بسم‌الله الرحمن الرحیم

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

ISSN 1022-6443

سال ۳۲، شمارهٔ ۱، بهار ۱۳۹۲

(تاریخ انتشار: تابستان ۱۳۹۲)

شمارهٔ پیاپی: ۵۲

صاحب امتیاز: انجمن ریاضی ایران
مدیر مسؤول: محمد جلوداری ممقانی
سردبیر: بهمن طباطبائی شوریجه
ویراستار ارشد: روح‌اله جهانی‌پور
مدیر اجرایی: سهیلا غلام‌آزاد

حروفچینی: فارسی‌تک ـ دفتر انجمن ریاضی
همکار این شماره: فریده صمدیان

نشانی: تهران ـ صندوق پستی: ۴۱۸ـ۱۳۱۴۵
تلفن: ۸۸۸۰۸۸۵۵، ۸۸۸۰۷۷۹۵، ۸۸۸۰۷۷۷۵

iranmath@ims.ir
http://www.ims.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی نشریهٔ علمی ـ ترویجیِ انجمن ریاضی ایران است که به چاپ و انتشارِ مطالبی می‌پردازد که هم جنبه‌های عام و فلسفیِ ریاضیات را ترویج دهند و هم بازگوکنندهٔ فرهنگ و روند ریاضیاتِ حاکم بر جامعهٔ ریاضی باشند. فرهنگ و اندیشه ریاضی از مقالات در زمینه‌های ریاضیات محض، ریاضیات کاربردی، تدریس، یادگیری و آموزش ریاضی، تاریخ و فلسفهٔ ریاضی، علومِ کامپیوتر، فیزیک نظری و کاربردهای ریاضیات در علوم دیگر که در چارچوب زیر نوشته شده باشند استقبال می‌کند:

- ارائهٔ موضوعیْ فعال و مطرح در ریاضیات در قالبی که علاقه‌مندان به زمینه‌های پژوهشی را برای پیگیریِ موضوع مورد بحث آماده سازد؛
- ترجمهٔ مقاله‌هایی از نوع یاد شده در بالا یا ترجمهٔ مقالات کلاسیکِ ریاضی (ترجمهٔ آزاد پذیرفته نمی‌شود)؛
- ارائهٔ موضوعاتِ آموزشی حاوی نکات و قضایا و برهان‌هایی ساده‌تر از آنچه در متون کلاسیک موجود است.

علاقه‌مندان می‌توانند سه نسخه از مقالهٔ خود را با شرایط زیر به نشانی دفتر مجله ارسال نمایند:

- متن مقاله روی یک طرف کاغذ، یک خط در میان و با حاشیهٔ کافی تحت ادیتور «فارسی تک» تایپ شود. در صورتی که مقالهٔ فرستاده شده، پس از طی شدن مراحل داوری برای چاپ پذیرفته شود، فایل «اف ـ تک» مقاله می‌بایست از طریق پست الکترونیکی مجله ارسال شود.
- فرستادن اصل مقالهٔ ترجمه شده همراه با ترجمهٔ آن الزامی است.
- نام و نشان اصل مقالهٔ ترجمه شده باید به صورت پاورقی در صفحهٔ اول ترجمهٔ مقاله ذکر شود.
- اصطلاحات ریاضی به کار رفته باید بر طبق واژه‌نامهٔ ریاضی و آمار انجمن ریاضی ایران چاپ مرکز نشر دانشگاهی باشد و اگر لغتی در این واژه‌نامه نیست، معادل انگلیسی آن در پاورقی داده شود.
- مقالات ارسالی به فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی نباید برای بررسی و چاپ به مجلات دیگر فرستاده شده باشد.
- مقالهٔ ارسالی باید مشتمل بر نام و نام خانوادگی نویسنده(گان) یا مترجم(ان)، سمت علمی، آدرس کامل پستی و آدرس الکترونیکی باشد.

• در ابتدای مقاله، چکیده‌ای در حداکثر ۲۰۰ کلمه شامل نکات اصلی بیان شده در مقاله، آورده شود.
• پس از چکیده، واژه‌ها و اصطلاحات کلیدی (حداکثر ۵ تا) مشخص شود.
• رده‌بندی موضوعی اولیه و ثانویهٔ مقاله، بر مبنای رده‌بندی موضوعی انجمن ریاضی آمریکا، ذکر شود.
• اسامی افراد خارجی در متن مقاله باید به صورت فارسی در پاورقی به زبان اصلی نوشته شود.
• به منظور تسریع در ویرایش و چاپ مقالات، اصول سجاوندی، نگارش و ویرایش فارسی را در نوشتن مقالات رعایت فرمائید.
• فهرست مراجع را در انتهای مقاله، به ترتیب حروف الفبای نام خانوادگی افراد تنظیم کنید نه به ترتیبی که در مقاله ارجاع می‌دهید. ضمناً در نوشتن مراجع، قالب زیر را رعایت کنید:
الف) اگر مرجع ذکر شده، مقالهٔ لاتین است، عنوان مقاله به صورت رومن، نام مجله به صورت ایتالیک، شمارهٔ مجلد آن به صورت سیاه، سال چاپ داخل پرانتز و در انتها، صفحاتی که مقالهٔ مرجع در آنها چاپ شده است، تایپ شود.
ب) اگر مرجع ذکر شده، کتاب لاتین است، نام کتاب به صورت ایتالیک تایپ شود.
• توجه کنید که تعداد صفحات مقالهٔ ارسالی در قالب صفحه‌بندی مجله، از ۲۵ صفحه نباید بیشتر باشد.
• هیأت تحریریه در رد، قبول، حک و اصلاح مقالات آزاد است.

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی امسال در دو شماره (بهار و پاییز) منتشر و به اعضای حقیقی، حقوقی و مشترکین انجمن ریاضی ایران ارسال می‌شود.

علاقه‌مندان به عضویت حقیقی و دانشگاه‌ها، مؤسسات و کتابخانه‌ها که تمایل به عضویت حقوقی یا اشتراک سالانه دارند می‌توانند با دبیرخانهٔ انجمن ریاضی ایران تماس حاصل نمایند.

شماره‌های قبلی مجله را می‌توانید از دبیرخانهٔ انجمن ریاضی ایران خریداری فرمایید.

فهرست مطالب

عکس روی جلد: جورج پولیا (مربوط به مقالهٔ چهارم)

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۲ (بهار ۱۳۹۲) صص. ۱ تا ۱۱

کل و جزء در ریاضیات*

جان ال بل

مترجمین: امید غیور، رستم محمدیان، مهرداد نامداری

چکیده

در این مقاله، نقش محوری رابطهٔ «کل $\leftrightarrow$ جزء» در ریاضیات با ارائهٔ مثال‌هایی از جبر، هندسه، آنالیز تابعی، منطق، توپولوژی، نظریهٔ رسته‌ها و در تجزیه و تحلیل آن مثال‌ها، آشکار می‌شود.

کلید واژه‌ها: دوگانی گلفاند، توپولوژی گروتندیک، کل $\leftrightarrow$ جزء، دوگانی استون، جزء، کل.

رابطهٔ میان **کل** و **جزء** (که با «جزء $\leftrightarrow$ کل» نشان می‌دهیم) نقش محوری در توسعه و گسترش ریاضیات به عهده دارد. شاید اولین ظهور شفاف آن در بُنداشت پنجم اقلیدس (نه اصل موضوع پنجم وی) باشد که در اثر جاودانه‌اش «اصول» بنا نهاده شد و بیان می‌کرد که کل از جزء بزرگتر است. ابطال این دیدگاه توسط کانتور در بیش از دو هزار سال بعد، عاملی اساسی در نظریهٔ مجموعه‌های ترامتناهی بود.

یک مثال کلاسیک از «جزء $\leftrightarrow$ کل» را می‌توان در هندسهٔ تحلیلی یافت. نقاط یا بردارهای دلخواه در فضای nـ بعدی اقلیدسی $\mathbf{R}^n$، به‌صورت ترکیب خطی از n بردار پایه‌ای $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ نمایش داده می‌شوند. در این مثال، «کل» $\mathbf{R}^n$ توسط جزء (خیلی کوچک) خود، یعنی $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ (به‌وسیلهٔ مختصات) کاملاً مشخص می‌شود. البته این مثال، به مفهوم پایه برای یک فضای برداری و ایدهٔ ساختار ریاضیِ **تولید شده** توسط یک جزء خود تعمیم داده شده است، چنان‌که یک زبان نوشتاری توسط حروف الفبای آن زبان شکل می‌گیرد. مثالی دیگر در این باره از این حقیقت سرچشمه می‌گیرد که هر نقطه در یک چندضلعی یا چندوجهی محدب P، مرکز جرم یا **مرکز ثقل**

*) John L. Bell, “Whole and Part in Mathematics”, *Axiomathes*, **14**(2004), 285–294.

