بسم‌الله الرحمن الرحیم

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

ISSN 1022-6443

سال ۳۱، شمارهٔ ۳، زمستان ۱۳۹۱

(تاریخ انتشار: زمستان ۱۳۹۱)

شمارهٔ پیاپی: ۵۱

صاحب امتیاز: انجمن ریاضی ایران
مدیر مسؤول: محمد جلوداری ممقانی
سردبیر: بهمن طباطبائی شوریجه
ویراستار ارشد: روح‌اله جهانی‌پور
مدیر اجرایی: سهیلا غلام آزاد

حروفچینی: فارسی‌تک ـ دفتر انجمن ریاضی
همکار این شماره: فریده صمدیان

نشانی: تهران ـ صندوق پستی: ۴۱۸ـ۱۳۱۴۵
تلفن: ۸۸۸۰۸۸۵۵، ۸۸۸۰۷۷۹۵، ۸۸۸۰۷۷۷۵
iranmath@ims.ir
http://www.ims.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی نشریهٔ علمی ـ ترویجیِ انجمن ریاضی ایران است که به چاپ و انتشارِ مطالبی می‌پردازد که هم جنبه‌های عام و فلسفیِ ریاضیات را ترویج دهند و هم بازگوکنندهٔ فرهنگ و روند ریاضیاتِ حاکم بر جامعهٔ ریاضی باشند. فرهنگ و اندیشه ریاضی از مقالات در زمینه‌های ریاضیات محض، ریاضیات کاربردی، تدریس، یادگیری و آموزش ریاضی، تاریخ و فلسفهٔ ریاضی، علومِ کامپیوتر، فیزیک نظری و کاربردهای ریاضیات در علوم دیگر که در چارچوب زیر نوشته شده باشند استقبال می‌کند:

- ارائهٔ موضوعیْ فعال و مطرح در ریاضیات در قالبی که علاقه‌مندان به زمینه‌های پژوهشی را برای پیگیریِ موضوع مورد بحث آماده سازد؛
- ترجمهٔ مقاله‌هایی از نوع یاد شده در بالا یا ترجمهٔ مقالات کلاسیکِ ریاضی (ترجمهٔ آزاد پذیرفته نمی‌شود)؛
- ارائهٔ موضوعاتِ آموزشی حاوی نکات و قضایا و برهان‌هایی ساده‌تر از آنچه در متون کلاسیک موجود است.

علاقه‌مندان می‌توانند سه نسخه از مقالهٔ خود را با شرایط زیر به نشانی دفتر مجله ارسال نمایند:

- متن مقاله روی یک طرف کاغذ، یک خط در میان و با حاشیهٔ کافی تحت ادیتور «فارسی تک» تایپ شود. در صورتی که مقالهٔ فرستاده شده، پس از طی شدن مراحل داوری برای چاپ پذیرفته شود، فایل «اف ــ تک» مقاله می‌بایست از طریق پست الکترونیکی مجله ارسال شود.
- فرستادن اصل مقالهٔ ترجمه شده همراه با ترجمهٔ آن الزامی است.
- نام و نشان اصل مقالهٔ ترجمه شده باید به صورت پاورقی در صفحهٔ اول ترجمهٔ مقاله ذکر شود.
- اصطلاحات ریاضی به کار رفته باید بر طبق واژه‌نامهٔ ریاضی و آمار انجمن ریاضی ایران چاپ مرکز نشر دانشگاهی باشد و اگر لغتی در این واژه‌نامه نیست، معادل انگلیسی آن در پاورقی داده شود.
- مقالات ارسالی به فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی نباید برای بررسی و چاپ به مجلات دیگر فرستاده شده باشد.
- مقالهٔ ارسالی باید مشتمل بر نام و نام خانوادگی نویسنده(گان) یا مترجم(ان)، سمت علمی، آدرس کامل پستی و آدرس الکترونیکی باشد.

- در ابتدای مقاله، چکیده‌ای در حداکثر ۲۰۰ کلمه شامل نکات اصلی بیان شده در مقاله، آورده شود.
- پس از چکیده، واژه‌ها و اصطلاحات کلیدی (حداکثر ۵ تا) مشخص شود.
- رده‌بندی موضوعی اولیه و ثانویهٔ مقاله، بر مبنای رده‌بندی موضوعی انجمن ریاضی آمریکا، ذکر شود.
- اسامی افراد خارجی در متن مقاله باید به صورت فارسی در پاورقی به زبان اصلی نوشته شود.
- به منظور تسریع در ویرایش و چاپ مقالات، اصول سجاوندی، نگارش و ویرایش فارسی را در نوشتن مقالات رعایت فرمائید.
- فهرست مراجع را در انتهای مقاله، به ترتیب حروف الفبای نام خانوادگی افراد تنظیم کنید نه به ترتیبی که در مقاله ارجاع می‌دهید. ضمناً در نوشتن مراجع، قالب زیر را رعایت کنید:

الف) اگر مرجع ذکر شده، مقالهٔ لاتین است، عنوان مقاله به صورت رومن، نام مجله به صورت ایتالیک، شمارهٔ مجلد آن به صورت سیاه، سال چاپ داخل پرانتز و در انتها، صفحاتی که مقالهٔ مرجع در آنها چاپ شده است، تایپ شود.

ب) اگر مرجع ذکر شده، کتاب لاتین است، نام کتاب به صورت ایتالیک تایپ شود.

- توجه کنید که تعداد صفحات مقالهٔ ارسالی در قالب صفحه‌بندی مجله، از ۲۵ صفحه نباید بیشتر باشد.
- هیأت تحریریه در رد، قبول، حک و اصلاح مقالات آزاد است.

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی امسال در سه شماره (بهار و پاییز و زمستان) منتشر و به اعضای حقیقی، حقوقی و مشترکین انجمن ریاضی ایران ارسال می‌شود.

علاقه‌مندان به عضویت حقیقی و دانشگاه‌ها، مؤسسات و کتابخانه‌ها که تمایل به عضویت حقوقی یا اشتراک سالانه دارند می‌توانند با دبیرخانهٔ انجمن ریاضی ایران تماس حاصل نمایند.

شماره‌های قبلی مجله را می‌توانید از دبیرخانهٔ انجمن ریاضی ایران خریداری فرمایید.

فهرست مطالب

عکس روی جلد: فریبرز آذرپناه (مربوط به مقالهٔ دوم)

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۱ (زمستان ۱۳۹۱) صص. ۱ تا ۱۴

کاربردهای پایهٔ گربنر در هندسهٔ ترکیبیاتی

زینب مالکی، امیر هاشمی

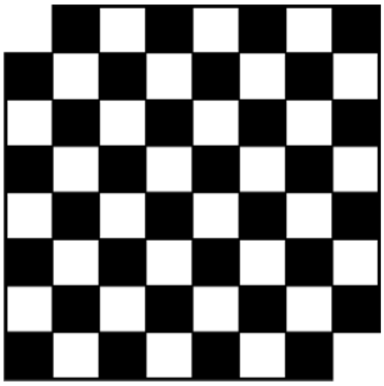
چکیده

پایه‌های گربنر یکی از مباحثی است که به‌تازگی مورد توجه پژوهشگران زیادی قرار گرفته و کاربردهای فراوانی در شاخه‌های مختلف ریاضیات و حتی سایر علوم پیدا کرده است. در این نوشتار، کاربرد پایه‌های گربنر را در هندسهٔ ترکیبیاتی (مسألهٔ جورچینی که مسأله‌ای با ماهیت ترکیبیاتی است) معرفی می‌کنیم.

۱. مقدمه

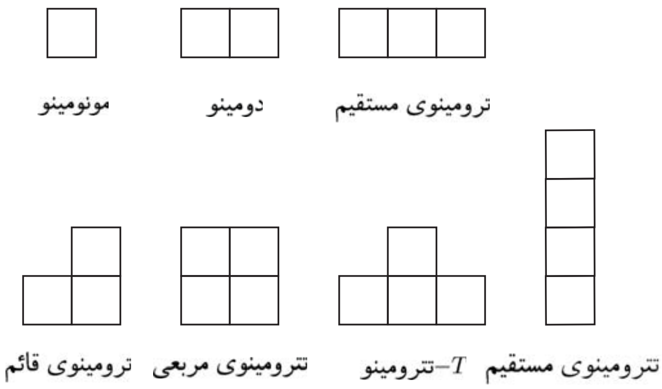
مسألهٔ جورچینی[1] یکی از مسأله‌های جذاب ترکیبیاتی است. شاید تاکنون پیش آمده که بخواهید سطحی (نه لزوماً به‌شکل مستطیل) را با موزاییک‌های غیر هم‌شکل بپوشانید. سؤال طبیعی که به ذهن می‌رسد این است که آیا این کار امکان‌پذیر است؟ به این مسألهٔ معروف توجه کنید: یک صفحهٔ 8×8 که دو مربع در گوشه‌های متقابل آن حذف شده است را در نظر می‌گیریم (شکل ۱). آیا می‌توان این صفحه را توسط دومینوهای معرفی شده در شکل ۲ پوشاند به‌طوری که هیچ مربعی خالی نماند و دومینوها نیز هم‌پوشانی نداشته باشند؟

1) tiling problem



شکل ۱

شکل ۲ تعدادی از پلیومینوهای متداول را نشان می‌دهد. در حالت کلی، پلیومینوها شکل‌هایی هستند که از اتصال تعدادی مربع هم‌اندازه تشکیل شده‌اند به‌طوری که هر مربع، حداقل به یک مربع دیگر در یک یال متصل باشد (شطرنج‌بازان به چنین شکلی همبند رخ‌گرد می‌گویند؛ بدین معنی که رخ شطرنج می‌تواند در هر پلیومینو به‌صورت افقی یا عمودی از هر مربع به هر مربع دیگر آن، در تعداد متناهی حرکت، منتقل شود).



شکل ۲

پلیومینوها اولین بار در سال ۱۹۵۳ توسط سُلمون گولوم در یک سخنرانی برای باشگاه ریاضی هاروارد، معرفی و نامگذاری شدند. یک سال پس از این سخنرانی، متن آن در ماهنامهٔ ریاضی

آمریکا [۵] منتشر شد و مورد توجه تعدادی از ریاضی‌دانان برجسته قرار گرفت. طرح‌های پلیومینو در حقیقت مثال‌هایی از هندسه ترکیبیاتی هستند. این شاخه از ریاضیات با روش‌هایی که شکل‌های هندسی می‌توانند با یکدیگر ترکیب شوند، سر و کار دارد و جنبهٔ فراموش شده‌ای از ریاضیات است، زیرا به‌نظر می‌رسد که دارای روش‌های عمومی معدودی است و قاعده‌های نظام‌مند نتوانسته‌اند جای خلاقیت موجود در حل مسأله‌های آن را بگیرند. در حقیقت، ماهیت بسیاری از مسأله‌های طراحی در مهندسیِ دارای ساختار، ترکیبیاتی است، به‌ویژه وقتی مؤلفه‌ها یا شکل‌های متداول باید به بهترین روش کنار یکدیگر قرار گیرند.

مسأله‌های جورچینی (مسأله‌های مربوط به پوشاندن یک سطح مشبک توسط پلیومینوها) در حالت کلی از نظر محاسباتی سخت هستند. برای مثال، مسألهٔ تصمیم‌گیری برای پوشاندن یک شبکهٔ نامتناهی توسط نسخه‌هایی از یک مجموعهٔ متناهی از پلیومینوها، تصمیم‌ناپذیر است. اگرچه مسألهٔ پوشاندن یک صفحهٔ مشبک متناهی توسط نسخه‌های یک مجموعهٔ متناهی از پلیومینوها، با بررسی کلیهٔ حالت‌های ممکن، تصمیم‌پذیر است، ولی NP ــ کامل است (برای اثبات، [۴] صفحهٔ ۲۵۷ را ببینید).

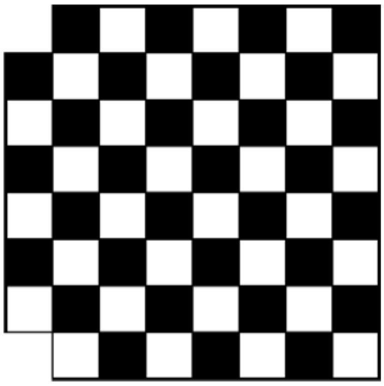
در این نوشتار، ابتدا با بیان برخی از ایده‌های ترکیبیاتی کارآمد در حل چنین مسأله‌هایی، مقدمه‌ای برای بازآفرینی جنبهٔ ریاضی پلیومینوها ارائه می‌کنیم، سپس ضمن معرفی حالت خاصی از پایه‌های گربنر از هندسهٔ جبری محاسباتی، با استفاده از این ابزار قدرتمند، روش دیگری برای حل این مسأله‌ها معرفی می‌نماییم. برای این منظور، در بخش ۲، نمونه‌هایی از راه‌حل‌های ترکیبیاتی را برای حل بعضی از مسأله‌های از این دست ارائه می‌کنیم. در بخش ۳، تعریف‌ها و پیش‌نیازهای مورد نیاز را بیان می‌نماییم. سپس در بخش ۴، قضیهٔ اصلی $\mathbb{Z}$ ــ پوشش‌پذیری (که آن را با پایه‌های گربنر مرتبط می‌سازد) بیان می‌کنیم. در بخش ۵، پایه‌های گربنر را روی $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ معرفی نموده و نمونه‌ای از کاربرد آن در مسألهٔ جورچینی را بیان می‌کنیم. در بخش آخر، یک رنگ‌آمیزی تعمیم‌یافته را که در حل مسأله‌های جورچینی کاربرد دارد، بیان می‌نماییم.

۲. پلیومینوها

در این بخش، نمونه‌هایی از راه‌حل‌های ترکیبیاتی برای برخی از مسأله‌های جورچینی از جمله مسأله‌ای که در مقدمه آمد، ارائه می‌نماییم.

ابتدا این مسأله را در نظر بگیرید: آیا می‌توان یک صفحهٔ 8×8 را که دو مربع در گوشه‌های انتهای یک یال آن حذف شده‌اند (شکل ۳)، توسط دومینوها پوشاند؟ پاسخ به این سؤال، سخت نیست، زیرا در این حالت، هر ستون تعداد زوجی مربع دارد و لذا می‌تواند با دومینوها پوشانده شود و در نتیجه، کل شکل می‌تواند توسط دومینوها پوشانده شود. اما آیا می‌توان شکل ۱ را توسط دومینوها پوشاند؟ فرض کنید این صفحه مانند صفحهٔ شطرنج شکل ۱ رنگ شده باشد. در این صورت، مشاهده می‌شود که هر دومینو دقیقاً یک خانهٔ سیاه و یک خانهٔ سفید را می‌پوشاند. پس m عدد

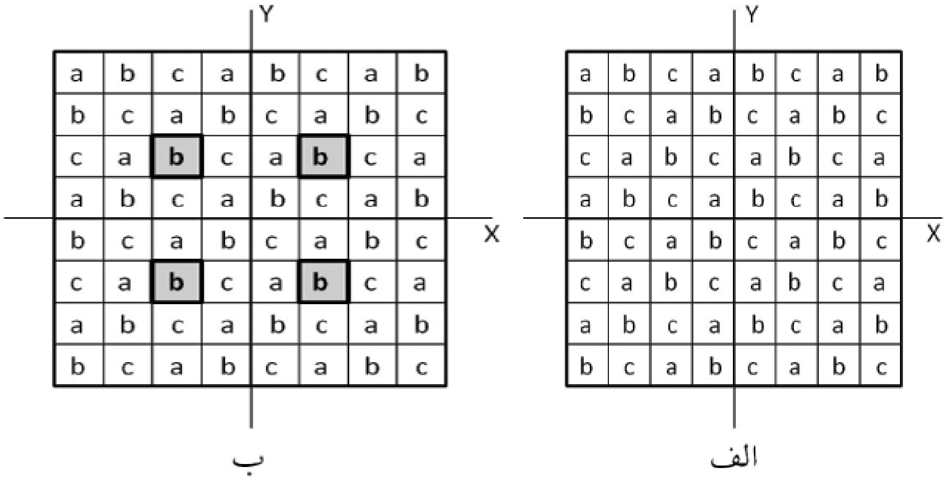
دومینو، m خانهٔ سیاه و m خانهٔ سفید را می‌پوشانند، یعنی از هر کدام به تعداد مساوی. اما تعداد خانه‌های سیاه صفحه داده شده بیشتر از تعداد خانه‌های سفید است. بنابراین نمی‌توان آن‌ها را با دومینوها پوشاند.



شکل ۳

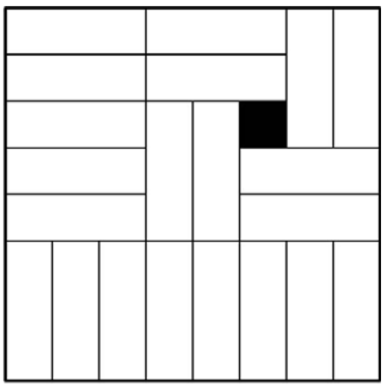
اکنون به این سؤال توجه کنید: شرط لازم و کافی برای این که صفحهٔ حاصل از یک مشبکهٔ مربعی ۸ × ۸ (مانند صفحهٔ شطرنج) که یک خانه از آن حذف شده، به‌وسیلهٔ ۲۱ عدد ترومینوی مستقیم پوشانده شود، چیست؟

برای پاسخ به این سؤال، فرض کنید می‌خواهیم صفحهٔ شطرنج را با ۲۱ عدد ترومینوی مستقیم و یک مونومینو بپوشانیم. ابتدا صفحهٔ شطرنج را با رنگ‌هایی با نام‌های a، b و c مانند شکل ۴(الف)، رنگ می‌کنیم. مشاهده می‌شود که صفحهٔ شطرنج شامل ۲۱ مربع به رنگ a، ۲۲ مربع به رنگ b و ۲۱ مربع به رنگ c است. هر ترومینوی مستقیم از هر رنگ دقیقاً یک مربع را می‌پوشاند، بنابراین مونومینو باید در یکی از خانه‌های به رنگ b باشد. از طرف دیگر، رنگ خانه‌های متقارن با این خانه نسبت به مرکز مختصات و محورها نیز باید b باشد، زیرا در غیر این صورت، با دوران صفحه (تغییر در نامگذاری رنگ‌ها) این خانه می‌تواند یکی از رنگ‌های ۲۱تایی را اختیار کند. بنابراین تنها مکان‌های ممکن برای مونومینو یکی از چهار مربع مشخص شده در شکل ۴(ب) است.



شکل ۴

در حالتی که مونومینو در یکی از خانه‌های مشخص شده در شکل ۴(ب) باشد، مشابه شکل ۵ می‌توان صفحه را پوشاند، بنابراین جواب سؤال اصلی به‌دست می‌آید.



شکل ۵

این روش را می‌توان به صفحات مشبک کلی‌تر نیز تعمیم داد. برای مطالعهٔ بیشتر در این زمینه، می‌توانید به [٦، ٨] مراجعه نمایید. همان‌طور که در این مثال‌های ساده مشاهده نمودید، با پیچیده‌شدن چنین سؤالاتی در صورت پوشش‌پذیر نبودن صفحه، برای پاسخ به سؤال، نیاز به رنگ‌آمیزی‌های هوشمندانه‌ای داریم که گاهی یافتن آن‌ها بسیار مشکل است. در ادامهٔ این نوشتار،

روش بودینی و نووِل [۲] را مطرح می‌کنیم که در بسیاری از حالات با استفاده از محاسبات رایانه‌ای در صورت پوشش‌پذیر نبودن صفحه، بتوان آن را توسط رایانه ثابت کرد. همچنین یک رنگ‌آمیزی که تعمیمی برای تمام این رنگ‌آمیزی‌ها است، ارائه می‌دهیم.

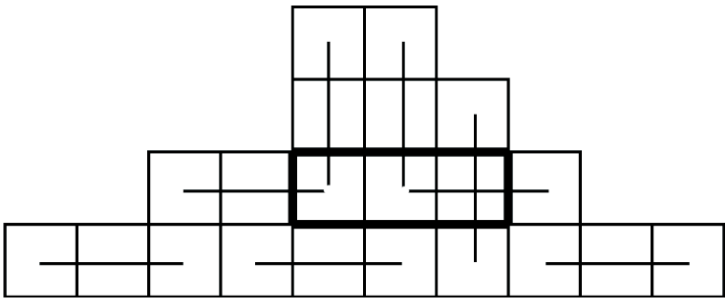
۳. تعاریف و پیش‌نیازها

برای معرفی روش ذکر شده، در این بخش تعاریف مورد نیاز را ارائه می‌نماییم.

منظور از یک سلول $c(i,j)$ در صفحهٔ مختصات، مجموعهٔ

$$\{(x,y) : i \leq x \leq i+۱, j \leq y \leq j+۱\}$$

است. اگر S را مجموعهٔ تمام سلول‌های صفحه در نظر بگیریم، مشاهده می‌شود که این مجموعه با $\mathbb{Z}^۲$ در تناظر یک‌به‌یک است. از این پس، منظور از پلیومینو اجتماع متناهی از سلول‌ها است که لزوماً همبند نیست. فرض کنید P یک پلیومینو و E مجموعه‌ای از پلیومینوها باشد. یک $\mathbb{Z}$ ـ پوشش[۱] یا پوشش علامت‌دار[۲] برای P توسط E شامل تعداد متناهی پلیومینوی انتقال‌یافته است (با امکان همپوشانی)، که به هر پلیومینو مقدار ۱+ و یا ۱− تخصیص داده شده، به‌طوری که برای هر سلول $c(i,j) \in P$، مجموع مقادیر پلیومینوهایی که $c(i,j)$ را می‌پوشانند، برابر ۱+ است و در غیر این صورت، مقدار آن برابر صفر است (برای مثال شکل ٦ را ببینید).



شکل ٦. پلیومینوی P که توسط ترومینوهای مستقیم $\mathbb{Z}$ ـ پوشش‌پذیر است. توجه کنید که تنها مقدار تخصیص داده شده به ترومینوی پررنگ، منفی است.

مشاهده می‌شود که اگر یک پلیومینو با مجموعه‌ای از پلیومینوها پوشانده شود، این پلیومینو توسط این مجموعه، $\mathbb{Z}$ ـ پوشش نیز دارد (کافی است به تمام پلیومینوها مقدار ۱+ را نسبت دهیم). بنابراین $\mathbb{Z}$ ـ پوشش‌پذیر بودن یک شرط کافی برای پوشش‌پذیر بودن است. این شرطِ کافی توسط کانویِ و نووِل در [۳] ارائه شد. آن‌ها همچنین یک شرط معادل جبری برای $\mathbb{Z}$ ـ پوشش‌پذیر بودن ارائه دادند.

1) $\mathbb{Z}$-tiling 2) Signed tiling

در اینجا روش بودینی و نووِل [۲] را که با استفاده از پایه‌های گربنر شرط معادلی برای $\mathbb{Z}$ ـ پوشش‌پذیر بودن ارائه کرده‌اند مطرح می‌نماییم. مزیت این روش در این است که در بسیاری از موارد می‌تواند توسط رایانه بررسی شود. در این روش، با ارائهٔ یک ساختار چندجمله‌ای، مسألهٔ $\mathbb{Z}$ ـ پوشش‌پذیری با محاسبهٔ یک پایه گربنر حل می‌شود. ابتدا تعریف دقیق مفاهیم گفته شده را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱ یک $\mathbb{Z}$ ـ پلیومینوی وزن‌دار یا به‌طور ساده، $\mathbb{Z}$ ـ پلیومینو، نگاشتی P از $S \simeq \mathbb{Z}^{۲}$ به $\mathbb{Z}$ است که به جز تعداد متناهی از نقاط، تصویر سایر نقاط، صفر است (تکیه‌گاه[1] نگاشت P، مجموعه‌ای متناهی است). برای هر سلول c، $P(c)$ را وزن P در c می‌گوییم.

فضای شامل تمام $\mathbb{Z}$ ـ پلیومینوهای وزن‌دار را با $P_{\mathbb{Z}}$ نمایش می‌دهیم که یک $\mathbb{Z}$ ـ مدول آزاد است. در واقع، سلول‌های با وزن ۱+ پایه‌ای برای $P_{\mathbb{Z}}$ تشکیل می‌دهند.

تعریف ۲ $\mathbb{Z}$ ـ پلیومینوی P را توسط مجموعهٔ E از $\mathbb{Z}$ ـ پلیومینوهای وزن‌دار $\mathbb{Z}$ ـ پوشش‌پذیر گوییم هرگاه $P = \sum_{i=۱}^{t} \lambda_i P_i(. - a_i)$ که در آن $\lambda \in \mathbb{Z}$، $P_i \in E$ و $a_i \in \mathbb{Z}^{۲}$ (توجه کنید که منظور از $P_i(. - a_i)$، انتقال‌یافتهٔ $\mathbb{Z}$ ـ پلیومینوی P_i توسط بردار a_i است).

فرض کنید $X_۱$، $X_۲$، $Y_۱$ و $Y_۲$ چهار متغیر باشند. برای هر $a \in \mathbb{Z}^{۲}$، تعریف می‌کنیم:

$$\chi^a = X_۱^{\frac{a_۱+|a_۱|}{۲}} X_۲^{\frac{a_۲+|a_۲|}{۲}} Y_۱^{\frac{|a_۱|-a_۱}{۲}} Y_۲^{\frac{|a_۲|-a_۲}{۲}}.$$

به این ترتیب، هر مربع صفحه به‌صورتی کد می‌شود که توان منفی نداریم. بنابراین به هر پلیومینو، یک چندجمله‌ای به‌صورت زیر نسبت می‌دهیم.

تعریف ۳ P ـ چندجمله‌ای وابسته به هر $\mathbb{Z}$ ـ پلیومینوی P، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Q_P = \sum_{a \in \mathbb{Z}^{۲}} P(c(a)) \chi^a.$$

تعریف ۴ اگر E مجموعه‌ای از $\mathbb{Z}$ ـ پلیومینوها باشد، ایدال پوششی E که با $I(E)$ نمایش می‌دهیم عبارت است از

$$\langle X_۱Y_۱ - ۱, X_۲Y_۲ - ۱, \{Q_P : P \in E\}\rangle_{\mathbb{Z}}.$$

منظور از اندیس $\mathbb{Z}$ در اینجا این است که $I(E)$ را به‌عنوان ایدال حلقهٔ $\mathbb{Z}[X_۱, X_۲, Y_۱, Y_۲]$ در نظر می‌گیریم.

بودینی و نووِل با استفاده از این چندجمله‌ها، رابطهٔ بین مسألهٔ $\mathbb{Z}$ ـ پوشش‌پذیر بودن و پایه‌های گربنر را به‌صورتی که در بخش‌های بعدی مشاهده خواهیم کرد، ارائه نمودند.

1) Support

۴. $\mathbb{Z}$ ـ پوشش برای پلیومینوها

در این بخش، قضیهٔ اصلی مسألهٔ $\mathbb{Z}$ ـ پوشش‌پذیری را (با استفاده از پایه‌های گربنر) بیان و اثبات می‌نماییم. برای این منظور، به لم زیر نیاز داریم.

لم ۵ فضای $P_{\mathbb{Z}}$ با فضای

$$\frac{\mathbb{Z}[X_1,X_2,Y_1,Y_2]}{\langle X_1Y_1-1,X_2Y_2-1\rangle_{\mathbb{Z}}}$$

$\mathbb{Z}$ ـ یکریخت است.

اثبات. تابع خطی $f:\mathbb{Z}[X_1,X_2,Y_1,Y_2]\to P_{\mathbb{Z}}$ را در نظر می‌گیریم که $f(X_1^{a_1}Y_1^{b_1}X_2^{a_2}Y_2^{b_2})$ را به سلول (a_1-b_1,a_2-b_2) با وزن یک می‌برد. حال اگر ثابت کنیم $ker(f)=\langle X_1Y_1-1,X_2Y_2-1\rangle$، آن‌گاه بنا بر قضایای یکریختی در جبر، نتیجه حاصل می‌شود. می‌دانیم هر پلیومینوی Q را می‌توان به‌شکل $Q=R+\sum_{i=1}^{2}Q_i(X_iY_i-1)$ نوشت که R فقط شامل تک‌جمله‌ای‌های[1] به‌شکل χ^a ($a\in\mathbb{Z}^2$) است. توجه می‌کنیم که منظور از پلیومینوی ۰ یا پلیومینوی تهی، پلیومینوی P است که وزن آن روی هر سلول صفر است. از آنجا که f خطی است، بنا بر تعریف، داریم $f(\chi^aX_iY_i)=f(\chi^a)$ و لذا $f(Q_i(X_iY_i-1))=0$. در نتیجه $f(Q)=0$ اگر و تنها اگر $f(R)=0$. از طرف دیگر، $\{f(\chi^a)\}$ یک پایه برای $\mathbb{Z}$ ـ مدول $P_{\mathbb{Z}}$ است. پس، از خطی بودنِ f نتیجه می‌شود که شرایط $f(R)=0$، $R=0$ و $Q\in\langle X_1Y_1-1,X_2Y_2-1\rangle_{\mathbb{Z}}$ معادل‌اند. بنابراین

$$ker(f)=\langle X_1Y_1-1,X_2Y_2-1\rangle_{\mathbb{Z}}.$$

قضیه ۶ فرض کنید E مجموعه‌ای از $\mathbb{Z}$ ـ پلیومینوها باشد. $\mathbb{Z}$ ـ پلیومینوی P توسط E، $\mathbb{Z}$ ـ پوشش‌پذیر است اگر و تنها اگر $Q_P\in I(E)$.

اثبات. بنا بر تعریف، $\mathbb{Z}$ ـ پلیومینوی P توسط مجموعهٔ E پوشش‌پذیر است اگر و تنها اگر $P=\sum_{i=1}^{t}\lambda_iP_i(.-a_i)$ که در آن $\lambda_i\in\mathbb{Z}$، $P_i\in E$ و $a_i\in\mathbb{Z}^2$. علاوه بر این، در حلقهٔ

$$\mathbb{Z}[X_1,X_2,Y_1,Y_2]/\langle X_1Y_1-1,X_2Y_2-1\rangle_{\mathbb{Z}}$$

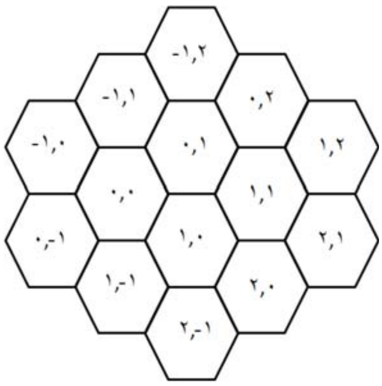
داریم $Q_{P_i(.-a_i)}=\chi^{a_i}Q_{P_i}$ (توجه کنید که در ادامهٔ اثبات، همهٔ تساوی‌ها در همین حلقه هستند). در نتیجه $Q_P=\sum_{i=1}^{t}\lambda_i\chi^{a_i}Q_{P_i}$ و بنابراین $Q_P\in I(E)$. برعکس، اگر $Q_P\in I(E)$، آن‌گاه $Q_P=\sum_{P'\in E}(\sum\lambda_i\chi^{a_i})Q_{P'}$ که $Q_{P'}$ها در تک‌جمله‌ای‌هایشان هیچ X_i و Y_i متوالی ندارند. بنابراین داریم $P=\sum_{P'\in E}(\sum\lambda_iP'(.-a_i))$، یعنی $\mathbb{Z}$ ـ پلیومینوی P توسط مجموعهٔ E پوشش‌پذیر است. ■

1) Monomial

می‌توان به‌جای مشبکهٔ مربعی[1]، مشبکهٔ شش‌گوشه‌ای[2] را در نظر گرفت. در واقع، مشبکهٔ شش گوشه‌ای با کنار هم قرار دادن نسخه‌های انتقال‌یافتهٔ پوش محدب[3] نقاط $(0,0)$، $(1,0)$، $(\frac{-1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$، $(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$، $(0,\sqrt{3})$ و $(1,\sqrt{3})$ ساخته می‌شود. برای $(a_1,a_2)\in\mathbb{Z}^2$ منظور از $[a_1,a_2]\in\mathbb{Z}^2$، سلول شش‌گوشه‌ای[4] است که گوشهٔ سمت چپ پایین آن $\left(\frac{3}{2}(a_1+a_2), \frac{\sqrt{3}}{2}(-a_1+a_2)\right)$ است (شکل ۷).

تعریف ۷ P ـ چندجمله‌ای هر $\mathbb{Z}$ ـ شش‌گون[5] P، را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Q_P = \sum_{(a_1,a_2)\in\mathbb{Z}^2} P([a_1,a_2])X^{(a_1,a_2)}.$$



شکل ۷

مشابه آنچه در مورد مشبکهٔ مربعی داشتیم، در رابطه با مشبکهٔ شش‌گوشه‌ای نیز قضیهٔ زیر را داریم.

قضیه ۸ فرض کنید E مجموعه‌ای از $\mathbb{Z}$ ـ شش‌گون‌ها باشد. $\mathbb{Z}$ ـ پلیومینوی شش‌گون P توسط E، $\mathbb{Z}$ ـ پوشش‌پذیر است اگر و تنها اگر

$$Q_P \in \langle Q_{P'} \; with \; P' \in E, X_1Y_1 - 1, X_2Y_2 - 1\rangle_{\mathbb{Z}}.$$

لازم به ذکر است که برای بررسی تعلق یک چندجمله‌ای به یک ایدال از $\mathbb{K}[X_1,\dots,X_n]$ که $\mathbb{K}$ میدان است، فرم متعارف چندجمله‌ای را نسبت به پایهٔ گربنر ایده‌ال محاسبه می‌کنیم. اگر این مقدار برابر صفر شد، چندجمله‌ای متعلق به ایده‌ال است. در بخش بعد، تعریف و نحوهٔ محاسبهٔ پایهٔ گربنر یک ایده‌ال با ضرایب در اعداد صحیح را معرفی خواهیم کرد.

1) Square lattice 2) Hexagonal lattice 3) Convex hull 4) Hexagonal cell 5) $\mathbb{Z}$-polyhexe

۵. پایه گربنر روی $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$

در این بخش، به معرفی ابزاری می‌پردازیم که با استفاده از آن بتوانیم مسألهٔ تعلق داشتن یک چندجمله‌ای به یک ایدآل در $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ را حل کنیم. پایه‌های گربنر یکی از مباحث پژوهشی است که مورد اقبال ریاضیدانان قرار گرفته و کاربردهای فراوانی پیدا کرده است ([۷] مرجع خوبی برای آشنایی مقدماتی با این مفهوم است). اگر به‌جای $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$، $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ را در نظر بگیریم که $\mathbb{K}$ یک میدان است، پایهٔ گربنر و الگوریتم بوخبرگر، مسأله را حل می‌کند. می‌توان حالت تعمیم‌یافته‌ای از پایهٔ گربنر و الگوریتم بوخبرگر را برای $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ ارائه نمود. ثابت می‌شود که یک عضو به ایدآلی از $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ تعلق دارد اگر و تنها اگر باقیماندهٔ تقسیم آن به پایه، صفر باشد (برای توضیحات بیشتر، [۱] فصل ۱۰ را ببینید). در اینجا ضمن بیان مقدمات، تعریف پایهٔ گربنر روی $\mathbb{Z}$ را ارائه می‌نماییم. فرض کنید $R = \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ حلقهٔ چندجمله‌ای‌های n متغیره با ضرایب در $\mathbb{Z}$ باشد. یک عضو $x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}$ از R را تک‌جمله‌ای و یک عضو $cx_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}$ از R که $c \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ را یک جمله[1] می‌گوییم. $\mathcal{M}$ را مجموعهٔ تمام تک‌جمله‌ای‌های R در نظر بگیرید. یک ترتیب تک‌جمله‌ای[2] روی R، ترتیبی کلی $\prec$ روی $\mathcal{M}$ است که در شرط‌های زیر صدق کند:

الف) برای هر m_1، m_2 و m_3 در $\mathcal{M}$ که $m_1 \prec m_2$، نتیجه شود $m_1m_3 \prec m_2m_3$؛

ب) به‌ازای هر m در $\mathcal{M}$، $1 \prec m$.

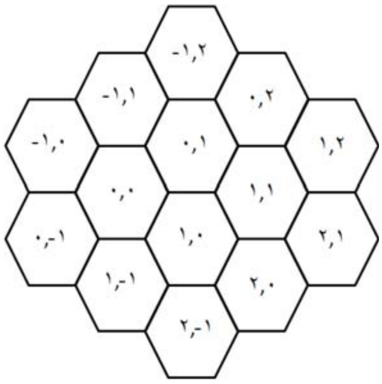
مثال مهمی از ترتیب تک‌جمله‌ای، ترتیب لغت‌نامه‌ای[3] $\prec_{\text{lex}}$ است. فرض کنید $m_1 = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ و $m_2 = x_1^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n}$، گوییم $m_1 \prec_{\text{lex}} m_2$ هرگاه اولین مؤلفهٔ ناصفر $(\beta_1 - \alpha_1, \ldots, \beta_n - \alpha_n)$، مثبت باشد. در هر چندجمله‌ای مانند f، بزرگترین تک‌جمله‌ای نسبت به ترتیب $\prec$ را تک‌جمله‌ای پیشرو[4]، جملهٔ مربوط به آن را جمله پیشرو[5] و ضریب آن را ضریب پیشرو[6] نامیده و به‌ترتیب با نمادهای $\mathrm{LM}(f)$، $\mathrm{LT}(f)$ و $\mathrm{LC}(f)$ نمایش می‌دهیم. ایدآل جملهٔ پیشروی I را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$LT(I) = \langle LT(f) \mid f \in I \rangle.$$

ثابت می‌شود که اگر I ایده‌الی از R باشد، آن‌گاه مولدی متناهی برای I مانند $\{g_1, \ldots, g_m\}$ وجود دارد که $\mathrm{LT}(I) = \langle \mathrm{LT}(g_1), \ldots, \mathrm{LT}(g_m) \rangle$. چنین مولدی را پایهٔ گربنر نسبت به ترتیب $\prec$ برای I گویند. در [۱] فصل ۱۰، الگوریتمی برای محاسبهٔ چنین پایه‌ای ارائه شده است. این بخش را با ارائه کاربردی از مطالب گفته شده ادامه می‌دهیم و قضایای کلاسیکی که کانوِی و همکارش ثابت کردند را به‌کمک پایهٔ گربنر ثابت می‌نماییم.

