همچون تجزیهٔ مقادیر تکین، تجزیهٔ مقادیر تکین برشی و منظم‌سازی تیخونوف<sup>۶</sup> به شفاف‌سازی آن‌ها می‌پردازیم. سرانجام، با ارائهٔ چند مثال، نقاط قوت و ضعف روش‌های یادشده را تشریح می‌کنیم.

## ۲. مقدمات جبرخطی

در این بخش، به معرفی نوعی از تجزیه می‌پردازیم که اهمیت زیادی در مباحث مختلف ریاضی، فیزیک و مهندسی دارد. ابتدا به وجود این تجزیه و برخی خواص مهم آن می‌پردازیم و سپس اهمیت آن را در پردازش تصویر مورد مطالعه قرار می‌دهیم ([۱]).

قضیه برای ماتریس  $A_{m \times n}$ ، ماتریس‌های متعامد  $U_{m \times m}$  و  $V_{n \times n}$  وجود دارند به طوری که

$$U^T A V = \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \Sigma$$

که در آن،  $\Sigma$  یک ماتریس قطری است. عناصر ماتریس  $\Sigma$  همگی نامنفی‌اند و به صورت نافزایشی مرتب شده‌اند. تعداد عناصر قطری و ناصفر ماتریس  $\Sigma$ ، بُعد ماتریس  $A$  را نشان می‌دهد. این تجزیهٔ یکتا را تجزیهٔ مقادیر تکین ( $SVD$ ) ماتریس  $A$  می‌گویند.

حال جواب دستگاه

$$Ax = b \quad (1)$$

وقتی  $A$  یک ماتریس مربعی وارون‌پذیر باشد با کمک تجزیهٔ  $SVD$  به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$x = V^{-1} \Sigma^{-1} U^{-T} b = V \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_n} \end{pmatrix} U^T b = \sum_{i=1}^n \frac{u_i^T b}{\sigma_i} v_i.$$

اما با توجه به این‌که در بسیاری از مسائل واقعی، ماتریس ضرایب دستگاه (۱) بدحالت است،

جواب حاصل از روش SVD می‌تواند از جواب واقعی بسیار دور باشد. برای تشریح این موضوع، مسأله بدحالت shaw از [۴] را در نظر می‌گیریم. در این مسأله، شکل گسسته معادله انتگرال فردهلم در بازه  $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$  محاسبه می‌شود که در آن، هسته  $k$  و جواب  $f(t)$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

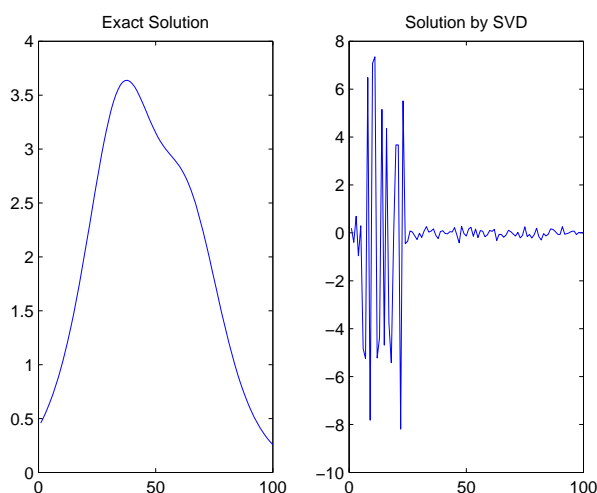
$$k(s, t) = (\cos(s) + \cos(t))(\sin(u)/u)^2, \quad u = \pi(\sin(s) + \sin(t)),$$

$$f(t) = a_1 \exp(c_1(t - t_1)^2) + a_2 \exp(-c_2(t - t_2)^2).$$

این مسأله با دریافت عدد زوج و صحیح  $n$  به عنوان بُعد ماتریس، بردار  $b$ ، ماتریس  $A$  و بردار جواب واقعی  $x$  را در اختیار قرار می‌دهد. در نرم‌افزار متلب ([۷]) با دستورالعمل زیر این مسأله قابل فراخوانی و اجراست:

```
>> [ A , b , x ] = shaw ( n ) ;
```

جواب واقعی و جواب محاسبه شده با روش SVD برای مسأله shaw با بُعد ۱۰۰ در شکل ۱ آمده است. همان‌طور که می‌بینیم، جواب محاسبه شده با جواب واقعی بسیار متفاوت است. لذا در ادامه، به معرفی تجزیه مقادیر تکین برشی TSVD می‌پردازیم که می‌تواند نتایج حاصل از حل دستگاه‌های بدحالت را با روش‌های مختلف بهبود بخشد.



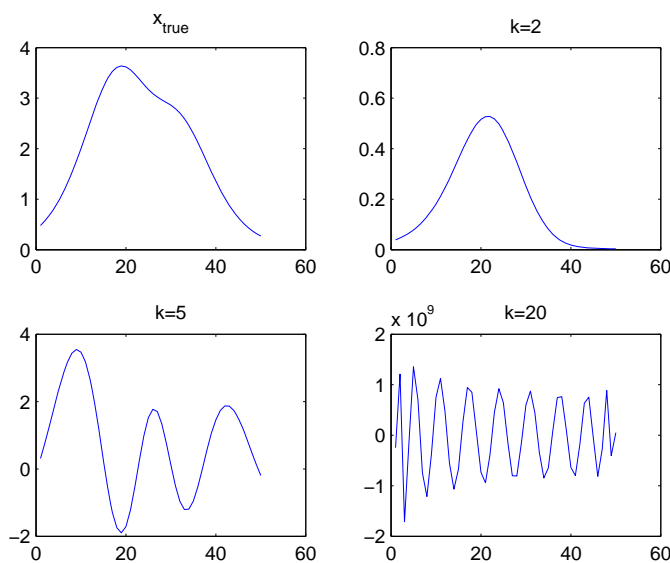
شکل ۱. حل دستگاه (۱) به روش SVD با استفاده از مسأله shaw(100)

همان‌طور که می‌دانیم، تعداد ستون‌های مستقل خطی ماتریس  $A$ ، رتبه ماتریس است. از طرف

دیگر، رتبهٔ ماتریس  $A$  برابر با تعداد مقادیر تکین مثبت آن است. از لحاظ ریاضی، این تعریف کاملاً درست است، اما از نظر عددی به‌علت وجود خطاهای ناشی از تقریب، گسسته‌سازی و گرد کردن، ممکن است ماتریس، استقلال خطی خود را حفظ نکند. به عبارت دیگر، در مسائل بدحالت گسسته‌سازی شده، با وجود این‌که ماتریس  $A$  از لحاظ ریاضی کمبود رتبه ندارد، اما کمبود رتبهٔ عددی دارد. این ناسازگاری به‌علت وجود یک یا چند مقدار تکین بسیار کوچک رخ می‌دهد. وجود این مقادیر تکین کوچک می‌تواند باعث افزایش تأثیر خطای  $u_i^T b$  در حل دستگاه (۱) شود. در روشی که به روش تجزیهٔ مقادیر تکین برشی (TSVD) معروف است، ماتریس دیگری را جایگزین  $A$  می‌کنند. در واقع، ماتریس  $A_k$  تقریبی از ماتریس  $A$  است که به‌جای مقادیر تکین کوچک  $\{\sigma_k, \sigma_{k+1}, \dots, \sigma_n\}$ ، مقدار صفر جایگزین می‌شود، یعنی  $\Sigma_k = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k, 0, \dots, 0)$ . بنابراین،  $A_k = U^T \Sigma_k$ . حال اگر به‌جای دستگاه (۱)، دستگاه  $A_k x = b$  را حل کنیم، جواب آن به صورت

$$x = \sum_{i=1}^k \frac{u_i^T b}{\sigma_i} v_i$$

است. جواب حاصل از حل دستگاه با روش TSVD با برش‌های مختلف در شکل ۲ آمده است.