یک توزیع یکتا از جرم‌هایی است که در رأس‌های P قرار گرفته‌اند. این حقیقت به **قضیهٔ شوکه**[۱] تعمیم داده شده است که نتیجهٔ مهمی در آنالیز تابعی است (به‌عنوان نمونه [4] را ببینید). در واقع، این قضیه بیان می‌کند که در یک فضای نُرم‌دار هر نقطه از یک زیرمجموعهٔ محدب و فشرده مانند C، (با دیدی گسترده‌تر) مرکزِ ثقلِ یک اندازه روی مجموعهٔ E است که E مجموعهٔ **نقاط گوشه‌ای** C می‌باشد (نقطهٔ گوشه‌ای C نقطه‌ای است که درون یک پاره‌خط واقع در C نباشد). نتیجهٔ مهم این موضوع، **قضیهٔ کرین ـ میلمن**[۲] است: C کوچکترین مجموعهٔ محدب بستهٔ دربرگیرندهٔ E است. هر دو قضیه نشان می‌دهند که «کلِ» C با یک برداشت مناسب، توسط جزءِ کوچک خود، یعنی E کاملاً مشخص می‌شود.

یک «جزء» از کل در ریاضیات ممکن است با نادیده انگاشتن جنبه‌هایی از **ساختار** آن به‌دست آید. از این منظر و برای مثال، گروه جمعی اعداد صحیح، یک جزء از حلقهٔ اعداد صحیح است. بر اساس همین دیدگاه، گاهی اوقات یک جزء می‌تواند کل را مشخص کند. به‌عنوان نمونه، جزء جبری خالصِ میدان مرتب اعداد حقیقی به‌طور یکتا ترتیب آن و در نتیجه ساختار کلی آن را مشخص می‌کند ($r \leq s$ اگر و تنها اگر $s - r$ مربع باشد). این حقیقتِ آشکار، یک تعمیم نابدیهی دارد (قسمتی از قضیهٔ آرتین ـ شرایر[۳]): هر میدان بسته ـ حقیقی F (یعنی عنصر -1 مجموعی از مربعات در هر توسیع جبری اکید F باشد و در خود F این‌طور نباشد) دارای یک ترتیب کامل و یکتای سازگار با ساختار جبری خود است.

یک کلِ ریاضی ممکن است با جزئی از آن معین شود، به این معنی که هر عضو کل به‌تعبیر (توپولوژیکی) مناسبی با اعضای جزء «تقریب‌پذیر» است. یک نمونهٔ کلاسیک، این حقیقت است که هر عدد حقیقی، نقطهٔ حدی دنباله‌ای از اعداد گویاست. البته این حقیقت ریشه‌های عمیقی در تاریخ ریاضیات دارد. به نظر می‌رسد که فیثاغورسیان در حدود ۵۵۰ سال قبل از میلاد، بر این باور بودند که مجموعهٔ کل «نسبت تناسب‌های» کمیت‌های هندسی متشابه، با جزء تشکیل شده از «نسبت‌های» اعداد صحیح یکی است (و بنابراین مفهوم سختِ اندازه‌گیری به مفهوم سادهٔ شمارش تقلیل می‌یابد). کشف آن‌ها در مورد گنگ بودن نسبت ضلع به قطر یک مربع، یعنی ناگویا بودن $\sqrt{2}$، (اولین «بحران ریاضی») مجبورشان ساخت تا در ادامهٔ کارشان در ریاضی به این موضوع توجه داشته باشند که «نسبت‌های» اعداد صحیح، فقط یک **جزء اکید** از آن کل است و بنابراین یک توصیف عملی از این کل را صورت‌بندی کردند که همان نظریهٔ تناسب ائودوکسوس[۴] است.

از دیگر نمونه‌های مهم از این دست، می‌توان به **قضیه‌های تقریب وایراشتراس**[۵] اشاره کرد: هر تابع حقیقی یا مختلط پیوسته روی یک بازهٔ حقیقی بسته، حد یکنواخت دنباله‌ای از چندجمله‌ای‌ها است و هر تابع مختلط 2π ـ متناوب روی خط حقیقی، حد یکنواخت دنباله‌ای از چندجمله‌ای‌های

---

۱) به نام ریاضیدان فرانسوی گوستاو شوکه Gustave Choquet

2) Krein-Milman 3) Artin-Schreier 4) Eudoxus 5) Weierstrass approximation theorems

مثلثاتی است. در هر دو مورد، کل (توابع پیوسته دلخواه یا توابع متناوب دلخواه) با تقریب یکنواخت یا «تغییرات» یک جزء معین (چندجمله‌ای‌ها یا چندجمله‌ای‌های مثلثاتی) مشخص می‌شوند. این قضایای قرن نوزدهم، در قرن بیستم به **قضیهٔ استون ـ وایراشتراس**[1] تعمیم پیدا کردند (مرجع [4] را ببینید). این قضیه، معیاری برای جزء A از یک جبر توابع پیوستهٔ حقیقی‌مقدار یا مختلط روی فضای هاسدورف و فشردهٔ X به‌دست می‌دهد تا با جبر تمام این توابع یکی باشد. معیار این است که A باید یک زیرجبر خود ـ الحاقی بسته شامل تابع واحد باشد که نقاط X را نیز جدا کند.

نظریهٔ گالوا (مرجع [3] را مشاهده کنید) یک نمونهٔ وسیع از «جزء $\leftrightarrow$ کل» در ریاضیات را به‌دست می‌دهد. در حالت کلاسیک‌اش، یک معادلهٔ چندجمله‌ای $f(x) = 0$ روی هیأت F (به‌عنوان نمونه اعداد گویا) داده می‌شود و ما به‌دنبال یافتن جواب آن به‌کمک «رادیکال‌ها» هستیم؛ یعنی یافتن ریشهٔ nام برای n دلخواه. «کل» مربوط به این مورد، **میدان شکافیدن** f روی F است که آن را با K نشان می‌دهیم، یعنی کوچکترین میدان شامل F که در آن، f می‌تواند کاملاً به عوامل خطی تجزیه شود. بیان دیگری از شرط حل‌پذیری f با رادیکال‌ها چنین است که کل هیأت K (با دقت بیشتر، یک توسیع مناسب از K) را می‌توان با «اجزاء» مناسبش ساخت؛ در این حالت، اجزاء، **زیرمیدان‌های میانی** L از K هستند به‌طوری که $F \subseteq L \subseteq K$. متناظر با K یک گروه G وجود دارد (**گروه گالوای** آن) که یکریخت است با زیرگروهی از گروه جایگشت‌های n شیء که در آن، n درجهٔ f است. گروه G یک «کل» جدید تشکیل می‌دهد که «اجزاء» وابسته‌اش **زیرگروه‌های** آن هستند. **قضیهٔ اساسی نظریهٔ گالوا** ادعا می‌کند که پیوندهای اجزاء دو کل K و G به تعبیری مناسب، یکریخت هستند. (تناظر پدیدآورندهٔ این یکریختی، نمونه‌ای کلی‌تر از تناظری است که اکنون **الحاق گالوا** یا **اتصال گالوا**[2] نامیده می‌شود.) این یکریختی خاصیت نسبتاً سادهٔ **حل‌پذیری** اجزاء G (و بنابراین خود G) را جایگزین خاصیت پیچیدهٔ پیوند اجزاءِ کلِ K که بیان دیگری از حل‌پذیری f با رادیکال‌هاست، می‌کند. در واقع، با نمونه‌ای از الگوی **جزء $\rightleftarrows$ کل** سر و کار داریم.

مثال‌های مهمی از « کل $\leftrightarrow$ جزء» در **منطق ریاضی** وجود دارد. برای شروع می‌توان به این گزارهٔ بدیهی غالباً مفید اشاره کرد که: سازگاری نظریهٔ مرتبهٔ اول را می‌توان به سازگاری اجزاء متناهی‌اش کاهش داد. سپس **قضیهٔ** بی‌نظیر **فشردگی** در پی می‌آید (مرجع [2] راببینید) که بیان می‌کند یک نظریهٔ مرتبهٔ اول Σ دقیقاً هنگامی مدل دارد که هر جزء متناهی آن چنین باشد. اینجا مدل Σ (به‌عنوان یک «ابرحاصل‌ضرب») از مدل‌های اجزاء متناهی‌اش در نظر گرفته می‌شود. این نمونه‌ای از «بازسازی» یک ساختار ریاضی «از اجزایش» است؛ روشی که به آن باز خواهیم گشت. قضیهٔ مشهور **لوونهایم ـ اسکولم**[3] حاکی است که خواص تعریف‌پذیر یک ساختار (نامتناهی) با نظیر همان خواص در برخی از اجزاء (نسبتاً کوچک) آن ساختار یکسان هستند و همچنین با نظیر همان خواص در ساختارهای بزرگتر دیگر که خودِ آن ساختار اصلی را به‌عنوان جزء دربر دارند، یکسان‌اند.