1) term 2) monomial ordering 3) lexicographic order 4) leading monomial
5) leading term 6) leading coefficient

فرض کنید T_N مثلثی از سلول‌های شش‌گون باشد که $N(N+1)/2$ سلول دارد (شکل ۸).



شکل ۸

قضیه ۹ الف) ناحیهٔ مثلثی T_N در مشبکهٔ شش‌گون، یک $\mathbb{Z}$ ـ پوشش با نسخه‌های همنهشت (نسخه‌های حاصل از انتقال و دوران) T_2 دارد اگر و تنها اگر N به‌پیمانهٔ ۳ همنهشت با ۰ یا ۲ باشد.
ب) ناحیهٔ مثلثی T_N در مشبکهٔ شش‌گون، یک $\mathbb{Z}$ ـ پوشش با نسخه‌های همنهشتِ شش‌گون شامل سه خانهٔ مجاور روی یک خط دارد اگر و تنها اگر N به‌پیمانهٔ ۹ همنهشت با ۰ یا ۸ باشد.

اثبات. الف) رابطهٔ ترتیب تک‌جمله‌ای $X_2 \prec_{\text{lex}} X_1 \prec_{\text{lex}} Y_2 \prec_{\text{lex}} Y_1$ را در نظر بگیرید. ایدآل پوششی T_2 به‌شکل زیر است:

$$I(E) = \langle X_1Y_1 - 1, X_2Y_2 - 1, X_1 + X_2 + 1, X_1X_2 + X_1 + X_2 \rangle_{\mathbb{Z}}.$$

با استفاده از حالت تعمیم‌یافتهٔ الگوریتم بوخبرگر در میپل برای محاسبهٔ پایه‌های گربنر با ضرایب در $\mathbb{Z}$، پایه‌ای برای $I(E)$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$B = \{X_1 + X_2 + 1, X_2^2 + X_2 + 1, Y_2 + X_2 + 1, Y_1 - X_2\}.$$

همچنین از آنجا که

$$Q_{T_N} = \sum_{i=0}^{N-1} X_2^i \Big(\sum_{j=0}^{N-i-1} X_1^j \Big),$$

می‌توان باقیماندهٔ Q_{T_N} را بر $(X_1 + X_2 + 1, X_2^2 + X_2 + 1, Y_2 + X_2 + 1, Y_1 - X_2)$ محاسبه کرد. به‌وضوح این باقیمانده برابر است با

$$\begin{cases} 0, & N \overset{3}{\equiv} 0 \text{ یا } 2 \\ 1, & N \overset{3}{\equiv} 1. \end{cases}$$

اثبات قسمت (ب) مشابه است.

۶. رنگ‌آمیزی تعمیم یافته

در این بخش، یک رنگ‌آمیزی تعمیم‌یافته تعریف می‌کنیم که تعمیم رنگ‌آمیزی‌های تعریف شده توسط کانوی و همکارش است. در ادامه، باقیماندهٔ چندجمله‌ای P بر $(P_1, \ldots, P_s)$ را با $\bar{P}^{(P_1,\ldots,P_s)}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۰ فرض کنید E مجموعه‌ای از $\mathbb{Z}$ ـ پلیومینوها و B یک پایهٔ گربنر $I(E)$ باشد. رنگ‌آمیزی تعمیم‌یافته χ_E نگاشتی از $\mathbb{Z}[X_1, X_2, Y_1, Y_2]$ به $\mathbb{Z}[X_1, X_2, Y_1, Y_2]$ است به‌طوری که $\chi_E(Q) = \bar{Q}^B$.

با توجه به مطالب گفته شده، قضیهٔ زیر را به‌سادگی می‌توان ثابت کرد.

قضیه ۱۱ یک $\mathbb{Z}$ ـ پلیومینوی P، توسط مجموعهٔ E از $\mathbb{Z}$ ـ پلیومینوها، $\mathbb{Z}$ ـ پوشش‌پذیر است اگر و تنها اگر $\chi_E(P) = 0$.

برای مثال، اگر ایدال متناظر با مجموعهٔ E شامل تمام T ـ ترامینوها (شکل ۹) را در نظر بگیریم، داریم

$$\begin{aligned} I(E) = \quad & \langle X_1^2 + X_1X_2 + X_1 + 1, X_1^2X_2 + X_1X_2 + X_1 + X_2, \\ & X_1X_2 + X_2^2 + X_2 + 1, X_1X_2^2 + X_1X_2 + X_1 + X_2, \\ & X_1Y_1 - 1, X_2Y_2 - 1\rangle. \end{aligned}$$

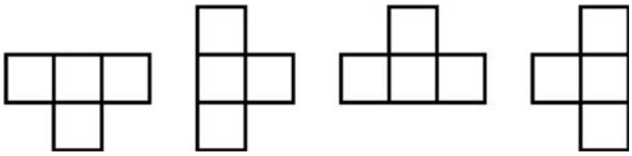
با محاسبهٔ پایه گربنر تعمیم‌یافته برای $I(E)$ با ترتیب $X_2 \prec_{\text{lex}} X_1 \prec_{\text{lex}} Y_2 \prec_{\text{lex}} Y_1$، به‌دست می‌آوریم

$$B = \{X_1 + 3, X_2 + 3, 8, Y_1 + 3, Y_2 + 3\}.$$

علاوه بر این، رابطهٔ زیر همواره برقرار است:

$$\chi_E(Q_P) = \chi\left(\sum_{c(i,j)\in P} Q_{c(i,j)}\right) = \chi_E\left(\sum_{c(i,j)\in P} \chi_E(Q_{c(i,j)})\right).$$

حال از آنجا که $A := \chi_E(Q_{c(i,j)})$ یک عدد صحیح است و $8 \in B$، نتیجه می‌شود که $\chi_E(A)$ برابر با باقیماندهٔ A در تقسیم بر ۸ است. بنابراین، قضیهٔ زیر را داریم.

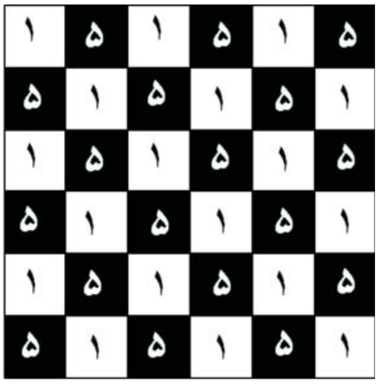


شکل ۹

قضیه ۱۲ فرض کنید خانه‌های صفحه، مشابه صفحهٔ شطرنج رنگ شده‌اند (شکل ۱۰). به خانه‌های سفید عدد ۵ و به خانه‌های سیاه عدد ۱ را نسبت می‌دهیم. یک پلیومینو P، توسط T ـ ترامینوها $\mathbb{Z}$ ـ پوشش‌پذیر است اگر و تنها اگر مجموع مقادیر سطحی که می‌خواهیم بپوشانیم، مضربی از ۸ باشد.

نتیجه ۱۳ مربع $n \times n$ توسط T ـ ترامینوها پوشش‌پذیر است اگر و تنها اگر n بر ۴ بخش‌پذیر باشد.

اثبات. اگر n فرد باشد، مجموع مذکور در قضیهٔ قبل فرد است و لذا مربع $n \times n$، $\mathbb{Z}$ ـ پوشش‌پذیر نیست و در نتیجه پوشش‌پذیر هم نمی‌باشد. اگر n زوج باشد، مشاهده می‌شود که مجموع متناظر، برابر با $۳n^۲$ بوده و لذا $\chi_E(Q_{n\times n})$ برابر است با $۳n^۲$ به‌پیمانهٔ ۸. بنابراین مربع $n \times n$ با T ـ ترامینوها $\mathbb{Z}$ ـ پوشش‌پذیر است اگر و تنها اگر n بر ۴ بخش‌پذیر باشد. همچنین مشاهده می‌شود که مربع ۴×۴ پوشش‌پذیر است، بنابراین اگر n بر ۴ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه مربع $n \times n$ نیز پوشش‌پذیر خواهد بود. ■



شکل ۱۰

مراجع

[1] T. Becker, V. Weispfenning, *Grobner bases: A computational approach to commutative algebra*, Springer-Verlag, 1993.

[2] O. Bodini, B. Nouvel, *$\mathbb{Z}$-tilings of polyominoes and standard basis*, IWCIA, 2004.

[3] J. H Conway, J. C. Lagarias, "Tiling with polyominoes and combinatorial group theory", *J. C. T. Series A*, **53**(1990), 183-208.

[4] M. Gary and D.S. Johnson, *Computers and intractability: a guid to the theory of NP-completeness*, Freeman, San Fransisco, 1979.

[5] S. W. Golomb, "Checker boards and polyominoes", *Amer. Math. Monthly*, **61**(1954), 675-682.

[6] S. W. Golomb, "Tiling with polyominoes", *J. C. T. Series A*, **1**(1966), 280-296.

[۷] رشید زارع نهندی، «بوخبرگر و پایه‌های گربنر»، فرهنگ و اندیشه ریاضی، شمارهٔ ۴۴ (بهار ۱۳۸۹)، ۸۰ – ۵۵.

[۸] سلمون گولوم، پلیومینو، ترجمهٔ سپیده چمن‌آرا و مانی رضایی، مؤسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ۱۳۸۱.

امیر هاشمی amir.hashemi@cc.aut.ac.ir

زینب مالکی zmaleki@math.aut.ac.ir

اصفهان، دانشگاه صنعتی اصفهان، دانشکده علوم ریاضی، کد پستی ۸۳۱۱۱–۸۴۱۵۶

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۱ (زمستان ۱۳۹۱) صص. ۱۵ تا ۵۰

آشنایی با حلقه‌های توابع پیوسته

فریبرز آذرپناه، منیره پیمان، علی رضایی‌علی‌آباد، امیدعلی کرم‌زاده
رستم محمدیان و مهرداد نامداری

۱. پیش‌گفتار

بی‌شک یکی از زیباترین پیوندهای جبر و توپولوژی در ساختار $C(X)$ ظاهر می‌شود که متشکل است از تمام توابع پیوسته حقیقی ـ مقدار روی فضای توپولوژی X. این ساختار، با دو عمل معمولیِ جمع و ضرب توابع، تشکیل یک حلقه می‌دهد که به حلقهٔ توابع پیوسته معروف است. در مبحث حلقهٔ توابع پیوسته، هدف اصلی، بررسی ارتباط خواص توپولوژیکی X و خواص جبری $C(X)$ است. مطالعهٔ این حلقه، مانند آن دسته از مباحثی که در محل تلاقی دو شاخه از ریاضیات واقع هستند، زیبا و جذاب است. پرواز اندیشه در این عرصه زمانی تماشایی‌تر خواهد بود که دو بال جبر و توپولوژی، هماهنگ و موزون به‌کار گرفته شوند و هرچه این دو بال قوی‌تر و گسترده‌تر باشند، این پرواز اوج بیشتری می‌گیرد.

"X ناهمبند است اگر و تنها اگر $C(X)$ دارای یک عنصر خودتوان نابدیهی باشد."

شاید این پیوند ساده میان فضای توپولوژیک X و حلقهٔ $C(X)$، نخستین جرقه‌ای بود که برخی از ریاضی‌دانان را به سوی مطالعهٔ $C(X)$ از دیدگاه برقراری پیوندهای جبر و توپولوژی هدایت کرد. این گزارهٔ رفت و برگشتی ساده، سال‌ها به همین صورت دست‌نخورده باقی ماند و سنگِ بنایی شد تا بعدها پژوهشگران به حالت‌های دیگری از آن بپردازند. ناگفته پیداست که در این نوع رفت و برگشت‌ها بین توپولوژی و جبر، نه‌تنها کشف ارتباط مفاهیم آشنای جبری و توپولوژیکی محتمل است، بلکه امکان برخورد با مفاهیم تازهٔ جبری یا توپولوژیکی نیز وجود دارد. بسیاری از فضاهای شناخته شدهٔ توپولوژیکی، نخست با کمک ویژگی‌های جبری حلقهٔ $C(X)$ به‌دست آمده‌اند و بسیاری از مفاهیم جبری، ابتدا با کمک ویژگی‌های توپولوژیکی از $C(X)$ سرچشمه گرفته‌اند و سپس به حلقه‌های کلی‌تر نیز رخنه کرده‌اند. از این دیدگاه، $C(X)$ ابزار مؤثری برای غنابخشی

و تأثیرگذاری متقابل دو شاخهٔ جبر و توپولوژی بر یکدیگر است. خاطر نشان می‌شود که ارتباط فضای X و حلقهٔ $C(X)$ کم و بیش، شبیه ارتباط هندسهٔ جبری و حلقهٔ چندجمله‌ای‌ها است. حلقهٔ $C(X)$ از منظر تعویض‌پذیری غنی است، این حلقه پُر از مقسوم‌علیه صفر است و به همان اندازه، عناصر وارون‌پذیر دارد؛ عناصر آن را می‌شود به توان اعداد حقیقی رساند؛ طیف ایدآل‌های اول آن از طبقه‌بندی بی‌همتا و زیبایی برخوردار است؛ مجموع ایدآل‌های اول در آن، یک ایدآل اول است و ایدآل‌های ماکسیمال آن از قاعدهٔ خاصی پیروی می‌کنند. همهٔ این ویژگی‌ها و بسیاری دیگر از خواص زیبا و اعجاب‌انگیز این حلقه، هر علاقه‌مند به $C(X)$ را وسوسه می‌کند تا فقط به مطالعهٔ جنبه‌های جبری آن بپردازد. از آنجا که با کمک ویژگی‌های متفاوت X، می‌توان حلقه‌های $C(X)$ با ویژگی‌های متفاوت به‌دست آورد، مطالعهٔ $C(X)$ به‌منظور دست‌یابی به مثال‌هایی با خواص مشخص که نمونهٔ آن در دیگر حلقه‌های تعویض‌پذیر بسیار نادر است، موردِ توجه جبردانان است و از این منظر، جبردانان بیش از توپولوژی‌دانان بهره می‌برند.

ما بر این باوریم که به‌لحاظ ماهیت عناصر و غنی بودن حلقهٔ $C(X)$ که دربرگیرندهٔ هیأت اعداد حقیقی نیز می‌باشد، بسیاری از مفاهیم جبری در $C(X)$ به‌صورت بدیهی برقرارند و گاهی به‌کارگیری یک شناسه از تبار حلقه‌های تعویض‌پذیر روی حلقهٔ $C(X)$ به متناهی بودن فضای X می‌انجامد که در این صورت، حلقهٔ $C(X)$ همان حاصلضرب دکارتی تعداد متناهی نسخه از هیأت اعداد حقیقی خواهد بود. در چنین حالتی، $C(X)$ ساختاری پیدا می‌کند که چیزی برای گفتن ندارد. به بیان طنزگونه، اگرچه حلقهٔ $C(X)$ خیلی تعویض‌پذیر است، اما گاهی از حلقه‌های تعویض‌پذیر با شناسه‌های مشخص فاصله می‌گیرد و شخصیت تعویض‌پذیری آن کم‌رنگ شده و گاهی نیز شخصیت هیأت به خود می‌گیرد. جالب است بدانیم که اگر $C(X)$ با حاصلضربی از هیأت‌ها یکریخت باشد، آن‌گاه این هیأت‌ها را می‌توان با هیأت اعداد حقیقی جایگزین کرد. این واقعیت، به‌خوبی وفاداری $C(X)$ را به $\mathbb{R}$ نشان می‌دهد.

باید به‌خاطر چنین اوصافی، مفاهیمی که زادگاه آن‌ها جبر تعویض‌ناپذیر است و در جبر تعویض‌پذیر جایگاه موجهی ندارند بیشتر از مفاهیمی که اصالتاً تعویض‌پذیرند در حلقهٔ $C(X)$ قابل بررسی هستند. متقابلاً، بسیاری از مفاهیم و ویژگی‌های ذاتی $C(X)$ الهام‌بخش ایده‌های تازه در جبر تعویض‌پذیر و حتی جبر تعویض‌ناپذیر شده است. خاطرنشان می‌کنیم که بارها این اتفاق رخ داده و نتایج غریبی به‌دست آمده است.

ناگفته آشکار است که تسلط بر چند شاخه از ریاضیات و پیوند آن‌ها با یکدیگر ساده نیست و به همین سبب، همان‌گونه که سیر تکاملی $C(X)$ هم نشان خواهد داد، علاقه‌مندان به مطالعهٔ حلقه‌های توابع پیوسته بسیار اندک هستند. بسیاری از جبردانان طعم توپولوژی را نچشیده‌اند و یا موارد خاصی را در جبر دنبال می‌کنند که حلقهٔ $C(X)$ را تخریب می‌کند. همچنین اکثر توپولوژی‌دانان میانهٔ خوبی با جبر ندارند و از این‌رو، افرادی که حلقه‌های توابع پیوسته را دنبال می‌کنند، جایگاه مناسبی نزد این دو گروه ندارند. آنان که آنالیز تابعی را پی می‌گیرند، گرچه سر و کارشان با $C(X)$ است، ولی به

قلمرو آن‌ها نیز نمی‌توان نزدیک شد، چراکه به‌لحاظ شخصیت متفاوت $C(X)$ در آنالیز تابعی و حلقه‌های توابع پیوسته، نوع پرسش‌ها در این دو مبحث کاملاً متفاوت است. یک کارِ پژوهشی در حلقه‌های توابع پیوسته، برای تأمین نظر متخصصین جبر، توپولوژی و یا آنالیز تابعی، باید حاوی نتایج بسیار زیبا و عمیقی باشد تا آن‌ها بتوانند از آن بهره بگیرند؛ در غیر این صورت، خواننده‌های بسیار اندکی خواهد داشت. طبعاً این موضوع سبب می‌شود که در داوری مقاله‌های پژوهشی در زمینهٔ حلقه‌های توابع پیوسته نیز مشکل ایجاد شود، ولی با وجود همهٔ این کاستی‌ها، پژوهش در این زمینه به قوت خود باقی است و هر سال به تعداد پژوهش‌گران حلقه‌های توابع پیوسته در جهان افزوده می‌شود. در یکی دو دههٔ اخیر به نظر می‌آید که در ایران، به‌طور متمرکز در دانشگاه اهواز به تحقیق در این زمینه پرداخته شده و می‌شود. به این سبب بر خود لازم دیدیم تا به اندازهٔ توان خویش به معرفی حلقه‌های توابع پیوسته بپردازیم تا این نوشته، علاوه بر مرور جنبه‌های تاریخی این نظریه، سرآغاز مناسبی برای دیگر پژوهش‌گران علاقه‌مند و جوان در این زمینه در کشور باشد.

۲. سیر تاریخی

اکنون برای درک بهتر و آشنایی بیشتر با موضوع مقاله، به سرگذشت تاریخی $C(X)$ نظری می‌افکنیم. سرآغازِ بسیاری از موضوعات علمی را به‌لحاظ تاریخی دقیقاً نمی‌توان مشخص کرد و شاید گاه چنین نقطهٔ آغازی به‌روشنی وجود نداشته باشد. حتی قدیمی‌ترین مقالات به کار پیشینیان وابسته است و ما کمتر خبر داریم که در این راستا چه کمکی کرده‌اند. وقتی در مسیر مطالعهٔ $C(X)$، برگردیم و به دوردست‌ها گام برداریم، به نقطه‌ای می‌رسیم که قبل از آن چند ردِ پا دیده می‌شود که به این نقطه منتهی می‌شوند و در هر کدام اثر کم‌رنگی از $C(X)$ دیده می‌شود. وچتومف[1] در [92] با استناد به [20]، اعتقاد دارد که نظریهٔ حلقه‌های توابع پیوسته ریشه در نظریهٔ فضاهای باناخ توابع دارد که باناخ نشان داده است اگر X یک فضای متری فشرده باشد، آن‌گاه $C(X)$ به‌عنوان یک فضای باناخ، فضای X را می‌شناساند؛ به این معنا که اگر X و Y دو فضای متری فشرده باشند، آن‌گاه وجود یک طولپایی میان $C(X)$ و $C(Y)$ (با متر نُرم)، همسانریختی فضاهای X و Y را به‌دست می‌دهد. مقالهٔ دیگر ([28]) از چیتندن[2] است که در آن، اشاراتی به توابع پیوسته می‌شود. با اصطلاحات امروزی، در این مقاله نشان داده شده است که فضای X شبه‌فشرده است اگر و تنها اگر برد هر تابع پیوستهٔ حقیقی ــ مقدار روی X بسته باشد. سپس ردپای استون[3] [79] را می‌بینیم که ضمن شناسایی ایدآل‌های آزاد و ثابت حلقهٔ توابع پیوسته و کراندار، یعنی $C^*(X)$ و معرفی فشرده‌سازی βX (همزمان با چک[4] در [27] که بعدها به فشرده‌سازی استون ــ چک معروف شد)، قضیهٔ همسانریختی را برای فضاهای توپولوژی فشردهٔ X و Y تعمیم داد. به بیان دیگر، وی نشان داد که اگر X یک فضای هاسدورف و فشرده باشد، آن‌گاه حلقه $C(X)$ فضای X را می‌شناساند. در واقع او نشان داد که $C^*(X)$، فضای βX را معین می‌کند. این دو از رسالهٔ دکترای تیخونف[5] که

1) Vechtomov 2) Chittenden 3) Stone 4) Čech 5) Tychonoff

ماحصل آن در [80] آمده است، الهام گرفته بودند که تحت راهنمایی آلکساندروف[1] نوشته شده بود. تیخونف در این رساله نشان می‌دهد یک فضای توپولوژیک هاسدورف X، زیرفضای یک فضای فشردهٔ Y است اگر و تنها اگر برای هر زیرمجموعهٔ بسته در X مانند K و هر $x \notin K$، نگاشت پیوسته‌ای از X به $[0,1]$ وجود داشته باشد که x را به 0 و K را به 1 بنگارد. تیخونف چنین فضاهایی را کاملاً منظم نامید و در این راستا، تعریف متعارف توپولوژی حاصلضرب را ارائه داد. همچنین در این مقاله، فضاهای نرمال و کاملاً نرمال معرفی شدند و با اصطلاحات امروزی نشان داده شد که هر مجموعهٔ بسته در یک فضای نرمال C^* ـ نشانده است و مجموعه‌های بسته و مجزا در یک فضای نرمال کاملاً مجزا شده هستند. برای اطلاعات تاریخی بیشتر در این زمینه، به [46] مراجعه کنید. وقتی تیخونف صحبت از فضاهای هاسدورف به میان می‌آورد، نشان می‌دهد که پیش‌تر از آن، این مفاهیم توسط یوریسون[2] مطرح شده است. تیخونف از اثبات یوریسون در[81] الهام گرفت که بیان می‌کرد هر فضای متری تفکیک‌پذیر را می‌توان در مکعب هیلبرت[3]، $[0,1]^{\aleph_0}$، نشاند (حاصلضرب دلخواهی از نسخه‌های $[0,1]$، مکعب تیخونف نامیده می‌شود). سرچشمهٔ این یافته‌ها، بدون شک به سمیناری برمی‌گردد که الکساندروف و یوریسون در سال ۱۹۲۴ در دانشگاه ایالتی مسکو به قصد یافتن متر روی یک فضای توپولوژیک برگزار کردند. مفهوم مهمی که در این سمینار ارائه شد، مفهوم مجزا شدهٔ تابعی بود با این تعریف که زیرمجموعه‌های A و B از فضای X مجزا شدهٔ تابعی نامیده می‌شوند هرگاه تابع پیوستهٔ $f : X \to [0,1]$ موجود باشد به‌گونه‌ای که $A \subseteq f^{-1}(\{0\})$ و $B \subseteq f^{-1}(\{1\})$. این مفهوم توسط یوریسون در لم ماندگارش معرفی و مورد استفاده قرار گرفت. بنابراین شاید بتوان گفت که یوریسون در سال ۱۹۲۴ در تولد $C(X)$ سهم به‌سزایی داشته است.

چک در [27] تعمیم قضیهٔ تیخونف را ثابت کرد. او قضیهٔ تیخونف را به این صورت تعمیم داد که حاصلضرب هر تعداد دلخواه از فضاهای فشرده، فشرده است و نماد βX را برای بستار نشانندهٔ X در مکعب تیخونف معرفی کرد. به‌طور دقیق‌تر، برای هر تابع پیوستهٔ $f : X \to [0,1]$ قرار می‌دهیم $I_f = [0,1]$ و $P(X)$ را حاصلضرب همهٔ I_fها با توپولوژی حاصلضربی (تیخونف) در نظر می‌گیریم. همچنین تعریف می‌کنیم $(e(x))_f = f(x)$ برای هر $x \in X$. به این ترتیب چک، بستار $e[X]$ در $P(X)$ را به‌عنوان βX معرفی کرد. مقالهٔ چک تقریباً بی‌درنگ به‌طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفت و نماد βXاش برای فشرده‌سازی جدید به‌کار رفت. بعد از آن، گلفاند[4] و کلموگروف در [37] برخی از نتایج استون، از جمله قضیهٔ همسانریختی را بدون در نظر گرفتن یک ساختار متری روی $C(X)$ و $C(Y)$ و فقط به‌عنوان حلقه، بیان و اثبات کردند و در همین راستا، ایدآل‌های ماکسیمال حلقهٔ $C(X)$ را شناسایی کردند.

1) Alexandrof 2) Urysohn 3) Hilbert 4) Gelfand

همهٔ این یافته‌ها، زمینه را برای مطالعهٔ $C(X)$ هموار نمود، ولی شاید بتوانیم آغاز پُررنگ پیدایش حلقه‌های توابع پیوسته را همین مقالهٔ گلفاند و کلموگروف و یا کمی پیش‌تر، تلاش استون در اواخر دههٔ سوم قرن بیستم بدانیم. پس از یک دهه توقف، هویت[1] مقالهٔ ارزشمند خود ([51]) را با عنوان حلقه‌های توابع پیوسته حقیقی ـ مقدار منتشر کرد. این مقاله که به تعبیر هنریکسن[2] چون یک نگین بر تارک این نظریه می‌درخشد، بر مبنای کارهای استون و چک بنا شده بود و اولین مقاله‌ای است که به‌طور کامل به این زمینه اختصاص دارد. این یادگارِ ماندگار، بحث را به مسیر درستی هدایت کرد. این مقاله در معرفت و شناخت ما از حلقه‌های توابع پیوسته سهم به‌سزایی داشته است و به راستای فکری اغلب پژوهش‌گران در مسیر اصلی مطالعهٔ حلقه‌های توابع پیوسته جهت داد و پایه‌گذار مطالعهٔ روابط متقابل میان X و $C(X)$ شد. هویت بود که مفهوم صفر ـ مجموعه، فضاهای شبه‌فشرده، فضاهای فشردهٔ حقیقی و ایدآل‌های حقیقی و ابرحقیقی را مطرح و اهمیت و تأثیر آن‌ها را در مطالعهٔ $C(X)$ به پژوهش‌گران نشان داد.

با اصطلاحات امروزی، فضای تیخونوف X فشردهٔ حقیقی نامیده می‌شود اگر هیچ فضای تیخونوف اکیداً بزرگتر از Y موجود نباشد که X در آن چگال و هر $f \in C(X)$ دارای توسیعی به $C(Y)$ باشد (هویت اصطلاح Q ـ فضا را به‌کار برد). او در [51] نشان داد که یک فضا فشردهٔ حقیقی است اگر و تنها اگر با زیرفضای بسته‌ای از حاصلضرب نسخه‌هایی از خطِ حقیقی همسانریخت باشد. بنا به قضیهٔ استون در [79]، هر $f \in C(X)$، یک توسیع پیوسته از βX به فشرده‌سازی تک نقطه‌ای $\mathbb{R}$ دارد. در [51]، مجموعهٔ نقاطی از βX که همهٔ این توسیع‌ها در این نقاط، حقیقی ـ مقدار باشند با vX نشان داده شد و از آن به بعد، vX فشرده‌حقیقی‌سازی هویتِ X نام گرفت. همچنین خاستگاه فضاهای شبه‌فشردهٔ X که در آن‌ها داریم $vX = \beta X$، به‌طور طبیعی به [51] برمی‌گردد. هویت، سوپ ـ نُرم توپولوژی روی مجموعهٔ توابع پیوسته و کراندار را به $C(X)$ تعمیم داد و آن را به احترام مور[3]، m ـ توپولوژی نامید. وی طبیعت میدان‌هایی را که تصویرِ همریخت $C(X)$ هستند مورد بحث قرار داد و پایگاهی تحقیقاتی برای بسیاری از پژوهش‌گران در این زمینه در ربع قرن بعد ایجاد کرد. خاطرنشان می‌شود که در این مقالهٔ برجسته، چندین اشتباه اساسی وجود داشت. این اشتباهات توسط دیودونه[4] در [33] مطرح شده بودند. این امر چند سالی باعث دلسردی هویت از ادامهٔ کار در این زمینه شد و سبب شد تا وی مسیر خود را به‌سوی آنالیز تابعی تغییر دهد، ولی سه دههٔ بعد، با همکاری سه ریاضی‌دان دیگر در [6] مقالهٔ دیگری در خصوص حلقه‌های توابع پیوسته منتشر کرد تا سهم بیشتری در پیشبرد این شاخه از ریاضیات داشته باشد. تصحیح این اشتباهات و پیگیری ایده‌های هویت، محور این مبحث و الهام‌بخش تألیف کتابی توسط گیلمن[5] و جریسون[6] شد.

بی‌شک نمی‌توان از نظریهٔ حلقه‌های توابع پیوسته سخن به میان آورد اما نامی از کهلز[7] نبرد. این بار هم یک دهه گذشت تا این پژوهش‌گر خوش‌آوازه، مقاله‌های گران‌بهای [60]، [61] و [62] را

1) Hewitt 2) Henriksen 3) Moore 4) Dieudonne 5) Gillman 6) Jerison 7) kohls

در مورد ساختار ایدآل‌های حلقه‌های توابع پیوسته انتشار دهد. او در این مقالات z ـ ایدآل‌ها را معرفی کرده و ارتباط آن‌ها را با ایدآل‌های اول حلقه‌های توابع پیوسته نشان داد. رساله‌اش دربارهٔ ایدآل‌های اول در $C(X)$ بود که اساس بسیاری از مباحث فصل چهاردهم کتاب [43] شد. پیش از آن، گیلمن، هنریکسن و جریسون نیز در [39]، [40] و [41] حلقه‌های توابع پیوسته را مورد مطالعه قرار داده و برخی از ارتباط‌های میان حلقهٔ $C(X)$ و فضای توپولوژی X را به‌دست آورده بودند که راهگشا و انگیزه‌بخشِ بسیاری از تحقیقات بعدی در این زمینه شد. سرانجام دههٔ بعد، کتاب بی‌نظیر حلقه‌های توابع پیوسته تألیفِ گیلمن و جریسون که قبلاً نیز به آن اشاره شد، منتشر شد و همهٔ پژوهش‌های انجام شده تا آن زمان را دربر داشت و تا به امروز تنها کتاب مرجع مدون در این زمینه است. این کتاب خود نیز حاصل چندین دهه کار پژوهشی تعدادی از ریاضی‌دانان بزرگ است. آغاز گردآوری مطالب این کتاب، سمیناری است که در سال‌های ۱۹۵۴ و ۱۹۵۵ در دانشگاه پوردو[1] با برنامه‌ریزی هنریکسن برگزار گردید. وظیفهٔ گردآوری مطالب به عهدهٔ چهار تن از دانش‌آموختگان آن زمان به نام‌های کیست[2]، کهلز، مانسفیلد[3] و مک داول[4] قرار داده شد که بعدها ریاضی‌دانان برجسته‌ای شدند. شایسته است اشاره کنیم که بنا بر گفتهٔ نویسندگان کتاب، تهیهٔ آن بدون همکاری‌های مستمر و ثمربخش هنریکسن و کهلز امکان‌پذیر نبوده است و بدون شک، راهنمایی‌های انگیزه‌بخش هویت نیز تأثیر عمیقی بر اعتبار کتاب گذاشته است.

انتشار این کتاب باعث شد تا از وقفه و پراکندگی در مطالعهٔ $C(X)$ کاسته شود و مطالعه در این زمینه به شکلی منسجم و پیوسته پی گرفته شود. موج جدید پژوهش در حلقه‌های توابع پیوسته و متأثر از این کتاب، بیش از یک دههٔ دیگر ادامه داشت تا کتاب دیگری، نه صرفاً در مورد حلقه‌های توابع پیوسته، بلکه در ارتباط با آن ([94]) توسط واکر[5] نیز به چاپ رسید تا به این سیر فکری غنای بیشتری بخشیده شود. این کتاب در واقع رسالهٔ دکتری واکر بود. یک دهه پس از آن و در سال ۱۹۸۸، کتاب [75] منتشر شد که نسبت به کتاب پیشین ارتباط نزدیکتری با نظریهٔ حلقه‌های توابع پیوسته داشت. در این یکی دو دهه، پژوهش در این زمینه ادامه داشت و کشور آمریکا بیشترین سهم را در پروراندن این مبحث داشته است. ولی از آن سال به بعد، به گفتهٔ هنریکسن در [47]، حجم مقالات در این زمینه در کشور آمریکا کاسته شد؛ حال آن‌که در کشورهای ایران، روسیه و اسپانیا رشد چشم‌گیری داشت. در این خصوص، عمدتاً وچتومف[6] و زاخارف[7] از روسیه در[82]—[92] و [96]—[99] به‌طور مفصل به مطالعهٔ حلقه‌های توابع پیوسته پرداخته و آثار ارزنده‌ای از خود بر جای گذاشته‌اند. آن‌ها شناسه‌های توپولوژیکی و جبری برای F ـ فضاها و معادل‌هایی برای P ـ فضاها با توجه به $C(X)$ ـ مدولِ $\mathbb{R}^X$ به‌دست آورده، به مشکلات شناسایی جبری C ـ توسیع حلقه‌های $C(X)$ پرداخته‌اند.

در ایران، نتایج بسیاری در مبحث حلقه‌های توابع پیوسته توسط نویسندگان مقاله صورت گرفته

---

1) Purdue 2) Kist 3) Mansfield 4) MacDowell 5) Walker 6) Vechtomov 7) Zakharov

که در آن‌ها، جنبه‌های جبری عمیق‌تری از $C(X)$ بررسی شده است. به شناسه‌های جبری و توپولوژیکی بسیاری از مفاهیم جبری از قبیل ساکل، ایدآل‌های اساسی، مینیمال و یکنواخت، $\aleph_0$ ـ انژکتیویتی، ue ـ حلقه‌ها، بُعد گلدی و z ـ ایدآل‌های حلقه‌های خارج‌قسمتی $C(X)$ پرداخته شده است. مرجع [58] نخستین کار تحقیقی در این زمینه بود که در ایران (اهواز) انجام شد و بعد از آن کارهای متعددی در این راستا صورت گرفت که در بخش‌های بعدی بیشتر به آن‌ها می‌پردازیم. اسپانیایی‌ها نیز مقالات ارزشمندی در زمینهٔ $C(X)$ منتشر کرده‌اند که از آن جمله می‌توان به [36]، [26] و [71] اشاره کرد. در این مقالات معادل بودنِ فضاهای شبه‌فشردهٔ X با منطبق بودن زیرحلقه‌های u ـ چگالِ (چگال با توپولوژی یکنواخت) حلقهٔ $C(X)$، بر زیرحلقه‌های m ـ چگالِ (چگال با m ـ توپولوژی) $C(X)$ نشان داده شده و همچنین کارهایی دربارهٔ $C(X)$ ـ مدول‌های تخت و پروژکتیو انجام گرفته است.