شکل ۲. برش‌های مختلف از مسألهٔ shaw(50)



همان طور که مشاهده می‌شود، با انتخاب برش‌های مناسب، روش TSVD تقریب قابل قبولی از جواب واقعی را نتیجه می‌دهد. در بخش‌های بعدی چند معیار برای انتخاب پارامتر  $k$  معرفی می‌شوند.

### ۳. خلاصه‌ای از ساختار عدسی دوربین و بررسی رفتار آن

(۱) عدسی محدب: هرگاه مجموعه‌ای از منشورها طوری برش داده شوند که دارای لبه‌های باریک و قسمت میانی ضخیم باشند، یک عدسی محدب به دست می‌آید.

(۲) کانون عدسی محدب: هرگاه یک دسته نور مستقیم را به یک عدسی محدب بتابانیم، هنگام عبور از عدسی محدب، شعاع‌های نور در یک نقطه جمع می‌شوند. این نقطه را کانون عدسی محدب می‌نامند و آن را با  $F$  و شعاع عدسی را با  $2F$  نشان می‌دهند.

(۳) فاصله کانونی عدسی محدب: فاصله بین مرکز عدسی تا کانون آن را فاصله کانونی عدسی محدب گویند.

(۴) تصویر حقیقی: وقتی پرتوهای حقیقی نور هم‌دیگر را قطع کنند، با قرار دادن پرده‌ای در محل تقاطع، می‌توان تصویر جسم را مشاهده کرد. در این حالت، تصویر از نوع حقیقی است.

(۵) تصویر مجازی: وقتی پرتوهای حقیقی، هم‌دیگر را قطع نکنند ولی به نظر برسد که امتداد آن‌ها به هم می‌رسند، در این حالت هیچ تصویری روی پرده ظاهر نمی‌شود. اگرچه می‌توان به صورت نظری این برخورد پرتوها را نشان داد، ولی در عمل، هیچ‌گاه این امر رخ نمی‌دهد. به این نوع از تصویر، تصویر مجازی گفته می‌شود.

یک جسم می‌تواند در فاصله‌های متفاوتی از مرکز عدسی قرار گیرد، بنابراین، با توجه به مکان قرار گرفتن جسم، تصاویر متفاوتی به دست می‌آیند. این مطلب را می‌توان در چند حالت زیر بیان کرد.

حالت ۱: وقتی جسم در فاصله کانونی عدسی واقع شود، تصویر تولید شده، مجازی، بزرگتر از جسم، مستقیم و در همان سمت جسم تولید می‌شود.

حالت ۲: وقتی جسم در کانون عدسی واقع شود، تصویر تولید شده، حقیقی، بزرگتر از جسم، وارون و در طرف دیگر عدسی و در فاصله بی‌نهایت فیزیکی تولید می‌شود.

حالت ۳: وقتی جسم در فاصله  $F$  تا  $2F$  عدسی واقع شود، تصویر تولید شده، حقیقی، کوچکتر از جسم، وارون و در طرف دیگر عدسی و در خارج از  $2F'$  (دو برابر کانون عدسی که در سمت دیگر آن وجود دارد) تولید می‌شود.

حالت ۴: وقتی جسم، روی  $2F$  عدسی واقع شود، تصویر تولید شده، حقیقی، هم‌اندازه با جسم،

وارون و در طرف دیگر عدسی روی  $F'$  تولید می‌شود.  
حالت ۵: وقتی جسم، خارج از  $F$  عدسی واقع شود، تصویر تولید شده، حقیقی، کوچکتر از جسم، وارون و در طرف دیگر عدسی در فاصله  $F'$  تا  $F'$  تولید می‌شود.

#### ۴. مفاهیم اولیهٔ تصویر

تصاویر رقمی<sup>۱</sup> از تعداد زیادی مربعات کوچک به نام پیکسل<sup>۲</sup> تشکیل شده‌اند. هر پیکسل یک شمارهٔ رقمی<sup>۳</sup> دارد که میزان روشنایی آن پیکسل را نشان می‌دهد. یک تصویر کوچک حدوداً از  $256 \times 256$  پیکسل و عکس‌های بزرگتر از  $5$  تا  $10$  میلیون پیکسل ساخته شده‌اند. تصاویر می‌توانند خاکستری<sup>۴</sup> یا رنگی باشند و نوع رنگی آن نیز دارای زیر شاخه‌هایی مانند RGB<sup>۵</sup>، CMY<sup>۶</sup> و HSV<sup>۷</sup> است. البته نوع غیررنگی آن که معمولاً به آن سیاه و سفید می‌گویند، وقتی به وجود می‌آید که مؤلفه‌های  $R$ ،  $G$  و  $B$  مقداری یکسان داشته باشند. تعداد بیت‌های تشکیل دهندهٔ تصاویر نیز متفاوت است. به‌عنوان مثال، تصاویر RGB، ۳۶، تصاویر CMY، ۶۴ و تصاویر سیاه و سفید، ۱۶ بیتی هستند. رنگ‌ها می‌توانند در بازه‌های (۰، ۲۵۵) و (۰، ۶۵۵۳۵) نمایش داده شوند و همهٔ این بازه‌ها قابل انتقال به بازهٔ (۰، ۱) هستند. کران پایین هر بازه نمایندهٔ رنگ سیاه، کران بالا، نمایانگر رنگ سفید و مقادیر درون بازه، به صورت افزایشی، معرف رنگ‌های تیره تا روشن هستند. تصاویر می‌توانند پسوندهای متفاوتی داشته باشند که از جملهٔ آن‌ها می‌توان به GIF<sup>۸</sup>، JPEG<sup>۹</sup>، PNG<sup>۱۰</sup> و TIFF<sup>۱۱</sup> اشاره کرد. بازسازی تصویر در دو حوزهٔ مکانی و فرکانسی انجام می‌گیرد. در حوزهٔ مکانی، با استفاده از پیکسل‌های همسایه و در حوزهٔ فرکانسی با کمک بسط فوریه و موجک، کار بهبود تصویر انجام می‌گیرد. بازسازی تصاویر در حوزهٔ مکانی به علت وابسته شدن آن به پیکسل‌های همسایه که همان ماتریس‌های تشکیل دهندهٔ تصویر هستند، ما را به استفاده از مفاهیم جبرخطی هدایت می‌کند. در اینجا شفاف‌سازی تصویر را در حوزهٔ مکانی بررسی می‌کنیم ([۳]).

تابعی که میزان و نوع تار شدن ناشی از تصویربرداری از منبع نقطه‌ای نور را شرح می‌دهد، PSF<sup>۱۲</sup> نامیده می‌شود. به بیان ریاضی، منبع نقطه‌ای<sup>۱۳</sup>، ماتریسی است که در آن به جز یک یا چند درایهٔ محدود که مقدار برابر یک دارند، سایر درایه‌ها صفر هستند.

---

1) Digital    2) Pixel    3) Digital number    4) Grayscale    5) Red Green Blue  
6) Cyan Magenta Yellow    7) Hue Saturation Value    8) Graphics Interchange Format  
9) Joint Photographic Experts Group    10) Portable Network Graphics    11) Tagged Image File Format  
12) Point Spread Function    13) Point source

به بیان دیگر، وقتی از یک عکس که به جز یک یا چند پیکسل سفید، سایر پیکسل‌ها، سیاه باشند، دوباره عکسبرداری کنیم، این کار باعث می‌شود که پیکسل‌های روشن در همسایگی خود گسترده شوند. تابع PSF چگونگی این گسترده شدن روشنایی را بیان می‌کند. فرمول‌های صریحی از تابع PSF وجود دارند که از جمله آن‌ها می‌توان به توابع زیر اشاره کرد.