1) Stone-Weierstrass theorem 2) Galios connection or adjunction 3) Löwenheim-Skolem theorem

یک نتیجهٔ مرتبط، **اصل انعکاس در نظریهٔ مجموعه‌ها** است (مرجع [1] را ببینید) که بیان می‌کند خواص تعریف‌پذیر در عالم مجموعه‌ها در یک جزء کوچک آن، یعنی یک مجموعه، منعکس شده است.

نتایج پایایی در منطق ریاضی نیز منبعی از نمونه‌های «جزء $\leftrightarrow$ کل» فراهم می‌آورند. در این بحث، دو نظریهٔ $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$ داده شده‌اند که به‌ترتیب به زبان‌های $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_2$ صورت‌بندی می‌شوند. Σ_2 یک **توسیع پایا** از Σ_1 است اگر جزء Σ_2 که شامل $\mathcal{L}_1$ ــ گزاره‌ها است با Σ_1 یکسان باشد. **نمونهٔ پایه‌ای** این موضوع آن هنگام رخ می‌دهد که Σ_1 یک نظریه در زبان مرتبهٔ اول $\mathcal{L}_1$ و Σ_2 مجموعه‌ای از نتایج منطقی Σ_1 در زبان مرتبهٔ اول $\mathcal{L}_2 \supseteq \mathcal{L}_1$ باشد. **آنالیز غیراستاندارد** آبراهام رابینسون[1] (مرجع [11]) یک نمونه دیگر است: Σ_1 آنالیز کلاسیک صورت‌بندی شده در زبان نظریهٔ مجموعه‌های معمولی $\mathcal{L}_1$ و Σ_2 آنالیز غیراستاندارد فرمول‌بندی شده در زبان $\mathcal{L}_2$ است که توسیع مناسبی از $\mathcal{L}_1$ می‌باشد. مثال دیگر توسط گودل[2] ارائه شده است: $\mathcal{L}_1$ زبان (نظریهٔ مجموعه‌ای) حساب، Σ_1 مجموعهٔ گزاره‌های قابل اثباتِ $\mathcal{L}_1$ در نظریهٔ مجموعه‌های زرملو ــ فرانکل[3] **ZF**، $\mathcal{L}_2$ زبان نظریهٔ مجموعه‌ها و Σ_2، «نظریهٔ **ZF**» + «اصل انتخاب» + «فرض پیوستار» در نظر گرفته می‌شوند. به‌عنوان نمونه‌ای **ناموفق** می‌توان به **شکل ابتدایی برنامهٔ هیلبرت**[4] نگریست. در اینجا $\mathcal{L}_1$ زبان **ریاضیات قیدی**، Σ_1 گزاره‌های به‌طور مقید اثبات‌پذیر در زبان $\mathcal{L}_1$، $\mathcal{L}_2$ زبان **ریاضیات آرمانی** و Σ_2 گزاره‌های آرمانیِ اثبات‌پذیر در زبان $\mathcal{L}_2$ هستند. هیلبرت امیدوار بود تا ثابت کند که Σ_2 یک توسیع پایای Σ_1 است، اما چنان‌که می‌دانیم، گودل با قضیه‌های ناتمامیت مشهور خود نشان داد که چنین چیزی برقرار نیست.

دو مثال اول از «جزء $\leftrightarrow$ کل» نشان داد که چگونه یک ساختار ریاضی می‌تواند با یک **تک** جزء به‌طور خاص انتخاب شده، معین گردد. اکنون می‌توانیم حالت‌هایی را در نظر بگیریم که در آن‌ها چنین ساختارهایی بتوانند از تجمع مناسبی از اجزاء خاص بازآرایی شوند. یک مثال ساده در این زمینه، این است که شیء دلخواه A در رستهٔ جبرها را می‌توان از زیرجبرهای متناهیاً تولید شده‌اش دوباره به‌دست آورد: A هم ــ حد نموداری است که رأس‌های آن زیرجبرهای متناهاً تولید شدهٔ A و پیکان‌های آن، نگاشت‌های شمول روی این رأس‌ها است.

جالب‌تر آن‌که ساختارهای ریاضی را اغلب می‌توان از اجزای برخاسته از مجموعه‌های ترازِ «کمیت‌هایی» که روی آن ساختار به‌طور پیوسته تغییر می‌کنند، بازسازی کرد (درست مانند یک رویه که به‌کمک منحنی‌های تراز بنا می‌شود). نمونهٔ ابتدایی این الگو، **فضای هاسدورف**[5] و فشردهٔ X است. در اینجا X می‌تواند از **صفر ــ مجموعه‌های توابع پیوسته** که با $Z(f)$ نشان داده می‌شوند دوباره ساخته شود: $Z(f)$ آن جزء فضای X است که تابع پیوستهٔ حقیقی‌مقدار f روی آن صفر می‌شود (مرجع [5] را ببینید). هر $Z(f)$ را می‌توان یک **جزء اطلاعاتی** دربارهٔ X تصور کرد که

1) Abraham Robinson 2) Gödel 3) Zermelo-Frankel 4) Hilbert's program
5) Hausdorff space

در واقع، آن جزء از X را مشخص می‌کند که روی آن، کمیت متغیر پیوستهٔ f یک مقدار ثابت خاص (در این حالت، صفر) می‌گیرد. به این تعبیر، صفر ــ مجموعه‌ها **اجزای اطلاعاتی** X را تشکیل می‌دهند (اگر X یک رویه در فضای سه بعدی باشد، آن‌گاه صفر ــ مجموعه‌های پیوستهٔ وابسته به آن، یعنی منحنی‌های تراز، مقطع آن رویه با صفحات موازی با یکی از صفحات مختصات‌اند.) درمی‌یابیم که مجموعه‌های نامجزای ماکسیمال از اجزای اطلاعاتی X، با **نقاط** X متناظرند و همچنین X را می‌توان با القای یک توپولوژی طبیعی روی خانواده‌ای از این مجموعه‌های اجزای اطلاعاتی بازسازی کرد. در این حالت، «اگر اجزای اطلاعاتی را بشناسید، آن‌گاه کل را می‌شناسید.»

شیوهٔ بازسازی یک فضا از اجزای اطلاعاتی‌اش، به **ساختارهای جبری** مانند حلقه‌های (تعویض‌پذیر) قابل‌توسیع است که با تحدید ایدهٔ **کمیت متغیر** (پیوسته) پدیدار می‌شوند. در اینجا ایده این است که از پیوند اجزای اطلاعاتی یک حلقهٔ داده شده مانند R، یک فضای توپولوژیک X ساخته شود و با مشخص کردن حلقهٔ (توپولوژیکی) R^* و با کمک روابط کلیدی معین، حلقهٔ R دوباره آن‌چنان ساخته شود که بتوان آن را به‌عنوان حلقهٔ نگاشت‌های پیوستهٔ R^* ــ مقدار روی X در نظر گرفت. در ارتباط با این موضوع، دو نمونه کلاسیک وجود دارد.

اولین نمونه، **دوگانی استون**[۱] است (مرجع [6] را مشاهده کنید). در این حالت، حلقهٔ R حلقهٔ **بولی** B است، یعنی حلقه‌ای که در آن، اتحاد $x^{۲} = x$ برقرار است. (مفهوم حلقهٔ بولی اساساً توسط خود بول از ایدهٔ تابع گزاره‌ای یا تابع ارزشی، یعنی یک «کمیت» متغیر که دقیقاً دو «ارزش درستی» می‌پذیرد، به‌دست آمده است: **درست** (۱) و **غلط** (۰).) در اینجا «اجزا»ی اطلاعاتی B همان **ایدآل‌های ماکسیمال** هستند؛ «اجزائی» از B که روی آن‌ها، هر همریختی به حلقهٔ توپولوژیکی گسستهٔ $\mathbf{2} = \{۰, ۱\}$، فقط مقدار صفر را اختیار می‌کند. این اجزاء، یک فضای توپولوژیک X پدید می‌آورند (همان فضای استون B) و آن‌گاه B به‌عنوان حلقهٔ نگاشت‌های پیوسته از X به $\mathbf{2} = \{۰, ۱\}$ مشخص می‌شود.

دومین نمونه، **دوگانی گلفاند** است (مرجع [8] را مشاهده کنید). در این حالت، حلقهٔ R یک C^* ــ **جبر** (نوع خاصی از حلقهٔ مرتب ارشمیدسی) است. در اینجا «اجزا»ی اطلاعاتی R، ایدآل‌های ماکسیمال هستند؛ «اجزائی» که روی آن‌ها، هر همریختی به یک میدان، مقدار صفر را اختیار می‌کند. این اجزاء، یک فضای توپولوژیک X می‌سازند و آن‌گاه R به‌عنوان حلقهٔ نگاشت‌های پیوسته از X به **میدان اعداد حقیقی** $\mathbf{R}$ مشخص می‌شود. در هر دو مورد، حلقهٔ R به‌عنوان حلقهٔ توابع پیوسته روی فضای توپولوژیک X مجدداً ساخته می‌شود، که خود X با «اجزا»ی معین R ساخته شده است. با معرفی ردهٔ $\mathbf{Shv}X$ شامل **بافه‌های روی** X که به‌عنوان جهان اشیائی توصیف می‌شود که تحت تأثیر تغییرات پیوسته روی X قرار می‌گیرند، می‌توان کارهای بیشتری ارائه کرد (مرجع [9] را ببینید). این منجر می‌شود به این‌که هر حلقهٔ بولی را می‌توان به‌وسیلهٔ حلقهٔ $\mathbf{2} = \{۰, ۱\}$ و هر C^* ــ جبر را با حلقهٔ R مشخص کرد که هر دو در $\mathbf{Shv}X$ ساخته می‌شوند.