۳. دیدگاه‌های کلی

بی‌شک آن‌چه از آغاز پیدایش حلقهٔ $C(X)$ برای علاقه‌مندان این مبحث مدنظر بوده است، ساختار آن بوده که در ارتباط تنگاتنگ با عنصر جداناشدنی خود، یعنی فضای توپولوژیک X است. از دیدگاه بنیان‌گذاران این نظریه، این‌که «حلقهٔ $C(X)$ چه هنگام فضای X را شناسایی می‌کند؟» قلبِ مبحث حلقهٔ توابع پیوسته است. به بیان دیگر، می‌خواهیم بدانیم تحت چه شرایطی، یکریختی میان حلقه‌های $C(X)$ و $C(Y)$، همسانریختی میان فضاهای X و Y را به‌دست می‌دهد. باید توجه داشت که عکس این موضوع همواره درست است. در صورتی که به $C(X)$ به‌عنوان مشبکهٔ $L(X)$ و یا نیم‌گروه $S(X)$ نگاه کنیم، آن‌گاه از این منظر نیز چنین پرسشی مطرح است که چه‌وقت از یکریختی مشبکه‌های $L(X)$ و $L(Y)$، و یا یکریختی نیم‌گروه‌های $S(X)$ و $S(Y)$ می‌توان به همسانریختی فضاهای X و Y دست یافت. در ابتدای پیدایش و مطالعهٔ این مبحث، در سال‌های ۱۹۳۷ و ۱۹۳۹ به‌ترتیب در [79] و [37] نشان داده شد که وقتی فضای X هاسدورف و فشرده است، با حلقهٔ $C(X)$ می‌توان ساختار فضای X را شناخت. در سال‌های ۱۹۴۷ و ۱۹۴۹ به‌ترتیب در [57] و [70] ثابت شد که با $L(X)$ و $S(X)$ نیز می‌توان فضای X را شناسایی کرد. در سال ۱۹۴۸ در [80] ثابت شد که وقتی فضای X هاسدورف و فشردهٔ حقیقی باشد، حلقهٔ $C(X)$ ساختار فضای X را می‌شناساند. در سال ۱۹۵۲ در [78] ثابت شد که تحت همین شرایط برای فضای X، مشبکهٔ $L(X)$ و نیم‌گروه $S(X)$ هم این کار را انجام می‌دهند. در صورتی که فضای X کاملاً منظم و نقاطش G_δ ـ مجموعه باشند، آن‌گاه در سال ۱۹۵۵ در [76] و در سال ۱۹۵۵ در [5] به‌ترتیب ثابت شد که $C(X)$ و $L(X)$، فضای X را می‌شناسانند. سرانجام در سال ۱۹۵۶ در [45] نشان داده شد که برای فضاهای X و Y، یکریختی حلقه‌های $C(X)$ و $C(Y)$ معادل با یکریختی مشبکه‌های $L(X)$ و $L(Y)$ و همچنین معادل با یکریختی نیم‌گروه‌های $S(X)$ و $S(Y)$ است. به این ترتیب می‌توان همواره $C(X)$ را به‌چشم یک حلقه نگریست.

اگر دو حلقهٔ $C(X)$ و $C(Y)$ یکریخت باشند، حتی اگر X و Y همسانریخت نباشند، آن‌گاه آن دسته از خواص فضای X که تحت این یکریختی به فضای Y نیز سرایت می‌کند، خواص جبری نامیده می‌شوند. مثلاً همان‌گونه که در پیش‌گفتار گفته شد، همبندی، یک خاصیت جبری است، حال آن‌که فشردگی چنین نیست. اهمیت این نگاه در آن است که می‌توان بسیاری از ویژگی‌های فضای X را با مفاهیم موجود در حلقهٔ $C(X)$ بیان کرد. در واقع، نگاهی دیگر با اندکی ظرافت بیشتر، این است که چگونه ویژگی‌های جبری حلقهٔ $C(X)$ را در مقابل ویژگی‌های توپولوژیکی X قرار دهیم. بعد از نگاه نخست به $C(X)$، این نگاه هدف اصلی در مطالعهٔ $C(X)$ قرار گرفت. برای رسیدن به این هدف، کافی است مفاهیم و ویژگی‌های جبری $C(X)$ را با کمک ابزار توپولوژیکی X شناسایی کنیم. شاید ساده‌ترین مثال، P ـ فضاها باشند، یعنی فضاهایی که در آن‌ها هر G_δ ـ مجموعه، باز است. این فضاها ابتدا در [39] مورد مطالعه قرار گرفت و ثابت شد که X یک P ـ فضا است اگر و تنها اگر حلقهٔ $C(X)$ منظم باشد. معادل‌های جبری دیگری نیز می‌توان برای این ویژگی بیان کرد. مثلاً X یک P ـ فضا است اگر و تنها اگر هر ایدآل اول در حلقهٔ $C(X)$، ماکسیمال باشد و یا هر ایدآل متناهیاً تولید شده در $C(X)$ توسط یک خودتوان تولید شود. در [35] ثابت شده است که اگر X یک P ـ فضا باشد، آن‌گاه $C(X)$ نه‌تنها یک حلقهٔ منظم است، بلکه از ویژگی قوی‌تر $\aleph_0$ ـ انژکتیوی برخوردار است، حال آن‌که حلقه‌های تعویض‌پذیر منظم به‌طور طبیعی از این ویژگی به‌دور هستند. در [85] ثابت شده است که X یک F ـ فضا است اگر و تنها اگر حلقهٔ $C(X)$ ریکاتین ضعیف باشد، یعنی پوچساز هر عنصرش یک ایدآل محض باشد. در [73] نیز ثابت شده است که X یک F ـ فضا است اگر و تنها اگر هر ایدآل در حلقهٔ $C(X)$، تخت باشد. نتایج مشابه بسیاری از این نوع معادل‌های جبری برای P ـ فضاها و F ـ فضاها به‌دست آمده است که خواننده برای اطلاعات بیشتر می‌تواند به [43] مراجعه کند. در [74] نشان داده شده است که حلقهٔ $C(X)$ یک حلقهٔ وابسته[1] است اگر و تنها اگر فضای X ناهمبند پایه‌ای باشد؛ به عبارت دیگر، بستار متمم هر صفر ـ مجموعه، باز باشد. در این مقاله شناسهٔ دیگری برای این فضاها به‌دست آمده است: هر ایدآل متناهیاً تولید شده در حلقهٔ $C(X)$، پروژکتیو است اگر و تنها اگر فضای X ناهمبند پایه‌ای باشد. در [11] شناسه‌های دیگری برای فضاهای ناهمبند پایه‌ای و فضاهای شدیداً ناهمبند (فضاهایی که در آن‌ها، بستار هر مجموعهٔ باز، باز باشد) به‌دست آمده است. در این مرجع، ثابت شده است که فضای X شدیداً ناهمبند است اگر و تنها اگر حلقهٔ $C(X)$ بیر باشد، یعنی پوچساز هر زیرمجموعهٔ $C(X)$ با یک عنصر خودتوان تولید شود. از زاویه‌ای دیگر، اگر مجموعهٔ همهٔ توابع حقیقی ـ مقدار روی X، یعنی $\mathbb{R}^X$ را به‌عنوان $C(X)$ ـ مدول در نظر بگیریم، آن‌گاه در [82] نشان داده شده است که X یک P ـ فضا است اگر و تنها اگر $C(X)$ ـ مدولِ $\mathbb{R}^X$، مدول انژکتیو باشد؛ اگر و تنها اگر $C(X)$ ـ مدولِ $\mathbb{R}^X$، مدول تخت باشد و یا اگر و تنها اگر $C(X)$ زیرمدول سرهٔ $C(X)$ ـ مدولِ $\mathbb{R}^X$ باشد.

1) Coherent

نگاهی دیگر به $C(X)$، توجه به حلقه‌های خارج‌قسمتی آن است. $C(X)/P$ و میدان کسرهای آن در آنالیز تابعی و به‌خصوص در جبرهای باناخ و مفاهیم پیوستگی خودکار که در [30] به‌طور مفصل مطالعه شده است، اهمیت به‌سزایی دارند. این حلقه‌ها و خواص مهم جبری آن‌ها در مقالات [35]، [11] و [12] مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. در [12] حلقه‌های خارج‌قسمتی $C(X)$ به پیمانهٔ ساکل آن، $C_F(X)$، مورد مطالعه قرار گرفته و برای این پرسش که «چه موقع رادیکال جیکوبسن $\frac{C(X)}{C_F}$ صفر است؟» معادل‌های توپولوژیکی به‌دست آمده است و نویسندگان به جواب این مسألهٔ کلاسیک که «آیا هر فضای گسسته، فشردهٔ حقیقی است؟» نزدیک شده‌اند. در واقع، نشان داده شده است که فضای گسستهٔ X فشردهٔ حقیقی است اگر و تنها اگر vX شمارای نوع اول باشد. همچنین حلقهٔ $\frac{C(X)}{C_F(X)}$ در خیلی از مراحل می‌تواند همانند $C(X)$، با خواص مهم $C(X)$ ارتباط منطقی پیدا کند. در این مرجع، ثابت شده است که فشردگی همراه با وجود حداکثر تعداد شمارا نقطهٔ نامنفرد در یک فضای توپولوژیک، یک خاصیت جبری است.

مطالعهٔ $C(X)$ صرفاً به‌عنوان یک حلقه و یا صرفاً به‌عنوان یک فضای توپولوژیک، نگاهی دیگر به حلقه‌های توابع پیوسته است. وقتی $C(X)$ را به‌عنوان حلقه بنگریم، ایدآل‌های ماکسیمال آن، رفتار ایدآل‌های اول آن و ارتباط آن‌ها با z ـ ایدآل‌ها و بسیاری دیگر از ایدآل‌های $C(X)$ و ساختارهای جبری آن‌ها مورد بررسی قرار گرفته است که به تدریج به آن‌ها خواهیم پرداخت. $C(X)$ را همراه با یک توپولوژی روی آن، بسته به قصدمان، می‌توان به‌عنوان یک فضای توپولوژیک، حلقهٔ توپولوژیک، گروه توپولوژیک، فضای برداری توپولوژیک و یا مشبکهٔ توپولوژیک در نظر گرفت. اگرچه مطالعهٔ $C(X)$ از این دیدگاه مقولهٔ دیگری است، ولی به یک حالت خاص آن که $C(X)$ مجهز به m ـ توپولوژی باشد، به‌طور مختصر خواهیم پرداخت.

۴. z ـ ایدآل‌ها در $C(X)$

هرگاه صحبت از $C(X)$، یعنی مجموعهٔ توابع پیوسته و حقیقی ـ مقدار روی فضای توپولوژی X می‌شود، بی‌شک توپولوژی روی X متأثر از این توابع و همچنین ساختار اعداد حقیقی خواهد بود. کوچکترین توپولوژی روی یک مجموعهٔ X که به‌ازای آن، دسته‌ای از توابع روی X پیوسته باشند، توپولوژی تولید شده توسط آن دسته از توابع نامیده می‌شود. زمانی که توپولوژی اولیهٔ X بر توپولوژی تولید شده توسط تمام عناصر $C(X)$ روی X منطبق شود، فضای X کاملاً منظم خواهد بود. در چنین شرایطی، مجموعه‌های باز یا بستهٔ فضای X کاملاً از طریق تصویر معکوس مجموعه‌های باز و یا بستهٔ $\mathbb{R}$ تحت عناصر $C(X)$ به‌دست می‌آیند. به عبارت دیگر، هرگاه برای هر $f \in C(X)$، $f^{-1}(\{0\})$ را صفر ـ مجموعهٔ $Z(f)$ بنامیم، آن‌گاه برای هر $f \in C(X)$ داریم $f^{-1}([a,\infty)) = (f-a-|f-a|)^{-1}(\{0\})$ و از این رو، $f^{-1}([a,\infty))$ و به‌طور مشابه $f^{-1}((-\infty,b])$ و $f^{-1}([a,b])$ نیز صفر ـ مجموعه هستند. علاوه بر این، دستهٔ $Z(X)$ متشکل از همهٔ صفر ـ مجموعه‌ها، تحت اجتماع متناهی و اشتراک شمارا بسته است. به این ترتیب، می‌توان

گفت که فضای X کاملاً منظم است اگر و تنها اگر $Z(X)$ پایه‌ای برای مجموعه‌های بستهٔ X باشد. از سوی دیگر، استون در [79] نشان داد برای هر فضای X، فضای کاملاً منظم و هاسدورف Y وجود دارد به‌گونه‌ای که حلقه‌های $C(X)$ و $C(Y)$ یکریخت هستند. از آنجا که هدف اصلی از مطالعهٔ حلقه‌های توابع پیوسته ارتباط خواص جبری حلقهٔ $C(X)$ با خواص توپولوژیکی X است و خواص جبری تحت یکریختی‌ها پایا می‌مانند، نشانه‌ها همه حاکی از آنند که برای مطالعهٔ حلقه‌های توابع پیوسته $C(X)$، کافی است فضای X را کاملاً منظم و هاسدورف اختیار کنیم.

صفر ـ مجموعه‌ها که نخستین بار در [51] مطالعه شدند، نه‌تنها به‌عنوان پایهٔ مجموعه‌های بستهٔ فضاهای کاملاً منظم مطرح بودند بلکه این ابزار توپولوژیکی مبنای پیدایش اشیاء جبری به نام z ـ ایدآل‌ها شدند که به‌تدریج نقش شگفت‌انگیزی در مطالعهٔ $C(X)$ ایفا کردند. در حقیقت اگر بخواهیم در راستای هدف اصلی در مطالعهٔ $C(X)$ گام برداریم، ناچاریم تا آنجا که امکان دارد مفاهیم جبری را با کمک ابزار توپولوژیکی و یا برخی ویژگی‌های توپولوژیکی را با کمک اشیاء جبری بیان کنیم. به‌ویژه وقتی بتوانیم نوعی از ایدآل‌ها را هم به‌صورت جبری و هم به‌صورت توپولوژیکی تعریف کنیم، پل‌های ارتباطی مستحکمی میان X و $C(X)$ بنا می‌شود. هرگاه برای یک ایدآل I در $C(X)$ قرار دهیم $Z[I] = \{Z(f) : f \in I\}$، آن‌گاه به‌طور طبیعی این پرسش پیش خواهد آمد که آیا از $Z(f) \in Z[I]$ می‌توان نتیجه گرفت $f \in I$؟ اگر چنین اتفاقی برای یک ایدآل I رخ دهد، آن‌گاه ایدآل I را z ـ ایدآل می‌گوییم. مفهوم z ـ ایدآل نخستین بار در [60] مطرح گردید. لازم است با یک مثال نشان دهیم که این امر همواره محقق نمی‌شود. در حلقهٔ $C(\mathbb{R})$، اگر تابع همانی i و ایدآل اصلی $I = (i)$ را در نظر بگیریم، آن‌گاه $Z(i^{۱/۳}) \in Z[I] = \{۰\}$، ولی $i^{۱/۳} \notin I$.

به بیان دیگر، ایدآل I در $C(X)$ یک z ـ ایدآل است هرگاه از $Z(f) = Z(g)$ و $f \in I$ بتوان نتیجه گرفت که $g \in I$. این تعریف کاملاً توپولوژیکی است، ولی جالب است بدانیم تعریفی کاملاً جبری نیز برای z ـ ایدآل‌ها وجود دارد تا به این ترتیب واژهٔ z ـ ایدآل به دیگر حلقه‌ها نیز راه یابد. در صورتی که برای هر $f \in C(X)$، ایدآل M_f را اشتراک همهٔ ایدآل‌های ماکسیمال شامل f در نظر بگیریم، آن‌گاه به‌سادگی دیده می‌شود که ایدآل I در $C(X)$ یک z ـ ایدآل است اگر و تنها اگر برای هر $f \in I$، داشته باشیم $M_f \subseteq I$. برای هر $f \in C(X)$، ایدآل M_f نیز یک z ـ ایدآل است که نخستین بار این نماد در [16] مطرح و با نمایش توپولوژیکی به‌صورت $M_f = \{g \in C(X) : Z(f) \subseteq Z(g)\}$ شناسایی شد. به این ترتیب، هر M_f هم نمایش جبری دارد و هم نمایش توپولوژیکی. با استفاده از این شناسه، به‌سادگی می‌توان دید که خانوادهٔ $\{M_f : f \in C(X)\}$ تحت جمع و اشتراک متناهی، بسته است. در واقع برای هر $f, g \in C(X)$ خواهیم داشت $M_f \cap M_g = M_{fg}$ و $M_f + M_g = M_{f^۲+g^۲}$. مهمتر از آن، هر z ـ ایدآل I به‌صورت مجموع عناصری از این خانواده نوشته می‌شود. به‌گونه‌ای شفاف‌تر می‌توان نوشت $I = \sum_{f \in I} M_f$.

نه‌تنها این خانوادهٔ خاص از z ـ ایدآل‌ها تحت جمع و اشتراک بسته است، بلکه مجموع و

اشتراک هر تعداد z ـ ایدآل در $C(X)$ نیز یک z ـ ایدآل است. اول بار در [43] با استفاده از مفهوم فشرده‌شدهٔ استون ـ چک ثابت شد که مجموع z ـ ایدآل‌ها در $C(X)$ یک z ـ ایدآل است و سپس این موضوع با روشی ساده و ابتدایی توسط راد[1] در [77] به اثبات رسید. با استفاده از این واقعیت‌ها، به‌طور طبیعی می‌توان دید که برای هر ایدآل I در $C(X)$، ایدآل I_z، یعنی کوچکترین z ـ ایدآل شامل I و I^z که بزرگترین z ـ ایدآل مشمول در I است، وجود دارند. این نمادها نخست در [69] به‌کار گرفته شد. در حقیقت، I_z برابر با اشتراک همهٔ z ـ ایدآل‌های شامل I و I^z مجموع همه z ـ ایدآل‌های مشمول در I است.

همان‌گونه که می‌دانیم، ایدآل‌های اول در هر حلقه جایگاه ویژه‌ای دارند. از این‌رو، ارتباط تنگاتنگ z ـ ایدآل‌ها با ایدآل‌های اول $C(X)$ که بخشی از آن را عنوان خواهیم کرد، نشان از اهمیت z ـ ایدآل‌ها دارد که نخست در [60]، [61] و [62] مورد مطالعه قرار گرفت. هر z ـ ایدآل، نیم‌اول است؛ هر ایدآل اول مینیمال روی یک z ـ ایدآل در $C(X)$ خود z ـ ایدآل است و مهمتر از آن، هر z ـ ایدآل شامل یک ایدآل اول در $C(X)$، اول است. جالب‌تر از همه، با استفاده از مفاهیم کوچکترین و بزرگترین z ـ ایدآل‌ها، در [68] نشان داده شد که مجموع یک ایدآل اول و یک z ـ ایدآل در $C(X)$ که در یک زنجیر قرار نگیرند، یک z ـ ایدآل اول است. پیوند ایدآل‌های اول با z ـ ایدآل‌ها که از دو جنس متفاوت‌اند و تأثیر هر دو بر حاصلِ پیوند، حکایت از نزدیکی تنگاتنگ z ـ ایدآل‌ها با ایدآل‌های اول دارد. به این ترتیب، اگر P یک ایدآل اول در $C(X)$ باشد، آن‌گاه P_z و P^z نیز اول هستند. از این‌رو، ایدآل‌های اول مینیمال و ایدآل‌های ماکسیمال نیز z ـ ایدآل هستند. در [69] ثابت شد که ایدآل‌های اول مینیمال روی یک z ـ ایدآل در هر حلقه نیز z ـ ایدآل هستند. عکس این موضوع برای حلقهٔ $C(X)$ در [71] و [16] به دو روش مختلف به اثبات رسیده است. از این رو، به این واقعیت پی می‌بریم که ایدآل I در $C(X)$ یک z ـ ایدآل است اگر و تنها اگر $\sqrt{I}$ یک z ـ ایدآل باشد. سرانجام با استفاده از این موضوع، نتیجهٔ کلی‌تری از آنچه پیش‌تر گفته شد در [16] به اثبات رسید: مجموع یک ایدآل اولیه و یک z ـ ایدآل در $C(X)$ که در یک زنجیر نباشند یک z ـ ایدآل اول است.

عناصر خانوادهٔ $\{M_f : f \in C(X)\}$ به‌نوعی z ـ ایدآل‌های پایه‌ای محسوب می‌شوند، چراکه پیش‌تر دیدیم که هر z ـ ایدآل I در $C(X)$ برحسب مجموع عناصری از این گونه نوشته می‌شود. علاوه بر آن، برای هر ایدآل I در $C(X)$، ایدآل‌های I_z و I^z برحسب z ـ ایدآل‌های پایه‌ای در [16] به‌صورت $I_z = \sum_{f\in I} M_f$ و $I^z = \sum_{M_f\subseteq I} M_f$ شناسایی شده‌اند. با استفاده از این نمایش‌ها، شناسه‌های توپولوژیکی برای این ایدآل‌ها نیز به‌صورت زیر است:

$$I_z = \{g \in C(X) : \exists f \in I \ni Z(f) \subseteq Z(g)\}\ ,$$
$$I^z = \{g \in C(X) : Z(g) \subseteq Z(f) \Rightarrow f \in I\}.$$

1) Rudd

سرگذشت نوع دیگری از z ــ ایدآل‌های قوی‌تر بنام z° ــ ایدآل‌ها را در بخش‌های بعد خواهیم گفت، ولی نوع ضعیف‌تری از z ــ ایدآل‌ها به‌نام z ــ ایدآل‌های نسبی نیز اخیراً در [18] مورد مطالعه قرار گرفته است. وقتی $I \subseteq J$ دو ایدآل در $C(X)$ باشند و I در J یک z ــ ایدآل باشد به این معنی که $g \in J$، $f \in I$ و $Z(f) \subseteq Z(g)$ نتیجه بدهد $g \in I$، آن‌گاه I را z ــ ایدآل نسبی نسبت به J می‌نامیم و می‌گوییم I یک z_J ــ ایدآل است. به عبارت دیگر، ایدآل I را z ــ ایدآل نسبی گوییم هرگاه ایدآل $I \subsetneqq J$ موجود باشد که I یک z_J ــ ایدآل گردد. به‌سادگی می‌توان دید که I یک z_J ــ ایدآل است اگر و تنها اگر $I_z \cap J = I$. پیداست هر ایدآل I یک z_I ــ ایدآل است و هر z ــ ایدآل سره نیز یک z ــ ایدآل نسبی است، حال آن‌که می‌توان نشان داد که اگر J یک z ــ ایدآل نباشد، آن‌گاه ایدآل $I \supsetneqq J$ وجود دارد که z_J ــ ایدآل باشد ولی z ــ ایدآل نباشد. در حالت خاص می‌توان نشان داد که ایدآل اصلی (f) در $C(X)$ یک z ــ ایدآل نسبی است اگر و تنها اگر $\mathrm{Ann}(f) \neq (\circ)$. در مورد ارتباط ایدآل‌های اول و z ــ ایدآل‌های نسبی، ابتدا بیان این نکته ضروری است که z ــ ایدآل‌های نسبی اول و z ــ ایدآل‌های اول بر هم منطبق‌اند و سپس لازم است بدانیم که اگر I یک z_J ــ ایدآل باشد، هر ایدآل اول شامل I که z ــ ایدآل نباشد، شامل J نیز هست. این موضوع بیانگر این واقعیت است که اگر I یک z_J ــ ایدآل باشد، آن‌گاه دو ایدآل I و J بسیار به هم نزدیک‌اند. به عبارت دیگر، برای دستیابی به بزرگترین ایدآل J به‌گونه‌ای که I یک z_J ــ ایدآل باشد، نمی‌توان انتظاری فراتر از برخی از ایدآل‌های اول مینیمال روی I داشت. دوگان این موضوع نیز مطرح است: برای یک ایدآل مفروض J، یافتن بزرگترین z_J ــ ایدآل غیر از J همیشه میسر نیست. شرط وجود چنین ایدآلی آن است که مجموع z_J ــ ایدآل‌ها یک z_J ــ ایدآل باشد، ولی بر خلاف z ــ ایدآل‌ها، مجموع هر دو z_J ــ ایدآل (z ــ ایدآل نسبی) در $C(X)$ لزوماً یک z_J ــ ایدآل (z ــ ایدآل نسبی) نیست. برای فراهم نمودن شرایط مناسب، باید به فضای X نگاهی بیفکنیم تا بتوانیم بستر لازم را مهیا کنیم. در [18] ثابت شده است که برای هر ایدآل J در $C(X)$، مجموع دو z_J ــ ایدآل یک z_J ــ ایدآل است اگر و تنها اگر X یک F ــ فضا باشد (یعنی فضایی که در آن متمم هر صفر ــ مجموعه، یک C^* ــ نشانده است و یا معادل جبری آن: هر ایدآل با مولد متناهی در $C(X)$، اصلی است). همچنین ثابت شده است که مجموع دو z ــ ایدآل نسبی در $C(X)$، یک z ــ ایدآل نسبی است اگر و تنها اگر X یک P ــ فضا باشد (یعنی، فضایی که در آن هر G_δ ــ مجموعه، باز است).

همان‌گونه که پیش‌تر گفتیم و اکنون نیز مشاهده کردیم، به‌لحاظ بیان دوگانهٔ جبری و توپولوژیکی z ــ ایدآل‌ها، می‌توان پل‌های ارتباطی میان X و $C(X)$ بنا کرد که همان هدف اصلی مطالعهٔ $C(X)$ است. اشاره به چند مورد دیگر از این ارتباط‌ها، اهمیت z ــ ایدآل‌ها را بیشتر نشان می‌دهد.

- هر ایدآل (اول) در $C(X)$ یک z ــ ایدآل است اگر و تنها اگر X یک P ــ فضا باشد؛ معادلاً حلقهٔ $C(X)$ منظم باشد ([43]).
- هر ایدآل اصلی در $C(X)$ یک z ــ ایدآل نسبی است اگر و تنها اگر X یک تقریباً P ــ فضا

باشد (یعنی فضایی که در آن هر G_δ ـ مجموعهٔ ناتهی دارای درون ناتهی است) ([18]).

- فضای X شبه‌فشرده است (یعنی $C(X) = C^*(X)$) اگر و تنها اگر هر ایدآل $C(X)$ در یک z ـ ایدآل قویاً تقسیم‌پذیر قرار گیرد (ایدآل I را قویاً تقسیم‌پذیر می‌نامیم هرگاه برای هر دنبالهٔ $\{a_n\} \subseteq I$، دنبالهٔ $\{b_n\} \in C(X)$ و $e \in I$ موجود باشند که $a_n = eb_n$ برای هر $n \in \mathbb{N}$) ([9]).

شناسایی z ـ ایدآل‌های شمارا تولید شده در $C(X)$ نیز از دیرباز مدنظر بوده است. z ـ ایدآل‌های O^p برای $p \in \beta X$ که به‌صورت $O^p = \{f \in C(X) : p \in \mathrm{int}_{\beta X}\mathrm{cl}_{\beta X} Z(f)\}$ تعریف می‌شوند و همچنین z ـ ایدآل‌های $O^A = \cap_{p\in A} O^p$ برای $A \subseteq \beta X$، در شناسایی z ـ ایدآل‌های $C(X)$ با مولد شمارا اهمیت دارند. در بخش بعد، به‌طور مفصل به مطالعهٔ فضای βX خواهیم پرداخت و با این نوع ایدآل‌ها بیشتر آشنا خواهیم شد. مطالعهٔ z ـ ایدآل‌های شمارا تولید شده در $C(X)$ ابتدا در [38] آغاز شد. با استفاده از نتایج به‌دست آمده در این مرجع، نخست نشان داده شد که z ـ ایدآل O^p وقتی که $p \in \beta X \setminus X$ و همهٔ ایدآل‌های شامل O^p، از جمله ایدآل‌های اول شامل O^p، برای $p \in \beta X \setminus X$، هرگز مولد شمارا ندارند. سپس ثابت شد z ـ ایدآل‌های اول غیرماکسیمال در $C(X)$ فاقد مولد شمارا هستند، حال آن‌که ایدآل‌های اول با مولد شمارا در $C(X)$ وجود دارند. بعد از آن، در [32] مطالعهٔ z ـ ایدآل‌های شمارا تولید شده در $C(X)$ دنبال شد و ثابت شد که برای مجموعهٔ بستهٔ A در βX، z ـ ایدآل O^A دارای مولد شماراست اگر و تنها اگر A یک صفر ـ مجموعه در βX باشد. از این‌رو، وقتی X فشرده باشد، z ـ ایدآل‌های شمارا تولید شده در $C(X)$ به‌صورت O^A هستند که A یک صفر ـ مجموعه در X است. سرانجام در [64] و [65] نشان داده شد که عناصر مولد یک z ـ ایدآل شمارا تولید شده در $C(X)$ از نظم خاصی برخوردارند. با استفاده از این موضوع، ثابت شد که اگر فضای X شمارای نوع اول و نرمال (یا نرمال و موضعاً فشرده) باشد، آن‌گاه z ـ ایدآل‌های شمارا تولید شده در $C(X)$ به‌صورت O^A هستند که A یک صفر ـ مجموعه در βX است.

بسیاری از ناگفته‌های دیگر مانند برابری‌های $(I \cap J)_z = I_z \cap J_z = I_z J_z = (IJ)_z$، برابری $(I+J)^z = I^z + J^z$ وقتی I و J ایدآل‌های تجزیه‌پذیر باشند، امکان شمول $P_z \subseteq Q_z$ بدون آن‌که ایدآل‌های اول P و Q در یک زنجیر باشند، و بسیاری از نتایج دیگر در مورد z ـ ایدآل‌ها که مجال بیان همگی آن‌ها در این مقاله نیست، حکایت از نقش مؤثر و سازندهٔ z ـ ایدآل‌ها در کشف حقایق جبری و توپولوژیکی دارند. در بخش‌های بعد نیز خواهیم دید که چگونه z ـ ایدآل‌ها با مباحث دیگر در $C(X)$ پیوند خورده و با این پیوندها چگونه میان X و $C(X)$ ارتباط‌های دوطرفه برقرار می‌کنیم.

۵. شناسایی ایدآل‌های ماکسیمال $C(X)$

به‌طور کلی، ایدآل‌های ماکسیمال در بحث نظریهٔ حلقه‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند. اما در

ادامه، خواهیم دید که اهمیت این ایدآل‌ها در حلقهٔ $C(X)$ دوچندان است. همان‌طور که پیش‌تر نیز گفته شد، یکی از مسائل بسیار مهم برای صاحب‌نظران در این زمینه این است که چه وقت از یکریختی میان حلقه‌های $C(X)$ و $C(Y)$ می‌توان همسانریختی فضاهای توپولوژی X و Y را نتیجه گرفت که این موضوع ارتباط تنگاتنگی با ایدآل‌های ماکسیمال دارد. برای شناختِ بهترِ ایدآل‌های ماکسیمال، ابتدا به معرفی فشرده‌شدهٔ یک فضا با در نظر گرفتن جنبه‌های تاریخی آن می‌پردازیم. ولی پیش از آن، برای روان‌تر شدن مطلب به بیان چندین تعریف می‌پردازیم و چند نماد را معرفی می‌کنیم.

$\varnothing \neq \mathcal{F} \subseteq Z(X)$ را z ـ پالایه روی X می‌گوییم هرگاه

الف) $\varnothing \notin \mathcal{F}$؛

ب) اگر $A, B \in \mathcal{F}$، آن‌گاه $A \cap B \in \mathcal{F}$؛

پ) اگر $A \in \mathcal{F}$، $B \in Z(X)$ و $A \subseteq B$، آن‌گاه $B \in \mathcal{F}$.

اگر $\mathcal{F}$ یک z ــ پالایهٔ ماکسیمال باشد، آن را z ــ فراپالایه می‌گوییم. z ــ پالایهٔ $\mathcal{F}$ را اول می‌گوییم هرگاه از $A \cup B \in \mathcal{F}$ نتیجه شود $A \in \mathcal{F}$ یا $B \in \mathcal{F}$. به‌راحتی می‌توان نشان داد که اگر $\mathcal{F}$ یک z ـ پالایه باشد، آن‌گاه $Z^{-1}[\mathcal{F}] = \{f \in C(X) :\ Z(f) \in \mathcal{F}\}$ ایدآل سره در $C(X)$ است و به‌عکس، اگر I ایدآل سره در $C(X)$ باشد، آن‌گاه $Z[I] = \{Z(f) :\ f \in I\}$ یک z ــ پالایه روی X است. اگر $\mathcal{F}$ یک z ــ فراپالایه باشد، آن‌گاه $Z^{-1}[\mathcal{F}]$ یک ایدآل ماکسیمال در $C(X)$ است و به‌عکس، اگر M ایدآل ماکسیمال در $C(X)$ باشد، آن‌گاه $Z[M] = \{Z(f) :\ f \in I\}$ یک z ـ فراپالایه روی X است. z ـ پالایهٔ $\mathcal{F}$ راثابت می‌گوییم هرگاه $\bigcap \mathcal{F} \neq \varnothing$؛ در غیر این صورت، آن را آزاد می‌نامیم. به‌علاوه، ایدآل I در $C(X)$ را ثابت می‌گوییم هرگاه $Z[I]$ چنین باشد و در غیر این صورت، آن را آزاد می‌گوییم. مطالعهٔ ارتباط z ـ پالایه‌های روی X و ایدآل‌های سرهٔ $C(X)$ اولین بار توسط هویت در [51] صورت گرفت. می‌توان ثابت کرد که هر z ـ فراپالایه روی X ثابت است اگر و تنها اگر به‌صورت $\mathcal{A}^p = \{Z \in Z(X) :\ p \in Z\}$ باشد که در آن، $p \in X$.

فرض کنیم $\mathcal{M}$، مجموعهٔ ایدآل‌های ماکسیمال $C(X)$ و $\mathcal{M}^*$، مجموعهٔ ایدآل‌های ماکسیمال $C^*(X)$ را به توپولوژی زاریسکی مجهز کرده‌ایم. به این توپولوژی، توپولوژی استون و فضاهای توپولوژیک $\mathcal{M}$ و $\mathcal{M}^*$ را به‌ترتیب، فضاهای ساختاری[1] $C(X)$ و $C^*(X)$ می‌گویند. برای هر $f \in C(X)$ ($f \in C^*(X)$) تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{M}(f) = \{M \in \mathcal{M} :\ f \in M\}\ ,\ \ \mathcal{M}^*(f) = \{M^* \in \mathcal{M}^* :\ f \in M^*\}.$$

اکنون می‌خواهیم با همین زمینهٔ اندک، با شیوهٔ پیدایش فشرده‌شدهٔ استون ــ چک و تاریخچهٔ آن آشنا شویم. تیخونف در [80] نشان داد که برای هر فضای کاملاً منظم و هاسدورف X، فضای فشردهٔ T وجود دارد که $\mathrm{cl}_T X = T$. بعدها استون در [79] و مستقلاً چک در [27] فضای فشرده شدهٔ βX

1) Structure space

را ساختند که X در آن چگال و C^* ـ نشانده است. بدین سبب، βX را فشرده‌شدهٔ استون ـ چک می‌گویند. چک در روش خود فضای کاملاً منظم و هاسدورف X را در حاصلضربی از بازه‌های بستهٔ کراندار نشاند. به‌علاوه، او نشان داد که C^* ـ نشانده بودن X در βX معادل با این است که هر دو صفر ـ مجموعهٔ مجزا در X دارای بستارهای مجزا در βX باشند. همچنین دو قضیهٔ مهم زیر را اثبات کرد:

- $S \subseteq X$ یک C^* ـ نشانده در X است اگر و تنها اگر $\beta S = \mathrm{cl}_{\beta X} S$.
- فرض کنیم T فشرده‌شدهٔ X و φ یک نشاننده از X به T باشد. در این صورت، φ دارای توسیع پیوستهٔ $\bar{\varphi}$ از βX به T است (که به آن، توسیع استون نیز گفته می‌شود) و به‌علاوه، $\bar{\varphi}(\beta X \setminus X) = T \setminus \varphi(X)$.

استون نیز مستقل از «چک» و به روشی متفاوت، با ارتباط دادن ساختار جبری $C^*(X)$ با ساختار معینی از زیرمجموعه‌های X، ضمن اثبات وجود βX به‌عنوان فضای فشرده‌ای که X در آن C^* ـ نشانده و چگال است، ثابت کرد این حکم معادل است با این‌که هر تابع پیوسته از X به یک فضای فشرده و هاسدورف Y، قابل توسیع به تابعی پیوسته از βX به Y است. این توسیع به توسیع استون معروف است و اگر $Y = \mathbb{R}$، آن را با f^β نشان می‌دهند.

روشی که در [43] آمده است، ادامهٔ روش استون است که بعدها توسط ریاضی‌دانانی همچون والمن[1]، الکساندروف، گلفاند و کلموگروف قوام پیدا کرد و به‌ویژه گلفاند و کلموگروف آن را تقریباً به شکلی که در [43] آمده است، عرضه کردند. به‌علاوه، این دو در [37] با بهره‌گیری از جنبه‌های جبری اثبات استون، βX را به‌عنوان فضای ساختاری $C^*(X)$ و جالب‌تر از آن، به‌عنوان فضای ساختاری $C(X)$ گسترش دادند. آن‌ها ثابت کردند که نگاشت $p \to M^p$ ($p \to M^{*p}$) هر $\mathrm{cl}_{\beta X} Z(f)$ ($Z(f^\beta)$) را به $\mathcal{M}(f)$ ($\mathcal{M}^*(f)$) می‌نگارد و به‌عکس که در آن، $M^p = \{f \in C(X) :\ p \in \mathrm{cl}_{\beta X} Z(f)\}$ ($M^{*p} = \{f \in C^*(X) :\ f^\beta(p) = \circ\}$).