- اگر  $p_{ij}$  مؤلفه‌ای از ماتریس مورد نظر باشد، در حالت خارج از محدوده تمرکز لنز دوربین<sup>1</sup>، تابع PSF را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\pi r^2} & (i-k)^2 + (j-l)^2 \leq r^2 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که در آن،  $k$  و  $l$  به ترتیب طول و عرض پیکسل مورد مطالعه را نسبت به مرکز  $(i, j)$  و شعاع  $r$  نشان می‌دهند. در نرم‌افزار متلب به این تابع، PSF Defocus گویند.

- نوع دیگری از این توابع که معمولاً در تصویر برداری‌هایی که تحت تأثیر شرایط فضای موجود در ناحیه عکس‌برداری قرار دارند، به کار برده می‌شود، تابع گوسی<sup>2</sup> است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$p_{ij} = \exp \left( -\frac{1}{\rho^2} \begin{pmatrix} i-k \\ j-l \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} s_x^2 & \rho^2 \\ \rho^2 & s_y^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} i-k \\ j-l \end{pmatrix} \right)$$

که در آن،  $s_x$  و  $s_y$  جهت‌ها و  $\rho$  شعاع PSF را نسبت به مرکز  $(k, l)$  نشان می‌دهد.

معمولاً PSF گوسی مورد استفاده در تصاویر، از نوع متقارن گردشی است که می‌توان با شعاع  $s$  میزان عدم شفافیت تصویر را کنترل کرد. در حالت Defocus، این کنترل با شعاع  $r$  انجام می‌گیرد. با توجه به ساختار عدسی دوربین‌های عکسبرداری و چگونگی ایجاد تصویر بر اساس مکان قرار گرفتن منبع نقطه‌ای نور، شعاع PSF را تغییر می‌دهیم. اگر این افزایش شعاع تا جایی ادامه پیدا کند که منبع نقطه‌ای نور همچنان در خارج از فاصله کانونی عدسی دوربین قرار گیرد، چون تصویر ایجاد شده تصویری حقیقی است، می‌توانیم آن را روی پرده ظاهر کنیم. ولی اگر منبع نقطه‌ای در فاصله کانونی واقع شود، تصویر آن مجازی خواهد بود و روی پرده ظاهر نمی‌شود. با توجه به ساختار فیزیکی PSF گوسی که به صورت نقطه‌ای روشن همراه با هاله‌ای از روشنایی است، می‌توان شعاع‌های متفاوتی را بررسی کرد.

1) Out of focus    2) Gaussian function

به عنوان مثال، در PSF گوسی با شعاع  $s = 5$ ، نقطهٔ روشن در بی‌نهایت فیزیکی عدسی واقع می‌شود و تصویر ایجاد شده روی پرده نسبتاً واضح خواهد بود، اما اگر این شعاع را به  $s = 10$  افزایش دهیم، قسمتی از هالهٔ روشنایی در فاصله‌های  $F$  تا  $2F$  عدسی دوربین قرار می‌گیرد و تصویر حقیقی آن‌ها نیز روی پرده به همان صورت غیرشفاف تشکیل می‌شود. بنابراین، تصویر نهایی وضوح کافی نخواهد داشت. ولی اگر شعاع  $PSF$  را آن‌قدر بزرگ در نظر بگیریم که هالهٔ روشنایی، در فاصلهٔ کانونی واقع شود، آن‌گاه تصویر نهایی وضوح بهتری خواهد داشت. چون از یک طرف، تصویر هالهٔ روشن به علت مجازی بودنش، روی پرده ظاهر نمی‌شود و از طرف دیگر، کل منبع نقطه‌ای، روشنایی تقریباً یکنواخت می‌شود و تصویرش نیز دارای وضوح بهتری خواهد بود. در حالت Defocus، چون هالهٔ روشنایی وجود ندارند، یا تصویر به علت مجازی بودن تشکیل نمی‌شود و یا در صورت حقیقی بودن، به صورت کاملاً شفاف، تشکیل می‌شود. این پدیده‌ها در شکل‌های ۳ و ۴ نمایش داده شده‌اند.

(شرایط مرزی): وقتی یک پیکسل تار وجود داشته باشد، شناخت میزان تاری همسایه‌های این پیکسل، به بازسازی مطلوب تصویر کمک می‌کند. قوانین و شرایطی را در لبه‌های پیکسل تار در نظر می‌گیریم که به آن‌ها شرایط مرزی می‌گویند و به صورت زیر دسته‌بندی می‌شوند:

الف. (شرایط مرزی صفر): ساده‌ترین نوع از شرایط این است که فرض کنیم همهٔ پیکسل‌ها در خارج از پیکسل‌های مورد مطالعه، سیاه هستند، یعنی مقدار آن‌ها در خارج از حوزهٔ مطالعه برابر صفر است. در این حالت، می‌توان تصویر اصلی را درون یک تصویر بزرگتر، جاسازی کرد. اگر تصویر اصلی را  $X$  بنامیم، آن‌گاه شرایط مرزی صفر را می‌توان به صورت  $X_{ext} = \begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & X & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}$  بیان کرد.

ب. (شرایط مرزی متناوب): هرگاه تصویر، خود را در همهٔ جهت‌ها تکرار کند، در شرایط مرزی متناوب قرار می‌گیرد. اگر تصویر اصلی را  $X$  بنامیم، شرایط مرزی متناوب را می‌توان به صورت

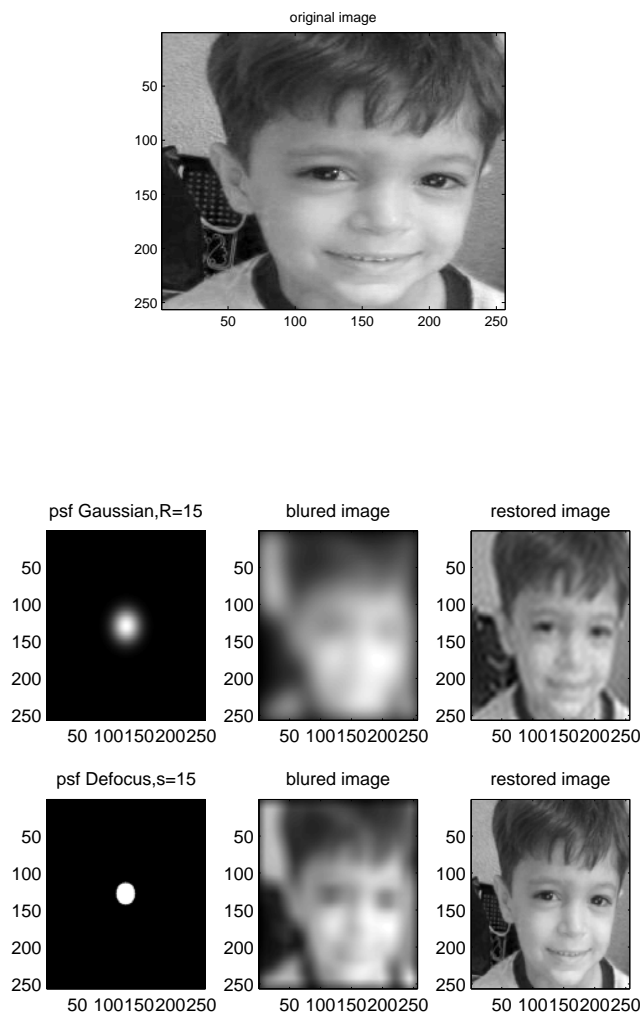
$$X_{ext} = \begin{pmatrix} X & X & X \\ X & X & X \\ X & X & X \end{pmatrix} \text{ بیان کرد.}$$