---

1) Stone Duality

به روش دیگر، هر حلقهٔ بولی B (یا C^* ـ جبر R) را می‌توان به‌عنوان حلقهٔ $\mathbf{2}$ (یا $\mathbf{R}$) در نظر گرفت که تحت تأثیر تغییرات پیوسته روی یک فضای توپولوژیکی قرار می‌گیرند، فضایی که خود از «اجزا»ی اطلاعاتی B (C^* ـ جبر R) ساخته شده است. برای بازسازی یک حلقهٔ دلخواه (تعویض‌پذیر) R به روشی مشابه، اجزای اطلاعاتی مرتب، **ایدآل‌های اول** هستند، یعنی اجزائی از R که روی آن‌ها، هر همریختی به یک حوزهٔ صحیح، مقدار صفر را اختیار می‌کنند و این اجزاء یک فضای X را به‌وجود می‌آورند که **طیف زاریسکی** X نام دارد. در این صورت، R را می‌توان با یک **حلقهٔ موضعی** معین در $\mathbf{Shv}X$ شناسایی کرد (مرجع [۱۰] را ببینید). (حلقهٔ موضعی، تقریباً یک میدان است به این معنی که برای هر عنصر x، یا x وارون‌پذیر است یا $1 - x$: هم $\mathbf{2}$ و هم $\mathbf{R}$ حلقه‌های موضعی هستند، همان‌طور که حلقهٔ جرم‌های[1] توابع پیوستهٔ حقیقی‌مقدار در هر نقطه از یک فضای توپولوژیک نیز چنین است.) بنابراین هر حلقهٔ تعویض‌پذیر را می‌توان «تقریباً میدان» در نظر گرفت که تحت تأثیر تغییرات پیوسته روی فضایی قرار می‌گیرد که خود این فضا از اجزای اطلاعاتی آن «تقریباً میدان» ساخته شده است. برای جمع‌بندی حالت‌های فوق می‌توان نوشت:

کل $\rightarrow$ تغییرات $+$ اجزاء

مفهوم جزء در **نظریهٔ رسته‌ها** دارای یک صورت‌بندی خیلی کلی است (مرجع [7] را ببینید). شیء A را در رستهٔ $\mathcal{C}$ در نظر می‌گیریم. یک **زیرشیءِ** A یک پیکان یک‌به‌یک $\alpha : S \to A$ در $\mathcal{C}$ است. زیراشیاء A، اشیاء رستهٔ $\mathbf{Sub}(A)$ را تشکیل می‌دهند. در **رستهٔ زیراشیاء** A یک پیکان از شیء $S \overset{\alpha}{\to} A$ به شیء $T \overset{\beta}{\to} A$، یک پیکان (لزوماً یک‌به‌یک) $S \overset{f}{\to} T$ در $\mathcal{C}$ است، به‌طوری که نمودار زیر جابه‌جا می‌شود:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & T \arrow[dl, "\beta"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

در $\mathbf{Sub}(A)$ حداکثر یک پیکان بین هر دو شیء داده شده وجود دارد، بنابراین $\mathbf{Sub}(A)$ یک ردهٔ پیش‌مرتب است. یک **جزء** A، یک ردهٔ هم‌ارزی از زیراشیاء A است تحت رابطهٔ هم‌ارزی $\sim$ با تعریف $S \overset{\alpha}{\to} A \sim T \overset{\beta}{\to} A$ اگر و فقط اگر یکریختی $S \overset{i}{\to} T$ موجود باشد که نمودار زیر را جابه‌جا کند:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & T \arrow[dl, "\beta"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

1) germs

در این صورت، ردهٔ $\mathbf{Part}(A)$ از اجزاء A با رابطهٔ **شمول** $\subseteq$ مرتب جزئی است. با به‌کارگیری $\tilde{\alpha}$ برای ردهٔ هم‌ارزی زیرشیء α، رابطهٔ $\tilde{\alpha} \subseteq \tilde{\beta}$ دقیقاً زمانی برقرار است که یکریختی $S \xrightarrow{f} T$ در $\mathcal{C}$ وجود داشته باشد که نمودار $(*)$ را جابه‌جا کند.

یکی از انواع «کل $\leftrightarrow$ جزء» با اهمیت خاص در ریاضیات این ایده است که یک شیء توسط اجزایش **پوشانده** شود. برای مثال در هندسهٔ دیفرانسیل، یک خمینهٔ دیفرانسیل‌پذیر، یک فضای توپولوژیک است که به روشی مناسب با اجزاء باز که هر کدام با یک «جزء» $\mathbf{R}^n$ همسانریخت هستند، پوشانده می‌شود. در نظریهٔ مجموعه‌ها، هر مجموعه با خانوادهٔ تک عضوی‌ها پوشانده می‌شود و با این تعبیر، آن مجموعه اجتماع این خانواده می‌شود. در ریاضیات شهودی، آنجا که قانونِ شِقِ وسط به‌طور کلی پذیرفتنی نیست، تک‌ها «تباهیده» هستند (یعنی شرط «$a = b$ یا $a \neq b$» لزوماً برقرار نیست) و بنابراین یک مجموعهٔ تک‌عضوی باید به‌عنوان مجموعه‌ای که **حداکثر** شامل یک عنصر است، در نظر گرفته شود. اشیائی که از اجتماع مجموعه‌های تک‌عضوی تشکیل می‌شوند از این منظرِ جدید، نقش **مجموعه‌های تعمیم‌یافته** را بازی می‌کنند.

در مجموعه‌ها، رابطهٔ پوشش در سه شرط مشخصهٔ زیر صدق می‌کند:

۱ $-$ i) $\{U\}$، U را می‌پوشاند («هر مجموعه خودش را می‌پوشاند»).

۲ $-$ ii) اگر خانوادهٔ $\mathcal{A}$ از مجموعه‌ها U را بپوشاند و به‌علاوه $V \subseteq U$، آن‌گاه $\mathcal{A}|V = \{A \cap V : A \in \mathcal{A}\}$، V را می‌پوشاند («تحدید یک پوشش به یک «جزء»، یک پوشش است»).

۳ $-$ iii) اگر $\mathcal{A}$، U را بپوشاند و برای هر $A \in \mathcal{A}$، $\mathcal{B}_A$، A را بپوشاند، آن‌گاه $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} \mathcal{B}_A$، U را می‌پوشاند («اجتماع یک خانواده از پوشش‌ها یک پوشش است»).

گروتندیک[1] این شرایط را به رسته‌های دلخواه تعمیم داد؛ آنچه که بعدها به **توپولوژی گروتندیک** معروف شد (مرجع [9] را ببینید). این مفهوم در مبحث مجموعه‌های جزئاً مرتب، شکل شفافِ مشخصی پیدا می‌کند. فرض کنید $(P, \leq)$ یک مجموعهٔ جزئاً مرتب ثابت، امّا دلخواه باشد: حروف p, q, r, s, t را برای نمایش عناصر P به‌کار می‌بریم. گیریم S و T زیرمجموعه‌های P باشند. S را یک **تراش** T می‌نامیم و می‌نویسیم $S < T$ اگر برای هر $s \in S$ یک $t \in T$ موجود باشد به‌طوری که $s \leq t$. یک **طرح پوششی** روی P نگاشتی است چون $\mathbf{C}$ که به هر $p \in P$ خانوادهٔ $\mathbf{C}(p)$ از زیرمجموعه‌های $p \downarrow = \{q : \quad q \leq p\}$ را که $\mathbf{C}$ ـ پوشش‌های p نام دارند، نظیر می‌کند چنان‌که اگر $q \leq p$، آن‌گاه هر پوشش p را می‌توان به یک پوشش از q تراش داد، یعنی

$$S \in C(q), q \leq p \to \exists T \in C(q)[\forall t \in T \quad \exists s \in S \quad (t \leq s)].$$

این متناظر با شرط (ii) بالا است. اکنون **توپولوژی گروتندیک** روی P عبارت است از یک طرح