در ادامه، به تاریخچهٔ پیدایش این ایدآل‌ها اشاره می‌کنیم. از آنجا که $\{\mathrm{cl}_{\beta X} Z(f)\}_{f \in C(X)}$ و $\{Z(f^\beta)\}_{f \in C^*(X)}$، پایه‌هایی برای مجموعه‌های بستهٔ βX هستند، این نگاشت یک تناظر دوسویی بین عناصر پایه‌ای فضای توپولوژی βX و عناصر پایه‌ای فضای توپولوژی $\mathcal{M}$ و $\mathcal{M}^*$ ایجاد می‌کند. بنابراین بر اساس این روش می‌توان گفت که فضاهای ساختاری $C(X)$ و $C^*(X)$ همسانریخت هستند و می‌توان آن‌ها را به‌عنوان βX در نظر گرفت. به‌علاوه، این نگاشت، فضای X را به‌روی زیرفضای ایدآل‌های ثابت $\mathcal{M}$ و $\mathcal{M}^*$ می‌نگارد. بهتر است اضافه کنیم که در [41] ثابت شده است که بین ایدآل‌های ماکسیمال $C(X)$ و $C^*(X)$ یک تناظر دوسویی وجود دارد. البته، بنا به آنچه که در [41] آمده است، این قضیه را پیش‌تر، گلفاند و کلموگروف در [37] بدون اثبات مطرح کرده بودند. بدون شک، کارهای گلفاند و کلموگروف

1) Wallman

متکی به نتایج استون بوده است چراکه قبل از آن، استون ثابت کرده بود که ایدآل‌های ماکسیمال $C^*(X)$ دقیقاً به‌صورت $M^{*p} = \{f \in C^*(X) :\ f^\beta(p) = \circ\}$ هستند که در آن، $p \in \beta X$ و بین مجموعهٔ این ایدآل‌ها و βX یک تناظر دوسویی وجود دارد. او همچنین ثابت کرد که اگر X فشرده باشد، همهٔ ایدآل‌های $C(X)$ ثابت هستند. به علاوه، او نشان داد برای هر $p \in X$ نگاشت $M^{*p}(f) \to f(p)$ یکریختی بین C^*/M^{*p} و $\mathbb{R}$ ایجاد می‌کند و این یکریختی یکتا است.

گلفاند و کلموگروف ثابت کردند که همهٔ ایدآل‌های ماکسیمال $C(X)$ به‌صورت $M^p = \{f \in C(X) :\ p \in \mathrm{cl}_{\beta X} Z(f)\}$ هستند که در آن، $p \in \beta X$ و ایدآل‌های ماکسیمال ثابت $C(X)$ به‌صورت $M^p = \{f \in C(X) :\ p \in Z(f)\}$ هستند که $p \in X$. آن‌ها نشان دادند که نگاشت $p \to M^p$ تناظری یک‌به‌یک بین βX و $\mathcal{M}$ ایجاد می‌کند. در ضمن، این نگاشت، نقاط X را به ایدآل‌های ماکسیمال ثابت می‌نگارد.

از آنجا که نگاشت $M^p \to \mathcal{A}^p$ یک تناظر دوسویی بین $\mathcal{M}$ و مجموعهٔ z ـ فراپالایه‌های روی X ایجاد می‌کند آن‌چنان که ایدآل‌های ماکسیمال ثابت به روی z ـ فراپالایه‌های ثابت نگاشته می‌شوند، می‌توان با الهام از روش قبل، βX را به‌صورتی دیگر نیز معرفی کرد چنان‌که در [43] انجام شده است. برای آشنایی بیشتر خواننده، این روش را نیز به‌اختصار بیان می‌کنیم. خانوادهٔ همهٔ z ـ فراپالایه‌های روی X را توسط مجموعه‌ای شامل X، به‌نام βX به‌صورت $\{\mathcal{A}^p\}_{p\in\beta X}$ اندیس‌گذاری می‌کنیم. اکنون روی βX یک توپولوژی به‌شرح زیر معرفی می‌کنیم. برای هر $Z \in Z(X)$ قرار می‌دهیم $\overline{Z} = \{p \in \beta X : Z \in \mathcal{A}^p\}$. آشکارا دیده می‌شود که $\overline{\varnothing} = \varnothing$ و برای هر $Z_1, Z_2 \in Z(X)$ داریم $\overline{Z_1 \cup Z_2} = \overline{Z}_1 \cup \overline{Z}_2$. بنابراین خانوادهٔ $\{\overline{Z}\}_{Z\in Z(X)}$ تحت اجتماع متناهی بسته است و $\varnothing$ را نیز در خود دارد. پس این خانواده می‌تواند پایه‌ای برای مجموعه‌های بستهٔ یک توپولوژی روی βX باشد و ثابت می‌شود که βX با این توپولوژی یک فضای فشرده و هاسدورف است که X را به‌عنوان زیرفضای چگال و C^* ـ نشانده در بر دارد.

همان‌طور که قبلاً نیز اشاره شد، یکی از موضوعاتی که در مبحث حلقهٔ توابع پیوسته همواره مورد توجه بوده و ساختار ایدآل‌های ماکسیمال در آن نقش اساسی دارد، این است که چگونه می‌توان از یکریختی حلقه‌های $C(X)$ و $C(Y)$ همسانریختی فضاهای X و Y را نتیجه گرفت. باناخ در [20] نشان داد که برای فضای متری فشردهٔ X نگاشت $p \to M^p$ یک تناظر یک‌به‌یک میان X و $\mathcal{M}$ است و همچنین برای فضاهای متری فشردهٔ X و Y، اگر بین $C(X)$ و $C(Y)$ طولپایی برقرار باشد، آن‌گاه X و Y همسانریخت هستند. بعداً استون همین قضیه را برای فضاهای توپولوژیک فشرده تعمیم داد که به همین خاطر، به قضیهٔ باناخ ــ استون معروف است. بالأخره، گلفاند و کلموگروف ثابت کردند که برای فضاهای فشردهٔ X و Y، از یکریختی حلقه‌های $C(X)$ و $C(Y)$ می‌توان همسانریختی فضاهای X و Y را نتیجه گرفت؛ به این ترتیب که اگر فرض کنیم $\mathcal{M}_X$ و $\mathcal{M}_Y$ به‌ترتیب، مجموعهٔ ایدآل‌های ماکسیمال $C(X)$ و $C(Y)$ مجهز به توپولوژیِ استون باشند، آن‌گاه با توجه به فرض، این دو فضا همسانریخت هستند و در نتیجه

$X = \beta X \simeq \mathcal{M}_X \simeq \mathcal{M}_Y \simeq \beta Y = Y$. بی‌تردید این قضیه یکی از نتایج بسیار جالب توجه و اساسی در مبحث حلقهٔ توابع پیوسته است.

مفهوم عمیق دیگری که در آن ایدآل‌های ماکسیمال نقش اساسی دارند، مفهوم‌فشردهٔ حقیقی است. این مفهوم ابتدا توسط هویت معرفی شد و مورد بررسی قرار گرفت. برای آشنایی با این مفهوم، تعاریفی را نیاز داریم که آن‌ها را در زیر به‌اختصار می‌آوریم.

هویت در [51] ثابت کرد که برای هر فضای X، یک فضای توپولوژیک یکتا (با تقریب همسانریختی) به‌نام Q وجود دارد که X در آن چگال و C ـ نشانده است و هر فضای T که X در آن چگال و C ـ نشانده باشد، (با تقریب همسانریختی) زیرفضای Q است. این فضا توسط ریاضی‌دانان بعدی نام‌ها و نمادهای مختلفی به خود گرفت، ولی اکنون تقریباً همهٔ پژوهش‌گران در این زمینه، این فضا را فشرده شدهٔ حقیقی X می‌نامند و آن را با نماد υX نمایش می‌دهند. X را فشردهٔ حقیقی می‌گوییم هرگاه $\upsilon X = X$. هویت نشان داد که این مفهوم همان ارتباطی را با $C(X)$ دارد که فشرده‌شدهٔ استون ـ چک با $C^*(X)$ داراست. وی با اثبات این‌که «فضاهای فشردهٔ حقیقی X و Y همسانریخت هستند اگر و تنها اگر حلقه‌های $C(X)$ و $C(Y)$ یکریخت باشند»، اهمیت این مفهوم را بیش از پیش نشان داد. او همچنین برخی خواص این فضاها را به‌دست آورد. لازم است بدانیم که بسیاری از احکام اساسی در مورد فضاهای فشردهٔ حقیقی را می‌توان در کارهای نچبین[1] در [72] نیز دید. این کارها، مستقل از کارهای هویت صورت گرفته و وی از منظر دیگری به این مفهوم نگریسته است.

می‌دانیم که برای هر $p \in \beta X$، $C(X)/M^p$ $(C^*(X)/M^{*p})$ یک هیأت و به‌وضوح شامل یک نسخه از هیأت اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ است. اگر این نسخه دقیقاً برابر با $C(X)/M^p$ $(C^*(X)/M^{*p})$ باشد، آن‌گاه می‌گوییم M^p (M^{*p}) ایدآل حقیقی است و در غیر این صورت، آن را ایدآل ابرحقیقی می‌نامیم. از آنجا که برای هر $p \in X$، نگاشت $M^p(f) \to f(p)$ $(M^{*p}(f) \to f(p))$ یکریختی از $C(X)/M^p$ $(C^*(X)/M^{*p})$ به‌روی هیأت اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ است، پس همهٔ ایدآل‌های ماکسیمال ثابت در $C(X)$ $(C^*(X))$، حقیقی هستند (منظور از $I(f)$ همدستهٔ $f + I$ است). بنابراین هر ایدآل ماکسیمال ابرحقیقی در $C(X)$ $(C^*(X))$ لزوماً آزاد است. ثابت می‌شود که هر ایدآل ماکسیمال در $C^*(X)$ حقیقی است، اما در $C(X)$ چنین نیست. اکنون این سؤال مطرح می‌شود که آیا فضای X وجود دارد که هر ایدآل ماکسیمال آزاد در $C(X)$ ابرحقیقی باشد؟ پاسخ مثبت است و این فضاها همان فضاهای فشردهٔ حقیقی هستند.

فرض کنیم $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ فشرده‌شدهٔ تک نقطه‌ای $\mathbb{R}$ باشد. برای هر $f \in C(X)$، می‌توان f را تابعی از X به $\mathbb{R}^*$ در نظر گرفت. از این‌رو، f دارای توسیعی از βX به $\mathbb{R}^*$ است که آن را با f^* نشان می‌دهیم. این توسیع برای اولین بار در [41] معرفی شد و مورد بررسی قرار گرفت.

1) Nachbin

قضیهٔ زیر حاصل مطالعات هویت، گیلمن، هنریکسن و جریسون است که در [43] آمده است.
قضیه. فرض کنیم $p \in \beta X$. در این صورت احکام زیر معادل‌اند:

(الف) $Z[M^p]$ تحت اشتراک شمارا بسته است؛

(ب) $Z[M^p]$ دارای خاصیت اشتراک شمارا است (یعنی اشتراک هر تعداد شمارا از اعضای $Z[M^p]$ ناتهی است)؛

(پ) M^p یک اید آل حقیقی است؛

(ت) $f^*(p) \neq \infty$ برای هر $f \in C(X)$؛

(ث) $f^*(p) = M^p(f)$ برای هر $f \in C(X)$؛

(ج) اگر $f^*(p) = ۰$، آن‌گاه $M^p(f) = ۰$ (یعنی $f \in M^p$).

ثابت می‌شود که مجموعهٔ نقاطی از βX که در یکی از شرایط معادل قضیهٔ بالا صدق می‌کنند، همان υX یعنی فشرده‌شدهٔ حقیقی X است. بدیهی است که $X \subseteq \upsilon X \subseteq \beta X$. بنابراین $\beta(\upsilon X) = \beta X$. به‌علاوه، روشن است که X فشردهٔ حقیقی است اگر و تنها اگر $X = \upsilon X$. همچنین ثابت می‌شود که υX بزرگترین زیرفضای βX است که X در آن C ــ نشانده است. از آنجا که X در υX یک C ــ نشانده و υX هم در $\upsilon(\upsilon X)$ یک C ــ نشانده است، پس X در $\upsilon(\upsilon X)$ یک C ــ نشانده خواهد بود. از این‌رو، $\upsilon(\upsilon X) \subseteq \upsilon X$. از طرفی، آشکار است که $\upsilon X \subseteq \upsilon(\upsilon X)$. بنابراین $\upsilon(\upsilon X) = \upsilon X$، یعنی υX فشردهٔ حقیقی است. اکنون اگر فرض کنیم $X \subseteq T \subseteq \beta X$، آن‌گاه می‌توان دید که T در $T \cup (\upsilon X)$ یک C ــ نشانده است. بنابراین اگر T فشردهٔ حقیقی باشد، آن‌گاه باید داشته باشیم $T = T \cup (\upsilon X)$ و در نتیجه $\upsilon X \subseteq T$. به این ترتیب υX کوچکترین مجموعهٔ فشردهٔ حقیقی بین βX و X است.

در قضیهٔ زیر، گزاره‌های «الف»، «ب» و «پ» به‌ترتیب کارهای کوبنسکی[1] در [63]، وولی[2] در [93] و شیروتا[3] در [78] هستند.
قضیه فرض کنیم X در T چگال باشد. در این صورت، احکام زیر معادل‌اند:

(الف) هر نگاشت پیوسته از X به فضای فشردهٔ حقیقی Y، دارای یک توسیع پیوسته از T به Y است؛

(ب) X در T یک C ــ نشانده است؛

(پ) اگر $\bigcap_{n=۱}^{\infty} Z_n = \varnothing$، آن‌گاه $\bigcap_{n=۱}^{\infty} \mathrm{cl}_T(Z_n) = \varnothing$.

(ت) $\mathrm{cl}_T \bigcap_{n=۱}^{\infty} (Z_n) = \bigcap_{n=۱}^{\infty} \mathrm{cl}_T(Z_n)$؛

(ث) برای هر $p \in T$، یک z ــ فراپالایهٔ حقیقی یکتا چون $\mathcal{F}$ وجود دارد که $\mathcal{F} \to p$؛

(ج) $X \subseteq T \subseteq \upsilon X$؛

---

1) Kubenskii 2) Vulih 3) Shirota

(چ) $vT = vX$.

با استفاده از قضیهٔ اخیر می‌توان نشان داد که تنها فضای فشردهٔ حقیقی که X در آن چگال و C ـ نشانده است، همان vX (با تقریب همسانریختی) است. همچنین، به‌سادگی می‌توان دید که نگاشت $f \to f^v$ که f^v توسیع f روی vX است، یکریختی از $C(X)$ به‌روی $C(vX)$ است، یعنی $C(X) \cong C(vX)$. پیداست که اگر $f \in C^*$، آن‌گاه $f^v = f^\beta|_{vX}$.

کاتتف[1] ([59]) ثابت کرد که هر مجموعهٔ بسته در یک فضای فشردهٔ حقیقی، فشردهٔ حقیقی است. شیروتا ([75]) نتایج مهمی را در این زمینه به‌دست آورد. از جمله، نشان داد که حاصلضرب فضاهای فشردهٔ حقیقی، فشردهٔ حقیقی است؛ اگر X یک فضای فشردهٔ حقیقی و هر نقطه‌اش G_δ باشد، آن‌گاه هر زیرفضای X فشردهٔ حقیقی است. ونجن[2] ([95]) ثابت کرد که اشتراک دلخواهی از زیرفضاهای فشردهٔ حقیقی، فشردهٔ حقیقی است. هنریکسن نیز در این زمینه کارهایی انجام داده است. مثلاً او نشان داد که برای هر $f \in C(X)$ فضای $v_f(X) = \{p \in \beta X : \ f^*(p) \neq \infty\}$ یک فضای موضعاً فشرده و σ ـ فشرده است.

با توجه به آنچه که گفته شد، نقش ایدآل‌های ماکسیمال در شناسایی اکثر مفاهیم مطرح شده در $C(X)$ کاملاً برجسته است. از جملهٔ این مفاهیم که پیش از این نیز از آن سخن به میان آمد، z ـ ایدآل‌ها هستند. خوانندهٔ آشنا با $C(X)$ می‌داند که تقریباً در همهٔ مقالات مربوط به $C(X)$ ردِپایی از این مفهوم وجود دارد و به همین دلیل، ماهیت جبری آن در جبر مجرد به‌ویژه حلقه‌های تعویض‌پذیر نیز مورد توجه است. یکی از خواص بسیار کمیاب $C(X)$ که به ایدآل‌های ماکسیمال ارتباط دارد این است که هر ایدآل اول آن در یک ایدآل ماکسیمال یکتا قرار می‌گیرد؛ به عبارت دقیق‌تر برای هر ایدآل اول P در $C(X)$ یک نقطهٔ یکتای $p \in \beta X$ وجود دارد که $O^p \subseteq P \subseteq M^p$. خاصیت مشمول بودنِ ایدآل‌های اول در ایدآل ماکسیمال یکتا همواره مورد توجه بوده است. چنین حلقه‌هایی را حلقه‌های گلفاند یا pm ـ حلقه می‌گویند و به‌طور جداگانه مطالعاتی روی آن‌ها صورت گرفته است. در ارتباط با ایدآل‌های ماکسیمال $C(X)$، گزاره‌های با اهمیتی وجود دارد که از آن جمله می‌توان به موارد زیر اشاره کرد.

- X یک P ـ فضا است اگر و تنها اگر هر ایدآل اول در $C(X)$ ماکسیمال باشد.
- X یک تقریباً P ـ فضا است اگر و تنها اگر عناصر هر ایدآل ماکسیمال $C(X)$ مقسوم‌علیه صفر باشند.
- X یک F ـ فضا است اگر و تنها اگر مجموعهٔ ایدآل‌های اول مشمول در یک ایدآل ماکسیمال، تشکیل یک زنجیر بدهد.

مفهوم دیگری که اخیراً در مبحث $C(X)$ مطرح و سپس به حلقه‌های دلخواه تعمیم داده شده است، رتبهٔ یک ایدآل ماکسیمال است. می‌گوییم رتبهٔ ایدآل ماکسیمال M برابر با n است هرگاه

1) Katetov 2) Wenjen

تعداد ایدآل‌های اول مینیمال مشمول در M برابر با n باشد. به نظر می‌رسد که این مفهوم اول بار در [49] معرفی و مورد بررسی قرار گرفت. مفهوم متناظر با رتبهٔ ایدآل‌های ماکسیمال در $C(X)$، مفهوم رتبهٔ نقاط βX نسبت به X است که سابقهٔ آن به کمی پیش‌تر برمی‌گردد ([1] را ببینید). از سوی دیگر، با الهام از تعاریف معادل فشرده‌سازی حقیقی، طبق معمول مفاهیم دیگری از جمله μ ـ فشرده، ψ ـ فشرده، ∞ ـ فشرده و غیره زاییده شدند که همهٔ آن‌ها در ارتباط نزدیک با ایدآل‌های ماکسیمال $C(X)$ هستند. خواننده می‌تواند مطالعهٔ این مفاهیم و ویژگی‌های آن‌ها را در [43]، [67]، [56] و [2] پی‌گیری کند.

۶. z° ـ ایدآل‌ها

در حلقه‌های کاهشی، $z^\circ-$ ایدآل‌ها دستهٔ خاصی از z ـ ایدآل‌ها هستند که در دهه‌های اخیر به‌ویژه در مبحث حلقه‌های توابع پیوسته مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. اولین ردپای جدی این مفهوم را می‌توان در فضاهای ریس[1] (فضای برداری مشبکه) تحت عنوان d ـ ایدآل در [53]، [54] و [55] مشاهده کرد؛ هرچند که پیش‌تر از آن در [21]، [22]، [24]، [66] و [52] با عناوین دیگری مورد اشاره قرار گرفته بودند. فرض کنیم که L یک فضای ریس باشد، $S \subseteq L$ و $S^d = \{a \in L: \ |a| \wedge |s| = 0 \ \forall s \in S\}$. ایدآل I را o ـ ایدآل (ایدآل مرتب) می‌نامیم هرگاه از $|f| \leq |g|$ و $g \in I$ نتیجه شود $f \in I$. بر اساس تعریفی که در [53] آمده است، o ـ ایدآل I یک d ـ ایدآل نامیده می‌شود در صورتی که از $f \in I$، $g \in L$ و $\{f\}^{dd} = \{g\}^{dd}$ نتیجه شود $g \in I$. افزون بر این، در [53]، [54] و [55] نشان داده شده است که این تعریف معادل است با این‌که بگوییم o ـ ایدآل I در L یک d ـ ایدآل است اگر و تنها اگر از $f \in I$ نتیجه شود $\{f\}^{dd} \subseteq I$. به‌سادگی دیده می‌شود که اشتراک d ـ ایدآل‌ها یک d ـ ایدآل است، اما جمع دو d ـ ایدآل لزوماً یک d ـ ایدآل نیست. در این سه مقاله، $C(X)$ به‌عنوان فضای ریس در نظر گرفته شده و ثابت شده است که مجموع هر دو d ـ ایدآل در $C(X)$ یک d ـ ایدآل است اگر و تنها اگر X یک شبه‌F ـ فضا باشد، یعنی فضایی که در آن هر متمم ـ صفر مجموعهٔ چگال یک C^* ـ نشانده است. همچنین در این مقالات، نتایج دیگری در مورد این ایدآل‌ها وجود دارد که از آن جمله می‌توان به موارد زیر اشاره کرد.

- هر o ـ ایدآل I در $C(X)$ یک d ـ ایدآل است اگر و تنها اگر از $f \in I$، $g \in C(X)$ و $\overline{\mathrm{int}_X Z(f)} = \overline{\mathrm{int}_X Z(g)}$ نتیجه شود $g \in I$.
- $C(X)$، d ـ منظم است اگر و تنها اگر برای هر $f \in C(X)$ یک $g \in C(X)$ موجود باشد به‌طوری که $\overline{X \setminus Z(f)} = \overline{\mathrm{int}_X Z(g)}$. منظور از d ـ منظم آن است که هر d ـ ایدآل اول در $C(X)$ یک ایدآل اول مینیمال باشد. به‌عنوان مثال اگر X یک فضای متری باشد، $C(X)$

1) Riesz spaces

یک حلقهٔ d ـ منظم است.

- X شبه F ـ فضا است اگر و تنها اگر برای هر $Z_1, Z_2 \in Z(X)$ که $\mathrm{int}_X Z_1 \cap \mathrm{int}_X Z_2 = \varnothing$، مجموعه‌های $\mathrm{int}_X Z_1$ و $\mathrm{int}_X Z_2$ کاملاً مجزا شده باشند.

مفهوم d ـ منظم به‌طور مستقل در [1]، [19] و [50] با عناوین دیگری مورد توجه قرار گرفت، به‌ویژه در [19] این مفهوم با نامِ m ـ فضا به‌تفصیل مورد بررسی قرار گرفته و نتایج دیگری به‌دست آمده است که در انتهای این بخش به آن‌ها اشاره خواهد شد.

چون در f ـ جبرهای نیم‌اول، $|a| \wedge |b| = 0$ معادل است با $ab = 0$ و نیز به این دلیل که $\{a\}^d = \mathrm{Ann}(a)$، می‌توان در حلقه‌های کاهشی، d ـ ایدآل I را چنین تعریف کرد که برای هر $a \in I$ داشته باشیم $\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(a)) \subseteq I$. در [69]، این تعریف مبنا قرار گرفته و معادل‌های زیر برای آن به‌دست آمده است. متذکر می‌شویم که اگر $S \subseteq R$، آن‌گاه $V(S) = \{P \in \mathrm{Spec}(R) :\ S \subseteq P\}$، $D(S) = \mathrm{Spec}(R) \setminus V(S)$، $V_0(S) = V(S) \cap \mathrm{Min}(R)$ و $D_0(S) = D(S) \cap \mathrm{Min}(R)$.

- در حلقهٔ کاهشی R گزاره‌های زیر معادل‌اند:

  الف) I یک d ـ ایدآل در R است؛

  ب) اگر $\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(y)) \subseteq \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(b))$ و $b \in I$، آن‌گاه $y \in I$؛

  پ) اگر $V_0(y) = V_0(b)$ و $b \in I$، آن‌گاه $y \in I$؛

  ت) اگر $V_0(b) \subseteq V_0(y)$ و $b \in I$، آن‌گاه $y \in I$.

با توجه به تعریف d ـ ایدآل، همهٔ عناصر یک d ـ ایدآل سره، لزوماً مقسوم‌علیه صفر هستند. چنین ایدآل‌هایی را غیرعادی می‌نامیم و در غیر این صورت آن را عادی می‌گوییم. در ارتباط با گزارهٔ اخیر، در [31] ثابت شده است که در حلقهٔ $C(X)$، ویژگی شبه F ـ فضا بودنِ X معادل با گزاره‌های جبری زیر است:

الف) هر ایدآل عادی و متناهی تولید شده در $C(X)$ یک ایدآل اصلی است؛

ب) اگر g مقسوم‌علیه صفر نباشد و $|g| \leq |f|$، آن‌گاه f مضربی از g است.

سپس در [69] ایدآل I در حلقهٔ تعویض‌پذیر و نیم‌اول R، ζ ـ ایدآل نام گرفت اگر از $D(\mathrm{Ann}(b_1, \ldots, b_n)) \subseteq V(a)$ و $b_1, \ldots, b_n \in I$ نتیجه شود $a \in I$. در این مقاله ضمن بررسی و مطالعهٔ این ایدآل‌ها، نتایج جالب توجهی به‌دست آمد که به چند مورد آن‌ها اشاره می‌کنیم.

- با این فرض که R یک حلقهٔ کاهشی باشد، گزاره‌های زیر معادل‌اند:

  الف) I یک ζ ـ ایدآل در R است؛

  ب) اگر $D_0(\mathrm{Ann}(b_1, \ldots, b_n)) \subseteq V_0(a)$ و $b_1, \ldots, b_n \in I$، آن‌گاه $a \in I$؛

  پ) اگر $V_0(b_1, \ldots, b_n) \subseteq V_0(a)$ و $b_1, \ldots, b_n \in I$، آن‌گاه $a \in I$؛

  ت) اگر $b_1, \ldots, b_n \in I$، آن‌گاه $\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(b_1, \ldots, b_n)) \subseteq I$.

همچنین نشان داده شد که در هر حلقهٔ کاهشی، ایدآل‌های اول مینیمال، ζ ـ ایدآل‌اند و اشتراک دلخواهی از ζ ـ ایدآل‌ها نیز یک ζ ـ ایدآل است. در این مرجع ثابت شد که در حلقه‌های کاهشی، هر ζ ـ ایدآل یک d ـ ایدآل است و در حلقهٔ $C(X)$ عکس این مطلب نیز درست است. علاوه بر آن، ایدآل‌های اول مینیمال روی یک d ـ ایدآل نیز d ـ ایدآل هستند. همچنین نشان داده شد که در حلقهٔ کاهشی R، هر d ـ ایدآل یک z ـ ایدآل است اگر و تنها اگر هر ζ ـ ایدآل، یک z ـ ایدآل باشد و هر دوی این‌ها معادل هستند با این‌که $Jac(R) = (\circ)$. در [4] تعمیمی از این حکم ارائه شده است که در انتهای این بخش به آن اشاره خواهیم کرد. به این ترتیب، در $C(X)$ هر d ـ ایدآل یک z ـ ایدآل است و در [13] ثابت شد که عکس این موضوع در $C(X)$ فقط وقتی برقرار است که فضای X تقریباً P ـ فضا باشد. می‌دانیم برای هر ایدآل I در حلقهٔ R کوچکترین z ـ ایدآل شامل I وجود دارد، اما این حکم در مورد ζ ـ ایدآل‌ها درست نیست. در همان مرجع [69] ثابت شد که برای هر ایدآل غیرعادی I در R، کوچکترین ζ ـ ایدآل شامل I وجود دارد اگر و تنها اگر حلقهٔ R دارای این ویژگی باشد که برای هر ایدآل متناهی تولید شدهٔ غیرعادی J داشته باشیم $\mathrm{Ann}(J) \neq (\circ)$.

در گروه ریاضی دانشگاه اهواز، با الهام از تعریف z ـ ایدآل، بدون آگاهی از تعریف d ـ ایدآل، مفهوم z° ـ ایدآل به این صورت بیان شد که ایدآل I در $C(X)$ را یک z° ـ ایدآل می‌گوییم هرگاه از $f \in I$ و $\mathrm{int}_X Z(f) = \mathrm{int}_X Z(g)$ بتوان نتیجه گرفت $g \in I$. سپس در [1] مفاهیمی قوی‌تر از z ـ ایدآل‌ها و z° ـ ایدآل‌ها به‌نام z ـ ایدآل‌های قوی و z° ـ ایدآل‌های قوی (sz ـ ایدآل و sz° ـ ایدآل) تعریف شد. در $C(X)$ این ایدآل‌ها به‌ترتیب بر z ـ ایدآل‌ها و z° ـ ایدآل‌ها منطبق‌اند، ولی در هر حلقه‌ای لزوماً چنین نیست. گرچه بعداً معلوم شد که مفاهیم z° ـ ایدآل و sz° ـ ایدآل به‌ترتیب همان d ـ ایدآل و ζ ـ ایدآل هستند، اما به‌دلیل ماهیت طبیعی این تعاریف در حلقهٔ $C(X)$، ما نمادهای z° ـ ایدآل و sz° ـ ایدآل را به‌جای d ـ ایدآل و ζ ـ ایدآل به‌کار برده‌ایم. پس از آن، نماد P_a که عبارت از اشتراک همهٔ ایدآل‌های اول مینیمال شامل a است، اساس تعریف z° ـ ایدآل قرار گرفت و این نوع ایدآل‌ها به‌صورت توپولوژیکی در [13] شناسایی شدند. ایدآل‌های P_a را که z° ـ ایدآل نیز هستند، z° ـ ایدآل پایه‌ای می‌نامیم و در [16] نشان داده شد که هر z° ـ ایدآل در $C(X)$ را می‌توان به‌صورت مجموعی از این z° ـ ایدآل‌های پایه‌ای نوشت که به‌زودی به آن اشاره می‌کنیم.

بخشی از مطالعات انجام شده در گروه ریاضی دانشگاه اهواز در خصوص z° ـ ایدآل‌ها در $C(X)$ و به‌طور کلی در حلقه‌های کاهشی را باید در [1]، [14]، [13]، [19]، [16] و [4] جستجو کرد. به‌عنوان نمونه، پاره‌ای از نتایج این مقالات را در زیر بیان می‌کنیم.

- در حلقهٔ $C(X)$ احکام زیر معادل‌اند:

  الف) I یک z° ـ ایدآل است؛

  ب) اگر $P_f = P_g$ و $f \in I$، آن‌گاه $g \in I$؛

پ) اگر $V_\circ(f) = V_\circ(g)$ و $f \in I$، آن‌گاه $g \in I$؛

ت) اگر $\mathrm{Ann}(f) = \mathrm{Ann}(g)$ و $f \in I$، آن‌گاه $g \in I$؛

ث) $\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(f)) \subseteq I$ برای هر $f \in I$؛

ج) $P_f \subseteq I$ برای هر $f \in I$.

- در حلقهٔ $C(X)$ احکام زیر برقرارند:

الف) اگر $I \subseteq C(X)$ غیرعادی باشد، آن‌گاه

$$\sum_{f\in I} P_f = \{g \in C(X) :\ \exists f \in I \ \ni\ g \in P_f\}$$

کوچکترین z° ـ ایدآل شامل I است؛

ب) اگر X یک شبه F ــ فضا باشد، آن‌گاه $\sum_{P_f \subseteq I} P_f = \{g \in C(X) :\ P_g \subseteq I\}$ بزرگترین z° ـ ایدآل مشمول در I است؛

پ) اگر X یک شبه F ـ فضا و P و Q دو ایدآل اول (اولیه) در $C(X)$ باشند که در یک زنجیر قرار ندارند، آن‌گاه $P + Q$ یک z° ـ ایدآل اول است؛

ت) فرض کنیم X یک شبه F ـ فضا و I و Q دو ایدآل در $C(X)$ باشند که در یک زنجیر قرار ندارند. اگر I یک z° ـ ایدآل و Q یک ایدآل اولیه باشد، آن‌گاه $I + Q$ یک z° ـ ایدآل اول است.

- در هر حلقه‌ای هر sz° ـ ایدآل یک z° ـ ایدآل است، ولی عکس آن در حالت کلی درست نیست.

- در حلقهٔ کاهشی R احکام زیر برقرارند:

الف) اگر R دارای ویژگی پوچساز قوی باشد (یعنی برای هر ایدآل متناهی تولید شدهٔ I در R یک $a \in I$ موجود باشد که $\mathrm{Ann}(I) = \mathrm{Ann}(a)$)، آن‌گاه مفاهیم z° ـ ایدآل و sz° ـ ایدآل با هم معادل‌اند؛

ب) I یک sz° ـ ایدآل در R است اگر و تنها اگر $I[x]$ یک sz° ـ ایدآل در $R[x]$ باشد؛

پ) اگر R کاهشی باشد، آن‌گاه حلقهٔ $R[x]$ دارای ویژگی پوچساز قوی است و از این‌رو، در این حلقه‌ها sz° ـ ایدآل‌ها و z° ـ ایدآل‌ها هم‌ارزند.

- در هر حلقهٔ R احکام زیر برقرارند:

الف) هر z° ـ ایدآل یک z ـ ایدآل است؛

ب) $\mathrm{Jac}(R)=\mathrm{rad}(R)$؛

پ) $M_A \subseteq P_A$ برای هر زیرمجموعهٔ متناهی A در R؛

ت) هر sz° ـ ایدآل یک sz ـ ایدآل است؛

ث) $M_a \subseteq P_a$ برای هر $a \in R$.

در این بخش چندین کاربرد از z° ـ ایدآل‌ها را که در برقراری ارتباط میان ویژگی‌های توپولوژیکی و جبری مؤثر هستند، مشاهده کردیم. در پایان، برای آن‌که اهمیت z° ـ ایدآل‌ها را به‌عنوان پل ارتباطی بیشتر دریابیم، به چند نتیجه از [19] می‌پردازیم. پیش‌تر دیدیم که ایدآل‌های اول مینیمال، z° ـ ایدآل هستند. z° ـ ایدآل‌های اول در $C(X)$ نیز وجود دارند که اول مینیمال نیستند. همچنین دیدیم که هر z° ـ ایدآل در $C(X)$ غیرعادی است ولی عکس آن حتی برای z ـ ایدآل‌های اول غیرعادی درست نیست. با توجه به این موارد، پرسش‌های زیر به‌طور طبیعی مطرح‌اند:

۱ــ چه موقع هر z° ـ ایدآل در $C(X)$، ایدآل اول مینیمال است؟

۲ــ در چه صورت z ـ ایدآل غیرعادی در $C(X)$، یک z° ـ ایدآل است؟

۳ــ برای کدام فضای X، هر z ـ ایدآل اول غیرعادی در $C(X)$، یک z° ـ ایدآل است؟

۴ــ برای کدام فضای X، هر ایدآل اول غیرعادی در $C(X)$، یک z° ـ ایدآل است؟

در [13] ثابت شده است که در حلقه‌های کاهشی با ویژگی A، هر ایدآل ماکسیمال غیرعادی یک z° ـ ایدآل است. همچنین در این مقاله نشان داده شده است که در هر حلقهٔ کاهشی، ایدآل‌های اول غیرعادی، ایدآل‌های اول مینیمال هستند اگر و تنها اگر آن حلقه دارای ویژگی A بوده و هر z° ـ ایدآل اول در آن یک ایدآل اول مینیمال باشد و این دو معادل با این است که برای هر عنصر حلقه مانند a، $\mathrm{Ann}(a)$ یک z° ـ ایدآل پایه‌ای باشد. در ارتباط با پرسش اول، در [19] دو ویژگی توپولوژیکی معادل با این‌که هر z° ـ ایدآل در $C(X)$ یک ایدآل اول مینیمال باشد ارائه شده است. این دو ویژگی عبارتند از این‌که برای هر صفر ـ مجموعهٔ Z در X، صفر ـ مجموعهٔ F در X وجود داشته باشد که $\mathrm{cl}_X\mathrm{int}_X Z = \mathrm{cl}_X(X \setminus F)$ و یا برای هر صفر ـ مجموعهٔ Z در X، صفر ـ مجموعهٔ F در X وجود داشته باشد که $Z \cup F = X$ و $\mathrm{int}_X(Z \cap F) = \varnothing$. این دو ویژگی بنا به نتیجه‌ای در [48]، معادل با این است که فضای ایدآل‌های اول مینیمال $C(X)$ با توپولوژی زاریسکی فشرده باشد و یا بنا به آن‌چه پیش‌تر گفته شد، $C(X)$، d ـ منظم باشد. در مورد سه پرسش دیگر، نتایج زیر در [19] به‌دست آمده است:

- هر z ـ ایدآل غیرعادی در $C(X)$ یک z° ـ ایدآل است اگر و تنها اگر X تقریباً P ـ فضا باشد.
- هر z ـ ایدآل اول غیرعادی در $C(X)$ یک z° ـ ایدآل است اگر و تنها اگر X تقریباً P ـ فضای ضعیف باشد، یعنی فضایی که در آن، برای هر دو صفر ـ مجموعهٔ Z و F در X با شرط $\mathrm{int}_X Z \subseteq \mathrm{int}_X F$، صفر ـ مجموعهٔ دیگری مانند E با درون تهی موجود باشد که $Z \subseteq F \cup E$. هر تقریباً P ـ فضا یک تقریباً P ـ فضای ضعیف است. فضاهای متری نیز تقریباً P ـ فضای ضعیف هستند.
- هر ایدآل اول غیرعادی در $C(X)$ یک z° ـ ایدآل است اگر و تنها اگر X یک ∂ ـ فضا باشد، یعنی فضایی که در آن مرز هر صفر ـ مجموعه، در یک صفر ـ مجموعه با درون تهی قرار می‌گیرد. فضاهای متری و کلی‌تر از آن، فضاهای کاملاً نرمال از این نوع هستند.