پ. (شرایط مرزی انعکاسی): وقتی همسایگی پیکسل‌های مورد مطالعه، تصویری از پیکسل‌های درون آن باشد، شرایط مرزی انعکاسی ایجاد می‌شود. اگر تصویر اصلی را  $X$  بنامیم، آن‌گاه

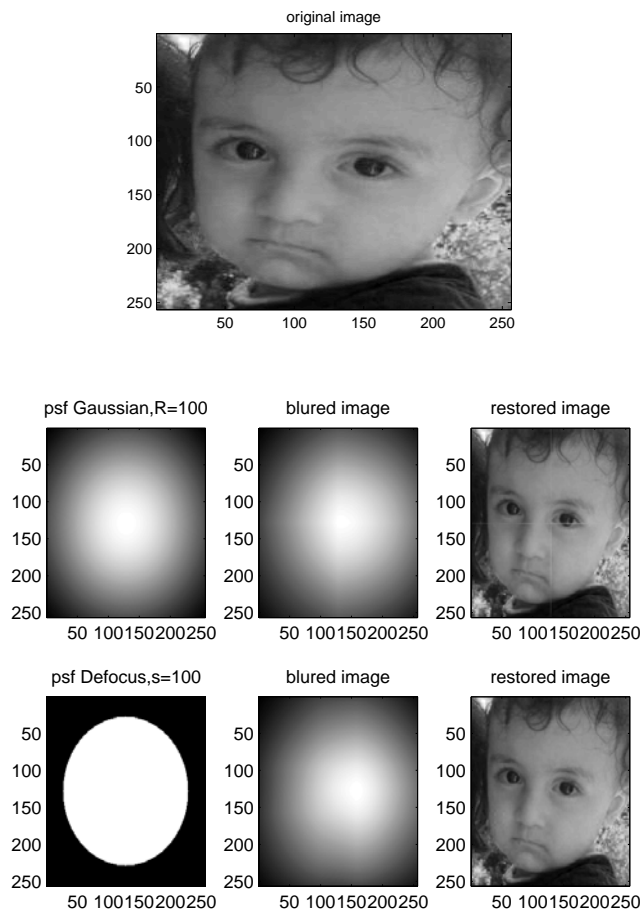
$$X_{ext} = \begin{pmatrix} X_x & X_{ud} & X_x \\ X_{lr} & X & X_{lr} \\ X_x & X_{ud} & X_x \end{pmatrix} \text{ بیان کرد که در آن،}$$

$X_{lr} = \text{fliplr}(X)$  تابعی است که جای مؤلفه‌های چپ PSF را با مؤلفه‌های راست عوض می‌کند. به همین ترتیب، تابع  $X_{ud} = \text{flipud}(X)$  جای مؤلفه‌های بالای PSF را با مؤلفه‌های پایین آن

عوض می‌کند و تابع  $X_x = flipud(X_{ud})$  به صورت قطری این جابه‌جایی‌ها را انجام می‌دهد.



شکل ۳. در این تصویر چون شعاع PSF ( $s = R = 15$ ) تا اندازه‌ای بزرگ شده است که هاله‌های روشنی در PSF گوسی، تولید تصویر کرده‌اند، رفتار نامطلوبی نسبت به PSF Defocus مشاهده می‌شود.



شکل ۴. در این تصویر، چون شعاع PSF ( $s = R = 100$ ) تا اندازه‌ای بزرگ شده است که هاله‌های روشنی در  $PSF$  گوسی، وارد فاصلهٔ کانونی شده‌اند و قادر به تولید تصویر حقیقی نیستند، رفتاری تقریباً مشابه PSF Defocus مشاهده می‌شود.

برای شناخت بهتر PSF و شرایط مرزی، مثال ماتریسی زیر را بررسی می‌کنیم.

مثال. اگر تصویر اصلی و همسایگی‌های آن به صورت  $[w_1, w_2, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2]^T$  و PSF این تصویر،  $[p_1, p_2, p_3, p_4, p_5]^T$  باشد و مرکز این PSF درایه  $p_3$  باشد، آن‌گاه می‌توان بردار  $[b_1, b_2, b_3, b_4, b_5]^T$  را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

حال شرایط مرزی مختلف را روی این دستگاه اعمال می‌کنیم. در شرایط مرزی صفر، همسایگی‌ها که همان لبه‌های تصویر اصلی هستند در نظر گرفته نمی‌شوند و بنابراین  $y_1 = y_2 = w_1 = w_2 = 0$ . در این حالت، دستگاه (۲) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_3 & p_2 & p_1 & 0 & 0 \\ p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & 0 \\ p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 \\ 0 & p_5 & p_4 & p_3 & p_2 \\ 0 & 0 & p_5 & p_4 & p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

به ماتریس سمت راست (۳) که درایه‌های قطری آن مقادیر ثابت دارند، ماتریس Toeplitz با پارامتر  $p$  گویند. در شرایط مرزی متناوب، چون  $y_1 = x_1, y_2 = x_2, w_1 = x_4, w_2 = x_5$ ، دستگاه (۲) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_3 & p_2 & p_1 & p_5 & p_4 \\ p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & p_5 \\ p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 \\ p_1 & p_5 & p_4 & p_3 & p_2 \\ p_2 & p_1 & p_5 & p_4 & p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

به ماتریس (۴) که در هر سطر و هر ستون آن یک جابه‌جایی رخ داده است، ماتریس چرخشی<sup>۱</sup> گویند. در شرایط مرزی انعکاسی، چون منظره بیرون تصویر اصلی، بازتاب آینه‌گون از درون تصویر است،

1) Circulant matrix

شفاف‌سازی تصاویر با استفاده از تجزیهٔ مقادیر تکین و الگوریتم‌های بهینه‌سازی — ۷۰

شرایط  $w_1 = x_2, w_2 = x_1, y_1 = x_5, y_2 = x_4$  برقرار می‌شوند و دستگاه (۲) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_2 + p_4 & p_2 + p_5 & p_1 & p_5 & p_4 \\ p_4 + p_5 & p_3 & p_2 & p_1 & p_5 \\ p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 \\ p_1 & p_5 & p_4 & p_3 & p_2 + p_1 \\ p_2 & p_1 & p_5 & p_4 + p_1 & p_3 + p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

ماتریس ظاهر شده در (۵) ماتریس Toeplitz-Plus-Hankel نامیده می‌شود. از ترکیب این سه نوع ماتریس، ماتریس‌های بلوکی  $BTHB, BHTB, BTTB$  و  $BHHB$  ساخته می‌شوند.