1) Grothendieck

پوشش $\mathbf{C}$ روی P که در شرط‌های همتا با (i) و (iii) در بالا صدق کند، یعنی $p\downarrow\in \mathbf{C}(p)$ برای هر $p\in P$ و اگر $s\in C(p)$ و برای هر $s\in S$ داشته باشیم $T_s\in \mathbf{C}(s)$، آن‌گاه $\bigcup_{s\in S} T_s\in \mathbf{C}(p)$. در هر فضای توپولوژیک T، به‌طور معمول یک مفهوم بستار وجود دارد: اگر $X\subseteq T$، آن‌گاه بستار X که با $\overline{X}$ نشان داده می‌شود کوچکترین مجموعهٔ بستهٔ شامل X است؛ یعنی کوچکترین مجموعهٔ Y شامل X، با این خاصیت که اگر هر همسایگی نقطهٔ p، مجموعهٔ Y را قطع کند، آن‌گاه $p\in Y$. عملگر بستار در **اصول معروف کوراتفسکی**[1] صدق می‌کند که عبارت‌اند از

$$X\subseteq \overline{X},\qquad \overline{X}=\overline{\overline{X}},\qquad \overline{X\cup Y}=\overline{X}\cup\overline{Y}.$$

توپولوژی‌های گروتندیک نیز نوعی عملگر بستار روی غربال‌ها (به‌جای زیرمجموعه‌های دلخواه) به‌دست می‌دهند: یک غربال در مجموعهٔ جزئاً مرتب $(P,\le)$ عبارت است از زیرمجموعهٔ S از P که $\ge$ ـ پایاست، یعنی اگر $p\in S$ و $p\ge q$، آن‌گاه $q\in S$. به این ترتیب، فرض کنید توپولوژی گروتندیکِ C روی مجموعهٔ جزئاً مرتبِ $(P,\le)$ داده شده است. نماد $\mathcal{S}(P)$ بیانگر مجموعهٔ همهٔ غربال‌ها در P است. اگر غربال I شامل یک **پوشش** از عنصر $p\in P$ باشد، گوییم I عنصر p را می‌پوشاند. اگر غربال I شامل تمام عناصری از P باشد که آن‌ها را می‌پوشاند، گوییم I، $\mathbf{C}$ ـ **بسته** است، یعنی

$$\exists S\in C(p)(S\subseteq I)\Rightarrow p\in I.$$

به‌سادگی دیده می‌شود که اشتراک یک خانوادهٔ دلخواه از غربال‌های C ـ بسته، یک غربال C ـ بسته است، بنابراین برای هر غربال I در P کوچکترین غربال C ـ بستهٔ شامل I وجود دارد که با $\widetilde{I}$ نشان داده می‌شود و آن را $\mathbf{C}$ ـ **بستار** I می‌نامیم. عملگر C ـ بستار در دو شرط کوراتفسکی ذکر شده در قبل صدق می‌کند؛ یکی $I\subseteq\widetilde{I}$ و دیگری $\widetilde{I}=\widetilde{\widetilde{I}}$. اما به‌جای پخش‌شدن روی اجتماع، دارای خاصیت پخشی روی **اشتراک** است: $\widetilde{I\cap J}=\widetilde{I}\cap\widetilde{J}$. گرچه مهم نیست، امّا بد نیست اشاره شود که ویژگی‌های مشخصهٔ عملگر بستارِ که به‌واسطهٔ مفهوم **پوشش** به‌دست می‌آیند، در حدود نیم قرن بعد از آن کشف شدند که این ویژگی‌ها از مفهوم **همسایگی** به‌دست آمدند.

سرانجام نگاهی به ایدهٔ **مشبکه** از اجزاء می‌اندازیم. فضا یا کلِ S داده شده است، انتظار می‌رود که اجزاء مناسبی از S تحت رابطهٔ شمول، $\subseteq$، **مشبکهٔ** L را تشکیل دهند، یعنی برای هر دو جزء U و V از S اجزاء $U\sqcup V$ و $U\sqcap V$ موجود باشند (این اجزاء به **وست** و **رسند** U و V معروف هستند) که به‌ترتیب $\subseteq$ ـ کوچکترین و $\subseteq$ ـ بزرگترین اجزاء S شامل U و V و مشمول آن‌ها هستند. فرض کنیم $\varnothing$ و S به‌ترتیب کوچکترین و بزرگترین «اجزاء» S باشند. همچنین برای هر جزء U جزء U^* موجود باشد به‌طوری که $U\sqcap U^*=\varnothing$. U^* آن جزء از S است که «خارج» U است. به‌علاوه فرض کنیم که عملگر «$*$» شمول‌برگردان است: اگر $U\subseteq V$، آن‌گاه $V^*\subseteq U^*$. ساختار $\mathbf{S}=(S,L)$ را یک فضای «جزئی↔کلی» می‌نامیم که در آن، S کل است و اعضای L اجزای $\mathbf{S}$ هستند.

---

1) Kuratowski axioms

اکنون فرض کنیم که **صفات کیفی** ابتدایی A و B («قرمز»، «سخت» و غیره) داده شده باشند و اجزاء $\mathbf{S}$ بتوانند این صفات را بپذیرند. به هر جزء U خانوادهٔ $\mathbf{A}(U)$ از صفات کیفی‌ای که آن جزء می‌تواند بپذیرد، نسبت داده می‌شود: فرض کنیم که رابطهٔ پذیرش صفات ابتدایی، موروثی باشد به این معنی که اگر $U \subseteq V$، آن‌گاه $\mathbf{A}(V) \subseteq \mathbf{A}(U)$. رابطهٔ «پذیرش» صفات ابتدایی به صفات مرکب φ به‌صورت زیر توسیع می‌یابد: اگر «U صفت مرکب φ را بپذیرد» می‌نویسیم $\varphi \Vdash U$:

$A \Vdash U$ اگر و تنها اگر $A \in \mathbf{A}(U)$ برای هر صفت اولیهٔ A؛

$\varphi \wedge \psi \Vdash U$ اگر و تنها اگر $\varphi \Vdash U$ و $\psi \Vdash U$؛

چنانچه $U = V \sqcup W$، $\varphi \vee \psi \Vdash U$ اگر و تنها اگر $\varphi \Vdash V$ و $\psi \Vdash W$؛

$\sim\varphi \Vdash U$ اگر و تنها اگر از $\varphi \Vdash V$ نتیجه شود که $V \subseteq U^*$ برای هر V.

صفت φ در $\mathbf{S}$ **پایاست** اگر برای همه اجزاء U و V گزاره زیر برقرار باشد:

$$U \Vdash \varphi, V \subseteq U \rightarrow \vee \Vdash \varphi.$$

پایایی صفات دلخواه در $\mathbf{S}$، با **توزیع پذیری** L، یعنی برقراری قانون

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

تضمین می‌شود. هرگاه متناظر با هر جزء U یک صفت کیفی A_U موجود باشد به‌طوری که برای هر جزء X داشته باشیم $X \Vdash A_U \Leftrightarrow X \subseteq U$، این دو شرط معادل هستند. اگر رابطهٔ $\Vdash$ را به‌عنوان نوعی رابطهٔ **پوششی** بین اجزاء و صفات تصور کنیم، ($U \Vdash \varphi$ به این معنا باشد که φ، U را می‌پوشاند) آن‌گاه به پایایی صفات کیفی دلخواه در $\mathbf{S}$ می‌توان به‌عنوان برقراری فرض دوم توپولوژی گروتندیک نگریست: تحدید یک پوشش، خود یک پوشش است.

در ارتباط با **ساختارهای تقرب**، فضاهای طبیعیِ «جزء $\leftrightarrow$ کل»ی مانند $\mathbf{S}$ پدید می‌آیند که در آن‌ها صفات کیفی معین φ پایا نیستند: در حقیقت ممکن است φ توسط «کل»ِ فضا در برگرفته شود، اما نه با اجزاء مشخص! در این حالت، صفات کیفی «کل» **به تمام اجزایش بازتاب داده نمی‌شوند.**