۷. پل‌های ارتباطی دیگر

ایدآل‌های محدب: همان‌گونه که پیش‌تر نیز دیدیم ایدآل‌ها مناسب‌ترین ابزارِ برقراری ارتباط میان ویژگی‌های توپولوژیکی فضای X و خواص جبری حلقهٔ $C(X)$ هستند. از این‌رو، طبیعی است تا به ایدآل‌های دیگری که در حلقه‌ها مورد توجه‌اند نگاهی بیندازیم و به بررسی رفتار و شخصیت آن‌ها در $C(X)$ بپردازیم. ایدآل‌های محدب و مطلقاً محدب از دیرباز در حلقه‌های مشبکه‌ای مطرح هستند. جالب است بدانیم این نوع ایدآل‌ها معرف نوع خاصی از فضاهای توپولوژیک به‌نام F–فضاها هستند که اندکی پیش‌تر به آن‌ها پرداختیم. در یک حلقهٔ جزئاً مرتب R، ایدآل I را محدب گوییم هرگاه برای هر $a,b\in R$، شرایط $0\leq a\leq b$ و $b\in I$ نتیجه دهد $a\in I$. در صورتی که حلقهٔ جزئاً مرتب R یک مشبکهٔ مرتب نیز باشد، آن‌گاه ایدآل I در R را مطلقاً محدب (که همان o ـ ایدآل در بخش ٦ است) می‌نامیم هرگاه $|a|\leq|b|$ و $b\in I$، نتیجه دهند $a\in I$. آشکارا هر ایدآل مطلقاً محدب، یک ایدآل محدب است و به‌سادگی دیده می‌شود که ایدآل‌های اول و z ـ ایدآل‌ها در $C(X)$ مطلقاً محدب هستند. در [44] ثابت شده است که مجموع دو ایدآل مطلقاً محدب در هر حلقهٔ مشبکه‌ای مرتب، یک ایدآل مطلقاً محدب است، ولی مجموع دو ایدآل محدب و حتی مجموع یک z ـ ایدآل و یک ایدآل محدب لزوماً محدب نیست. در همین مرجع همچنین نشان داده شده است که در $C(X)$ ایدآل‌های محدب شامل یک ایدآل اول تشکیل زنجیر می‌دهند. F ـ فضاها در [43] به‌طور مفصل مورد مطالعه قرار گرفته و شرایط جبری معادل با این فضاها به‌دست آمده است؛ از آن جمله می‌توان گفت که X یک F ـ فضا است وقتی هر ایدآل $C(X)$ مطلقاً محدب باشد یا وقتی ایدآل‌های اول $C(X)$ مشمول در یک ایدآل ماکسیمال تشکیل زنجیر دهند و یا زمانی که هر ایدآل با مولد متناهی در $C(X)$، اصلی باشد. ویژگی جبری دیگری که معادل با F ـ فضاها است، حسابی بودنِ حلقهٔ $C(X)$ است. یک حلقه را حسابی می‌نامیم هرگاه ایدآل‌های آن نسبت به «جمع» و «اشتراک» توزیع‌پذیر باشند، یعنی اگر I، J و K سه ایدآل باشند، آن‌گاه $I\cap(J+K)=I\cap J+I\cap K$. جالب است بدانیم که خانوادهٔ ایدآل‌های مطلقاً محدب، این خاصیت را دارد؛ این موضوع در [23] برای مشبکه‌ها ثابت شده است. اکنون اگر X یک F ـ فضا باشد، آن‌گاه هر ایدآل $C(X)$ مطلقاً محدب است و از این‌رو، $C(X)$ حسابی است. عکس این موضوع نیز درست است: اگر $C(X)$ حسابی باشد، آن‌گاه X یک F ـ فضا است. این واقعیت در [29] و [3] به اثبات رسیده است.

ایدآل‌های اساسی: وقتی در حلقه‌های تعویض‌ناپذیر، بُعد گلدی مورد مطالعه قرار می‌گیرد، پای ایدآل‌هایی مانند ایدآل‌های یکنواخت، اساسی و ساکلِ حلقه به بحث باز می‌شود. ایدآل E را در حلقهٔ R اساسی می‌نامیم اگر هر ایدآل ناصفر دیگر را به‌طور غیربدیهی قطع کند و ایدآل U در R را یکنواخت می‌گوییم اگر هر دو زیرایدآل ناصفرِ U به‌طور غیربدیهی یکدیگر را قطع کنند. ساکلِ حلقه عبارت است از اشتراک ایدآل‌های اساسی و یا مجموع ایدآل‌های یکنواختِ حلقه. این ایدآل‌ها در $C(X)$ نمایش‌های زیبایی در [7]، [8] و [58] پیدا کرده‌اند، به‌گونه‌ای که از طریق آن‌ها ارتباط‌های

مهمی به‌دست آمده است. در [58]، ساکل و ایدآل‌های مینیمال $C(X)$ بررسی و نشان داده شد که موجوداتی کاملاً توپولوژیکی هستند. در واقع، ایدآل‌های مینیمال $C(X)$ و ساکل آن به‌ترتیب به‌صورت زیر شناسایی شدند:

$$m_x = \{f \in C(X) : X \setminus Z(f) = \{x\}\}\ ,$$

$$C_F(X) = \{f \in C(X) : \text{متناهی است } X \setminus Z(f)\}.$$

در [7] نشان داده شده است که ایدآل‌های یکنواخت $C(X)$، همان ایدآل‌های مینیمال $C(X)$ هستند و ایدآل‌های اساسی $C(X)$ شامل بخشی از ایدآل‌های ثابت و همهٔ ایدآل‌های آزاد $C(X)$ است که به بیانی طنزآمیز می‌توان گفت ایدآل‌های اساسی آن طور که باید آزاد نیستند. در حقیقت، ایدآل E در $C(X)$ اساسی است اگر و تنها اگر $\cap Z[E] = \cap_{f\in E} Z(f)$ نه لزوماً تهی بلکه درونِ تهی داشته باشد. از این‌رو، این ایدآل‌ها برخلاف ایدآل‌های ثابت $C(X)$، دارای دو شخصیت جبری و توپولوژیکی‌اند و به همین دلیل، با استفاده از آن‌ها می‌توان پل‌های ارتباطی برقرار کرد. به‌کمک این نتیجه، به بسیاری از ایدآل‌های اساسی در $C(X)$ دسترسی خواهیم داشت. با توجه به این شناسه، ایدآل اصلی (f) در $C(X)$ وقتی و فقط وقتی اساسی است که $\operatorname{int}_X Z(f) = \varnothing$ و از این‌رو، تمام ایدآل‌های اصلی $C(X)$ غیراساسی هستند اگر و تنها اگر X تقریباً P ــ فضا باشد. همهٔ ایدآل‌های اول غیرماکسیمال در $C(X)$ به‌جز آن‌هایی که با یک خودتوان تولید می‌شوند و همچنین همهٔ ایدآل‌های آزاد $C(X)$ اساسی‌اند و به همین ترتیب، به‌سادگی می‌توان ایدآل‌های اساسی و غیراساسی $C(X)$ را از یکدیگر باز شناخت. از آنجا که $\bigcap Z[C_F(X)] = \bigcap_{f\in C_F(X)} Z(f)$ عبارت است از مجموعهٔ همهٔ نقاط نامنفرد X، به‌سادگی دیده می‌شود که ساکل $C(X)$ اساسی است اگر و تنها اگر مجموعهٔ نقاط منفرد X در X چگال باشد. این گزاره، فضاهای توپولوژی از این دست را به‌طور جبری شناسایی می‌کند. با توجه به شناسهٔ این ایدآل‌ها، بُعد گلدی حلقه $C(X)$ در [7] نیز بررسی شده است. وقتی بُعد گلدی $C(X)$ متناهی باشد، معادل با متناهی بودن فضای X است، در غیر این صورت برابر با عدد سوسلین فضای توپولوژیک X است. عدد سوسلین یا عدد حجره‌ای[1] فضای X عبارت از کوچکترین کاردینال α است به‌گونه‌ای که هر خانواده از زیرمجموعه‌های باز و مجزای X دارای کاردینالی کوچکتر یا مساوی α باشد. بحث ترکیب ایدآل‌ها که پیش‌تر نیز مورد بررسی قرار گرفته است، در مورد این ایدآل‌ها نیز مطرح است. آشکار است که مجموع ایدآل‌های اساسی در هر حلقه، اساسی است، ولی اشتراک ایدآل‌های اساسی لزوماً اساسی نیست مگر آن‌که اشتراک تعداد متناهی مدِ نظر باشد. در [8] ثابت شده است که اشتراک هر تعداد ایدآل اساسی در $C(X)$ اساسی است اگر و تنها اگر $C_F(X)$ اساسی باشد؛ اگر و تنها اگر مجموعهٔ نقاط منفرد X در X چگال باشد ([58]).

1) Cellularity

ولی وقتی که با اشتراک شمارایی از ایدآل‌های اساسی سروکار داشته باشیم، وضع به‌گونه‌ای دیگر است و از این طریق می‌توان نوع دیگری از فضاها را شناسایی کرد: فضاهایی که در آن‌ها هر زیرمجموعه از نوع اول[1]، هیچ‌جا چگال است. مجموعهٔ A را از نوع اول گوییم اگر $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ که در آن، هر A_n هیچ‌جا چگال است. در [8] ثابت شده است که اشتراک هر تعداد شمارا از ایدآل‌های اساسی یک ایدآل اساسی است اگر و تنها اگر هر زیرمجموعه از نوع اول در X، هیچ‌جا چگال باشد.

چند ایدآل خاص: اشتراک ایدآل‌های ماکسیمال آزاد و یا اشتراک همهٔ ایدآل‌های آزاد $C(X)$ نیز اشتراکی از ایدآل‌های اساسی $C(X)$ است و از این‌رو، ایدآل‌های $C_K(X)$ و $C_\infty(X)$ نیز اشتراک‌هایی از این دست هستند. این ایدآل‌ها ابتدا در [60] و [61] معرفی شدند. $C_K(X)$ عبارت است از اشتراک همهٔ ایدآل‌های آزاد $C(X)$ و همین طور اشتراک همهٔ ایدآل‌های آزاد $C^*(X)$ و $C_\infty(X)$ برابر با اشتراک همهٔ ایدآل‌های ماکسیمال در $C^*(X)$ است. در این مراجع، این دو ایدآل به‌طور توپولوژیکی به‌صورت زیر شناسایی شده‌اند:

$$C_K(X) = \{f \in C(X) : \text{فشرده است } \; cl_X(X \setminus Z(f))\},$$

$$C_\infty(X) = \{f \in C(X) : \text{ فشرده است } \; n \in \mathbb{N} \text{برای هر} \{x \in X : \; |f(x)| \geq \tfrac{1}{n}\}\}.$$

از تعریف‌ها چنین برمی‌آید که $C_K(X) \subseteq C_\infty(X)$ و $C_K(X)$ هم ایدآلی در $C(X)$ و هم ایدآلی در $C^*(X)$ است، حال آن‌که $C_\infty(X)$ ایدآلی در $C^*(X)$ است و لزوماً ایدآل $C(X)$ نیست. این‌که چه موقع $C_\infty(X)$ ایدآلی در $C(X)$ هم هست، در [17] مورد بررسی قرار گرفته است. در واقع، $C_\infty(X)$ یک ایدآل $C(X)$ است اگر و تنها اگر هر زیرمجموعهٔ موضعاً فشردهٔ X کراندار باشد، به این معنا که هر $f \in C(X)$ روی آن مجموعه کراندار باشد. در حالت خاص وقتی فضای X گسسته است، $C_K(X)$ برابر با اشتراک ایدآل‌های ماکسیمال آزاد $C(X)$ است. این موضوع در [60] و [61] نشان داده شده و این پرسش را در پی داشته است که آیا این برابری در حالت کلی نیز برقرار است؟ در [43] ثابت شده است که این برابری به‌ازای فضاهای فشرده حقیقی درست است و با یک مثال دیده می‌شود که در حالت کلی درست نیست.

زمانی که به این ایدآل‌ها از دیدگاه اشتراک ایدآل‌های اساسی بنگریم، پرسش‌های دیگری نیز مطرح می‌شود. مثلاً چه موقع ایدآل‌های $C_K(X)$ و$C_\infty(X)$ به‌ترتیب در $C(X)$ و $C^*(X)$ اساسی هستند؟ در [8] ثابت شده است که اساسی بودن هر کدام از این ایدآل‌ها معادل است با این‌که فضای X تقریباً فشرده باشد، یعنی فضای هاسدورفی که هر زیرمجموعهٔ ناتهی و بازِ آن شامل یک مجموعهٔ باز ناتهی با بستار فشرده است. در همین مرجع، برابری‌های $C_K(X) = C_F(X)$ و $C_\infty(X) = C_F(X)$ نیز منجر به پیدایش فضاهای جدیدی می‌شود، فضاهایی که آن‌ها را شبه‌گسسته می‌گوییم، یعنی کاملاً منظم هاسدورف که در آن هر زیرمجموعهٔ فشرده دارای درون تهی

1) First cathegory

است. در حقیقت، ثابت می‌شود که $C_K(X) = C_F(X)$ اگر و تنها اگر X شبه‌فشرده باشد و $C_\infty(X) = C_F(X)$ اگر و تنها اگر X شبه‌گسسته بوده و مجموعهٔ نقاط منفرد X متناهی باشد. اگر $C_\psi(X)$ را مجموعهٔ توابع $f \in C(X)$ در نظر بگیریم که $\mathrm{cl}_X(X \setminus Z(f))$ شبه‌فشرده است و $I(X)$ را اشتراک ایدآل‌های ماکسیمال آزاد $C(X)$ قرار دهیم، آن‌گاه همان‌گونه که در [67] و [56] آمده است، $C_\psi(X)$ یک ایدآل $C(X)$ و تساوی‌های $C_K(X) = I(X)$، $C_\psi(X) = I(X)$ و $C_K(X) = C_\psi(X)$ ساختارهای مشخصی از X را ارائه خواهند داد. در شرایطی که این برابری‌ها رخ دهد فضای X را به‌ترتیب، μ ـ فشرده، η ـ فشرده و ψ ـ فشرده می‌گوییم. در [56] نشان داده می‌شود که $C_\psi(X) = M^{\beta X \setminus \nu X}$ و $I(X) = C_\psi(X) \cap C_\infty(X)$ و فشرده‌سازی‌هایی از این نوع را برای هر فضای X می‌توان بنا کرد که همگی زیرفضاهای βX هستند. در [15] ایدآل $C_\psi(X)$ شخصیت جدید و مهم‌تری از خود بروز می‌دهد. در آنجا ثابت شده است که $C_\psi(X)$ مؤلفهٔ همبندی تابع صفر در فضای $C_m(X)$ (یعنی $C(X)$ با m ـ توپولوژی) است. فشردگی در $C_m(X)$ نیز بررسی و نشان داده شده است که موضعاً فشردگی و σ ـ فشردگیِ $C_m(X)$ معادل با متناهی بودن فضای X است. در [2] فضای X، ∞ ـ فشرده خوانده می‌شود اگر $C_K(X) = C_\infty(X)$. پیش‌تر دیدیم که $C_\infty(X)$ لزوماً یک ایدآل در $C(X)$ نیست، ولی خود می‌تواند یک حلقه باشد. در همین مرجع نشان داده می‌شود که برای هر فضای کاملاً منظم و هاسدورف X، یک فضای موضعاً فشرده Y وجود دارد به‌طوری که $C_\infty(X) \cong C_\infty(Y)$. در صورتی که X و Y هر دو موضعاً فشرده باشند، $X \cong Y$ اگر و تنها اگر $C_\infty(X) \cong C_\infty(Y)$. به این ترتیب، برای مطالعهٔ حلقهٔ $C_\infty(X)$، کافی است فضای X را موضعاً فشرده اختیار کنیم. در این شرایط، X یک فضای ∞ ـ فشرده است اگر و تنها اگر هر ایدآل اول $C_\infty(X)$ ثابت باشد. کوچکترین ∞ ـ فشردهٔ شامل X را ∞ ـ فشرده‌سازی X گوییم و آن را با ∞X نشان می‌دهیم. ثابت می‌شود که $\infty X \subseteq \beta X$. میان فضای X و حلقهٔ $C_\infty(X)$ نیز می‌توان ارتباط برقرار کرد. در [2] ثابت می‌شود که $C_\infty(X)$ حلقهٔ منظم است اگر و تنها اگر فضای تیخونف X، ∞ ـ فشرده و P_∞ ـ فضا باشد، یعنی فضایی مانند X که $Z(f)$ برای هر $f \in C_\infty(X)$ باز باشد. همچنین ثابت می‌شود که حلقهٔ $C_\infty(X)$ دارای بُعد گلدی متناهی است اگر و فقط اگر تنها زیرمجموعه‌های موضعاً فشرده در فضای تیخونف X، مجموعه‌های متناهی باشند.

ایدآل‌های پاک: در انتهای این بخش، به حلقه‌های پاک[1] می‌پردازیم. عنصری از یک حلقه را پاک می‌نامیم اگر به‌صورت مجموع یک خودتوان و یک یکان[2] باشد. یک حلقه و یا زیرمجموعه‌ای از آن را پاک می‌نامیم اگر همهٔ عناصر آن پاک باشند. در [10] عناصر پاک حلقهٔ $C(X)$ به‌طور توپولوژیکی شناسایی شدند و ثابت شد که عنصر $f \in C(X)$ پاک است اگر و تنها اگر مجموعهٔ باز و بستهٔ U در X یافت شود که $Z(۱ - f) \subseteq U \subseteq X \setminus Z(f)$. با توجه به این شناسه، دیده می‌شود که $C(X)$ پُر از عناصر پاک است. علاوه بر خودتوان‌ها و یکان‌های $C(X)$، همهٔ توابعی که در شرط $|f| < ۱$ و یا $f^{-۱}(\{-۱\}) = \varnothing$ صدق کنند نیز پاک‌اند. به این ترتیب، برای هر تابع غیریکان و

1) Clean 2) Unit

غیرپوشای f، اگر مثلاً $f^{-1}(\{r\}) = \varnothing$، آن‌گاه $\frac{1}{r}f$ پاک است و نه‌تنها با کمک توابع غیرپوشا، بلکه برای هر تابع $f \in C(X)$، می‌توان عنصر پاک $\frac{f^2}{1+f^2}$ را ساخت. این شناسه همچنین نشان می‌دهد که حاصلضرب یک خودتوان و یک عنصر پاک و نیز مجموع یک خودتوان و یک عنصر پاک نامنفی در $C(X)$، همواره پاک است. در این مرجع ثابت شده است که پاک بودن حلقهٔ $C(X)$ معرف یک فضای شناخته شده در توپولوژی به‌نام فضای قویاً صفر بُعدی[1] است و آن، فضایی کاملاً منظم و هاسدورف است که برای هر دو زیرمجموعهٔ کاملاً مجزای A و B در آن، مجموعهٔ باز و بستهٔ U موجود باشد که $A \subseteq U \subseteq X \setminus B$. پاک بودنِ $C(X)$ و یا $C^*(X)$، وجود یک ایدآل اول پاک در $C(X)$، پاک بودن همهٔ عناصر مقسوم‌علیه‌های $C(X)$، و سرانجام اگر مجموعهٔ عناصر پاک در $C(X)$، زیرحلقهٔ $C(X)$ باشد، همه معادل با این است که فضای X قویاً صفر بُعدی است. پاک بودنِ $C_K(X)$ و $C_\infty(X)$ نیز در این مرجع مورد مطالعه قرار گرفته و ثابت شده است که پاک بودن هر کدام از این ایدآل‌ها معادل است با این‌که هر همسایگی فشرده از یک نقطهٔ $x \in X$، شامل مجموعهٔ باز و بستهٔ U باشد که $x \in U$. از این‌رو، در صورتی که X موضعاً فشرده باشد، این موضوع نشان می‌دهد $C_K(X)$ پاک است اگر و تنها اگر فضای X صفر بُعدی باشد؛ به عبارت دیگر، X دارای پایه‌ای متشکل از مجموعه‌های باز بسته باشد. در پایان، باید متذکر شویم که گرچه در حلقهٔ $C(X)$ عناصر ناپاک هم وجود دارد ولی تعداد آن‌ها نسبتاً اندک است و این حلقه در مجموع برای ما همواره پاک و منزه است.

مراجع

[1] A. R. Aliabad, z°*-ideals in* $C(X)$, Shahid Chamran university of Ahvaz, Ph.D. thesis, 1996.

[2] A. R. Aliabad, F. Azarpanah and M. Namdari, "Rings of continuous functions vanishing at infinity", *Comment. Math. Univ. Carolinae*, **45**(3)(2004), 519-533.

[3] A. R. Aliabad, F. Azarpanah and A. Taheri, "Relative z-ideals in commutative rings", submitted.

[4] A. R. Aliabad and R. Mohamadian, "On sz°-Ideals in Polynomial Rings", *Communications in Albebra*, **3**(2)(2011), 701-717.

[5] F. W. Anderson, 11A lattice characterization of completely regular G_δ-spaces", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **6**(1955), 757-765.

1) Strongly zero-dimensional

[6] M. Y. Antonovskij, D. V. Chudnovsky, G. V. Chudnovsky and E. Hewitt, "Rings of real-valued continuous functions II", *Math. Zeit.*, **176**(1981), 151-186.

[7] F. Azarpanah, "Essential ideals in $C(X)$", *Period. Math. Hungar.*, **31**(2)(1995), 105-112.

[8] F. Azarpanah, "Intersection of essential ideals in $C(X)$", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **125**(1997), 2149-2154.

[9] F. Azarpanah, "Algebraic properties of some compact spaces", *Real Anal. Exch.*, **25**(2000), 317-328.

[10] F. Azarpanah, "When is $C(X)$ a clean ring?", *Acta Math. Hungar.*, **94**(1-2)(2002), 53-58.

[11] F. Azarpanah and O. A. S. Karamzadeh, "Algebraic charactrizations of some disconnected spaces", *Italian J. pure & App. Math.*, **10**(2001), 9-20.

[12] F. Azarpanah, O. A. S. Karamzadeh and S. Rahmati, "$C(X)$ vs. $C(X)$ modulo its socle", *Colloquim Math.*, **111**(2008), 315-336.

[13] F. Azarpanah, O.A.S. Karamzadeh and A. Rezaei Aliabad, "On $z^o - ideals$ in $C(X)$", *Fundamenta Mathematicae*, **160**(1999), 15-25.

[14] F. Azarpanah, O.A.S. Karamzadeh and A. Rezaei Aliabad, "On ideals consisting entirely of zero divisors", *Communications in Algera*, **28**(2)(2000), 1061-1073.

[15] F. Azarpanah, F. Manshoor and R. Mohamadian, "Connectedness and compactness in $C_m(X)$", submitted.

[16] F. Azarpanah and R. Mohamadian, "$\sqrt{z}$-ideals and $\sqrt{z^\circ}$-ideals in $C(X)$", *Acta Math. Sin.*, **23**(6)(2007), 989-996.

[17] F. Azarpanah and T. Soundararajan, "When the family of functions vanishing at infinity is an ideal of $C(X)$", *Rocky. Mount. J. Math.*, **31**(4)(2001), 1133-1140.

[18] F. Azarpanah and A. Taheri, "Relative z-ideals in $C(X)$", *Topology Appl.*, **156**(2009), 1711-1717.

[19] F. Azarpanah and M. Karavan, "On nonregular ideals and z°-ideals in $C(X)$", *Cech. Math. J.*, **55**(130)(2005), 397-407.

[20] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Warsaw, 1932.

[21] S. J. Bernau, "Topologies on structure spaces of latico groups", *Pac. J. Math.*, **42**(1972), 557-568.

[22] A. Bigard, K. Keimel and S. Wolfenstein, *Groups et Anneaux Réticulés*, Lecture Notes in Mathematics **608**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1997.

[23] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, **25** (rev. ed.), 1948.

[24] A. S. Bondarev, "The presence of projections in quotient lineals of vector lattices", *Dokl. Akad. Nauk. UzSSR*, **8**(1974), 5-7.

[25] J. G. Brookshear, "On projective prime ideals in $C(X)$", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **69**(1978), 203-204.

[26] J. Bustamante and F. Montalvo, "Stone-Weierstrass theorems in $C^*(X)$", *J. Approx. Theory*, **107**(2000), 143-159.

[27] E. Cech, "On bicompact spaces", *Ann. of Math.*, **38**(1937), 823-844.

[28] E. W. Chittenden, "On general topology and the relation of the properties of the class of all continuous functions to the properties of space", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **31**(1929), 290-321.

[29] W. H. Cornish, *Abelian Ricart-semirings*, Thesis, 1970, Flinder University, South Australia.

[30] H. G. Dales and W. H. Woodin, *Super-Real Field: Totally Ordered Field with Additional Structure*, London Mthematical Society Monographs, 1996.

[31] F. Dashiell, A. Hager and M. Henriksen, "Order-Cauchy completions of rings and vector lattices of continuous functions", *Can. J. Math.*, **XXXII**, no. 3(1980), 657-685.

[32] G. De Marco, "On countably generated z-ideals of $C(X)$", ibid. **31**(1972), 574-576.

[33] J. Dieudonne, "Review of rings of real-valued continuous functions I", *Mathematical Reviews*, **10**(1949), 126-127.

[34] R. Engelking, *General topology*, PWN-Polish Scientific Publishing, 1977.

[35] A. A. Estaji and O. A. S. Karamzadeh, “On $C(X)$ modulo its socle”, *Comm. Algebra*, **31**(4)(2003), 1561-1571.

[36] I. Garrido and F. Montalvo, “Algebraic properties of the uniform closure of spaces of continuous functions”, Papers on general topology an applications (Amsterdam, 1994), 101-107, *Ann. New York Acad. Sci.*, **788**, New york Acad. Sci., New York, 1996.

[37] I. Gelfand and A. Kolmogoroff, “On rings of continuous functions on topological spaces”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **22**(1939), 11-15.

[38] L. Gillman, “Countably generated ideals in rings of continuous functions”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **11**(1961), 660-666.

[39] L. Gillman and M. Henriksen, “Concerning rings of continuous functions”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **77**(1954), 340-362.

[40] L. Gillman and M. Henriksen, “rings of continuous functions in which every finitely generated ideal is principal”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **82**(1956), 366-391.

[41] L. Gillman, M. Henriksen and M. Jerison, “On a theorem of Gelfand and Kolmogoroff conerning maximal ideals in rings of continuous functions”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **5**(1954), 447-455.

[42] L. Gillman and M. Jerison, “Stone-Cech compactification of a product”, *Arch. Math.*, **10**(1959), 443-446.

[43] L. Gillman and M. Jerison, ‘*Rings of continuous functions*, Van. Nostrand Reinhold, New York, 1960.

[44] L. Gillman and C. W. Kohls, “Convex and pseudoprime ideals in rings of continuous functions”, *Math. Z.*, **72**(1960), 399-409.

[45] M. Henriksen, “On the equivalence of the rings, lattices and semigroup of continuous functions”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **7**(6)(1956), 959-960.

[46] M. Henriksen, “Rings of continuous functions in 1950_s”, C. E. Aull and R. Lowen (eds.), *Handbook of the history of general topology*, **1**(1997), 243-253.

[47] M. Henriksen, “Topology related to rings of real-valued continuous functions. Where it has been and where it might be going”, *Recent progress in general topology*, **II**(2002), 553-556.

[48] M. Henriksen and M. Jerison, "The space of minimal prime ideals of a commutative ring", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **115**(1965), 110-130.

[49] M. Henriksen, S. Larson, J. Martinez and R. G. Woods, "Lattice-Ordered algebras that are subdirect products of valuation dopmains", *Tran. Amer. Math. Soc.*, **345**(1)(1994), 195-221.

[50] M. Henriksen and R. G. Woods, "Cozero complement spaces; when the space of minimal prime ideals of a $C(X)$ is compact", *Topology and its Applications*, **141**(2004), 147-170.

[51] E. Hewitt, "Rings of real-valued continuous functions I", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **64**(1948), 54-99.

[52] M. Hochster, "Rings of continuous functions and totally integrally closed rings", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **25**(2)(1970), 439-442.

[53] C. B. Huijsmans and B. de Pagter, "On z-ideals and d-ideals in Riesz spaces I", *Indag Math.*, **42**(1980), Proc. Netherl. Acad. Sc. A83, 183-195.

[54] C. B. Huijsmans and B. de Pagter, "On z-ideals and d-ideals in Riesz spaces II", *Indag Math.*, **42**(1980), Proc. Netherl. Acad. Sc. A83, 391-408.

[55] C. B. Huijsmans and B. de Pagter, "On z-ideals and d-ideals in Riesz spaces III", *Indag Math.*, **42**(1980), Proc. Netherl. Acad. Sc. A84, 401-422.

[56] D. G. Johnson and M. Mandelker, "Functions with pseudocompact support", *General Topology Appl.*, **3**(1973), 331-338.

[57] I. Kaplansky, "Lattices of continuous functions", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **53**(1974), 616-623.

[58] O. A. S. Karamzadeh and M. Rostami, "On the intrinsic topology and some related ideals of $C(X)$", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **93**(1985), 179-184.

[59] M. Katetov, "Measures in fully normal spaces", *Fund. Math.*, **38**(1951), 73-84.

[60] C. W. Kohls, "Ideals in rings of continuous functions", *Fund. Math.*, **45**(1957), 28-50.

[61] C. W. Kohls, "Prime ideals in rings of continuous functions I", *Illinois J. Math.*, **2**(1958), 505-536.

[62] C. W. Kohls, "Prime ideals in rings of continuous functions II", *Duke. Math. J.*, **25**(1958), 447-458.

[63] A. A. Kubenskii, "On functionally-closed spaces", *Uspehi Math. Nauk.* **6**(1951), 202. (Russian).

[64] A. Le Donne, "On a question concerning countably generated z-ideals of $C(X)$", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **80**(3)(1980), 505-510.

[65] A. Le Donne, *On countably generated z-ideals of $C(X)$ for first countable spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 82(2)(1981), 280-282.

[66] W. A. J. Luxemburg, "Extensions of prime ideals and the existence of projections in Riesz spaces", *Indag. Math.*, **35**(1973), Proc. Netherl. Acad. Sc. A76, 263-270.

[67] M. Mandelker, "Support of continuous functions", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **156**(1971), 73-84.

[68] G. Mason, "z-ideals and prime ideals", *J. Algebra*, **26**(1973), 280-291.

[69] G. Mason, "Prime z-ideals of $C(X)$ and related rings", *Canad. Math. Bull.*, **23**(4)(1980), 437-443.

[70] A. N. Milgram, "Multiplicative semigroups of continiuous functions", *Duke Math. J.*, **16**(1949), 377-383.

[71] M. A. Mulero, "Algebraic properties of rings of continuous functions", *Fund. Math.*, **160**(1999), 15-25.

[72] L. Nachbin, "Topological vector spaces of continuous", *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **40**(1954), 471-474.

[73] C. W. Neville, "Flat $C(X)$-modules and F-spaces", *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **106** (1989), 237-244.

[74] C. W. Neville, "When is $C(X)$ a coherent rings?", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **110**(2)(1990), 505-508.

[75] J. R. Porter and R. G. Woods, *Extensions and Absolutes of Hausdorff Spaces*, Springer-verlag, 1989.

[76] L. E. Pursell, "An Algebraic characterization of fixed ideals in certain function rings", *Pacific Journal of Mathematics*, **5**(1955), 963-999.

[77] D. Rudd, "On two sum theorems for ideals of $C(X)$", *Michigan Math. J.*, **17**(1970), 139-141.

[78] T. Shirota, "A class of topological spaces", *Osaka Math. J.*, **4**(1952), 23-40.

[79] M. H. Stone, "Applications of the theory of Boolean rings to general topology", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **41**(1937), 375-481.

[80] A. Thychonoff, "Uber die topologische Erweiterung von Raumen", *Math. Ann.* **102**(1929), 544-561.

[81] P. Urysohn, "Uber die Machtigkeit der zusammenhangenden Mengen", *Math. Ann.*, **94**(1925), 262-295.

[82] E. M. Vechtomov, "On the module of all functions over a rings of continuous functions", *Mat. Zametki,* **28**(4)(1980), 481-490.

[83] E. M. Vechtomov, "On ideals of rings of continuous functions", *Izv. Vuzov Mat.*, **1**(1981), 3-10.

[84] E. M. Vechtomov, "On modules of functions with bicompact support over rings of continuous functions", *Upe. Mat. Nauk,* **37**(4)(1982), 151-152.

[85] E. M. Vechtomov, "Distributive of continuous functions and F-spaces", *Mat. Zametki*, **34**(3)(1983), 321-332.

[86] E. M. Vechtomov, "Toward a theory of rings of continuous functions I", *Rept. No. 4868-85, Dep. in VINITI july 5*, 1985.

[87] E. M. Vechtomov, "Toward a theory of rings of continuous functions II", *Rept. No. 7551-V85, Dep. in VINITI October 29*, 1985.

[88] E. M. Vechtomov, "On rings of functions with values in locally bicompact fields", *Abel. Gruppi i Moduli*, **4**(1986), 20-35.

[89] E. M. Vechtomov, "Specifiability oe E-compact spaces by partially ordered sets of ideals of rings of continuous functions", *Abel. Gruppy i Moduli*, **7**(1988), 20-30.

[90] E. M. Vechtomov, "Rings of continuous functions and rings of global selections", *Abstract sixth symposium on the theory of rings*, Algebra and modules [in Russia], L'vov (1990), p. 32.

[91] E. M. Vechtomov, "Rings and modules of functions", *Abstract conf. on theory and applied Math. [in Russia]*, Tartu (1990), 108-111.

[92] E. M. Vechtomov, "Rings of continuous functions, Algebraic aspects", *J. Math. Sci.*, **71**(2)(1994), 2364-2408.

[93] B. Z. Vulih, "On the extension of continuous functions in topological spaces", *Mat. Sb.*, **30**(1952), 167-170. (Russian)

[94] R. C. Walker, *The Stone-Cech compactification*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1974.

[95] C. Wenjen, "A characterization of Hewitt's Q-spaces", *Notices Amer. Math. Soc.*, **5**(1958), 300-301.

[96] V. K. Zakharov, "Functional characterization of absolute vector lattices of functions with the Baire property andquasinormal functions and modules of partial continuous functions", *Tr. Mosk. Mat. Ob.*, **45**(1982), 68-104.

[97] V. K. Zakharov, "On the classical extension of vector lattices of continuous functions", *Funkts. Analiz i Ego Prilozh.*, **18**(2)(1984), 92-93.

[98] V. K. Zakharov, "Extensions of some lattices of continuous functions", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **228**(6)(1986), 1297-1301.

[99] V. K. Zakharov, "Cr-spans of rings of continuous functions", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **294**(3)(1987), 531-534.

فریبرز آذرپناه azarpanah@ipm.ir
منیره پیمان paimann_m@ipm.ir
علی رضایی‌علی‌آباد aliabadi_r@scu.ac.ir
امیدعلی کرم‌زاده karamzadeh@ipm.ir
رستم محمدیان mohamadian_r@scu.ac.ir
مهرداد نامداری namdari@ipm.ir
دانشگاه شهید چمران اهواز، دانشکده علوم ریاضی

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۱ (زمستان ۱۳۹۱) صص. ۵۱ تا ۵۸

به یاد جان دانس*

لازلو فوشس، پاتریک اسمیت

ترجمه: منصور معتمدی

جان دانس[۱] (با نام اصلی جنیس درینکس[۳]) دومین فرزند خانواده بود که در ۱۱ ژانویه ۱۹۳۷ در ریگا پایتخت لیتوانی متولد شد. پدرش در یک کارگاه موشک‌سازی کار می‌کرد. سال‌های نخست زندگی جان، نشان از سختی‌ها دارد. خانوادهٔ وی بین سال‌های ۱۹۴۰ تا ۱۹۴۵ در لیتوانی تحت اشغال روسیه و پس از آن، در آلمان زندگی کردند تا این‌که از دیار خود کوچ کرده و عازم سفری طولانی به غرب شدند. سال‌ها با تنگدستی و ترس در شهرهای ویران شدهٔ آلمان زندگی کردند و سرانجام در ۱۹۵۰ هنگامی که جان سیزده ساله بود، از طریق اردوگاه آمریکایی‌های جنگ‌زده، راه فراری به ایالات متحده آمریکا پیدا کردند.

پس از آن، پدر و مادر وی از هم جدا شدند. جان به همراه مادر و برادرش پتر در اوماها، نبراسکا ساکن شده و دو سال بعد به بوستون رفتند و جان در یک دبیرستان انگلیسی ثبت نام کرد. در آنجا دانش‌آموزی برجسته بود و در سال ۱۹۵۶ به‌عنوان دانشجوی سال اول در انستیتو تکنولوژی ماساچوست ثبت نام کرد. در زمان دانشجویی برای کمک مالی به مادرش مجبور بود به‌صورت پاره‌وقت کار کند. در ۱۹۶۰ در رشته ریاضی دانش‌آموخته شد. در همان سال با بورس تحصیلی وودرو ویلسون[۴] دانشجوی تحصیلات تکمیلی هاروارد شد. رسالهٔ دکتری خود را در حوزهٔ توابع مختلط و با راهنمایی دیوید وی. وایدر[۵] نوشت.

کمی پس از پیوستن به هیأت علمی دانشگاه تولون در سال ۱۹۶۴، علاقه‌اش به‌سوی جبر تغییر جهت پیدا کرد. با کارل هافمن[۶] در نمایش حلقه‌ها به‌کمک بافه‌ها، همکاری کرد. اما پیش از این

---

*) Fuchs, L., and Smith, P. F., "John Dauns in Memoriam", *J. Algebra and its Aplications*, **10**(2011), 181-186.