## ۹. شفاف‌سازی تصویر با استفاده از روش‌های جبرخطی

شفاف‌سازی تصویر، یک مثال از حل مسألهٔ بدحالت  $b = Ax + e$  است که در آن، بردار  $b$  نشان‌دهندهٔ تصویر غیرشفاف، ماتریس  $A$  عملگر تارکنندهٔ تصویر و بردار  $e$  میزان نویز<sup>۱</sup> موجود در تصویر  $x$  را نشان می‌دهد. ماتریس‌های  $(Ar)_{n \times n}$  و  $(Ac)_{m \times m}$  را که به ترتیب ماتریس‌های عملگر افقی و قائم می‌نامند و حاصلضرب کرونکر آن‌ها،  $Ar \otimes Ac$ ، ماتریس عملگر تاری  $A$  را می‌سازد، به دست می‌آوریم. اگر به طور مستقیم این ماتریس‌ها قابل محاسبه نباشند، آن‌گاه می‌توان تقریب مناسبی از آن‌ها را استفاده کرد ([۳]، [۴]، [۵]). فرض کنیم  $P$  همان  $PSF$  با بُعد  $m \times n$  باشد و بتوان آن را به صورت حاصلضرب دو زیر بردار نمایش داد:

$$P = cr^T = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} (r_1 \quad \dots \quad r_n).$$

ساختار  $Ar$  و  $Ac$  به نوع شرایط مرزی وابسته است. برای مثال اگر  $PSF$  یک ماتریس  $3 \times 3$  باشد، آن‌گاه داریم

$$P = cr^T = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} (r_1 \quad r_2 \quad r_3) = \begin{pmatrix} c_1 r_1 & c_1 r_2 & c_1 r_3 \\ c_2 r_1 & c_2 r_2 & c_2 r_3 \\ c_3 r_1 & c_3 r_2 & c_3 r_3 \end{pmatrix}.$$

1) Noise



در شرایط مرزی صفر، ماتریس‌های  $A_r$  و  $A_c$  به صورت زیر هستند:

$$A_r = \begin{pmatrix} r_2 & r_1 & 0 \\ r_2 & r_2 & r_1 \\ 0 & r_2 & r_2 \end{pmatrix}, \quad A_c = \begin{pmatrix} c_2 & c_1 & 0 \\ c_2 & c_2 & c_1 \\ 0 & c_2 & c_2 \end{pmatrix}.$$

لازم به ذکر است که مقادیر  $r$  و  $c$  از محاسبه بزرگترین مقدار تکین ماتریس  $P$  و بردار تکین متناظر آن به دست می‌آید، که در نرم‌افزار متلب با استفاده از فرمان‌های زیر قابل محاسبه هستند (([۷]):

```
>> [ U , S , V ] = svds ( P , 1 );
```

```
>> c = sqrt ( S ) * U ;
```

```
>> r = sqrt ( S ) * V ;
```

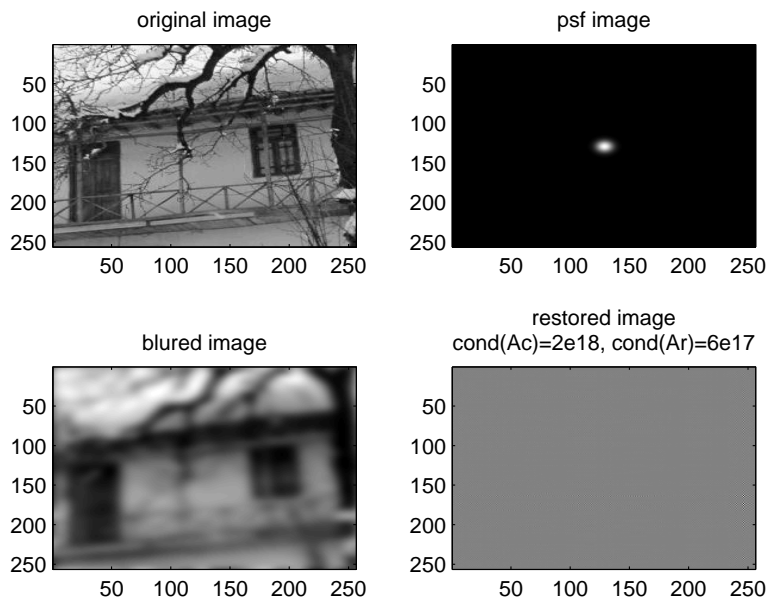
اگر ماتریس  $A_r$  دارای بُعد  $n \times n$  و ماتریس  $A_c$  دارای بُعد  $m \times m$  باشد، طبق خواص ضرب کرونگر، بُعد ماتریس  $A = A_r \otimes A_c$  برابر با  $mn \times mn$  خواهد بود. بنابراین، دستگاه  $Ax = b$  هم‌ارز رابطه ماتریس - ماتریس  $B = A_c X A_r^T$  است که در آن،  $b = Vec(B)$  و  $x = Vec(X)$ . چون بُعد ماتریس‌های  $A_r$  و  $A_c$  نسبت به بُعد  $A$  کوچک است، ساختار ساده‌تری در اختیار است و از طرف دیگر، محاسبات ماتریس - ماتریس در نرم‌افزار متلب به صورت ساده‌تری قابل انجام است.

```
>> B = Ac * X * Ar';
```

ساختار ماتریس‌های  $A_r$  و  $A_c$  با در نظر گرفتن شرایط مرزی صفر، متناوب و انعکاسی به ترتیب به صورت ماتریس‌های Toeplitz، چرخشی Toeplitz-Plus-Hankel است که ماتریس‌های چندقطری، متقارن و نسبت به ماتریس  $A$  خوش حالت‌تر هستند. بنابراین، بهتر است از این ماتریس‌ها استفاده شود. همچنین اگر ماتریس‌های  $A_r$  و  $A_c$  نامنفرد باشند، آن‌گاه حاصل  $(A_r \otimes A_c)x = b$  را می‌توان به صورت  $X = A_c^{-1} B A_r^{-T}$  و با دستورالعمل زیر به دست آورد:

```
>> X = Ac \ B / Ar';
```

در شکل ۵ به علت استفاده مستقیم از ماتریس‌های  $A_c$  و  $A_r$  و بدحالت بودن آن‌ها نتیجه نامطلوبی از بازسازی تصویر حاصل شده است.



شکل ۵. بازسازی نامطلوب تصویر به کمک الگوریتم  $X = A_c^{-1} B A_r^{-T}$ . عدد حالت  $A_c$  و  $A_r$  بسیار بزرگ است.

روش شفاف‌سازی تصاویر با استفاده از تجزیه SVD سه مرحله دارد:

الف) تجزیه SVD ماتریس  $A_c$  را به صورت  $A_c = U_c \Sigma_c V_c^T$  به دست آورید.

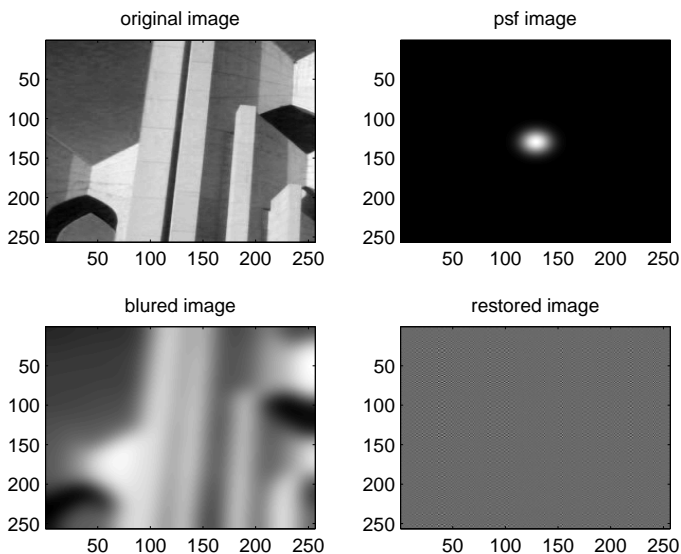
ب) تجزیه SVD ماتریس  $A_r$  را به صورت  $A_r = U_r \Sigma_r V_r^T$  به دست آورید.