یک ساختارِ **تقرب**، مجموعه‌ای مانند S است که به یک رابطهٔ دوتاییِ متقارنِ بازتابی $\simeq$ مجهز شده باشد. برای هر $x \in S$، **حباب** در x را که با B_x نشان می‌دهیم، چنین تعریف می‌کنیم:

$$B_x = \{y \in S : x \simeq y\}.$$

هر اجتماعی از حباب‌ها را یک جزء S می‌نامیم. یک فضای «جزء $\leftrightarrow$ کل » $(S, \mathbf{Part}(S))$ فضای تقرب نامیده می‌شود در صورتی که در آن، عملگر وست همان اجتماع مجموعه‌ها و رسند دو جزء از S، اجتماع تمام حباب‌های مشمولِ اشتراکِ آن دو جزء باشد و برای $U \in \mathbf{Part}(S)$ داشته باشیم

$$U^* = \{y \in S : y \not\simeq x, \forall x \in U\}.$$

این بحث را با یک مثال ساده از یک فضای تقرب **ناپایا** به پایان می‌بریم. فرض کنیم S دایرهٔ یکه و حباب در هر نقطهٔ $x \in S$ ربع دایره‌ای باشد که x روی آن قرار دارد. اکنون با قرمز کردن ربع اول و سوم و سیاه کردن ربع دوم و چهارم، صفات **red** و **black** را به «اجزاء» S نسبت می‌دهیم. بنابراین S دارای صفت $\mathbf{red} \vee \mathbf{black}$ است. از طرف دیگر اگر U یکی از نیم‌دایره‌هایی باشد که توسط قطری از دایره که نیم‌ساز ربع اول و سوم است تشکیل می‌شود، آن‌گاه آشکارا U دارای $\mathbf{red} \vee \mathbf{black}$ نیست، زیرا نمی‌تواند به دو «جزء» تجزیه شود که به‌ترتیب دارای صفات **red** و **black** باشند. استدلال مشابهی نشان می‌دهد که S دارای صفت $\mathbf{red} \vee \neg\mathbf{red}$ است امّا U این صفت را ندارد. از طرف دیگر، U صفت $\neg\neg(\mathbf{red} \vee \mathbf{black})$ را دارد، زیرا می‌توان نشان داد که برای هر جزء U از یک فضای تقرب و هر صفت φ داریم

$$U \Vdash \neg\neg\varphi \leftrightarrow \exists V \supseteq V, V \Vdash \varphi.$$

به بیان دیگر، در یک فضای تقرب، یک «جزء» U نقیضِ نقیضِ یک صفت را داراست، دقیقاً هنگامی که U خود جزئی از یک جزء بزرگتر واجد این صفت باشد. بنابراین در حالی که یک صفت دلخواه ممکن است پایا نباشد، نقیضِ نقیضِ آن همیشه پایاست.

مراجع

[1] Bell, J. L. and Machover, M., *A Course in mathematical logic*, North-Holland, Amsterdam, Netherlands, 1977.

[2] Bell, J. L. and Slomson, A. B., *Models and ultraprodicts: An introduction*, North-Holland, Amesterdam, Netherlands, 1969.

[3] Bourbaki, N., *Eliements of mathematics: algebra II*, Springer-Verlag, New York, N. Y., 1990.

[4] Edwards, R. E., *Functional analysis*, Holt, Rinehart, and Winston, New York, N. Y., 1965.

[5] Gillman, L. and Jerison, M., *Rings of continuous functions*, Van Nostrand, New York, N. Y., 1960.

[6] Johnstone, P. T., *Stone spaces*, Cambridge University Press, Cambridge, U. K., 1982.

[7] Lawvere, F. W. and Schanuel, S., *Conceptual mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, U. K., 1997.

[8] Loomis, L. H., *Abstract harmonic analysis*, Van Nostrand, New York, N. Y., 1953.

[9] Mac Lane, S. and Moerdijk, I., *Sheaves in geometry and logic*, Springer-Verlag, New York, N. Y., 1992.

[10] Mulvey, C. J., "Representations of rings and modules", *Applications of Sheaves*, M. P. Fouman, C. J. Mulvey and S. S. Scott (eds.), Lecture Notes in Mathematics **753**, 542–585.

[11] Robinson, A., *Non-standard analysis*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1996.

[12] Spivak, M., *Differential geometry*, Publish or Perish Press, Waltham, M. A., 1979.

مترجمین: امید غیور ghayour@scu.ac.ir

رستم محمدیان mohamadian@scu.ac.ir

مهرداد نامداری، namdari@ipm.ir

دانشکده ریاضی، دانشگاه شهید چمران، اهواز

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۲ (بهار ۱۳۹۲) صص. ۱۳ تا ۳۵

انتگرال: از ارشمیدس تا لبگ (قسمت اول)

سعید مقصودی

چکیده

در این مقاله، شرحی تاریخی ــ توصیفی از شکل‌گیری و تکامل مفهوم انتگرال از ابتدا تا زمان لبگ ارائه می‌کنیم. همچنین با تمرکز بر روی برخی جنبه‌های خاص نظریه‌های انتگرال ریمان و لبگ و با ارائه مثال‌هایی، به برخی کاستی‌های این دو نظریهٔ انتگرال‌گیری اشاره خواهیم کرد.

۱. مقدمه

نظریهٔ انتگرال‌گیری محصول قرن‌ها پالایش و گسترش مفهوم مساحت است. در دوره‌ای، انتگرال را فرآیند معکوس مشتق‌گیری و در دوره‌ای دیگر، آن را فرآیندی برای جمع‌زدن‌های بی‌پایان در نظر می‌گرفتند. اما در حال حاضر، چنین دیدگاه‌های یگانه‌ای در خصوص نظریهٔ انتگرال کمتر به چشم می‌خورد، زیرا ریاضیات در زمانهٔ ما با آهنگ شتابانی در حال رشد است.

در این مقاله، قصد داریم گزارشی تاریخی ــ توصیفی از شکل‌گیری مفهوم انتگرال تا اوایل قرن بیستم ارائه کنیم. در بخش دوم، شرح مختصری از مفهوم انتگرال از زمان ارشمیدس تا ابداع حسابان به‌دست نیوتن و لایب‌نیتس آورده‌ایم. در بخش سوم، به بررسی شکل‌گیری و تکامل انتگرال‌گیری از زمان ابداع حسابان تا قبل از عصر دقت در آنالیز که در آن انتگرال به‌مفهوم جدید تعریف می‌شود، می‌پردازیم. در این بخش، از مراجع [۳] و [۷] سود برده‌ایم. در بخش‌های چهارم، پنجم و ششم، تکامل انتگرال به‌مفهوم جدید آن را بررسی کرده‌ایم. در این باره، دو کتاب خواندنی [۹] و [۱۰] بسیار راهگشا هستند. در بخش پایانی، به بررسیِ چگونگی شکل‌گیری انتگرال لبگ پرداخته‌ایم. برخی قضایای انتگرال ریمان و لبگ را به‌طور رسمی و البته بدون اثبات به‌منظور مقایسه ذکر کرده‌ایم. برای اثبات آن‌ها می‌توان به هر کتاب استاندارد آنالیز حقیقی رجوع کرد؛ دو کتاب [۶] و [۱۵] در این زمینه، بسیار مفیدند. با آوردن مثال‌هایی به کاستی‌های دو نظریهٔ فوق اشاره کرده‌ایم. این کاستی‌ها انگیزهٔ معرفی نظریه‌های انتگرال‌گیری دیگری بوده‌اند. برای بررسی برخی از این

نظریه‌ها، [۱۷] را ببینید. همچنین، برای مطالعهٔ یک بررسی تقریباً همه‌جانبه و متقن از تاریخ و نظریه‌های انتگرال تا اواخر قرن بیستم، از نگاه یک آنالیزدان حرفه‌ای، به [۱۴] مراجعه کنید. [۱۳] نیز توصیف مختصری از عمدهٔ نظریه‌های انتگرال تا اوایل قرن بیستم در اختیار می‌گذارد.

مشاهدهٔ زنجیروار شکل‌گیری و تحول مفهوم انتگرال بسیار جالب و آموزنده است. هم از این بابت که نشان می‌دهد مفهومی به آشنایی مفهوم انتگرال مدت زمان زیادی طول کشیده تا به‌شکل امروزین آن درآید و هم از این نظر که نشان می‌دهد ترتیب تحول برخی مفاهیم ریاضی، خلاف ترتیب آموزشی رایج آن‌ها است.

۲. مفهوم انتگرال از زمان یونانیان تا نیوتن

بررسی چگونگی شکل‌گیری مفهوم انتگرال از زمان یونانیان تا ابداع حسابان به‌دست نیوتن و لایب‌نیتس، بسیار جالب و آموزنده است و نیازمند بحث مفصل و جداگانه‌ای است. در این بخش، به مهم‌ترین جنبه‌های آن اشاره خواهیم کرد. برای بحث کامل‌تر می‌توانید [۱،۳،۴،۵،۸،۱۰] را ملاحظه کنید. همچنین، در [۱۱] حساب دیفرانسیل و انتگرال از جنبهٔ تاریخی با نگاه آموزشی، مورد بررسی قرار گرفته است.

قدیمی‌ترین مسألهٔ آنالیز محاسبهٔ طول خم‌ها، مساحت سطوح و حجم‌ها بوده است. نزد یونانیان باستان مفهوم مساحت کاملاً شناخته شده بود و آن‌ها موفقیت‌های قابل توجهی نیز در محاسبهٔ مساحت برخی شکل‌های هندسی به‌دست آورده بودند. تا سال ۵۰۰ قبل از میلاد مسیح، هندسه‌دانان یونانی قادر بودند مساحت نواحی که محدود به خطوط مستقیم هستند یا به‌اصطلاح چندضلعی‌ها را محاسبه کنند. در ریاضیات یونانی، مساحت یک شکل زمانی معنی‌دار بود که به‌طور هندسی (یعنی با برخی وسایل هندسی ساده مانند خط‌کش و پرگار) بتوان مربعی هم‌مساحت با آن شکل ساخت؛ مفهوم «تربیع» نیز از همین‌جا نشأت گرفته است.