1) John Dauns 2) Laszlo Fuchs 3) Janis Drink 4) Woodrow Wilson
5) David V. Widder 6) Karl Hofmann

به جنبه‌های گوناگون ریاضی، به‌ویژه تحت تأثیر پاول کنراد[1] به گروه‌ها و حلقه‌های مرتب علاقه نشان داده بود. جان به مسائل نظری حلقه‌ها علاقه‌مند شد. انتخاب حلقه‌ها بسیار درست بود، زیرا در آن زمان، نظریهٔ حلقه‌ها در حال شکوفایی بود و ایده‌های جدید در آن نفوذ کرده، روش‌های توانمندی ارائه شده و عرصه پر از مسائل حل‌نشده بود. وی شیفتهٔ مسائل چالشی بود و برای حل آن‌ها سخت می‌کوشید و دیری نپایید که پژوهش‌های جان گسترش پیدا کرد و البته بخشی از آن به‌سبب تماس‌های حرفه‌ای وی بود. در تمام طول زندگی‌اش، نظریهٔ حلقه‌های تعویض‌ناپذیر عرصهٔ اصلی پژوهش‌های او باقی ماند و با گذشت زمان، یک خبرهٔ بین‌المللی در این زمینه به حساب آمد. در تمام کنفرانس‌های نظریهٔ حلقه‌ها که در آمریکا برگزار می‌شد، شرکت می‌کرد. جان در سال تحصیلی ۷۲—۱۹۷۱ بورس پژوهشی همبولت[2] در توبینگن و سال بعد کرسی استاد مدعو در دانشگاه آفریقای جنوبی را به‌دست آورد. او چهار کتاب و ششصد و نُه مقالهٔ پژوهشی به چاپ رسانیده که شامل طیف گسترده‌ای از مباحث است. جان در تمام عمر به فیزیک علاقه داشت و همیشه به‌طور کامل از آخرین پیشرفت‌های آن آگاه بود.

جان همواره از گفتگو دربارهٔ مسائل مورد علاقه و پاسخ به مسائل نظریهٔ حلقه‌ها با همکاران و دانشجویان خشنود می‌شد. به‌سبب نداشتن اقوام درجهٔ یک که مجبور باشد سرپرستی آن‌ها را عهده‌دار شود، زندگی‌اش را کاملاً وقف ریاضیات کرده بود. تقریباً در تمام روزهای هفته امکان ملاقات با او در محل کارش در تولون میسر بود. ایده‌های خود را یادداشت و اثبات‌ها را به‌طور کامل در برگه‌های بزرگ می‌نوشت. کنار او و در روی میز کارش همیشه ظرفی دهن‌گشاد حاوی قهوهٔ رقیق وجود داشت. زندگی ساده و بی‌پیرایه‌ای داشت که بر مبادی یک زندگی سالم برنامه‌ریزی شده بود. بیشتر وقت‌ها برای گردش در اطراف، از دوچرخه استفاده می‌کرد و زمان را برای سایر فعالیت‌ها مانند شنای روزانه تنظیم می‌کرد. گواهینامهٔ خلبانی داشت، اما هرگز دربارهٔ آن سخن نمی‌گفت.

جان معلمی فوق‌العاده وظیفه‌شناس بود. تمام جزئیات هر کلاس درس را با دقت آماده می‌کرد. استاد راهنمای سه دانشجوی دکترا بود و در چندین کمیته دفاع از پایان‌نامهٔ دکتری شرکت داشت.

تجربهٔ جان در طول جنگ دوم جهانی، او را در معرض سنگدلی‌های جنگ، دشمنی و عدم‌تحمل قرار داده بود که سلوک و رفتار او را در بقیهٔ عمر شکل می‌دادند. بسیار مهربان، همراه، فهیم و یاری‌دهنده بود. همکاری شایسته و انسانی پای‌بند به اصول. هیچ تصویری از او بدون کارهای بی‌قاعده او کامل نیست. حکایت‌های متعددی ناشی از ساده و بی‌تکلّفی وی گفته‌اند بسیار بیش از میانگین یک ریاضی‌دان!

در اوت سال ۲۰۰۵ که طوفان کاترینا به نیواورلئان آسیب رساند، جان به نزد برادرش در بوستون نقل مکان کرد و چندین ماه را در آنجا گذراند. هیچ‌گاه کار بر روی مسائل مورد علاقه‌اش را متوقف

1) Paul Conrad 2) Humboldt

نکرد، این بار در محل کاری که دانشگاه هاروارد در اختیار وی گذاشت[1]. آپارتمانش در نیواورلئان در اثر طوفان صدمه دید و هنگامی که به شهر بازگشت هیچ‌یک از وسائل شخصی خود را غیر از آنچه در محل کارش در تولون باقی مانده بود، نیافت. مدت دو سال در خانه پیش‌ساخته‌ای که دولت برای او تهیه کرده بود، زندگی کرد تا این‌که توانست در یک آپارتمان نوساز ساکن شود. تمام تلاش خود را انجام داد تا به زندگی بازگردد. اما این کار در شهر طوفان‌زده امکان‌ناپذیر بود. او هیچ‌گاه از آسیب‌های ناشی از طوفان کاترینا نه از نظر روحی و نه از نظر جسمی بهبود نیافت.

در ماه مه سال ۲۰۰۹ در پایان سال تحصیلی هنگامی که شنیدیم جان، شخصی که سالم و فعال به‌نظر می‌رسید به سرطان کبد مبتلا شده است یکه خوردیم. امیدوار بود که به‌کمک شیمی‌درمانی بتواند برای دو سال دیگر به فعالیت‌های پژوهشی و آموزشی خود ادامه دهد. زمانی که از این حقیقت سنگین که بیماری‌اش گسترش پیدا کرده آگاه شد، به همان آرامی و شجاعتی که زندگی را در آغوش گرفته بود، پایان آن را نیز پذیرفت. آن‌گاه که در تولون ضیافتی برای بزرگداشت چهل و پنج سال خدمت بی‌وقفهٔ وی برگزار شده بود، جان می‌دانست چند روزی به پایان زندگی‌اش باقی نمانده است. مبارزهٔ او با بیماری دیری نپایید. در چهارم ژانویه یک هفته پیش از ۷۲ سالگی جان سپرد. مرگ او، فقدان بزرگی برای جامعهٔ ریاضی است. جای او به‌طور دردناکی خالی است.

آنچه دربارهٔ آثار جان دانس قابل توجه است، گوناگونی مباحثی است که در طول ۴۴ سال با چاپ مقاله‌های ریاضی مورد توجه قرار داده است. وی دارای علایق گسترده و وسعتِ نظر علمی مؤثر از C^* ـ جبر گرفته تا حلقه‌های تقسیمی، خواص توپولوژیکی حلقه‌ها با مجموع نامتناهی زیرمدول‌ها و تعمیم بُعد گلدی[2] بود. دو مقاله در

Transaction of the American Mathematical Society

به چاپ رساند. یکی دربارهٔ مشبکهٔ زیرمدول‌های چپ M روی حلقهٔ R و زیرحلقهٔ متشکل از حلقه‌های آن تحت شرایط خاص به تقلید از قضیهٔ چگالی جیکوبسن[3]، و دیگری ضرب تانسوری C^* ـ جبرها ([7,8]). وی ذهنی پرسشگر داشت و تلاش می‌کرد آنچه را دیگران انجام داده‌اند تجزیه و تحلیل و درک کند، سپس در پی گسترش آن باشد. مثلاً چنانچه لازم بود حلقه‌ای دارای عنصر واحد باشد، آن عضو را برمی‌داشت تا بداند چه رخ می‌دهد. چند کتاب نیز تألیف کرد. در کتاب «مدول‌ها و حلقه‌ها» چنین می‌نویسد: «مؤلف هیچ کتاب درسی چاپ شده‌ای را نمی‌شناسد که موضوع را آن‌طور که در اینجا مطرح شده است، پرورده باشد».
استقلال فکری داشت و در جستجوی تفسیر خودش از چراییِ واقعیت‌ها بود. قابل توجه است که سوای همکاری‌های اولیه‌اش با کارل فردیش هافمن و همکاری‌های آخری وی با یی‌کیانگ ژو[4]،

---

۱) مترجم، در طی طوفان کاترینا، با جان دانس مکاتبه‌هایی در تولون و نیز هاروارد داشته و شاهد تلاش بی‌وقفهٔ وی بوده است. آنچه از آن مکاتبه‌ها به یادگار ماند مقالهٔ [M] در بخش مراجع است.

2) Goldie 3) Jacobson 4) Yiqiang Zhu

سایر کارهای او به‌تنهایی انجام گرفته است.
جنبهٔ دیگر آثار جان که شایان ذکر است، علاقهٔ او به مثال‌ها و توانایی و دانش او دربارهٔ فنون ساختاری بود. باز هم از مقدمهٔ «مدول‌ها و حلقه‌ها» که چنین بیان می‌کند: «این کتاب در پی آموختن چگونه مواجه‌شدن با حلقه‌ها و مدول‌ها است، نه فقط تلاشی در یک قالب دانشنامه‌ای. یک فصل کامل به روش‌های ساختاری در نظریهٔ مدول‌ها مانند پس‌رفتن و پس‌زدن اختصاص دارد که از این دو در اثباتی جایگزین برای وجود پوش انژکتیو یک مدول استفاده می‌شود». دیوید سالتمن[1] در نقد کتاب دانس با عنوان «رهیافتی موردی به حلقه‌های تقسیمی»[۱] اشاره می‌کند که مؤلف به ساختارهای مقدماتی جبرهای تقسیمی روی مرکزشان هم در حالت متناهی ــ بعد و هم نامتناهی ــ بعد علاقه‌مند است. این، ساختارهای واقعی است که او بر آن تأکید می‌کند. بسیاری از مقاله‌های وی دارای مثال‌های روشنگر است که به غنای آن‌ها کمک فراوان می‌کند. اثر اول جان دربارهٔ نمایش حلقه‌ها توسط بافه‌ها، در مقالهٔ جداگانه‌ای به قلم کارل هافمن[2] شرح داده شده‌است. بنابراین در اینجا بر جنبه‌هایی از آثار او که با مقاله‌هایی دربارهٔ گروه‌ها و حلقه‌های مرتب شروع می‌شود، تأکید می‌کنیم. علاقهٔ جان به این موضوع سه دهه ادامه داشت. دوتای اول، حاصل تأثیر علاقهٔ او به بافه‌ها است، اما اکثر آن‌ها به حلقه‌های تقسیمی مربوط است.

ساختار مورد علاقهٔ وی که در چندین جا آن را به‌کار برده است، این بود که حلقه‌های توانی صوری، گاهی به‌شکلِ تابیده روی نیمگروه‌های جزئاً مرتب یا کاملاً مرتب ساخته شود. در مقالهٔ مشترکی با پاول کنراد، روشی را برای ساختن هیأت‌های مرتب مشبکه‌ای که کاملاً مرتب نیستند، ارائه داد. بعدها به این موضوع برگشت و یک روش عمومی مناسب برای ساختن چنین حلقه‌هایی به‌دست داد ([19]). در مقالهٔ طولانی دربارهٔ ارزه‌های ماتیاک[3]، ابزارهایی را برای اثبات نشاندن حلقه‌های تقسیمی در حلقه‌های توانی صوری ارائه کرد ([15]). در مقالهٔ دیگری ([6])، مثال‌هایی از حلقه‌های بدون مقسوم‌علیه صفر ارائه داد که در حلقه‌های تقسیمی قابل نشاندن نیستند. دو مقاله به حلقه‌های تقسیمی مرتب با برگشت اختصاص دارد ([20,24]). با شروع از یک حلقهٔ تقسیمی همراه با مشتق، روش ساخت سری‌های پاد ــ لورانِ صوری را تکرار می‌کند تا به مثال‌های پیچیده و پیچیده‌تری دست یابد.

به هر حال، حاصل پژوهش‌های وی، باعث پیشرفت در زمینهٔ حلقه‌های تعویض‌ناپذیر و مدول‌ها بوده است. در سال ۱۹۷۳ در [9] مطالعهٔ «اول بودن» را آغاز کرد که پس از آن، بارها و بارها به آن بازگشت ــ در سال ۱۹۸۰ یک مقالهٔ مروری در این باره نوشت [13]. به تعمیم مفهوم ایدال اولِ حلقه به مدول‌ها علاقه داشت: ابتدا با توجه به ایدال‌های یک‌طرفه و پس از آن به زیرمدول‌های اول یک مدول. پژوهش دربارهٔ زیرمدول‌های اول و مباحث مربوط به آن، این روزها به منتهی درجه فعال است که نشان می‌دهد تا چه اندازه دانس در این مقصود از سایرین جلوتر بوده‌است.

---

1) David Saltman 2) Karl Henrich Hoffman, "The Dauns-Hoffman Theorem revisited", *Journal of algebra and its application*, **10**(2001), pp 29-37. 3) Mathiak

به نظر می‌رسد در سال‌های پایانی دههٔ هشتاد به نظریه‌های تاب علاقه‌مند شده و دو مقاله در این‌باره نوشته است. نخستین مقاله در ۱۹۷۶ دربارهٔ مدول‌های شبه‌انژکتیو و دومی دربارهٔ زیرمدول‌های اول ([10,12]). پس از آن، در ۱۹۸۰ وارد مرحله‌ای از پژوهش شد که تا پایان فعالیت‌های علمی‌اش ذهن او را مشغول کرده بود. برای مثال مطالعهٔ مدول‌ها با زیرمدول‌های اساسی که مجموع مستقیم زیرمدول‌های یکنواخت هستند و مباحث مربوط به تجزیهٔ مدول‌های انژکتیو. این پژوهش‌ها منتهی به نظریهٔ بُعد گلدی برای مدول‌هایی شد که شامل مجموع مستقیم نامتناهی از زیرمدول‌های ناصفر است. در [16] مجموع‌های نامتناهی ایدال‌های نامنفرد یک حلقه را در نظر گرفت و در سال ۱۹۸۸ در مقالهٔ مشترکی با فوشس مفهوم بعد نامتناهی گلدی را تعریف کرد ([17]). شگفت‌آور نیست که متعاقب آن سال، مقاله‌ای منتشر کرد دربارهٔ عدد ترتیبی طول زنجیری خوش‌ترتیب افزایشی زیرمدول‌های یک مدول و همچنین اعداد اصلی یک مجموعهٔ مینیمال مولد مدول M. دانس در یک سخنرانی که در کنفرانسی با عنوان «نظریهٔ حلقه‌های تعویض‌ناپذیر»، در اوهایو در ۱۹۸۹ برگزار و سال بعد گزارش آن توسط اشپرینگر چاپ شد. بعضی از این مباحث را که بسیار به آن علاقه نشان می‌داد، یعنی تجزیهٔ مدول‌ها، مدول‌های اول و مدول‌های نیم‌اول، مدول‌های نامنفرد و زیرمدول به‌طور اساسی بسته مدول‌ها ارائه داد.

وی به مسألهٔ رده‌بندی علاقه‌مند شد. در سال ۱۹۹۱ نشان داد که نتایج معروف تجزیهٔ یک مدول نامنفرد انژکتیو M روی یک حلقهٔ واحددار به انواع I، II و III و همچنین تجزیهٔ متناظر به $M = M_I \oplus M_{II} \oplus M_{III}$ که گودرل [1] و بویل [2] آن را اثبات کرده‌اند (۱۹۷۵)، از نتیجهٔ کلی‌تر نظریهٔ تابعگونی که خود او معرفی کرده است، به‌دست می‌آید ([22]). او نشان داد که یک تابعگون پادوردا F از حلقهٔ شرکت‌پذیر واحددار R به مشبکه‌های کامل بولی $F(R)$ وجود دارد. تابعگون F ردهٔ تمام R ـ مدول‌های R را به رده‌های هم‌ارزیِ مدول‌های متشابه که «نوع» نام دارند، دسته‌بندی یا افراز می‌کند ـ کارهای مرتبط با این موضوع در کنفرانس «روش‌های نظریهٔ مدول‌ها» در کلرادو و «نظریهٔ حلقه‌ها» در گرانویل اوهایو، در همان سال ارائه شد.

دانس باز هم ایده‌های خود را در تجزیهٔ مدول‌ها با تعمیم کارهای پیشین خود در مدول‌های نامنفرد به مدول‌های کلی بسط داد. این تجزیه‌ها چنان هستند که جمعوندها به ردهٔ متعارفی تعلق دارند. این رده‌ها تحت نسخه‌های یکریخت، زیرمدول‌ها، مجموع‌های مستقیم و توسیع‌های اساسی بسته‌اند و رده‌های اشباع‌شده یا رده‌های طبیعی نامیده می‌شوند. در سال‌های پایانی به‌شکل ثمربخشی برای گسترش نظریهٔ رده‌های طبیعی مدول‌ها، زیرمدول‌های نوع مدول و بُعد نوع که شبیه بعد گلدی است با یی‌کیانگ ژو همکاری کرد. برای مطالعهٔ مشروح این کار، به تک‌نگاشت آنان با عنوان «ردهٔ مدول‌ها» مراجعه کنید ([3]). وی همچنین با آلبرشت [3] و فوشس در مطالعهٔ مدول‌های بی‌تاب، یعنی مدول‌های M روی حلقهٔ R که برای هر $r \in R$، $TOR_1^R(M, R/Rr) = 0$ همکاری کرد. همچنین نتایجی در صافی و کوهرنس که این نظریه را به اعداد اصلی نامتناهی تعمیم می‌دهد،

---

1) K. R. Goodearl 2) A. K. Boyle 3) Ulrich Albrecht

به‌دست آوردند. گویا دانس به جنبه‌های نظریهٔ مجموعه‌ای موضوع علاقه داشته است.

منابع

[1] *A Concrete Approach to Division Rings*, Heldermann Verlag, Berlin, 1982, pp. 1-417.

[2] *Modules and Rings*, Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melbourne, 1994.

[3] *Classes of Modules*, Francis and Taylor, New York, 2006. (Coauthor: Yiqiang Zhou)

[4] "An embedding theorem for lattice ordered fields", *Pacific J. Math.*, **30**(1969), 385-398. (Coauthor: P. Conrad)

[5] "Embedding in division rings", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **150**(1970), 287-299.

[6] "Integral domains that are not embeddable in division rings", *Pacific J. Math.*, **34**(1970), 27-31.

[7] "Categorical w^*-tensor products", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **166**(1972), 439-456.

[8] "Simple modules and centralizers", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **166**(1972), 457-477.

[9] "One sided prime ideals", *Pacific J. Math.*, **47**(1973), 401-412.

[10] "Generalized monoform and quasi-injective modules", *Pacific J. Math.*, **66**(1976), 49-65.

[11] "Ordered domains", *Symposia Mathematica*, **21**(1977), 565-587.

[12] "Prime modules", *J. Reine Angew. Math.*, **29**(1978), 156-181.

[13] "Prime modules and one-sided ideals", in: *Ring Theory and Algebra* III (Proceedings of the Third Oklahoma Conference), Marcel Dekker Inc., 1980, pp. 41-83.

[14] "Uniform modules and complements", *Houston J. Math.*, **6**(1980), 31-40.

[15] "Mathiak valuations"; in *Ordered Algebraic Structures*, eds. W. Powell and C. Tsinakis, Marcel Dekker, New York, 1985, pp. 33-75.

[16] "Uniform dimensions and subdirect products", *Pacific J. math.*, **126**(1987), 1-19.

[17] "Infinite Goldie dimensions", *J. Algebra*, **115**(1988), 297-302. (Coauthor: L. Fuchs)

[18] "Subdirect products of injectives", *Comm. Algebra*, **17**(1989), 179-196.

[19] "Lattice ordered division rings exist", in *Ordered Algebraic Structures*, ed. J. Martinez (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1989, pp. 229-234.

[20] "Partially ordered *-division rings", in *Ordered Algebraic Structures*, ed. J. Martinez (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1989, pp. 209-228.

[21] "Semiprime modules and rings", in *Non-Commutative Ring Theory*, Proceedings, Athens, OH 1989, Lecture Notes in Math. **1448**, Springer Verlag, New York, 1990, pp. 41-62.

[22] "Torsion free types", *Fundamenta Math.*, **139**(1991), 25-43.

[23] "Direct sums and subdirect products", in *Methods in Module Theory*, Proceedings, eds. G. Abrams, J. Haefner and K. M. Rangaswamy, Marcel Dekker, 1992, pp. 39-65.

[24] "Natural partial orders on division rings with involutions", in *Ordered Algebraic Structures*, The 1991 Conrad Conference, eds. J. Martinez and C. Holland, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1993, pp. 111-131.

[25] "Functors and σ-products", in *Ring Theory, Proc. of Ohio State-Denison Conference* (1992), eds. S. K. Jain and S. Tariq Rizvi, World Scientific Publishers, Singapore, New Jersey, London, 1993, pp. 149-171.

[26] "Torsion-freeness and non-singularity over right p.p. rings", *J. Algebra*, **285**(2005), 98-119. (Coauthors: U. Albrecht and L. Fuchs)

[M] Dauns J., and Motamedi, M., "A note on infinite Goldie dimensions", *JP J. Algebra Number Theory Appl.*, **8**(2007), 165-175.

منصور معتمدی
اصفهان، خانهٔ ریاضیات اصفهان
Motamedi_m@scu.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۱ (زمستان ۱۳۹۱) صص. ۵۹ تا ۶۸

مروری بر کتاب Self-Similar Groups *

رستیسلاو گریگورچوک

ترجمه: محمد جلوداری ممقانی

خودسانی [۱] یا فرکتالی بودن [۲]، پدیده‌ای مهم در طبیعت است که در بسیاری از وجوه تمدن جدید انعکاس یافته است. این پدیده علاوه بر هنر، در فیزیک، شیمی، علوم پزشکی و علوم کامپیوتر رخ می‌نماید. خودسانی در مباحث مختلفی از ریاضیات و مدل‌سازی ریاضی از جمله دستگاه‌های دینامیکی و آشوب، فرایندهای تصادفی و فیزیک آماری، توپولوژی و هندسهٔ فرکتالی نیز ظاهر می‌شود. این پدیده با دستگاه‌هایی سروکار دارد که به‌وسیلهٔ الگوها یا آجرهایی پوشانده می‌شوند که به‌صورت نامتناهی در اندازه‌های مختلف ظاهر می‌شوند. کاربرد خودسانی در ریاضیات معمولاً مبتنی بر اصل تجدید مقیاس یا اصل تجدید نرمال‌سازی [۳] است که معمولاً با استفاده از گروه تجدید نرم صورت می‌پذیرد. در ریاضیات و فیزیک، مفهوم ناوردایی مقیاس، مفهومی قدیمی است. مکتب‌های فیثاغورس، اقلیدس و گالیله با مباحث مربوط به مقیاس‌بندی آشنایی داشتند. گروه تجدید نرمال‌سازی (یا به‌اختصار تجدید نرم [۴]) در جاهای مختلفی ظاهر می‌شود و به مجموعه‌ای از روش‌ها و مفاهیم مربوط به تغییرات مدل فیزیکی یا ریاضی اطلاق می‌شود که به تغییرات مقیاس مشاهده وابسته‌اند.

گروه تجدید نرم به مفهوم کلاسیک، گروهی دوری یا گروهی پیوستهٔ یک پارامتری (یکریخت با گروه جمعی اعداد حقیقی) است مانند گروه تولیدشده به‌وسیلهٔ ماشین جمع [۵] (یا کیلومترشمار [۶]) یا گروهی که به‌وسیلهٔ تبدیلِ خاصی از جواب نسبی یک مسألهٔ ریاضی یا فیزیکی تولید شده باشد. در واقع، این (گروه) عملاً یک نیمگروه است (دوری یا یک پارامتری)، زیرا در بسیاری موارد،

*) Grigorchuk, R., "Self-similar groups: by Volodymyr Nekrashevych", *Bull. Amer. math. Soc.*, **44**(2007), 505-512.

1) self-similarity 2) fractalness 3) renormalization 4) renorm 5) adding machine
6) Odometer

تبدیل‌های مذکور وارون ندارند [Wik06, Shi00]. اما در این اواخر، ساختارهای خودسان جدیدی کشف شده‌اند که گروه تبدیلات نرمال کنندهٔ آن‌ها ناآبلی است، ویژگی‌های پیچیده‌ای دارد و ویژگی‌های خودِ مدل را منعکس می‌کند. این انتقال از گروه نرمال کنندهٔ دوری به گروه نرمال کنندهٔ ناآبلی را می‌توان با انتقال از هندسهٔ کلاسیک به هندسهٔ ناجابجایی مقایسه کرد [Con94]. در هندسهٔ ناجابجایی از روش‌ها و تکنیک‌های جبرهای عملگری استفاده می‌شود. پیشرفت‌های اخیر نشان می‌دهند که نرمال‌کننده‌های غیردوری نیز شامل ملاحظاتی از جبرهای C^* هستند.

ردهٔ گروه‌های پشت صحنهٔ تجدید نرم غیردوری، ردهٔ گروه‌های خودسان (و طبعاً نیمگروه‌های خودسان) است. این، حوزه‌ای از نظریهٔ جدید گروه‌ها است که با رشدی فزاینده روبه‌رو است و با بسیاری از مباحث نظریهٔ گروه‌های هندسی، نظریهٔ مجانبی گروه‌ها و نظریهٔ گالوا ارتباط دارد و نیز رابطهٔ نزدیکی با گروه‌های اتوماتون یا گروه‌هایی که به‌وسیلهٔ اتوماتون‌ها تولید می‌شوند، دارد. در اینجا منظور از اتوماتون‌ها، ماشین‌های تورینگ یا اتوماتون‌های میلی[1] هستند و ربطی به اتوماتون‌های شناختی[2] که مثلاً در گروه‌های اتوماتیک [ECH92] مطرح می‌شوند، ندارند.

روش‌های زیادی برای تعریف گروه‌های خودسان وجود دارد. یکی از این روش‌ها همان‌طور که گفتیم، این است که آن‌ها را به‌صورت گروه‌هایی تعریف کنیم که به‌وسیلهٔ اتوماتون‌های میلی تولید شده‌اند. این تعریف، گروه‌های خودسان را برای رفع نیازهای رشتهٔ علوم کامپیوتر متناسب می‌نماید. روشی دیگر، تعریف آن‌ها با استفاده از کنش بر فضای دنباله‌ها روی یک الفبای متناهی است که آن‌ها را به مباحث مختلف سامانه‌های دینامیکی نزدیک می‌نماید. می‌دانیم که درخت‌های ریشه‌دار و دینامیک بر آن‌ها به‌صورت ماشین جمع (یا کیلومترشمار) در موقعیت‌های مختلفی از دستگاه‌های دینامیکی و آشوب رخ می‌دهند. برای نمونه، به کتاب‌های [BOERT96] و [Bue97] مراجعه کنید که توصیف کاملی از این وضعیت را ارائه می‌دهند. با این وصف، تنوع مثال‌های این پیوندها و روابط، بسیار وسیع است.

اکنون مفهوم گروه خودسان را به‌صورت گذرا معرفی می‌کنیم. به‌طور کلی، اگر گروه G بر مجموعهٔ خودسان Y کنش نماید و Z زیرمجموعه‌ای از Y و متشابه با آن باشد، انتظار می‌رود که پایاگر Z در G گروهی بر Z القا نماید که با G یکریخت (یا هندسی ــ متشابه) است. تعریف دقیق بعداً داده می شود، فعلاً به بیان نقش گروه‌های خودسان و عمل‌های خودسان در نظریهٔ گروه می‌پردازیم. برای این کار، به بیان چند کلمه در مورد کنش بر درخت‌های ریشه‌دار نیازمندیم، چرا که آن‌ها نقشی اساسی در این نظریه ایفا می‌نمایند. شایددرخت ریشه‌دار d ــ منتظم T_d خودسان ترین اشیاء باشد، زیرا به‌ازای هر رأس u از آن، زیردرخت ریشه‌دار با ریشهٔ u به‌طور کانونی با T_d یکریخت است. توجه می‌کنیم که در نظریهٔ معروف بس ــ سر ــ تیتز[3]، درخت ریشه‌دار d ــ منتظم T_d زیردرختی از $(d+۱)$ ــ درخت همگن است. یک تفاوت عمده در این است که در نظریهٔ بس ــ سر ــ تیتز، فرض رایج، کوچکی (به معناهای مختلف) پایاگرهای رأس‌ها است (نگاه کنید به

---

1) Mealy automata   2) recognition automata   3) Bass-Serre-Tits

[Ser80])، در حالی‌که در مورد کنش بر درخت‌های ریشه‌دار، خودِ گروه، پایاگر ریشه است.

نظریهٔ گروه‌های کنش‌کننده بر درخت‌های ریشه‌دار با نظریهٔ حاصلضرب‌های حلقوی[۱] مکرر که توسط ل. کالوژنین[۲] و پ. هال[۳] ابداع شد، رابطهٔ نزدیکی دارد. در عین حال این نظریه صورت هندسی نظریهٔ p ـ گروه‌های مانده‌ای متناهی است وقتی $d = p$ عددی اول باشد. زیباترین ردهٔ کنش‌کنندگان بر درخت‌های ریشه‌دار، ردهٔ کنش‌کننده‌های خودسان است که معمولاً مثال‌های بی‌نظیری از گروه‌ها را به‌دست می‌دهد. برخی از مثال‌های اساسی در این زمینه عبارت‌اند از: گروه‌های با رشد متوسط اولیه؛ p ـ گروه‌های تابدار متناهی مولد گوپتا ـ صدقی[۴]؛ گروه‌های پ. نویمن که ساختار شبکه‌ای زیرگروه‌های زیرنرمال نامتعارف دارند؛ مثال‌های جی. اس. ویلسون[۵] از گروه‌هایی با رشد نمایی که رشد نمایی یک‌نواخت ندارند؛ مثال‌های زوران شانیچ[۶] از گروه‌های هانوی $H^{(k)}$ که به بازی برج‌های هانوی مربوط‌اند؛ و سرانجام مثال‌های نکراشویچ از گروه‌های منودرامی[۷] مکرر که شامل گروه‌های باسیلیکا[۸] و سیرپنسکی[۹] هستند. حتی وقتی گروه‌های معروفی نظیر گروه‌های آبلی آزاد، گروه‌های غیرآبلی آزاد، گروه چشمک‌زن و بسیاری گروه‌های دیگر به‌عنوان گروه‌های خودسان شناخته شوند، چشم‌انداز نوینی در مورد برخی قضیه‌های کلاسیک (مانند نظریهٔ دستگاه‌های عددنویسی و نظریهٔ آجر فرش‌ها) ایجاد می‌شود، و گاهی راه‌حلی برای مسائل معروف مطرح می‌گردد (مانند گروه چشمک‌زن و مسألهٔ اعداد L_2 ـ بتی آتیا).

هر یک از گروه‌های مذکور معرف مسأله‌ای معروف یا خط سیری در ریاضیات است. p ـ گروه‌های گوپتا ـ صدقی یا مثال‌های دیگر مرتبط با آن‌ها روشی زیبا (و شاید کوتاه‌ترین روش) برای حل مسألهٔ عمومی برنساید معرفی نمودند. با استفاده از گروه‌های با رشد متوسط سؤالی از میلنور حل و مسیری جدید در مطالعهٔ ویژگی‌های مجانبی گروه‌ها و خمینه‌ها باز شد. این گروه‌ها همراه با گروه باسیلیکا در مطالعهٔ گروه‌های رام (میانگین‌پذیر) نقش مهمی ایفا کردند و با استفاده از آن‌ها به سؤالی از م. دِی و مسائل وابسته پاسخ داده شد. گروه‌های هانوی بر مسألهٔ کلاسیک برج‌های هانوی که بیشتر از سه میله دارند پرتوی تازه افکندند؛ و این فهرست همچنان در حالِ بلند و بلندتر شدن است. گروه‌های خودسان، کاربردهایی در نظریهٔ گالوا دارند (مثلاً وقتی برج‌های گسترش‌های میدان‌های منسوب به ریشه‌های چندجمله‌ای‌هایی که تکرارهای یک چندجمله ای منفردند). مجموعهٔ دیگری از این کاربردها به دینامیک تحلیلی و نظریهٔ خمینه‌های پوششی تعلق دارد که در آن، گروه‌های خودسان و برخی اشیاء هندسی وابسته نظیر گراف‌های شرایر و فضاهای حدی به مجموعه‌های جولیا ربط پیدا می‌کنند.

وقت مناسبی بود که کتابی برای توصیف این مباحث و مباحث دیگری که شامل گروه‌های خودسان‌اند، منتشر شود. تنها کتابی که قبلاً مختصری به این زمینه پرداخته بود کتاب دو لَ آرپ [dlH00] است که فصلی از آن (فصل ۸) به بحث حاضر مربوط می‌شود.

---

1) wreath products 2) L. Kalujnin 3) P. Hall 4) Gupta-Sidki 5) J. S. Wilson
6) Sunić 7) monodromy groups 8) Basilica 9) Sierpinskii

حقیقتاً کتاب ولودیمیر نکراشویچ اولین تک‌نگاشتی است که به موضوع گروه‌های خودسان و کاربردهای آن‌ها پرداخته است. بیشتر مطالب این کتاب مبتنی بر نتایج ناب خود مؤلف است که در این زمینه سهمی اساسی دارد. کتاب با یک فصل مقدماتی آغاز می‌شود که شامل تعریف‌ها و مثال‌های اساسی و نیز بررسی سریع رئوس مطالب است. در اینجا مفاهیم و ابزارهای بنیادی نظریه ظاهر می شوند: درخت‌های ریشه‌دار و کنش بر آن‌ها، اتوماتون‌های متناهی و نمودارهای مور، کنش‌های حلقوی و گروه‌های شاخه‌ای، ماشین‌های جمع و اتوماتون‌های دوطرفه ـ معکوس‌پذیر[1]، تعریف اصلی کنش‌های خودسان و گروه‌های خودسان. مثال‌های بسیاری از جمله گروه‌های دوری که با ماشین‌های جمع نمایش داده می‌شوند، مثال‌هایی از گروه‌های تابدار با رشد متوسط، گروه‌های با رشد نمایی و با رشد نمایی غیریکنواخت، به‌علاوه نمایش‌های جذابی از گروه‌های آزاد و چند حاصلضرب آزاد به‌وسیلهٔ اتوماتون‌های دو طرفه ـ معکوس‌پذیر ارائه شده است.

چنان‌که قبلاً نیز اشاره کردیم، شاید شیئی که بهتر از هر شیء دیگر مفهوم خودسانی را منعکس می‌کند، درخت ریشه‌دار d ـ منتظم $T = T_d$ به‌ازای $d \geq ۲$ باشد. به‌ازای هر رأس u، زیردرخت ریشه‌دار T_u با ریشهٔ u با کل درخت یکریخت است. درخت $T_۲$ یک مدل درختی مجموعهٔ سه سه‌ای کانتور C است. فرض کنید $X = \{x_۱, \ldots, x_d\}$ الفبایی شامل d حرف و X^* مجموعهٔ تمام کلمه‌ها بر X باشد (که می‌توان آن را به‌عنوان مونویید آزاد تولیدشده توسط d مولد نیز در نظر گرفت). رأس‌های T_d به‌صورت دوسویی با X^* متناظرند و بنابراین مرز درخت، ∂T_d، که مشتمل است بر شعاع‌های ژئودزیک واصل بین ریشه و بینهایت، در تناظر یک‌به‌یک است با X^ω دنباله‌های نامتناهی از نمادهای الفبای X. مشاهده می‌کنیم که هر یک از مجموعه‌های T، X^*، C یا X^ω انتخابی طبیعی برای تعریف یک عمل خودسان بر آن است. در تعریف زیر کاربرد هر یک از این مجموعه‌ها، تفاوت و اهمیتی ندارد.

تعریف. کنش وفادار[2] گروه G بر X^ω را خودسان می‌نامیم اگر به‌ازای هر $g \in G$ و هر $x \in X$ اعضای $h \in G$ و $y \in X$ یافت شوند به‌طوری که $g(xw) = yh(w)$ به‌ازای هر $w \in X^\omega$.

گروه را خودسان می‌نامیم اگر با یک کنش خودسان نمایش داده شود. این نمایش نه یکتا و نه همواره امکان‌پذیر است (از موانع عمدهٔ این کار، حل‌پذیر بودن مسالهٔ کلمه و مانده‌ای متناهی بودنِ گروه‌اند). از ویژگی‌های عمدهٔ گروه‌های اتوماتون خودسان آن است که این گروه‌ها به‌وسیلهٔ حالت‌های یک اتوماتون (غیرآغازی) تولید می‌شوند. حالتی که این اتوماتون متناهی باشد مورد توجه بسیاری است، چرا که بسیاری از گروه‌های خودسان جالب به‌وسیلهٔ اتوماتون‌های متناهی تولید شده‌اند. طبقه‌بندی این گروه‌ها را می‌توان بر طبقه‌بندی اتوماتون‌های متناهی استوار نمود. مثلاً به‌پیروی از س. صدقی می‌توان مفهوم رشد (که می‌تواند کراندار، چندجمله‌ای یا نمایی باشد) را برای اتوماتون‌های متناهی تعریف و رده‌های گروه‌های متناظر را مطالعه نمود.

---

1) bi-reversible 2) faithful action

روش دیگر مطالعهٔ رشد اتوماتون‌های متناهی، ریشه در مفهوم رشد گروه‌های متناهیاً تولید شدهٔ میلنُر دارد و به مثال‌های اتوماتون‌ها (و گروه‌ها)ی با رشد متوسط که قبلاً یاد کردیم، منجر می‌شود.