پ) حاصل  $X = A_c^{-1} B A_r^{-T}$  را به شکل  $X = (U_c \Sigma_c V_c^T)^{-1} B (U_r \Sigma_r V_r^T)^{-T}$  در آورید. چون  $U_c^{-1} = U_c^T$  و  $V_c^{-T} = (V_c^T)^T = V_c$  پس

$$X = (V_c \Sigma_c^{-1} U_c^T) B (U_r \Sigma_r U_r^T).$$

اگر فرض کنیم  $\hat{B} = U_c^T B U_r$  و  $S = \text{diag}(\Sigma_c) \times \text{diag}(\Sigma_r)$ ، آن‌گاه  $X = \Sigma_c^{-1} \hat{B} \Sigma_r$  در نرم‌افزار متلب  $X$  را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

```
>> X = Vc * ( ( Uc' * B * Ur) . / S) * Vr' ;
```



شکل ۶. شفاف‌سازی تصویر به کمک الگوریتم SVD

در شکل ۶ با استفاده از روش یادشده، شفاف‌سازی تصویر انجام گرفته است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، به کارگیری روش SVD در ماتریس‌های بدحالت، نتیجه مطلوبی را ارائه نمی‌دهد. از این‌رو، TSVD را بررسی می‌کنیم.

همان‌طور که قبلاً اشاره شد، استفاده از روش TSVD با برش‌های مناسب می‌تواند به جواب قابل قبولی منجر شود. این برش‌ها به کمک عوامل فیلترکننده<sup>۱</sup> تعریف می‌شوند. عوامل فیلترکننده متعددی وجود دارند که از جمله آن‌ها، عامل فیلترکننده TSVD و عامل فیلترکننده تیخونف هستند.

تابع  $\phi$  را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\phi_i = \begin{cases} 1 & i = 1, 2, \dots, k \\ 0 & i = k + 1, \dots, n \end{cases}$$

با این عامل فیلترکننده TSVD، مقدار  $x_k$  را به جای  $x$  به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

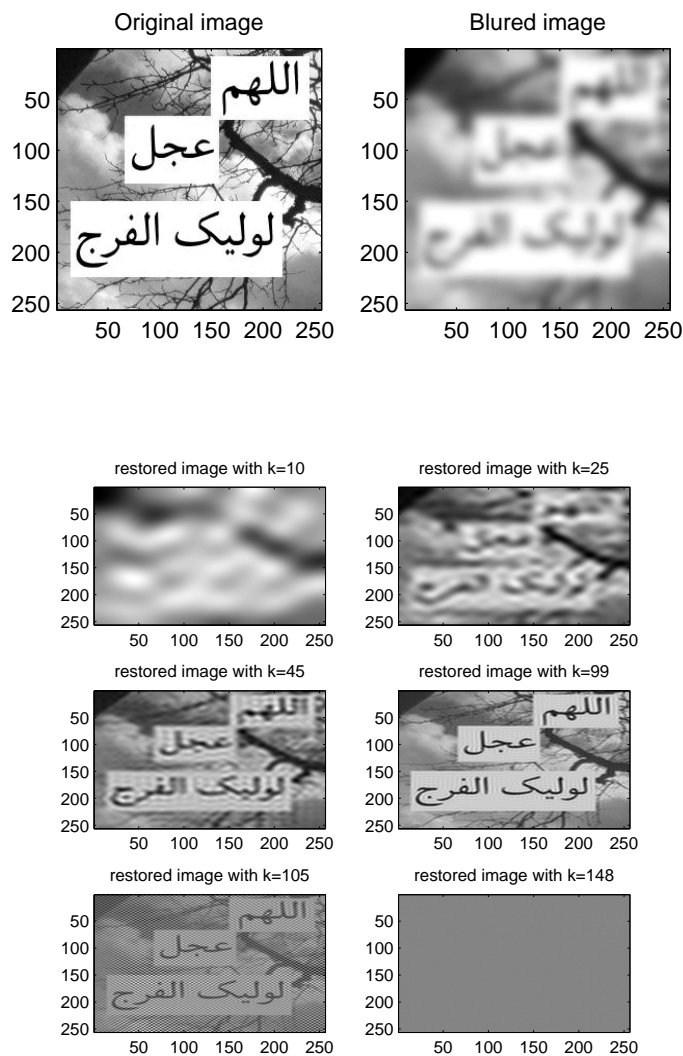
$$x_k = \sum_{i=1}^n \phi_i \frac{u_i^T b}{\sigma_i} v_i = \sum_{i=1}^k \frac{u_i^T b}{\sigma_i} v_i$$

که در آن، به  $k$  پارامتر برشی می‌گویند و در هر مسأله می‌تواند مقداری مستقل انتخاب شود.

1) Filter factor

شفاف‌سازی تصاویر با استفاده از تجزیهٔ مقادیر تکین و الگوریتم‌های بهینه‌سازی — ۷۴

در شکل ۷ نتایج برش‌های مختلف از مقادیر تکین، در بازسازی یک تصویر نشان داده شده است. با انتخاب  $k$ ‌های متفاوت، بازسازی‌های مطلوب و نامطلوب مشخص شده است.



شکل ۷. شفاف‌سازی تصویر با استفاده از برش‌های مختلف تجزیهٔ TSVD.

عامل دیگری به نام عامل فیلترکننده (فاکتور منظم‌سازی) تیخونف وجود دارد که به صورت زیر

تعریف می‌شود:

$$\phi_i = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \lambda^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

در اینجا  $\lambda$  را پارامتر منظم‌سازی گویند. این انتخاب زمانی رخ می‌دهد که در مسائل بدحالت، وجود مقادیر تکین کوچک باعث تولید خطای بزرگ و در نتیجه دورشدن جواب به دست آمده از جواب واقعی شده باشد. معمولاً با کمک منظم‌سازی تیخونف که مسأله کمترین مربعات را به صورت

$$F_{Tikhonov}(x; \lambda) = \|Ax - b\|_2^2 + \lambda^2 \|x\|_2^2.$$

بیان می‌کند، می‌توان اختلاف جواب واقعی از جواب به دست آمده را به حداقل رساند. در این مسأله، با انتخاب درست پارامتر  $\lambda$  سعی می‌شود که مقدار  $\|Ax - b\|_2$  بدون افزایش بیش از حد  $x$  کوچک شود. به عبارت دیگر، مقدارهای  $\|Ax - b\|_2$  و  $\|x\|_2$  هم‌زمان کوچک می‌شوند. برای بررسی این اثر، دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

(الف)  $\sigma_i \geq \lambda$

$$\phi_i = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \lambda^2} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda^2}{\sigma_i^2}} = 1 - \frac{\lambda^2}{\sigma_i^2} + \frac{1}{2} \frac{\lambda^4}{\sigma_i^4} + \dots$$