یونانیان در مواردی که تعیین کمیتی غیرممکن بود یا چگونگی تعیین آن از طریق ساختار هندسی شناخته شده نبود، از تقریب استفاده می‌کردند. مثلاً تربیع دایره را که در پاپیروس رایند مصر در حدود ۱۸۰۰ قبل از میلاد مطالعه شده بود، درنظر بگیرید. در اینجا دایره‌ای به شعاع r در مربعی با طول ضلع d محاط شده بود و این مربع نیز به نُه مربع مساوی تقسیم و مربع‌های کناری به‌وسیلهٔ قطرشان نصف شده بودند. از این‌رو، مساحت مربع بریده‌شده، A، برابر مجموع مساحت‌های هفت زیرمربع است و لذا $A = (۱ - \frac{۲}{۹})d^۲$. مقدار A را می‌توان تقریب ساده‌ای برای مساحت دایره در نظر گرفت. مصریان باستان مقدار $(\frac{۸}{۹})d^۲$ را برای تقریب A به‌دست آورده بودند و به همین دلیل می‌توان گفت آن‌ها تقریب $\pi = (\frac{۱۶}{۹})^۲ = ۳/۱۶۰$ را به‌کار می‌بردند.

سوفیست‌ها اولین ریاضیدانان یونانی بودند که مسألهٔ محاسبهٔ مساحت دایره را مطرح کردند. معروف است که مسألهٔ تربیع دایره را آناگساگوراس زمانی که در زندان بود مطرح کرد. هیپوکرات

مسألهٔ هلال‌ها را در قرن پنجم قبل از میلاد مطرح کرد و راه‌حل او جزء اولین دست‌نوشته‌های یونانیان در ریاضیات است. محاسبهٔ این مساحت‌ها گرچه به روش غیردقیق انجام می‌پذیرفت، یونانیان را به تربیع دایره برانگیخت، زیرا نشان می‌داد که محاسبهٔ چنین مساحت‌هایی امکان‌پذیر است.

در قرن پنجم قبل از میلاد، آنتیفون سوفیست مسألهٔ تربیع دایره را بررسی کرد. او چندضلعی‌های منتظم بر دایره محاط کرد و دایره را تحلیل‌رفتهٔ چندضلعی‌ها در نظر گرفت به شرطی که تعداد رأس‌های چندضلعی به قدر کافی زیاد باشد. ضلع‌های کوچک چنین چندضلعی‌هایی را با قطعات کوچک از کمان‌ها یکی در نظر گرفت و ادعا کرد که با تقسیم‌های به قدر کافی زیاد و در عین‌حال متناهی از ضلع‌ها، می‌توان کمان‌های به‌دلخواه کوچک تولید کرد (وی این کار را بدون ارجاع به مفهوم حد انجام می‌دهد).

ریاضیدانانِ دیگر، روش فوق را تعمیم و دقت بیشتر بخشیدند. با ملاحظهٔ این مطالب، ائودوکسوس (۴۰۰ ــ ۳۴۷ ق. م.) روش افنا را ابداع می‌کند. روش افنا که عمدهٔ محاسبات حجم و مساحت بر آن استوار بوده است، اساساً روشی برای فرار از فرآیند حدگیری است؛ برای بررسی پیش‌زمینه‌های آن، [۱۶] را ببینید. روش افنا دو گام دارد. در گام اول اندازهٔ مفروض A با اندازهٔ دیگری مانند B که راحت به‌دست می‌آید تقریب زده می‌شود. در گام دوم نشان داده می‌شود که نه $A < B$ و نه $B < A$ نمی‌تواند درست باشند و سپس با برهان خلف دوگانه نتیجه می‌شود که $A = B$. توجه می‌کنیم که این روش ابداً یک روش حدی نیست. روش افنا دنباله‌های نامتناهی را به‌کار نمی‌برد. بلکه پس از تعداد متناهی مرحله متوقف می‌شود و باقیمانده که به‌دلخواه کوچک است (و مقدار صرف‌نظرشدنی تلقی نمی‌شود) در برهان خلف به‌کار گرفته می‌شود. بدین معنی واژهٔ «افنا» گمراه کننده است، زیرا منظور از این روش را به‌طور کامل آشکار نمی‌سازد؛ واژهٔ «کنار گذاشتن» یا «استثنا کردن» بهتر است.

ارشمیدس (۲۸۷ ــ ۲۱۲ ق. م.) در رسالهٔ کوچکی با عنوان «در باب اندازه‌گیری دایره» نشان می‌دهد که مساحت دایره برابر با مساحت مثلث معینی است. وی برای این منظور، روش مقایسه با ۹۶ضلعی منتظم محاطی و محیطی را به‌کار می‌برد و با نمادهای امروزی نشان می‌دهد که $۳\frac{۱۰}{۷۱} < \pi < ۳\frac{۱}{۷}$. ارشمیدس در سال ۲۸۰ پیش از میلاد محیط دایره، مساحت دایره، مساحت قطعه‌ای از سهمی، مارپیچ ارشمیدسی و حجم کره، حجم قطعه‌ای از کره و برخی سطوح را محاسبه کرده است. او همچنین مماس بر مخروطی‌ها و مارپیچ را نیز بررسی کرده است (گرچه مفهوم مماس به‌صورت حد خطوط قاطع تنها از قرن ۱۷ به‌بعد مطرح شد). برای مثال، برای محاسبهٔ مساحت قطعه‌ای از سهمی، با محاط کردن مثلثی در زیر آن ناحیه و استفاده از روش افنا مقدار دقیق را به‌دست می‌آورد.

گرچه ارشمیدس مفهوم حد را به‌کار نمی‌برد و با استفاده از چندضلعی‌های محاطی و محیطی و روش افنا، مساحت و حجم را محاسبه می‌کند، نباید تصور کرد که روش وی همان و یا شبیه نظریهٔ انتگرال ریمان است. اولاً ارشمیدس مساحت و حجم را در چارچوب هندسهٔ اقلیدسی می‌فهمید و

به‌کار می‌برد. ثانیاً این روش را بدون توجه به این‌که آیا نتیجه به یک روش معینی وابسته است یا نه، به‌کار می‌گرفت. علاوه بر این، ارشمیدس علاقه‌ای به پروراندن یک روند کلی نشان نمی‌داد، بلکه برای هر مسألهٔ جدید، یک رویکرد (هندسی) مناسب را جستجو می‌کرد. در برخی موارد حتی برای مسأله‌های مشابه روش‌های کاملاً متفاوتی را برمی‌گزید. در عین‌حال نتایج ارشمیدس نقاط بسیار برجسته‌ای از تاریخ ریاضیات هستند. ریاضیدانان اسلامی از جمله ابن‌هیثم (۱۰۳۸ ـ ۹۶۵ م.) و ثابت بن قرّه (۹۰۱ ـ ۸۳۶ م.) در قرن ۱۰ میلادی با به‌کار بردن روش افنا، حجم برخی اجسام دورانی را محاسبه کرده‌اند [۱۴].

در قرن چهاردهم میلادی، بعد از گذشت عصر تاریکی و شروع دورهٔ رنسانس در اروپا، شاهد ورود مفاهیم بی‌نهایت، شتاب و تغییرات لحظه‌ای (عمدتاً وابسته به حرکت) و استفاده از نمودار در بررسی این مفاهیم هستیم. همچنین در این دوره مفهوم عدد، دیگر فقط یک مفهوم هندسی نیست بلکه مفهومی کمّی نیز پیدا می‌کند. توصیف کمی حرکت، عمده‌ترین علت علاقه‌مندی ریاضیدانان به مسائل وابسته به مشتق و انتگرال‌گیری بوده است: محاسبهٔ مسافت طی‌شده توسط متحرک در فاصلهٔ زمانی مشخص، سرعت لحظه‌ای، شتاب و ارتباط این سه با یکدیگر. مسألهٔ مماس و قائم در دیگر قسمت‌های فیزیک ظاهر می‌شود. برای مثال عبور نور از یک عدسی نیاز به محاسبهٔ قائم بر سطح عدسی دارد و به‌وضوح این مسأله، الهام‌بخش دکارت در ساختن خط قائمه بوده است. همچنین در مطالعهٔ ذرهٔ متحرک روی یک مسیر که مسأله‌ای معمول در مکانیک سماوی است، مماس بر مسیر جهت، سرعت را نشان می‌دهد. به‌علاوه روش‌های یافتن مماس و قائم، کلید حل مسائل مربوط به یافتن ماکسیمم و مینیمم در فیزیک، نجوم و ریاضیات بود. مسائل وابسته به طول خم، مساحت بین خم‌ها، حجم و مرکز ثقل اجسام در همه جا بروز و ظهور داشتند. کپلر و کاوالیری از جملهٔ اولین ریاضیدانانی بودند که سعی در یافتن روش‌هایی برای تحلیل این مسائل داشتند. برخی روش‌ها برای این مسائل از زمان ارشمیدس شناخته شده بود، اما مشخص نبود که این روش‌ها را چگونه یافته است و نیاز به یک روش داهیانه احساس می‌شد.