یکی از مسائل اساسی مربوط به گروه‌های خودسان تعیین گروه‌هایی است که کنش وفادار دارند و پیدا کردن تحقق‌های خودسان مناسب برای آن‌ها. مفاهیم مهم دیگری نیز در نظریهٔ گروه‌های خودسان نقش اساسی ایفا می‌کنند که برخی از آن‌ها عبارت‌اند از: کنش ترایای کروی (یا کنش ترایای سطحی)، کنش بازگشتی (نه به معنای احتمالاتی؛ شاید «خود تکرار» یا «خود بازساز» کلمات مناسبتری باشند)، کنش کراندار، گروه شاخه‌ای و کنش انقباضی. خواننده را برای مطالعهٔ این مفاهیم به کتاب ارجاع می دهیم، اما به چند نکته دربارهٔ آن‌ها اشاره می‌کنیم. ترایایی سطحی به این معنا است که کنش در تمام سطح‌های درخت به‌صورت ترایا عمل می‌کند. این مفهوم معادل است با ارگودیک بودنِ کنش القایی بر مرزِ ∂T، درخت که به‌وسیلهٔ اندازهٔ یکنواخت برنولی تأمین می‌شود. مفهوم کنش بازگشتی (خودتکرار) به این معنا است که به‌ازای هر رأس u درخت، تحدید زیرگروه پایاگر u در G به زیردرخت T_u، وقتی T_u را با T به‌طور طبیعی یکی کنیم، برابر با کل گروه باشد (به‌طور کلی، پایاگر u زیرگروهی از G است). کرانداری شرطی است بر تعداد کنش‌های نابدیهی روی زیردرختی که از یک رأس در سطحی داده شده رشد کرده است. گروه‌های شاخه‌ای (یا کلی‌تر، شاخه‌ای ضعیف) گروه‌هایی هستند که به‌صورت وفادار و ترایای سطحی بر درخت ریشه‌دار همگن کروی طوری کنش می‌کنند که ساختار زیرگروه‌های زیرنرمال آن‌ها از ساختار درخت تبعیت می‌کنند. البته این کلیتی از تعریف واقعی است (برای مشاهدهٔ جزئیات بیشتربه [BGS] مراجعه نمایید). سرانجام، گروه G را انقباضی می‌نامیم اگر متناهیاً تولید شده باشد و به‌ازای هر $g \in G$ که طول به‌قدر کافی بزرگ داشته باشد، طول افکنش‌های آن اکیداً کمتر از طول g باشد (نسبت به یک دستگاه مولد انتخابی برای گروه).

تاکنون وقت خود را صرف معرفی برخی مفاهیم گروه‌های خودسان نمودیم؛ اکنون آماده‌ایم که برخی از مهمترین مباحث کتاب را مرور کنیم. فصل اول حاوی تعریف‌ها و مثال‌های بنیادی است، نظیر: ماشین‌های جمع چند بعدی، گروه تابدار با رشد متوسط (که در اینجا با G_g نشان می‌دهیم)، p ـ گروه‌های گوپتا ـ صدقی، گروه‌های نوع پ. نویمن و گروه‌های جی. اس. ویلسون که رشدی نمایی دارند، ولی رشدشان یکنواخت نیست. همچنین در این فصل، مثال‌های معروفی در نظریهٔ گروه‌ها معرفی می‌شوند: حاصلضرب حلقوی گروه دوری نامتناهی و گروه مرتبهٔ ۲ (گروه چشمک‌زن)، گروه‌های آزاد و حاصلضرب‌های آزاد گروه‌های مرتبهٔ ۲ که به‌عنوان گروه‌های خودسان شناخته می‌شوند. به‌علاوه، در اینجا رده‌های مهم اتوماتون‌ها نظیر اتوماتون‌های کراندار و اتوماتون‌های دو طرفه ـ معکوس‌پذیر مورد بررسی قرار می‌گیرند و برای ساختن گروه‌های متناظرشان به‌کار می‌روند. تنوع مثال‌ها علاوه بر این‌که در خواننده این احساس را به‌وجود می آورد که نظریهٔ گروه‌های خودسان غنی است، ورود وی را به موضوع تسریع می‌کند.

در فصل دوم، مبانی نظریهٔ جبری گروه‌های خودسان مورد مطالعه قرار می‌گیرد. این فصل با

تعریف مفهوم دومدول جایگشتی و رابطهٔ آن با کنش خودسان آغاز می‌شود. این مفهوم قبلاً توسط مؤلف معرفی شده است و با توجه به این‌که راه توصیف بسیاری از مفاهیم و نکته‌های مربوط به گروه‌های خودسان را به زبان رسته‌ها هموار می‌نماید، به‌نظر می‌رسد کاملاً جا افتاده باشد. به‌ویژه این مفهوم در مطالعهٔ فضاهای حدی، نمایش‌ها، اربیفلدها[1]، C^* ـ جبرها و مفاهیم بسیاری در رابطه با گروه‌های خودسان، مفید است. همچنین مؤلف ضرب تانسوری دومدول‌ها را بررسی می‌کند و از آن‌ها در مطالعهٔ توان‌های تانسوری کنش‌های خودسان بهره می‌برد. ضرب‌های تانسوری در جاهای بسیاری از کتاب نقشی اساسی ایفا می‌کنند.

سری دوم موضوع‌های مورد مطالعهٔ کتاب، درونریختی‌های مجازی و مفاهیم مربوط به آن‌ها (نظیر دومدول‌های پوششی وابسته) است. درونریختی‌های مجازی قبلاً در تز م. شوب[2] معرفی شده بودند. این مفهوم به مفهوم متوافق‌ساز مجرد[3] گروه (که گروهی از خودریختی‌های مجازی است) ربط پیدا می‌کند. متوافق‌ساز مجرد در مورد بسیاری از گروه‌ها شیء بسیار جذابی است. مثلاً سی. رور[4] ثابت کرده است که متوافق‌ساز ۲ ـ گروه با رشد متوسط G_g، گروهی متناهیاً تولید شده چون S است که به‌وسیلهٔ G_g و زیرگروهی از S تولید می‌شود و با گروه معروف ر. تامپسون[5] F که قبلاً در منطق برای مطالعهٔ منطق شرکت‌پذیر تعریف شده است، یکریخت است.

فصل ۲ توصیف کاملی از کنش‌های خودسان سطح ترایای گروه‌های آبلی آزاد رتبهٔ متناهی را در بر می‌گیرد که مبتنی هستند بر نتایج مؤلف و صدقی. ثابت می‌شود که تمام این نوع کنش‌ها را می‌توان به‌صورت گروه‌های Aای که تعمیمی از ماشین جمع هستند، بیان کرد. مفهوم مهمی که در بخش ۲.۱۰ معرفی می‌شود، صلبیت[6] کنش‌های خودسان و صورت‌های مختلف آن است که مبتنی است بر کار مشترک مؤلف و ی. لاورنیوک[7]. صلبیت برای اثبات یکتایی کنش گروه‌های از نوع شاخه‌ای (با شرایطی خاص) به‌کار می‌رود. این فصل با ارائهٔ دو بخش، خاتمه می‌یابد که به مطالعهٔ کنش‌های خودسان انقباضی و مفاهیم مربوط به آنها اختصاص دارند. کنش‌های انقباضی و گروه‌های خودسان انقباضی زیرردهٔای از گروه‌های خودسان را تشکیل می‌دهند که در مورد آن‌ها مطالعات بیشتری نسبت به سایر زیررده‌ها صورت گرفته است و کاربردهای فراوانی در نظریهٔ گروه و سایر رشته‌های ریاضیات دارد. سرعت انقباض با ضریب انقباض مشخص می‌شود (که برای گروه‌های انقباضی کمتر از ۱ است). کنش‌های متناهی حالت خودسان گروه‌های آبلی، انقباضی هستند. نخستین نتیجهٔ انقباضی بودنِ گروه، حل‌پذیری مسألهٔ کلمهٔ آن با الگوریتمی بسیار کارامد از نوع شاخه‌ای است. نتیجهٔ دوم این است که مدارهای کنش بر مرز درخت رشدی چندجمله‌ای دارند و یا به عبارت دیگر، رشد گراف‌های شرایر، چندجمله‌ای است. در اینجا برای لحظه‌ای روی گراف‌های شرایر[8] توقف می‌کنیم، زیرا نقشی اساسی در بسیاری موارد دارند.

---

1) orbifolds 2) M. Shub 3) abstract commensurator 4) C. Roever 5) R. Thompson
6) rigidity 7) Y. Lavrenyuk 8) Schreier graphs

گراف شرایر کنش گروه G که به‌وسیلهٔ دستگاه متقارن مولدهای S تولید شده است، بر مجموعهٔ Ω، گرافی چون Γ است که مجموعهٔ رأس‌های آن، $V(\Gamma) = \Omega$ و مجموعهٔ یال‌های آن، $E(\Gamma) = \{(x, sx); x \in \Omega, s \in S\}$ است. طبیعتاً این گراف وقتی که کنش ترایا است، با گراف $\Gamma_1 = \Gamma(G, H, S)$ یکریخت است که در آن، H پایاگر یک نقطهٔ Ω، $V(\Gamma_1) = \{gH : g \in G\}$ مجموعهٔ همرده‌ها است و $E(\Gamma_1) = \{(gH, sgH) : g \in G, s \in S\}$. گراف‌های شرایر تعمیم‌های گراف‌های کیلی هستند که متناظرند با کنش آزاد ترایا بر Ω که به معنی بدیهی بودن H است. تا همین اواخر، گراف‌های شرایر در ریاضیات نقش مهمی ایفا نمی‌کردند. توسعهٔ نظریهٔ گروه‌های خودسان، اهمیت اساسی آن‌ها را در مباحث مختلف آشکار ساخت و کتاب نکراشویچ این موضوع را به‌صورت کامل نشان می‌دهد.

در این بررسی، باز هم به گراف‌های شرایر خواهیم پرداخت، ولی قبل از آن، به فصل‌های ۳ و ۵ می‌پردازیم که فصل‌های اصلی کتاب محسوب می‌شوند. مؤلف در فصل ۳ نشان می‌دهد که به هر کنش انقباضی خودسان، یک دستگاه دینامیکی توپولوژیک موسوم به دستگاه دینامیکی حدی نسبت داده می‌شود. این ساخت پلی بین گروه‌های خودسان و فضاهای توپولوژیک خودسان است. ساخت برعکس، موسوم به گروه منودرامی مکرر را در فصل ۵ معرفی و مطالعه می‌نماید. با در دست داشتن گروه G که بر یک درخت ریشه‌دار کنش می‌نماید، می‌توان دنبالهٔ گراف‌های شرایر Γ_n کنشِ G بر سطحِ nامِ این درخت را ترسیم کرد. معمولاً این دنبالهٔ گراف‌ها به معنای طبیعی به یک شیء حدی همگرا است که شبیه یک فرکتال است. با این روش، می‌توان تور سییرپنسکی[1]، تور آپولونیوس[2] و شکل‌های بسیار پیچیدهٔ دیگری را به‌دست آورد. این یک راهنمایی برای اکتشاف مفهوم فضای حدی L_G نکراشویچ برای کنش خودسان انقباضی است. تعریفِ دقیق، مبتنی بر تجزیهٔ فضای دنباله‌های نامتناهی چپ $X^{-\omega}$ روی الفبای X به‌وسیلهٔ رابطهٔ هم‌ارزی $\sim$ است که برحسب دیاگرام مور اتوماتون متناظر بیان می‌شود. فضای حدی L_G متریک‌پذیر و بُعد توپولوژیک آن متناهی است. این فضا ساختار فضای مداری[3] دارد که ناشی از نمایش L_G به‌صورت فضای مدارهای کنش سرهٔ G روی X_G ــ فضای حدی G است. رابطهٔ هم‌ارزی مذکور تحت عمل انتقال $\cdots x_3x_2 \to \cdots x_2x_1$ روی فضای $X^{-\omega}$، ناورداست. پس این انتقال، تابعی پیوسته چون $s : L_G \to L_G$ تعریف می‌کند و دستگاه دینامیکی (L_G, s)، دستگاه دینامیکی حدی کنش خودسان نامیده می‌شود. مؤلف نظریهٔ فضاهای حدی را با تجهیز آن‌ها به ساختار فضاهای مداری و تحقق آن‌ها به‌صورت مرزهای هذلولوی گروموف یک «گراف خودسانی» غنی‌تر هم می‌سازد. اشیاء حدی مهم دیگری نظیر سولونوییدهای[4] حدی و حدهای معکوسِ خود پوشش‌ها نیز در انتهای فصل ۵ تعریف شده‌اند.

یکی از انگیزه‌های تعریف فضاهای حدی، ارتباط بین گروه‌های خودسان و دستگاه‌های عددنویسی روی $\mathbb{Z}^n$ و روی $\mathbb{R}^n$ است. به‌کمک این ارتباط، می‌توانیم برخی از نتایج کلاسیک

1) Sierpinski gasket 2) Apolonnian gasket 3) Orbispace 4) Solenoids

در مورد دستگاه‌های عددنویسی و آجرفرش‌های مربوط به آنها در $\mathbb{R}^n$ مانند «اژدهای دوقلو» را برحسب گروه‌های خودسان تعبیر کنیم. معمولاً در حالت غیرجابه‌جایی، آجرهای مربوط به فضای حدی گروه‌های خودسان، ماهیت فرکتالی پیچیده‌ای دارند. با این حال، در بسیاری موارد، ویژگی‌های زیبایی نیز دارند؛ مثلاً همبندند و به‌وسیلهٔ قانون زیرتقسیم[1] قابل نمایش‌اند. سرچشمهٔ جوشانی از گروه‌ها، فضاهای حدی و آجر فرش‌ها، به اتوماتون‌های کراندار تعلق دارد.

فصل ۴ به فضاهای مداری می‌پردازد و تعریف‌ها و ویژگی‌های اصلی شبه‌گروه‌های موضعی از همانریختی‌ها و گروه‌واره‌های گسسته[2] را معرفی می‌نماید. در اینجا مؤلف مطالب شناخته شده را با این هدف مورد بررسی قرار می‌دهد که آن‌ها را برای مطالعهٔ کنش‌های خودسان به‌کار ببرد.

در فصل ۵، مفهوم بسیار مجرد گروه منودرامی مکرر[3] را معرفی می‌شود. اگر $f : M_1 \to M$ پوششی d ـ تایی از فضای توپولوژیک «خوب» M به‌وسیلهٔ زیرفضای باز M_1 از M باشد، با استفاده از نقطهٔ دلخواه $t \in M$، درخت d ـ منتظم ریشه‌دار T با ریشهٔ t را چنان می‌سازیم که L_n مجموعهٔ رأس‌های سطح nاُم آن، مجموعهٔ پیش تصویرهای نقطهٔ t، یعنی $f^{-n}(t)$ باشد و رابطهٔ وقوع را به این صورت تعریف می‌کنیم که هر رأس $u \in f^{-n}$ به رأس $f(u) \in f^{-(n-1)}$ واقع در سطح بالاتر وصل شود. گروه بنیادی $\pi_1(M, t)$ به‌صورت طبیعی بر سطح‌های L_n به‌وسیلهٔ کنش منودرامی کلاسیک، کنش می‌کند. تمام این کنش‌ها، وقتی با هم در نظر گرفته شوند، کنشی از $\pi_1(M, t)$ بر T را مشخص می‌کنند که به‌صورت خودریختی کنش می‌کند و گروه منودرامی مکرر، خارج‌قسمت $\pi_1(M, t)$ بر هستهٔ این کنش است. نکتهٔ شگفت‌انگیز اینجا است که این تعریف طبیعی، چند سال پیش در مقالات مؤلف کتاب معرفی شد و نه در مقالات مربوط به اواخر قرن ۱۹ (مثلاً در کارهای پوانکاره یا ریمان). همچنین قابل توجه است که گروه منودرامی مکرر یک ساختار خودسانی طبیعی دارد. بنابراین تمام روش‌هایی را که در کتاب برای مطالعهٔ کنش‌های خودسان روی درخت‌های ریشه‌دار معرفی شده‌اند می‌توان برای مطالعهٔ دستگاه‌های دینامیکی مربوط به نگاشت‌های پوششی به‌کار بست. پیش از هر چیز، این گروه ارتباط نزدیکی با دینامیک تمامریختی[4] و اشیاء مورد مطالعهٔ آن، نظیر مجموعه‌های جولیا دارد. در اینجا سولونوییدها، برگ‌ها و آجرها به ایفای نقش خود می‌پردازند و مجموعهٔ جولیا با فضای حدی گروه منودرامی مکرر متناظر همانریخت می‌شود.

ساده‌ترین نگاشت‌هایی که قبلاً در دینامیک تمامریختی نظیر نگاشت‌هایی از صفحهٔ مختلط که به‌وسیلهٔ چندجمله‌ای‌های درجهٔ دوم $z^2 - 1$ و $z^2 + i$ و غیره تعریف می‌شوند، مورد مطالعه قرار گرفته‌اند، نشان می‌دهند که گروه‌های منودرامی متناظر می‌توانند بسیار پیچیده و نیز برای مطالعه با ابزارهای شناخته شده برای محققینی که با کنش گروه‌ها بر درخت‌های ریشه‌دار سروکار دارند، بسیار مناسب باشند.

1) subdivision rule 2) etale groupoids 3) iterated monodromy group 4) holomorphic dynamics

گروه‌های منودرامی مکرر ممکن است بدون تاب، دارای رشد چندجمله‌ای، نمایی، یا با رشد متوسط، «کلاسیک» مانند Z یا از نوع شاخه‌ای باشند. این‌که بسیاری از این گروه‌ها به تعبیر فون نویمان، رام[1]اند (یعنی میانگین ناوردا دارند) ولی به تعبیر م. دی[2]، رام مقدماتی نیستند، نکته بسیار جالبی است. بنابراین خانوادهٔ گروه‌های منودرامی مکرر خانوادهٔ بزرگی است که از گروه‌های بسیار جالب (همراه با اشیاء و مفاهیمی که عناوین در خور توجه دارند، نظیر گروه باسیلیکا[3]، گروه برج‌های هانوی، اتوماتون بلاترا[4] و ترفند مونشهاوزن[5] و غیره) تشکیل شده است.

توانایی ساختاریِ نظریهٔ گروه‌های مونودرامی مکرر به این دلیل مورد توجه است که برخی از مسائل مشکل (مانند «مسألهٔ خرگوش تاب خورده[6]» هوبارد[7] که به‌وسیلهٔ بارتولدی و نکراشویچ حل شد) با استفاده از این نظریه حل شده‌اند. فصل پایانی کتاب چند مثال از کاربردهای گروه‌های منودرامی مکرر در دینامیک چندجمله‌ای‌ها و توابع پیش ـ بحرانی متناهی[8] دارد. این فصل همچنین بحث‌ها و پیوندهای جالبی در مورد هم‌ارزی ترکیبیاتی خودپوشش‌های[9] کرهٔ ریمان و قضیهٔ ترستن[10] متناظر با آن، دارد. نکراشویچ، ناورداهای کینیدینگ[11] دستگاه‌های دینامیکی را به اتوماتون‌های کنیدینگ تعمیم داده است. چندجمله‌ای‌های بیلی[12] به‌طور طبیعی در میان این مثال‌ها قرار دارند.

گروه‌های خودسان نخستین بار به‌صورت یک رده، ۲۵ (سال چاپ این مقاله ۲۰۰۷ است ــ مترجم.) سال پیش در کارهای این مؤلف و نیز در مقالات ن. گوپتا، س. صدقی، پ. نویمن، ا. مکی[13]، و. شوشانسکی[14]، جی. س. ویلسون، پ. دِلَ‌آرپ[15]، ل. بارتولدی[16] و ریاضیدانان دیگر، مورد بررسی قرار گرفتند. این رشته نخستین مراحل پیشرفت خود را هم در توانایی حل مسائل نظریهٔ گروه و هم در کاربردهای گستردهٔ آن، با موفقیت پیموده است. علاوه بر کاربردهایی که قبلاً اشاره شد، خاطرنشان می‌کنیم که مسألهٔ زلمانف[17] در گروه‌های با پهنای متناهی[18] و مسألهٔ رزنبلات[19] در گروه‌های ابررام[20] نیز به‌وسیلهٔ گروه‌های خودسان حل شدند. علاقهٔ به این رده از گروه‌ها نه تنها در میان متخصصین نظریهٔ گروه بلکه در میان متخصصین دستگاه‌های دینامیکی، جبرهای عملگری، قدم‌زدن تصادفی، هندسه (به‌ویژه هندسهٔ فرکتالی)، علوم کامپیوتر، نظریهٔ گالوا و غیره در حال گسترش است. کنفرانس‌های اخیر در اوبرولفاخ (دربارهٔ نظریهٔ گالوا)، در پالوالتو (در باب گروه‌های خودسان) و در برکلی (در P vs. NP) و انتشار مجلهٔ جدید Groups, Geometry and Dynamics (که ناشر آن انجمن ریاضی اروپا است) و در آن، رشتهٔ گروه‌های خودسان از رشته‌های بارز خواهد بود، همگی از نشانه‌های علاقهٔ روزافزون به گروهای خودسان‌اند.

---

1) amenable 2) M. Day 3) basilica 4) Bellaterra automaton 5) Munchhausen trick 6) Twisted rabbit problem 7) Hubbard 8) post-critically finite 9) self-coverings 10) Thurston 11) Kneading invariants 12) Belyi 13) A. Machi 14) V. Sushchansky 15) P. dela Harpe 16) L. Bartholdi 17) Zelmanov 18) finite width 19) Rosenblatt 20) superamenable

این کتاب خوب نوشته شده است، ساختاری عالی دارد و به آسانی به‌وسیلهٔ مبتدیان قابل مطالعه است. مطالعهٔ این کتاب را بدون هیچ تردیدی به علاقه‌مندان گروه‌های خودسان توصیه می‌کنم.

مراجع

[BGS03] Laurent Bartholdi, Rostislav I. Grigorchuk, and Zoran Sunik, *Branch group*, Handbook of algebra, Vol. 3, North-Holland, Amsterdam, 2003, pp. 989-1112.

[BOERT96] Hayman Bass, Maria Victoria Otero-Espinar, Daniel Rockmore, and Charles Tresser, "Cyclic renormalization and automorphism groups of rooted trees", *Lecture Notes in Mathematics*, vol. **1621**, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[BUe97] Jorge Buescu, *Exotic attractors: From Liapunov stability to rriddled basins*, Progress in Mathematics, vol. **153**, Birkhäuser-Verlag, Basel, 1997.

[Con94] Alain Connes, *noncommunicative geometry*, Academic Press Inc, San Diego, CA, 1994.

[dlH00] P. de la Harpe, *Topics in geometric group theory*, Chacago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, 2000.

[ECH92] David B. A. Epstein, James W. Cannon, Derek F. Holt, Silvio V. F. Levy, Michael S. Paterson, and William P. Thurston, *Word processing in groups*, Jones and Bartlett Publishers, Boston, MA, 1992.

[Ser80] Jean-Poerre Serre, *Trees*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[Shi00] D. V. Shirkov, "The evolution of Bogolyubov's renormalization group", *Ukraïn. Fiz. ZH.*, **45**(2000), no. 4-5, 409-424; Problems of theoretical and mathematical physics, Kyiv, 1999.

[Wik06] Wikipedia, *Renormalization group-Wikipedia, the free encyclopedia*, 2006 (Online; accessed 13-September-2006).

محمد جلوداری ممقانی
دانشگاه علامه طباطبایی، دانشکدهٔ اقتصاد، گروه ریاضی، آمار و کامپیوتر
imamaghan@yahoo.com

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۱ (زمستان ۱۳۹۱) صص. ٦۹ تا ۸۲

دیدار با مسأله

بامداد یاحقی

خیز و در کاسهٔ زر آب طربناک انداز
پیشتر زان که شود کاسهٔ سر خاک‌انداز

حافظ

مسأله‌های ٦ و ۷ از بخش «حل مسأله» مسأله‌هایی استاندارد هستند. در پیوند با بخش «مسأله برای حل» این شماره، نگارنده با مسألهٔ ۱ از طریق ایمیل شخصی به نام علی‌محمد کارپرور، که آن‌گونه که در ایمیلشان ذکر کرده‌اند مدرس ریاضی دانشگاه آزاد واحد استهبان هستند، آشنا شد.[۱] البته شایان گفتن است که ایشان با سری مقالات «دیدار با مسأله» آشنایی نداشتند و صرفاً از نگارنده خواستار راهنمایی در حل مسأله بودند که نسبت به خواستهٔ ایشان دریغی نشد. مسألهٔ ۲ جزء دانسته‌های به‌اصطلاح فولکلور نظریهٔ حلقه‌ها و میدان‌هاست که نخستین بار نگارنده در طی برهان گزاره‌ای در کتاب Simultaneous Triangularization به نگارش Heydar Radjavi و Peter Rosenthal به آن برخورد کرد. مسأله‌های ۲ و ۳ و ۴ از اشتباهات جدی کتاب مسأله‌های مسابقات ریاضی دانشجویی کشور به نگارش نگارنده است. این اشتباهات جدی توسط همکاران گرامی آقایان بابک صمدی (مسألهٔ ۲) و محمد حسین جعفری (مسأله‌های ۳ و ۴) به نگارنده گوشزد شدند. در اینجا مراتب سپاس خود را به این همکاران گرامی و به‌ویژه به آقای دکتر جعفری ابراز می‌کنم که نکاتی چند در ارتباط با کتاب مسأله‌های مسابقات ریاضی دانشجویی را در طی چندین ایمیل به نگارنده گوشزد کردند. مسألهٔ ۷ با الهام از مسألهٔ ۸۰۷ کتاب «مجموعهٔ مسائل و تمرینات آنالیز ریاضی» از ب. پ. دمیدویچ، به ترجمهٔ احسان‌الله قوام‌زاده قوام، چاپ انتشارات میرِ مسکو مطرح شده است.

۱) با عرض پوزش از آقای کارپرور، باید اذعان کنم با توجه به این‌که در دنیای مجازی می‌توان تحت هر نام و عنوانی به دیگران ایمیل فرستاد، در صورت دریافت ایمیل از فردی که به‌طور شخصی نمی‌شناسم، تنها فرض خواهم کرد که فرد مربوطه همان است که می‌گوید بدون این‌که به این امر باور داشته باشم!

۱. حل مسأله

۱. با استفاده از معلومات ریاضیات عمومی، گزارهٔ زیر موسوم به دستور جیرارد[1] را ثابت کنید.
مساحت یک مثلث کروی ABC که اضلاعش کمان‌های سه دایرهٔ عظیمهٔ کره به شعاع R هستند، برابر است با $a(ABC) = R^{۲}(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$ که در آن، $\alpha = \angle A$، $\beta = \angle B$ و $\gamma = \angle C$ زاویه‌های مثلث کروی ABC هستند.

حل. روش نخست: روش ریاضیات عمومی. نخست دستور جیرارد را برای مثلث کروی دلخواه ABC ثابت می‌کنیم که در C دارای زاویهٔ قائمه است. دستگاه مختصات کروی (r, θ, ϕ) را که در آن، r نشانگر طول بردار، θ نشانگر زاویهٔ تصویر بردار بر صفحهٔ xOy با جهت مثبت محور x و ϕ نشانگر زاویهٔ بردار با جهت مثبت محور z است، برای $\mathbb{R}^{۳}$ در نظر بگیرید. بدون کاسته شدن از کلیت، فرض کنید رأس C از مثلث کروی ABC بر بخش نامنفی محور z واقع باشد به‌طوری که دو رأس A و B به‌ترتیب بر ربع اول صفحات xOz و yOz هستند و به‌علاوه[2]

$$A = (R\sin\phi_{۱}, ۰, R\cos\phi_{۱}), \quad B = (۰, R\sin\phi_{۲}, R\cos\phi_{۲}), \quad C = (۰, ۰, R)$$

که در آن، R نشانگر شعاع کره است و $\phi_{۱} \le \phi_{۲} \le \frac{\pi}{۲}$. به‌روشنی

$$a(ABC) \quad = \quad \int_{\theta=۰}^{\frac{\pi}{۲}} \int_{\phi=۰}^{\phi_{۱}} R^{۲}\sin\phi d\phi d\theta + \int_{\theta=۰}^{\frac{\pi}{۲}} \int_{\phi=\phi_{۱}}^{\phi_{\theta}} R^{۲}\sin\phi d\phi d\theta$$

که در آن، ϕ_θ نشانگر ϕی نقطهٔ حاصل از تقاطع صفحهٔ $\Theta = \theta$ با کمان AB از دایرهٔ عظیمهٔ کرهٔ به مرکز مبدأ و به شعاع R است. به‌عنوان تمرینی ساده این مطلب را به خواننده واگذار می‌کنیم که نشان دهد

$$\cos\phi_\theta = \frac{\cos\theta\cot\phi_{۱} + \sin\theta\cot\phi_{۲}}{\sqrt{۱ + (\cos\theta\cot\phi_{۱} + \sin\theta\cot\phi_{۲})^{۲}}}.$$

در نتیجه

$$a(ABC) \quad = \quad \frac{\pi R^{۲}}{۲} - R^{۲}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \cos\phi_\theta d\theta.$$

با جایگذاری از دستور بالا برای $\cos\phi_\theta$ و محاسبهٔ انتگرال به دست آمده با جانشانی

$$u = \sqrt{۱ + (\cos\theta\cot\phi_{۱} + \sin\theta\cot\phi_{۲})^{۲}}$$

---

1) Girard's Formula

۲) ترسیم شکل مسأله را در هر دو روش حل مسأله به خواننده واگذار می‌کنیم.

و ساده کردن انتگرال‌های به‌دست آمده، در نهایت به‌دست خواهیم آورد

$$\begin{aligned} a(ABC) &= R^{۲}\left(\frac{\pi}{۲} + \arcsin\sqrt{\frac{۱+\cot^{۲}\phi_{۱}}{۱+\cot^{۲}\phi_{۱}+\cot^{۲}\phi_{۲}}}\right. \\ &\qquad \left. + \arcsin\sqrt{\frac{۱+\cot^{۲}\phi_{۲}}{۱+\cot^{۲}\phi_{۱}+\cot^{۲}\phi_{۲}}} - \pi\right). \end{aligned}$$

به یاد آورید که $\angle C = \frac{\pi}{۲}$. با نشان دادن این‌که

$$\angle A = \arcsin\sqrt{\frac{۱+\cot^{۲}\phi_{۱}}{۱+\cot^{۲}\phi_{۱}+\cot^{۲}\phi_{۲}}},\ \ \angle B = \arcsin\sqrt{\frac{۱+\cot^{۲}\phi_{۲}}{۱+\cot^{۲}\phi_{۱}+\cot^{۲}\phi_{۲}}},$$

حکم را در این حالت به اثبات می‌رسانیم. ولی

$$\begin{aligned} \angle A &= \angle(OAC, OAB) = \angle(n_{OAC}, n_{OAB}), \\ \angle B &= \angle(OBC, OAB) = \angle(n_{OBC}, n_{OAB}) \end{aligned}$$

که در آن، $\angle(OAC, OAB)$ نشانگر زاویهٔ بین دو صفحهٔ OAC و OAB است و n_{OAC} و n_{OAB} به ترتیب نشانگر بردارهای نرمال بر صفحه‌های OAC و OAB هستند. به طور مشابه نمادهای استفاده شده در برابری مربوط به $\angle B$ معنی می‌شوند. توجه کنید که

$$\begin{aligned} n_{OAC} &= j = (۰, ۱, ۰), \\ n_{OAB} &= (\cos\phi_{۱}\sin\phi_{۲}, \sin\phi_{۱}\cos\phi_{۲}, -\sin\phi_{۱}\sin\phi_{۲}). \end{aligned}$$

با توجه به این مطلب، به‌آسانی می‌توان برابری بالا در ارتباط با تعیین $\angle A$ را نشان داد. به‌طور مشابه دستور برابری در ارتباط با تعیین $\angle B$ ثابت می‌شود. این امر دستور جیرارد را در حالتی که $\angle C = \frac{\pi}{۲}$ ثابت می‌کند. به‌ازای مثلث کروی دلخواه و داده شدهٔ ABC، ارتفاع AH را رسم کنید تا ضلع BC را در H قطع کند. (بررسیِ این‌که چرا هر مثلث کروی همواره دارای دست‌کم یک ارتفاع است را به عهده خواننده می‌گذاریم). در این صورت، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} a(ABC) &= a(ABH) + a(ACH) \\ &= R^{۲}(\angle HAB + \angle B + \angle BHA - \pi) \\ &\quad + R^{۲}(\angle HAC + \angle C + \angle CHA - \pi). \end{aligned}$$

ولی

$$\angle BHA = \angle CHA = \frac{\pi}{۲},\ \ \angle HAB + \angle HAC = \angle A.$$

بنابراین

$$a(ABC) \quad = \quad R^{۲}(\angle A + \angle B + \angle C - \pi)$$

که این حکم را ثابت می‌کند.

روش دیگر: روش هندسی. فرض کنید مثلث کروی دلخواه ABC بر کره‌ای به شعاع R داده شده باشد. فرض کنید A'، B' و C' به‌ترتیب نقاط متقاطر A، B و C بر کره به شعاع R باشند. به‌روشنی با توجه به تقارن کره، مساحت قاچ کروی $ABA'CA$ با زاویهٔ $\angle A = \alpha$ متناسب است. به‌طور دقیق‌تر

$$a(ABA'CA) = \frac{۴\pi R^{۲}\alpha}{۲\pi} = ۲R^{۲}\alpha = ۲R^{۲}\angle A.$$

با توجه به این امر، داریم

$$\begin{aligned} a(ABC) + a(A'BC) \quad &= \quad a(ABA'CA) \\ &= \quad ۲R^{۲}\angle A = ۲R^{۲}\alpha. \qquad (۱) \end{aligned}$$

به‌طور مشابه

$$\begin{aligned} a(BA'C) + a(B'A'C) \quad &= \quad a(BA'B'CB) \\ &= \quad ۲R^{۲}\angle A'BC = ۲R^{۲}(\pi - \beta). \qquad (۲) \end{aligned}$$

همچنین داریم

$$\begin{aligned} a(B'A'C) + a(B'A'C') \quad &= \quad a(CA'C'B'C) \\ &= \quad ۲R^{۲}\angle A'CB' = ۲R^{۲}\gamma. \qquad (۳) \end{aligned}$$

با جمع کردن روابط (۱) و (۳) و با استفاده از رابطهٔ (۲) و این‌که با توجه به تقارن کره، $a(ABC) = a(A'B'C')$، به‌دست می‌آوریم

$$a(ABC) + a(A'B'C') + a(BA'C) + a(B'A'C) = ۲R^{۲}(\alpha + \gamma).$$

سرانجام با جایگذاری و ساده کردن به‌دست می‌آوریم

$$a(ABC) = R^{۲}(\alpha + \beta + \gamma - \pi).$$

این، برهان را به پایان می‌رساند. ■

۲. فرض کنید D یک حلقه باشد به‌طوری که $D^{۲} \neq ۰$. در این صورت، احکام زیر معادل‌اند.

(i) حلقهٔ D یک حلقهٔ تقسیم است؛

(ii) صفر تنها ایده‌آل سرهٔ چپ D است؛

(iii) صفر تنها ایده‌آل سرهٔ راست D است؛

(iv) صفر تنها ایده‌آل سرهٔ D است و D دارای این خاصیت است که به‌ازای هر $x, y \in D$ یک $z \in D$ موجود است به‌طوری که $xy = zx$؛

(v) تنها ایده‌آل‌های چپ در $M_n(D)$ آن‌هایی هستند که ستون‌هایشان ۰^n یا D^n هستند و به‌علاوه، هر دو ستون ناصفر ایده‌آل $\mathcal{I}$ یا به هم مربوط‌اند و یا از هم مستقل‌اند. منظور از A^n مجموعهٔ همهٔ بردارهای ستونی $(a_۱, \ldots, a_n)$ است که در آن، $a_i \in A$ به‌ازای هر $۱ \leq i \leq n$؛

(vi) تنها ایده‌آل‌های راست در $M_n(D)$ آن‌هایی هستند که سطرهایشان ۰_n یا D_n هستند و به‌علاوه، هر دو سطر ناصفر ایده‌آل $\mathcal{I}$ یا به هم مربوط‌اند و یا از هم مستقل‌اند. منظور از A_n مجموعهٔ همهٔ بردارهای سطری $(a_۱, \ldots, a_n)$ است که در آن، $a_i \in A$ به‌ازای هر $۱ \leq i \leq n$.[۱]

توضیح. به‌ازای $A \in M_n(D)$، فرض کنید نمادهای $\mathrm{col}_i(A)$ و $\mathrm{row}_i(A)$ به‌ترتیب نشانگر ستون و سطر iام ماتریس A باشد. اگر $\mathcal{I}$ یک ایده‌آل چپ (به‌ترتیب: راست) در $M_n(D)$ باشد، ستون‌های (به‌ترتیب: سطرهای) iام و jام را به هم مربوط گوییم هر گاه یک $a \in D$ موجود باشد به‌طوری که $\mathrm{col}_j(A) = \mathrm{col}_i(A).a$ (به‌ترتیب: $\mathrm{row}_j(A) = a.\mathrm{row}_i(A)$) به‌ازای هر $A \in \mathcal{I}$. ستون‌های (به‌ترتیب: سطرهای) iام و jام را از هم مستقل گوییم هرگاه

$$\{(\mathrm{col}_i(A), \mathrm{col}_j(A)) : A \in \mathcal{I}\} = D^n \times D^n$$

(به ترتیب:

$$(\{(\mathrm{row}_i(A), \mathrm{row}_j(A)) : A \in \mathcal{I}\} = D_n \times D_n$$

حل. گزاره‌های (ii)$\Longrightarrow$(i) و (iii)$\Longrightarrow$(i) بدیهی هستند.