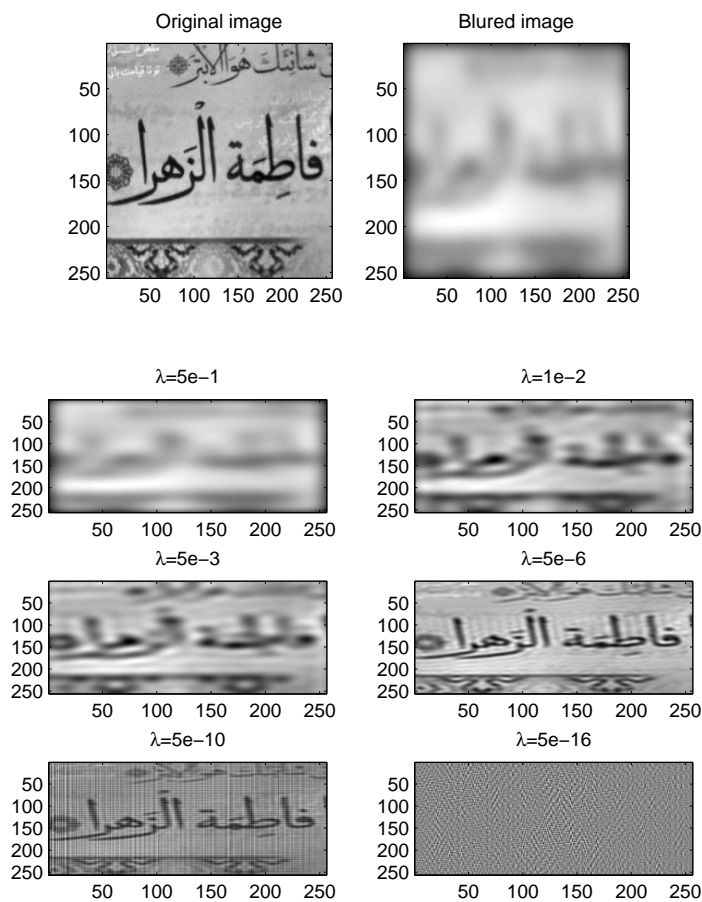
(ب)  $\sigma_i \leq \lambda$

$$\phi_i = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \lambda^2} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda^2}{\sigma_i^2}} = \frac{\sigma_i^2}{\lambda^2} \left( 1 - \frac{\sigma_i^2}{\lambda^2} + \frac{1}{2} \frac{\lambda^4}{\sigma_i^4} + \dots \right)$$

بنابراین، به صورت ساده شده، خواهیم داشت

$$\phi_i = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\lambda}{\sigma_i}\right)^2 + O\left(\left(\frac{\lambda}{\sigma_i}\right)^4\right) & \sigma_i \gg \lambda \\ \left(\frac{\lambda}{\sigma_i}\right)^2 + O\left(\left(\frac{\lambda}{\sigma_i}\right)^4\right) & \sigma_i \ll \lambda \end{cases} \quad (6)$$

که در آن، نماد  $O$  مرتبه خطا را نشان می‌دهد. بنابراین اگر  $\lambda \in [\sigma_N, \sigma_1]$ ، آن‌گاه برای  $i$  های کوچک،  $\phi_i \simeq 1$  و برای  $i$  های بزرگ،  $\phi_i \simeq \frac{\sigma_i^2}{\lambda^2}$ . در شکل ۸ با پارامترهای منظم‌سازی متفاوت از روش تیخونف، میزان اختلاف تصویر اصلی با تصویر بازسازی شده نشان داده شده است. با انتخاب  $\lambda$  های متفاوت، بازسازی‌های مطلوب و نامطلوب مشاهده می‌شوند.



شکل ۸. شفاف‌سازی تصویر با استفاده از پارامترهای مختلف منظم‌سازی تیخونف.

از دو روش می‌توان برای تعیین پارامتر منظم‌سازی استفاده کرد  $([\lambda], [4])$ : (الف) منحنی  $L$  و (ب) ارزیابی تقاطع تعمیم‌یافته (GCV<sup>1</sup>). هرگاه منحنی حاصل از نرم جواب، یعنی

$$\|x_{fit}\|_Y^2 = \sum_{i=1}^k (\phi_i \frac{u_i^T b}{\sigma_i})^2$$

$$\|b - Ax_{fit}\|_Y^2 = \sum_{i=1}^k ((1 - \phi) u_i^T b)^2$$

1) Generalized Cross Validation

رسم کنیم، در گوشه‌ای از منحنی که هر دو نرم کمترین مقدار خود را اختیار می‌کنند، شرایط مطلوب مسأله برقرار خواهد بود.

مسأله کمترین مربعات، که همان مینیمم‌سازی مقدار  $\|b - Ax\|^2$  است، بهترین جواب را به دست می‌دهد. در تجزیه TSVD از این منحنی، مقدار عدد برشی به دست می‌آید. روش GCV برای پایه بنا شده است که اگرچه بعضی از داده‌ها کنار گذاشته می‌شوند، اما انتخاب درست عدد برشی، باعث می‌شود که اطلاعات مورد نیازی که کنار گذاشته شده‌اند نیز در اختیار قرار گیرد. تابع GCV را می‌توان به صورت

$$G(\lambda) = \frac{\|(I_n - AV\phi\Sigma^{-1}U^T)b\|_2^2}{(\text{trace}(I_n - AV\phi\Sigma^{-1}U^T))^2} \quad (7)$$

بیان کرد که در آن،  $\phi$  از رابطه (۶) به دست می‌آید و صورت کسر (۷) عبارت است از

$$\|b - Ax_{\text{fit}}\|_2^2 = \sum_{i=1}^n ((I - \phi_i)u_i^T b)^2$$

و مخرج کسر نیز عبارت است از

$$\begin{aligned} (\text{trace}(I_n - AV\phi\Sigma^{-1}U^T))^2 &= (\text{trace}(I_n - U\Sigma V^T V\phi\Sigma^{-1}U^T))^2 \\ &= (\text{trace}(U(I_n - \phi)U^T))^2 = (\text{trace}(I_n - \phi))^2 = (n - \sum_{i=1}^n \phi_i)^2. \end{aligned}$$

مقداری از پارامتر  $\lambda$  که کمترین مقدار روش GCV را به دست می‌دهد، همان پارامتر  $\lambda$  روش تیخونف است که با عدد برشی روش TSVD رابطه  $\lambda = \frac{1}{k}$  را دارد. در روش تیخونف،  $G(\lambda)$  از رابطه

$$G(\lambda) = \frac{\sum_{i=1}^n (\frac{u_i^T b}{\sigma_i^2 + \lambda})^2}{\sum_{i=1}^n (\frac{1}{\sigma_i^2 + \lambda})^2}$$

محاسبه می‌شود. در تجزیه TSVD، می‌توان  $G(\lambda)$  را از دستور

$$G(k) = \frac{1}{(n - k)^2} \sum_{i=k+1}^n (u_i^T b)^2 \quad (8)$$

مشخص کرد.  $G(k)$  به ازای  $k = 1, 2, \dots, n - 1$  محاسبه می‌شود و کمترین مقدار آن، جواب بهینه است. روش دیگری نیز به نام شرایط پیکار<sup>۱</sup> برای تعیین پارامتر برشی وجود دارد ([۸]).

1) Picard condition

### ۱۰. مقایسهٔ روش‌ها

در این بخش نتایج عددی و تصویری روش‌های مورد مطالعه را با هم مقایسه می‌کنیم. در جدول‌های ۱ و ۲، حاصل  $\|X - X_{true}\|$  برای تجزیهٔ TSVD همراه با عامل فیلترکنندهٔ TSVD و تجزیهٔ TSVD همراه با عامل فیلترکنندهٔ تیخونف در شرایط مرزی صفر، انعکاسی و متناوب و در دو حالتی که ماتریس  $B$  نویزدار و بدون نویز است، مقایسه شده‌اند. در شکل‌های ۹ و ۱۰ نیز این نتایج آمده است.