(ii)$\Longrightarrow$(i). از آنجا که $D^{۲} \neq ۰$، نتیجه می‌گیریم ایده‌آل $\{x \in D : Dx = ۰\}$ برابر $\{۰\}$ است، زیرا در غیر این صورت خواهیم داشت $\{x \in D : Dx = ۰\} = D$ که ایجاب می‌کند $D^{۲} = ۰$ و این تناقض است. فرض کنید $d \in D$ ناصفر باشد. در این صورت، مجموعهٔ $\{x \in D : xd = ۰\}$ ایده‌آلی سره از D خواهد شد که ایجاب می‌کند $\{x \in D : xd = ۰\} = \{۰\}$. در نتیجه از این‌که $x_۱ d = x_۲ d$، درمی‌یابیم که $x_۱ = x_۲$.

---

۱) در شمارهٔ نخست سری مقالات «دیدار با مسأله» که این مسأله برای حل مطرح شده بود، در نوشتن صورت مسأله بی‌دقتی شده بود.

از سوی دیگر اگر $dx_1 = dx_2$ به‌ازای عضوهایی مانند $x_1, x_2 \in D$، خواهیم داشت $x_1 = x_2$، زیرا در غیر این صورت ایده‌آل چپ $\{x \in D : x(x_1 - x_2) = 0\}$ ناصفر خواهد شد و لذا $\{x \in D : x(x_1 - x_2) = 0\} = D$ که تناقض است. پس قانون حذف در D برقرار است. حال چون Dd ایده‌آل چپ ناصفر در D است، درمی‌یابیم که $Dd = D$. بنابراین عضوی مانند $e \in D$ موجود است به‌طوری که $ed = d$. با فرض این‌که $x \in D$ دلخواه است، می‌توان نوشت $xed = xd$. با حذف d از طرفین برابری اخیر، برابری $xe = x$ به‌ازای هر $x \in D$ حاصل می‌شود. به‌ویژه $de = d$. این به‌روشنی ایجاب می‌کند که $dex = dx$ به‌ازای هر $x \in D$. اکنون با حذف d از طرفین برابری اخیر برابری $ex = x$ به‌ازای هر $x \in D$ به بار می‌نشیند. بنابراین e عضو خنثی ضربی D است. حال فرض کنید x عضوی ناصفر از D باشد. خواهیم داشت $Dx = D$، زیرا Dx ایده‌آل چپ ناصفری در D است. لذا عضوی مانند $x' \in D$ موجود است به‌طوری که $x'x = e$. می‌توان نوشت $x'xx' = ex' = x' = x'e$ که در سایهٔ ویژگی حذف، به‌دست می‌دهد $xx' = e$. این یعنی هر عضو ناصفر D دارای وارون ضربی است. بنابراین D یک حلقهٔ تقسیم است که همان نتیجهٔ مطلوب است.

استلزام (i)$\Longrightarrow$(iii) به‌طور مشابه ثابت می‌شود.

(i) $\Longrightarrow$ (iv). از آنجا که به‌ازای هر $x, y \in D$ عضوی مانند $z \in D$ موجود است که $xy = zx$، نتیجه می‌گیریم که هر ایده‌آل چپ در D یک ایده‌آل دوطرفه است. بنابراین صفر تنها ایده‌آل چپ سرهٔ D است. در نتیجه با توجه به معادل بودن (i) و (ii) حلقهٔ D یک حلقهٔ تقسیم خواهد شد.

(v) $\Longrightarrow$ (i). فرض کنید $\mathcal{I}$ یک ایده‌آل چپ $M_n(D)$ باشد. به‌ازای $1 \le k, l \le n$ و $A \in M_n(D)$ فرض کنید $(A)_{kl}$ نشانگر درایهٔ kl ماتریس A باشد. با توجه به این مطلب، تعریف می‌کنیم $J_{kl} := \{a \in D : \exists A \in \mathcal{I},\ (A)_{kl} = a\}$. با ضرب کردن اعضای $\mathcal{I}$ از سمت چپ در ماتریس مقدماتی یا جایگشتی که از تعویض سطرهای یکم و kام ماتریس همانی حاصل می‌شود، درمی‌یابیم که $J_{kl} = J_{1l} := J_l$ به‌ازای هر $1 \le k, l \le n$. چون $\mathcal{I}$ ایده‌آل چپی در $M_n(D)$ است، نتیجه می‌گیریم که J_l یک ایده‌آل چپ D به‌ازای هر $l = 1, \ldots, n$ است. بنابراین $J_l = 0$ یا $J_l = D$، زیرا D حلقهٔ تقسیم است. حال فرض کنید $l \in \{1, \ldots, n\}$ و $d_1, d_2 \in D$ داده شده باشند. اگر ماتریس‌هایی مانند $A, B \in M_n(D)$ و $1 \le i_1, i_2 \le n$ که $i_1 \ne i_2$ موجود باشند که $(A)_{i_1 l} = d_1$ و $(B)_{i_2 l} = d_2$، خواهیم داشت $(C)_{i_1 l} = d_1$ و $(C)_{i_2 l} = d_2$ که در آن، $C = A_1 A + B_1 B$، $A_1 = \operatorname{diag}(\delta_{i_1 1}, \ldots, \delta_{i_1 n})$، $B_1 = \operatorname{diag}(\delta_{i_2 1}, \ldots, \delta_{i_2 n})$، و δ نشانگر دلتای کرونکر است. این نشان می‌دهد که ستون‌های ایده‌آل چپ $\mathcal{I}$ متشکل از همهٔ ماتریس‌هایی در $M_n(D)$ است که ستون‌هایشان 0^n یا D^n است. حال فرض کنید $\operatorname{col}_{l_1}(\mathcal{I})$ و $\operatorname{col}_{l_2}(\mathcal{I})$ به‌ترتیب ستون‌های ناصفر و متمایز l_1 و l_2 ایده‌آل $\mathcal{I}$ باشند. ستون‌های l_1 و l_2 ایده‌آل $\mathcal{I}$، $(1 \le l_1 < l_2 \le n)$، را مستقل می‌نامیم هر گاه یک $A \in \mathcal{I}$ موجود باشد به‌طوری که

$(A)_{1l_1} = 0$ و $(A)_{1l_2} \neq 0$. در غیر این صورت، ستون‌های l_1 و l_2ای ایده‌آل $\mathcal{I}$ را مرتبط می‌خوانیم. نخست فرض کنید ستون‌های l_1 و l_2ای ایده‌آل $\mathcal{I}$ مستقل باشند. چون $\mathrm{col}_{l_j}(\mathcal{I}) = D^n$، نتیجه می‌گیریم یک $B \in M_n(D)$ موجود است به‌طوری که $(B)_{1l_1} \neq 0$. ماتریس $B \in \mathcal{I}$ را می‌توان طوری اختیار کرد که $(B)_{1l_2} = 0$، زیرا به‌ازای ماتریس $C := B - ba^{-1}A \in \mathcal{I}$ که در آن، $b = (B)_{1l_2}$، $a = (A)_{1l_2}$ و A مانند بالا است، داریم $(C)_{1l_1} \neq 0$ و $(C)_{1l_2} = 0$. حال چون $\mathcal{I}$ یک ایده‌آل چپ در $M_n(D)$ است، D یک حلقهٔ تقسیم است و چنین ماتریس‌های A و B در ایده‌آل $\mathcal{I}$ موجودند. به‌آسانی نتیجه می‌گیریم که $\{((C)_{l_1 1}, (C)_{l_2 1}) : C \in \mathcal{I}\} = D \times D$. چون سطرهای ایده‌آل چپ $\mathcal{I}$ را به‌دلخواه می‌توان جابه‌جا کرد، پس $\{(\mathrm{col}_{l_1}(A), \mathrm{col}_{l_2}(A)) : A \in \mathcal{I}\} = D^n \times D^n$ که همان نتیجهٔ مورد نظر ماست. سپس فرض کنید ستون‌های l_1 و l_2 ایده‌آل $\mathcal{I}$ مرتبط باشند. درمی‌یابیم که نگاشت $f : D \to D$ با تعریفِ $f((C)_{l_1 1}) = (C)_{l_2 1}$ به‌ازای هر $C \in \mathcal{I}$ خوش‌تعریف است. در واقع، f یک تبدیل خطی ناصفر چپ از D به‌توی D است. لذا $f(x) = xf(1)$ به‌ازای هر $x \in D$ که در آن، $0 \neq f(1) \in D$. در نتیجه f یک‌به‌یک و پوشاست. دوباره از آنجا که سطرهای ایده‌آل چپ $\mathcal{I}$ به‌دلخواه می‌توانند جابه‌جا شوند، درمی‌یابیم که $\mathrm{col}_{l_2}(A) = \mathrm{col}_{l_1}(A)f(1)$ به‌ازای هر $A \in \mathcal{I}$. این، برهان را کامل می‌کند.

(i) $\Longrightarrow$ (v). گیریم I یک ایده آل چپ ناصفر D باشد. بنابر استلزام (i) $\Longrightarrow$ (ii) بالا، کافی است ثابت کنیم $I = D$. برای این منظور، توجه کنید که مجموعهٔ $(I^n, 0^n, \dots, 0^n)$ که در آن، I^n و 0^n به‌ترتیب نشانگر بردارهای ستونی $n \times 1$ با درایه‌های واقع در I و 0 هستند، یک ایده‌آل چپ ناصفر $M_n(D)$ است. از فرض آشکار است که $I^n = D^n$ و ایم ایجاب می‌کند $I = D$.

(vi) $\Longrightarrow$ (i) و (i)$\Longrightarrow$ (vi). برهان این دو استلزام مشابه با برهان دو استلزام بالاست، که برای رعایت اختصار آن‌ها را به عهدهٔ خوانندهٔ گرامی می‌گذاریم. ■

۳. فرض کنید F یک میدان باشد. ماتریس $A \in M_n(F)$ را که در آن، $n > 1$ فراتحویل‌ناپذیر[1] گوییم هرگاه $A : F^n \to F^n$ به‌عنوان تبدیلی خطی دارای زیرفضای فراپایای[2] غیربدیهی نباشد. ثابت کنید ماتریس A فراتحویل‌ناپذیر است اگر و تنها اگر چندجمله‌ای مینیمال آن، به‌عنوان یک چندجمله‌ای با ضرایب در F، روی F تحویل‌ناپذیر باشد.

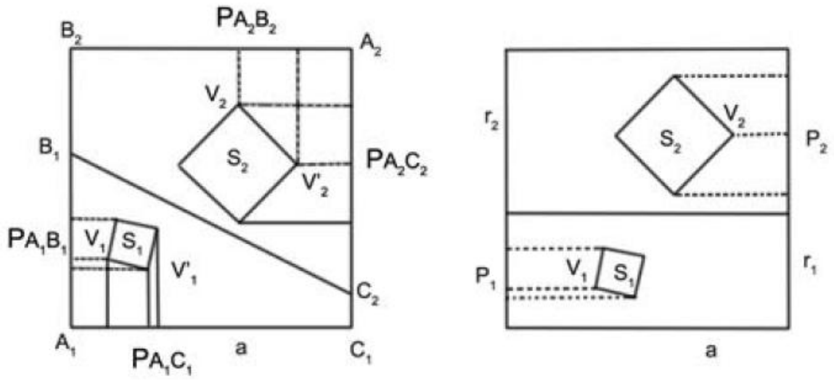
توضیح. فرض کنید V یک فضای برداری، $T \in \mathcal{L}(V)$ و $M \leq V$ زیرفضایی از V باشد. M را برای T فراپایا گوییم هرگاه $SM \subseteq M$ به‌ازای هر $S \in \mathcal{L}(V)$ که $ST = TS$.

حل. بخش «تنها اگر» آسان است. برای این منظور، به برهان خلف فرض کنید m_A

1) hyper-irreducible 2) hyper-invariant subspace

چندجمله‌ای مینیمال A روی F تحویل‌پذیر باشد. پس یک چندجمله‌ای تکین $f \in F[X]$ متمایز از m_A موجود است که m_A را می‌شمارد. حال روشن است که $\ker(f(A))$ زیرفضای غیر بدیهی فراپایای A است که فرض فراتحویل‌ناپذیری A را نقض می‌کند. برای اثبات بخش «اگر»، فرض کنید m_A روی F تحویل‌ناپذیر باشد. از قضیهٔ فرم متعارف گویا (به‌عنوان مثال قضیهٔ VII. ۲.۴(i) و قضیهٔ ۶.۴.VII(i) کتاب جبر هانگرفورد) درمی‌یابیم که $r = \deg(m_A)$ عدد n را می‌شمارد و A مشابه با جمع مستقیمی از نسخه‌های ماتریس همراه m_A است. به‌طور دقیق، A مشابه با $C \oplus \cdots \oplus C \in M_{\frac{n}{r}}(F(C))$ است که در آن، C نشانگر ماتریس همراه m_A است و $F(C) = \{f(C) : f \in F[X]\}$. بدون آن‌که از کلیت کاسته شود، فرض کنید $A = C \oplus \cdots \oplus C \in M_{\frac{n}{r}}(F(C))$. به‌آسانی می‌توان دید که $\{A\}' = M_{\frac{n}{r}}(F(C))$ که در آن، $\{A\}' = \{B \in M_n(F) : AB = BA\}$ نشانگر جابه‌جاشوندهٔ[1] ماتریس A است. از آنجا که m_A روی F تحویل‌ناپذیر است، نتیجه می‌گیریم که $F(C)$ یک جبر تحویل‌ناپذیر در $M_r(F)$ است. این امر به‌روشنی ایجاب می‌کند که $\{A\}' = M_{\frac{n}{r}}(F(C))$ تحویل‌ناپذیر است، یعنی A فاقد زیرفضای غیربدیهی فراپایاست. ■

۴. فرض کنید مربعی با طول ضلع a شامل دو مربع با درون‌های مجزا با طول ضلع‌های به‌ترتیب a_1 و a_2 باشد. ثابت کنید $a_1 + a_2 \leq a$.



حل. مربع بزرگ را S و مربع‌های درون S را به‌ترتیب S_1 و S_2 بنامید. به‌وضوح می‌توان خطی مانند d رسم کرد که مربع بزرگ را به دو قسمت لزوماً محدب مثلاً R_1 و R_2 تقسیم کند به‌طوری که $S_i \subseteq R_i$ $(i = 1, 2)$. دو حالت می‌توان در نظر گرفت.

(a) اگر d موازی با یکی از اضلاع مربع باشد، آن‌گاه R_1 و R_2 مستطیل‌هایی به‌ترتیب به طول اضلاع r_1، a و r_2، a خواهند بود که $r_1, r_2 < a$ و $r_1 + r_2 = a$ و حکم

1) Commutant

در این حالت به‌آسانی ثابت می‌شود. برای این منظور، نزدیکترین رأس‌های مربع‌های کوچک یعنی $S_۱$ و $S_۲$ به اضلاع کوچک مستطیل‌های کوچک یعنی $R_۱$ و $R_۲$ را در نظر بگیرید و آن‌ها را $V_۱$ و $V_۲$ بنامید. سپس دو ضلع گذرا از $V_۱$ و دو ضلع گذرا از $V_۲$ را بر اضلاع کوچک $R_۱$ و $R_۲$ تصویر کنید. اگر مجموع طول تصویرها را به $p_۱$ و $p_۲$ نشان دهیم، به‌ازای $\circ \leq \theta_۱, \theta_۲ \leq \frac{\pi}{۲}$ خواهیم داشت

$$
\begin{aligned}
p_۱ &= a_۱ \cos\theta_۱ + a_۱ \cos(\frac{\pi}{۲} - \theta_۱) \geq a_۱, \\
p_۲ &= a_۲ \cos\theta_۲ + a_۲ \cos(\frac{\pi}{۲} - \theta_۲) \geq a_۲
\end{aligned}
$$

که در آن، $\theta_۱$ و $\theta_۲$ به‌ترتیب زاویهٔ یکی از اضلاع گذرا از به‌ترتیب $V_۱$ و $V_۲$ با اضلاع کوچک $R_۱$ و $R_۲$ هستند. ولی $p_۱ \leq r_۱$ و $p_۲ \leq r_۲$. در نتیجه $a_۱ + a_۲ \leq p_۱ + p_۲ \leq r_۱ + r_۲ = a$ که حکم را در این حالت ثابت می‌کند.

(b) اگر d موازی با یکی از اضلاع S نباشد، فرض کنید $A_۱ \in R_۱$ و $A_۲ \in R_۲$ دو رأس از S باشند که مقابل d قرار دارند؛ یعنی در صورت لزوم، با ادامهٔ اضلاع S، $A_۱$ و $A_۲$ رأس‌های مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای خواهند بود که وترهایشان بخش‌هایی از خط d هستند. فرض کنید پاره‌خط‌های $A_۱B_۱$، $A_۱C_۱$ و $A_۲B_۲$، $A_۲C_۲$ توسط d (مطابق شکل) از اضلاع S جدا می‌شوند. نزدیکترین رأس‌های $S_۱$ و $S_۲$ به $A_۱B_۱$، $A_۱C_۱$ و $A_۲B_۲$، $A_۲C_۲$ را در نظر بگیرید و آن‌ها را $V_۱$، $V'_۱$ و $V_۲$، $V'_۲$ بنامید. سپس دو ضلع گذرا از $V_۱$ و $V'_۱$ و دو ضلع گذرا از $V_۲$ و $V'_۲$ را بر پاره‌خط‌های $A_۱B_۱$، $A_۱C_۱$ و $A_۲B_۲$، $A_۲C_۲$ تصویر کنید. اگر مجموع طول تصویرها را به $p_{A_۱B_۱}$، $p_{A_۱C_۱}$، $p_{A_۲B_۲}$ و $p_{A_۲C_۲}$ نشان دهیم، به‌ازای $\circ \leq \theta_۱, \theta'_۱, \theta_۲, \theta'_۲ \leq \frac{\pi}{۲}$ خواهیم داشت

$$
\begin{aligned}
p_{A_۱B_۱} &= a_۱ \cos\theta_۱ + a_۱ \cos(\frac{\pi}{۲} - \theta_۱) \geq a_۱, \\
p_{A_۱C_۱} &= a_۱ \cos\theta'_۱ + a_۱ \cos(\frac{\pi}{۲} - \theta'_۱) \geq a_۱, \\
p_{A_۲B_۲} &= a_۲ \cos\theta_۲ + a_۲ \cos(\frac{\pi}{۲} - \theta_۲) \geq a_۲, \\
p_{A_۲C_۲} &= a_۲ \cos\theta'_۲ + a_۲ \cos(\frac{\pi}{۲} - \theta'_۲) \geq a_۲
\end{aligned}
$$

که در آن، $\theta_۱$، $\theta'_۱$، $\theta_۲$ و $\theta'_۲$ به‌ترتیب زاویهٔ یکی از اضلاع گذرا از $V_۱$، $V'_۱$ و $V_۲$، $V'_۲$ با اضلاع $A_۱B_۱$، $A_۱C_۱$ و $A_۲B_۲$، $A_۲C_۲$ هستند. ولی $p_{A_iB_i} \leq A_iB_i$ و $p_{A_iC_i} \leq A_iC_i$ $(i = ۱, ۲)$. در نتیجه مربع‌های $S'_۱$ و $S'_۲$ با طول اضلاع به‌ترتیب $a_۱$ و $a_۲$ و با یک رأس به‌ترتیب در $A_۱$ و $A_۲$ در $R_۱$ و $R_۲$ و با اضلاع موازی با اضلاع S موجودند. این حکم را در این حالت ثابت می‌کند، زیرا $S'_۱$ و $S'_۲$ دارای اضلاع موازی با اضلاع S و دارای درون‌های مجزا در S با طول اضلاع به‌ترتیب $a_۱$ و $a_۲$ هستند. (درواقع حکم در این حالت از (a) نتیجه می‌شود.) ■

توضیح. ۱. در واقع، برهان بالا نشان می‌دهد که مربع با مساحت ماکسیمم در یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه، مربعی با مساحت ماکسیمم است که یک رأس آن بر یکی از رأس‌های زاویهٔ قائمه ذوزنقه که دارای قائدهٔ بزرگتر است واقع باشد. همچنین به‌طور مشابه مربع با مساحت ماکسیمم در یک مثلث قائم‌الزاویه، مربعی با مساحت ماکسیمم است که یک رأس آن بر یک رأس زاویهٔ قائمه مثلث واقع باشد.

۲. از اثبات بالا به‌آسانی می‌توان نتیجه گرفت اگر مستطیل به طول ضلع‌های a و b، شامل دو مستطیل با درون‌های مجزا و با طول اضلاع $a_۱$ و $b_۱$ و $a_۲$ و $b_۲$ باشد، آن‌گاه

$$\min(a_۱, b_۱) + \min(a_۲, b_۲) \leq \min(a, b).$$

به آسانی می‌توان دید که همزاد مسألهٔ بالا برای متوازی‌الاضلاع‌ها برقرار نیست. ارائهٔ مثال نقض به عهدهٔ خوانندگان گذارده می‌شود.

۳. اگر اشکالی ندارد! دوست دارم که این توضیح را با حدس زیر به پایان آورم.

حدس. فرض کنید A، B و C سه nضلعی محدب و مشابه به‌ترتیب با اضلاع $a_۱, \ldots, a_n$، $b_۱, \ldots, b_n$، و $c_۱, \ldots, c_n$ باشند به‌طوری که C شامل A و B باشد و درون‌های A و B مجزا باشند. در این صورت،

$$\min(a_۱, \ldots, a_n) + \min(b_۱, \ldots, b_n) \leq \min(c_۱, \ldots, c_n).$$

۵. فرض کنید $F = \mathbb{R}$ یا $F = \mathbb{C}$ و مجموعهٔ بستهٔ $A \subseteq \mathbb{F}^n$ دارای این خاصیت باشد که به‌ازای هر $x \in \mathbb{F}^n$ یک عضو یگانهٔ $a_x \in A$ موجود است که

$$\|x - a_x\| = \sup\{\|x - a\| : a \in A\}$$

که در آن، $\|.\|$ نشانگر نرمی دلخواه بر $\mathbb{F}^n$ است. ثابت کنید A مجموعهٔ تک عضوی است. آیا حکم را بدون بسته بودن مجموعهٔ A می‌توانید ثابت کنید؟

حل. به‌ازای $\circ \in \mathbb{F}^n$ عضو یگانهٔ $a_\circ \in A$ موجود است به‌طوری که $\|a_\circ\| = \sup_{a \in A} \|a\|$. اگر $a_\circ = \circ$، آن‌گاه $A = \{\circ\}$ که حکم را در این حالت ثابت می‌کند. روشن است که $A \subseteq \bar{B}_{r_\circ}(\circ)$ که در آن، $\bar{B}_{r_\circ}(\circ)$ نشانگر گوی بسته به مرکز $\circ$ به شعاع $r_\circ = \|a_\circ\|$ است. حال نگاشت $a : \bar{B}_{r_\circ}(\circ) \longrightarrow A \subseteq \bar{B}_{r_\circ}(\circ)$ را در نظر بگیرید که با دستور $a(x) = a_x$ تعریف می‌شود. با اثبات این‌که تابع a نگاشتی پیوسته است، از قضیهٔ نقطهٔ ثابت براوئر نتیجه می‌گیریم که $x \in \bar{B}_{r_\circ}(\circ)$ موجود است به‌طوری که $a(x) = a_x = x$. پس $x \in A$ و چون $a_x = x$، درخواهیم یافت که $A = \{a_x\}$ و حکم ثابت می‌شود. اما برای اثبات این‌که تابع a پیوسته است، با توجه به لم دنباله، کافی است ثابت کنیم $\lim_n a(x_n) = a_x$ هرگاه

$\lim_n x_n = x \in \bar{B}_{r_\circ}(\circ)$ که در آن، $x \in \bar{B}_{r_\circ}(\circ)$ عضوی دلخواه است. برای دیدن این‌که $\lim_n a(x_n) = a_x$، ثابت می‌کنیم هر زیردنبالهٔ $(a(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ خود دارای زیردنباله‌ای است که به a_x همگراست. برای این منظور، فرض کنید $(a(y_k))_{k\in\mathbb{N}}$ زیردنباله‌ای دلخواه از دنبالهٔ $(a(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ باشد. توجه کنید که $a(y_k) \in A \cap \bar{B}_{r_\circ}(\circ)$. چون $A \cap \bar{B}_{r_\circ}(\circ)$ فشرده است، نتیجه می‌گیریم $(a(y_k))_{k\in\mathbb{N}}$ دارای زیردنباله‌ای همگرا مانند $(a(z_j))_{j\in\mathbb{N}}$ است. روشن است که $\|a_x\| = \|\lim_j a(z_j)\|$، زیرا در غیر این صورت، با در نظر گرفتن j به‌قدر کافی بزرگ خواهیم داشت $\|a(z_j) - z_j\| > \|a_x - z_j\|$ که تناقض است. لذا $\|\lim_j a(z_j)\| = \|a_x\|$. ولی این امر ایجاب می‌کند که $\lim_j a(z_j) = a_x$، زیرا a_x یگانه عضوی در A است که $\|a_x - x\| = \sup_{a\in A}\|a - x\|$. بنابراین $\lim_j a(z_j) = a_x$ و لذا تابع a در نقطهٔ دلخواه $x \in \bar{B}_{r_\circ}(\circ)$ پیوسته است. ■

۶. فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی C^∞ و $N \in \mathbb{N}$ داده شده باشد و به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}$، عددی طبیعی مانند $n_x \leq N$ موجود باشد به‌طوری که $f^{(n_x)}(x) = \circ$ که در آن، $f^{(n_x)}$ نشانگر مشتق n_xام تابع f است. ثابت کنید f تابعی چندجمله‌ای است. با فرض تحلیلی بودن f نشان دهید فرض $n_x \leq N$ اضافی است. در حالت کلی نشان دهید فرض $n_x \leq N$ ضروری است. آیا می‌توانید این مسأله را به توابع چندمتغیره تعمیم دهید؟

حل. به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}$ قرار دهید $Z_i = \left(f^{(i)}\right)^{-1}\{\circ\}$. به‌وضوح Z_i به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}$ مجموعه‌ای بسته است، زیرا $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی C^∞ است. از فرض نتیجه می‌شود که $\mathbb{R} = \bigcup_{i=1}^{N} Z_i$ و لذا با توجه به قضیهٔ کاتگوری بئر، به‌ازای هر بازهٔ $[a,b]$ یک $1 \leq i \leq N$ موجود است به‌طوری که $Z_i \cap [a,b]$ دارای نقطه‌ای درونی است. در نتیجه به‌ازای هر $[a,b]$ یک $1 \leq i \leq N$ و یک زیربازهٔ باز از $[a,b]$ موجود است که بر آن زیربازهٔ باز، مشتق iام و لذا مشتق Nام f صفر می‌شود. بنابراین Z_N در $\mathbb{R}$ چگال است و از اینجا درمی‌یابیم که $Z_N = \mathbb{R}$، زیرا Z_N در $\mathbb{R}$ بسته است. حکم مسأله از این مطلب به‌روشنی نتیجه می‌شود.

حال فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تحلیلی است و شرط $n_x \leq N$ را بردارید. از قضیه‌ای استاندارد نتیجه می‌گیریم که برای هر $n \in \mathbb{N}$، تابع $f^{(n)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ نیز تحلیلی است. از سوی دیگر، از فرض نتیجه می‌شود که $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$. دوباره این امر با توجه به قضیهٔ کاتگوری بئر ایجاب می‌کند که $N \in \mathbb{N}$ی موجود است به‌طوری که Z_N دارای نقطه‌ای درونی است. چون $f^{(N)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تحلیلی است و Z_N دارای نقطه‌ای درونی و لذا دارای نقطهٔ حدی است، از قضیه‌ای استاندارد نتیجه می‌گیریم که $Z_N = \mathbb{R}$. این مطلب، حکم را ثابت می‌کند. دو بخش آخر مسأله را به‌عنوان تمرین به خوانندهٔ علاقه‌مند واگذار می‌کنیم. ■

۷. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ تابعی است که $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ به‌ازای هر $x, y \in \mathbb{R}^n$. f را مشخص کنید. به چنین fی حرکت صلب یا طولپایی می‌گویند. همین مسأله را برای طولپایی‌های $\mathbb{C}^n$ حل کنید.

حل. ادعا می‌کنیم تابع $g = f - f(\circ)$ خطی و متعامد است، یعنی ماتریس نمایش آن نسبت به هر پایهٔ متعامدیکه برای $\mathbb{R}^n$، ماتریسی متعامد است. یادآور می‌شویم که ماتریس مربعی حقیقی A را متعامد گوییم هرگاه $AA^t = A^tA = I_n$ که در آن، A^t نشانگر ماتریس ترانهادهٔ A و I_n ماتریس همانی $n \times n$ است. نخست فرض کنید $n = ۱$. در این حالت باید نشان دهیم $g = \pm I$. چون f و لذا g طولپایی است، پیوسته و یک‌به‌یک است. لذا g روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است. (برای اثبات این مطلب، به‌عنوان مثال می‌توانید به نتیجهٔ لم ۱ در حل دومین مسأله از «نگاهی به مسابقات ریاضی دانشجویی کشور، بخش یکم: آنالیز ریاضی»، نشر ریاضی شماره ۳۱ صفحهٔ ۴۲ رجوع کنید.) نشان می‌دهیم $g = I$ یا $g = -I$ بسته به این‌که g روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد. فرض کنید g روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی باشد و به‌ازای یک $x \in \mathbb{R}$ $\circ \neq$ داشته باشیم $g(x) \neq x$. اگر $x > \circ$، آن‌گاه $g(x) > \circ$ که ایجاب می‌کند $|g(x)| = g(x) \neq x = |x|$ و این تناقض است. اگر $x < \circ$، آن‌گاه $g(x) < \circ$ که ایجاب می‌کند $|g(x)| = -g(x) \neq -x = |x|$ و دوباره به تناقض می‌رسیم. پس از صعودی بودن g نتیجه می‌گیریم $g = I$. در حالت اکیداً نزولی بودن g، $-g$ طولپاییِ اکیداً صعودی خواهد بود و از استدلال بالا نتیجه می‌گیریم که $-g = I$، یعنی $g = -I$. این، ادعا را در حالت $n = ۱$ اثبات می‌کند. حال فرض کنید $n > ۱$ و $\langle .,. \rangle$ نشانگر ضرب داخلی متداول $\mathbb{R}^n$ باشد. روشن است که $\langle x, y \rangle = \frac{۱}{۲}\left(\|x+y\|^۲ - \|x\|^۲ - \|y\|^۲\right)$ به‌ازای هر $x, y \in \mathbb{R}^n$. رابطهٔ اخیر به همراه طولپایی بودنِ g و این‌که $g(\circ) = \circ$ ایجاب می‌کند که $\langle g(x), g(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ به‌ازای هر $x, y \in \mathbb{R}^n$. در نتیجه اگر $\{e_i\}_{i=۱}^n$ پایهٔ استاندارد $\mathbb{R}^n$ باشد، آن‌گاه $\{g(e_i)\}_{i=۱}^n$ یک پایهٔ متعامدیکه برای $\mathbb{R}^n$ خواهد بود. حال فرض کنید $x, y \in \mathbb{R}^n$ و $r, s \in \mathbb{R}$ دلخواه باشند. به‌ازای هر $۱ \leq i \leq n$ می‌توان نوشت

$$
\begin{aligned}
\langle g(rx+sy) - rg(x) - sg(y), g(e_i) \rangle &= \langle g(rx+sy), g(e_i) \rangle - r\langle g(x), g(e_i) \rangle \\
&\quad - s\langle g(y), g(e_i) \rangle \\
&= \langle rx+sy, e_i \rangle - r\langle x, e_i \rangle - s\langle y, e_i \rangle \\
&= \circ
\end{aligned}
$$

که به‌روشنی ایجاب می‌کند $g(rx+sy) = rg(x) + sg(y)$، زیرا $\{g(e_i)\}_{i=۱}^n$ پایه‌ای متعامدیکه برای $\mathbb{R}^n$ است. در نتیجه g تابعی خطی است. حال چون g طولپاییِ خطی است، ماتریس نمایش آن در هر پایهٔ متعامدیکه، ماتریسی متعامد است.

قسمت دوم مسأله را به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم! توجه کنید که می‌توانید از قسمت نخست مسأله استفاده کنید. ■

۲. مسأله برای حل

۱. فرض کنید $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد به‌طوری که تابع $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ با تعریفِ $g(x)=xf(x)$ روی $\mathbb{R}$ پیوستهٔ یکنواخت است. ثابت کنید تابع f نیز روی $\mathbb{R}$ پیوستهٔ یکنواخت است.

۲. ثابت کنید یک میدان متناهی است اگر و تنها اگر به‌عنوان یک حلقه به‌طور متناهی تولید شده باشد.

۳. (i) نشان دهید مسألهٔ زیر که مسألهٔ ۲ عمومی از ششمین مسابقهٔ ریاضی دانشجویی کشور است، غلط است!

یک ماتریس $n\times n$ که درایه‌هایش اعداد صحیح نامنفی‌اند داده شده است. مجموع درایه‌های واقع بر سطر و ستون مربوط به هر عضو ناصفر این جدول، حداقل n است. نشان دهید مجموع همهٔ درایه‌های این ماتریس از $\frac{n^2}{2}$ کمتر نیست.

(ii) جدول $n\times n$ زیر از اعداد صحیح نامنفی

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}$$

با ویژگی زیر را در نظر بگیرید. اگر درایهٔ a_{ij} صفر باشد، آن‌گاه مجموع درایه‌های واقع بر سطر iام و ستون jام این جدول بیشتر یا مساوی n است. نشان دهید مجموع همهٔ این درایه‌ها بیشتر یا مساوی $\frac{n^2}{2}$ است.[1]

۴. فرض کنید توابع حقیقی f، f_1، f_2 و ... بر بازهٔ $[a,b]$ تعریف شده و دارای مشتقات پیوسته باشند. اگر دنبالهٔ $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ به‌طور نقطه‌ای به f و همچنین دنبالهٔ $(f'_n)_{n=1}^{\infty}$ به‌طور نقطه‌ای به تابع پیوسته‌ای مانند g میل کند، نشان دهید $f'(x)=g(x)$ به‌ازای هر $x\in[a,b]$.[2] (تذکر: در دو سر a و b فقط مشتق راست یا چپ منظور است.)

---

۱) آقای دکتر محمد حسین جعفری از دانشگاه تبریز در طی ایمیلی به نگارنده گوشزد کردند که این مسأله ششمین مسأله از المپیادهای بین‌المللی دانش‌آموزی سال ۱۹۷۱ است.

۲) این مسأله سومین مسألهٔ آنالیز از بیست و سومین مسابقه از مسابقات ریاضی دانشجویی کشور است. برهان آورده شده توسط نگارنده در کتاب مسأله‌های مسابقات ریاضی دانشجویی کشور غلط است!

۵. فرض کنید R یک حلقه و H اشتراک کلیهٔ ایده‌آل‌های راست ناصفر R باشد. اگر $H \neq \{0\}$، آن‌گاه نشان دهید که H یک ایده‌آل دوطرفهٔ R است و داریم $H^2 = \{0\}$ یا این‌که R یک حلقهٔ تقسیم است.[1]

٦. فرض کنید $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد. ثابت کنید $f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته است اگر و تنها اگر تابع f بر هر بازهٔ باز و کراندار (a,b) به‌طور یکنواخت مشتق‌پذیر باشد، یعنی به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ یک $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ موجود باشد که

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x)\right| < \varepsilon$$

هرگاه $0 < |h| < \delta$ و $x, x+h \in (a,b)$.

۷. فرض کنید (a,b) یک بازهٔ باز نه لزوماً کراندار و $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع باشد. بنا به تعریف، مدول پیوستگی تابع f تابع $\omega_f : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ است که به‌صورت

$$\omega_f(\delta) = \sup\{|f(x_1) - f(x_2)| : x_1, x_2 \in (a,b),\ |x_1 - x_2| \leq \delta\}$$

تعریف می‌شود. ثابت کنید تابع f روی (a,b) پیوستهٔ یکنواخت است اگر و تنها اگر

$$\lim_{\delta \to 0+} \omega_f(\delta) = 0.$$

بامداد یاحقی
دانشگاه گلستان، گروه ریاضی
bamdad@bamdadyahaghi.com

---

۱) این مسأله دومین مسألهٔ جبر از بیست و سومین مسابقه از مسابقات ریاضی دانشجویی کشور است. برهان آورده شده توسط نگارنده در کتاب مسأله‌های مسابقات ریاضی دانشجویی کشور به صورتی که آورده شده است، غلط است ولی برهان قابل اصلاح است.

FARHANG va ANDISHE-ye RIYĀZI

An Expository Journal of the

Iranian Mathematical Society

ISSN 1022-6443

Vol. 31, No. 3, Winter 2013

P. O. Box 13145-418
Tehran - Iran

Tel: 88808855, 88807795, 88807775

e-mail: iranmath@ims.ir
web: http://www.ims.ir