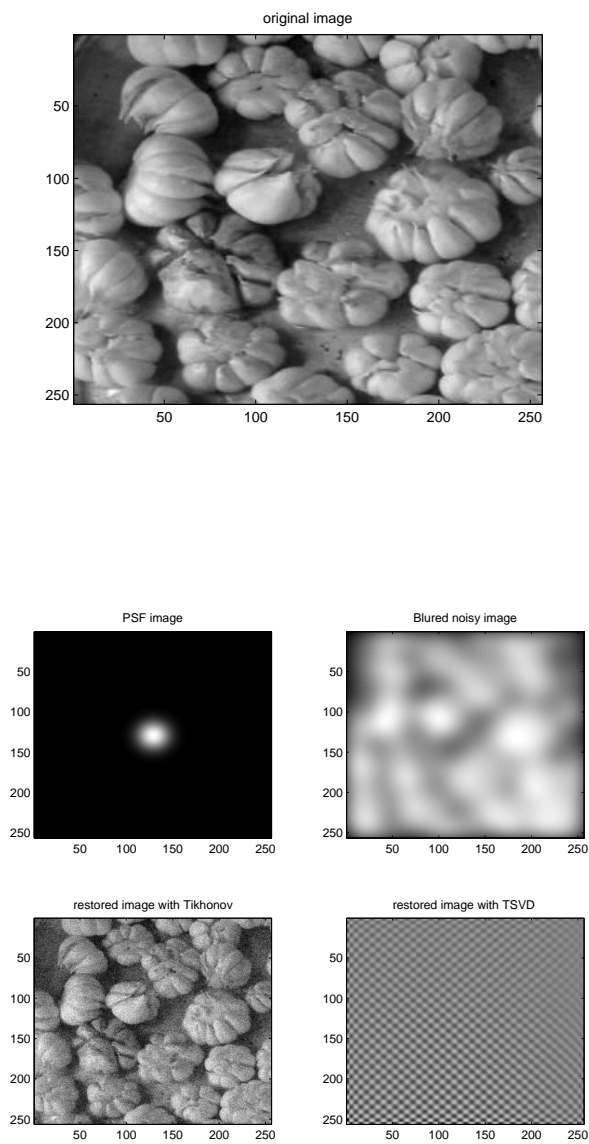
تناوبی	انعکاسی	صفر	
۱۷.۴۰۹۸	۳۵.۷۴۳۴	۱۰.۷۵۹۲	روش $TSVD$ و $noise = 1e-6$
۳.۹۵۴۷	۲.۹۱۷۱	۳.۰۳۵۵	منظم‌سازی تیخونف و $noise = 1e-6$

جدول ۱. حاصل  $\|X - X_{true}\|$  وقتی نویز به  $B$  افزوده شود.

تناوبی	انعکاسی	صفر	
۰.۷۴۸۴	۰.۷۱۲۵	۰.۶۶۱۵	روش $TSVD$
۳.۳۵۰۶	۱.۲۱۶۷	۱.۱۱۸۷	منظم‌سازی تیخونف

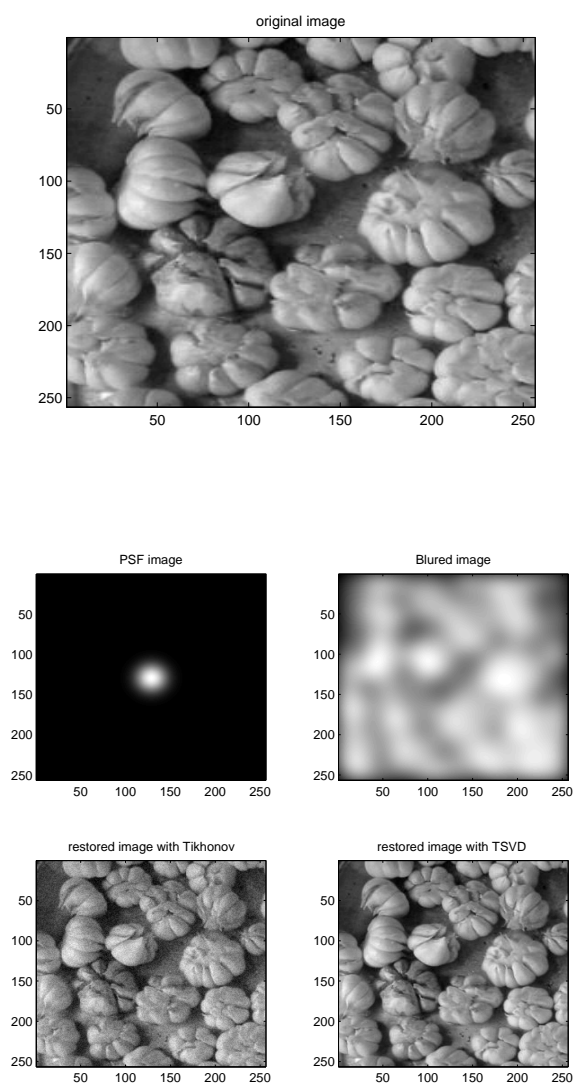
جدول ۲. حاصل  $\|X - X_{true}\|$  وقتی نویز نداشته باشد.





شکل ۹. مقایسه روش TSVD و منظم سازی تیخونف وقتی نویز وجود دارد.

شفاف‌سازی تصاویر با استفاده از تجزیهٔ مقادیر تکین و الگوریتم‌های بهینه‌سازی — ۸۰



شکل ۱۰. مقایسهٔ روش TSVD و منظم‌سازی تیخونف وقتی نویز وجود ندارد.

## مراجع

- [۱] سروری، ریموند، فیزیک عمومی، ترجمه عزیز بهکامی و محمود امامی، انتشارات علوی، ۱۳۶۵، تهران.
- [2] Datta, B. N., *Numerical linear algebra and applications*, U.S.A., International Thomson Publishing Company, 1994.
- [3] Golub, G. H. and Van Loan, C. F., *Matrix computations*, Third Edition, Baltimore, Johns Hopkins University Press, 1996.
- [4] Hansen, P. C., Nagy, J. G. and O'leary. D. P., *Deblurring image, matrices, spectra, and filtering*, SIAM, Philadelphia, 2006.
- [5] Hansen, P. C., *Rank-deficient and discrete ill-posed problems*, SIAM, Philadelphia, 1998.
- [6] Hansen, P. C., "Regularization tools: A Matlab package for analysis and solution of discrete ill-posed problems", *Numerical Algorithms*, 6(1) (1994), 1-35.
- [7] Lee, K. P. and Nagy, J. G., "Steepest descent, CG, and iterative regularization of ill-posed problems", *BIT*, 43(2000), 1003-1117.
- [8] MATLAB: <http://www.matworks.com>.
- [9] Nagy, J. G., Palmert, K. and Perrone, L., "Iterative methods for image deblurring: a Matlab object oriented approach", *BIT*, 27(2003), 534-553.
- [10] Vogel, C. and Oman, M., *A fast robust algorithm for total variation based reconstruction of noisy images*, SIAM, Philadelphia, 1996.
- [11] Zhang, Z., *Inverse image filtering with conjugate gradient*, From: <http://www.cs.cornell.edu/boom/projects.htm>, 2002.

---

مازیار صلاحی

رشت، دانشگاه گیلان، دانشکده علوم ریاضی

salahim@guilan.ac.ir

# FARHANG va ANDISHE-ye RIYĀZI

An Expository Journal of the  
Iranian Mathematical Society

ISSN 1022-6443

Vol. 31, No. 2, Fall 2012

## Editor-in-Chief

B. Tabatabaie Shourijeh, Shiraz Univ.  
tabataba@math.susc.ac.ir

## Editorial Board

S. Gholamazad, Research Institution for Curriculum  
Development and Educational Innovations  
soheila\_azad@yahoo.com

R. Jahani Pour, Kashan Univ.  
jahanipu@kashanu.ac.ir

E. Momtahan, Yasouj Univ.  
momtahan\_e@hotmail.com

M. Motamedi, Shahid Chamran Univ.  
motamedi\_m@scu.ac.ir

A. Safapour, Vali-e-Asr University of Rafsanjan  
safapour@vru.ac.ir

B. Yahaghi, Golestan Univ.  
bamdad@bamdadyahaghi.com

R. Zaare-Nahandi, Institute for Advanced Studies in Basic Science  
rashidzn@iasbs.ac.ir

S. Zamani, Sharif Univ. of Technology  
zamani@sharif.edu

---

P. O. Box 13145-418  
Tehran - Iran

Tel: 88808855, 88807795, 88807775

e-mail: iranmath@ims.ir

web: <http://www.ims.ir>