در قرن پانزدهم میلادی، مفاهیم تقسیم‌ناپذیرها و بی‌نهایت‌کوچک‌ها وارد ریاضیات می‌شوند؛ گرچه هیچ پایهٔ منطقی برای آن‌ها وجود ندارد و دارای تناقضات بی‌شماری هستند. در قرن شانزدهم میلادی، پیشرفت‌هایی در جبر اتفاق می‌افتد. نمادگرایی جبری و نمایش اعداد با حروف رواج پیدا می‌کند. تلاش‌هایی برای نزدیک کردن روش ارشمیدس در محاسبهٔ حجم و مساحت و بی‌نهایت‌کوچک‌ها انجام می‌شود. تلاش‌هایی برای یافتن روش‌های جایگزینی برای روش افنا و استدلال برهان خلف دوسویه صورت می‌گیرد. در اوایل قرن هفدهم میلادی، کپلر (۱۶۳۰ ـ ۱۵۷۱) کتابی دربارهٔ محاسبهٔ حجم برخی اشکال تألیف می‌کند. او کره را متشکل از بی‌نهایت مخروط در نظر می‌گیرد و از روش بی‌نهایت‌کوچک‌ها استفاده می‌کند. کاوالیری (۱۶۴۷ ـ ۱۵۹۸) نیز در سال ۱۶۳۵ به محاسبهٔ حجم و مساحت برخی اشکال و اجسام می‌پردازد و نتایج کلی در این باب به‌دست می‌آورد. او سطح را متشکل از تعداد بی‌نهایت خط موازی و حجم

را متشکل از بی‌نهایت صفحهٔ هم‌فاصله درنظر می‌گیرد و این اجزاء را تقسیم‌ناپذیرها می‌نامد. او قادر به محاسبهٔ چیزی می‌شود که امروزه با فرمول $\int_{0}^{a} x^n \, dx = (a+1)/(n+1)$ بیان می‌شود. محاسبه را برای $n \leq 9$ انجام می‌دهد و فرمول بالا را برای هر n، درست می‌داند. اثبات این حدس توجه ریاضیدانان بسیاری از جمله روبروال، فرما، والیس و پاسکال را بین سال‌های ۱٦۳٦ تا ۱٦۵۵ جلب کرد. آنالیز بی‌نهایت‌کوچک‌ها، در واقع با کتابی که کاوالیری نوشت آغاز شد. قضیهٔ فوق شاید اولین قضیه در آنالیز بی‌نهایت‌کوچک‌ها باشد. تأثیر اندیشه‌های کاوالیری در کار نیوتن و لایب‌نیتس مشهود است.

در دههٔ ۱٦۳۰ میلادی فرما (۱٦٦۵ ـــ ۱٦۰۱) و دکارت (۱٦۵۰ ـــ ۱۵۹٦) روشی ارائه می‌دهند که به‌وسیلهٔ آن مسائل هندسی به مسائل جبری تبدیل می‌شوند. تمامی روش‌های این دوره به‌نوعی خصلت هندسی داشتند. خطوط، سطوح و حجم‌ها بی‌نهایت‌کوچک در نظر گرفته می‌شدند. اما اعداد بی‌نهایت کوچک معنی محصّلی نداشتند. این عقیده نیز متأثر از فلسفهٔ ارسطو بود که عدد را مجموعه‌ای از واحدها می‌دانست.

با رواج جبر و هندسهٔ تحلیلی، این نگرش تغییر کرد. فرما نوعی بی‌نهایت‌کوچک عددی را وارد بحث کرد و با استفاده از آن، توانست ماکسیمم و مینیمم را محاسبه کند. همچنین فرمول $\int_{0}^{a} x^n \, dx = (a+1)/(n+1)$ را ثابت کرد. فرما با درنظر گرفتن مستطیل‌هایی در زیر منحنی که عرض آن‌ها متوالیاً کوچک و کوچکتر می‌شوند، با محاسبهٔ مجموع یک سری، فرمول مذکور را اثبات کرد. او مسأله را برای عدد گویای n مطرح و حل کرد. نباید تصور کرد که فرما با روشی که در اثبات فرمول بالا به‌کار می‌برد به انتگرال معین نزدیک می‌شود، زیرا او خودِ فرآیند انتگرال‌گیری را اصلاً مورد توجه قرار نمی‌دهد و آن را تنها روشی برای حل یک مسألهٔ هندسی خاص می‌داند.

۳. مفهوم انتگرال در زمان نیوتن و لایب‌نیتس

در خلال سال‌های ۱٦٦۰ تا ۱٦۸۰، آیزاک نیوتون (۱۷۲۱ ـــ ۱٦۴۳) و گوتفرید ویلهلم لایب‌نیتس (۱۷۱٦ ـــ ۱٦۴٦) آنچه را امروزه حسابان بی‌نهایت‌کوچک‌ها می‌نامیم ابداع کردند. مسلماً کار آن‌ها عناصری از ریاضیاتِ پیش از آن‌ها را به انضمام مفاهیم خاصی که خود آن‌ها افزودند و در ریاضیات امروز رایج است، در بر داشت. نیوتن و لایب‌نیتس تنها کسانی بودند که فرآیند مورد استفاده در بی‌نهایت‌کوچک‌ها را مستقل از تعبیرات فیزیکی و هندسی وابسته به آن، به منزلهٔ یک رویکرد و تکنیک تشخیص دادند و نام خاص بر آن نهادند. گرچه فرما بی‌نهایت‌کوچک‌ها را به‌صورت هندسی و تحلیلی برای حل دستهٔ وسیعی از مسائل به‌کار برد، او نیز همانند پاسکال و دیگران ارتباط اساسی بین مسأله‌های مساحت و مماس را درنیافت. وی تا حدودی به این حدس که رابطه‌ای عکس بین این دو مسأله وجود دارد، نزدیک شد ولی این حدس را هیچ‌گاه دنبال نکرد. او می‌پنداشت این شیوهٔ حل مسأله، روشی نو و مستقل نیست و محدود به همان مسائل است. اما نیوتن و لایب‌نیتس عمومی بودن این فرآیند را به‌درستی تشخیص دادند. به هر حال، زمان

آن رسیده بود که در نیمهٔ دوم قرن هفدهم میلادی کسی دیدگاه‌ها و روش‌های موجود در آنالیز بی‌نهایت‌کوچک‌ها را یکدست کند و روش مشخص و یکپارچه‌ای ارائه دهد.

نوآوری نیوتون و لایب‌نیتس سه جنبه دارد: تقلیل مسأله، محاسبهٔ مساحت از طریق معکوس کردن فرآیند محاسبهٔ مماس، ابداع یک روش و الگوریتم. نیوتون و لایب‌نیتس تنها کسانی بودند که دریافتند مسأله‌های محاسبهٔ مرکز ثقل، محاسبهٔ حجم، مماس، طول خم، شعاع خمیدگی و غیره که مشغلهٔ اصلی ریاضیدانان در نیمهٔ اول قرن هفدهم بود، در واقع حالت‌هایی از دو مسألهٔ اصلی هستند. به‌علاوه، آن‌ها دریافتند که این مسأله‌ها نیز عکس یکدیگرند و حل یکی که شاید ساده‌تر نیز باشد، پاسخ مسألهٔ دیگر خواهد بود. همچنین آن‌ها یک الگوریتم کارآمد فراهم کردند که می‌توانست به‌صورتی روشمند و کلی برای حل مسائل به‌کار گرفته شود. گرچه روش و الگوریتم ابداعی آن‌ها شبیه آن چیزی است که ما امروزه به‌کار می‌بریم، باید توجه کرد که آنان نیز در بستر زمان خود می‌زیستند. به‌عبارت دیگر، مفهوم تابع برای آن‌ها شناخته‌شده نبود و آن‌ها از «کمیت‌ها» صحبت می‌کردند و نه از «تابع»، و در بحث از میزان تغییرات، تفاضل این کمیت‌ها را به موجودات هندسی مشخصی (مثل خم) نسبت می‌دادند. خط اعداد حقیقی نزد آنان مفهوم هندسی و سینماتیکی بود. مفهوم حدی که آن‌ها از آن صحبت می‌کردند نیز بر پایهٔ شهود هندسی و سینماتیک بود. پاره‌ای از کارهای نیوتن و لایب‌نیتس اشاره به این مطلب دارند که برای این دو نیز اندیشیدن دربارهٔ حد با دید عددی، بسیار مشکل بوده است.

اکنون اجازه دهید به برخی از نکات عمدهٔ روش آن‌ها اشاره کنیم. برخی از مهم‌ترین اکتشافات علمی نیوتون در خلال سال‌های ۱٦٦۵ تا ۱٦٦۷ که دانشگاه کمبریج تعطیل بود، اتفاق افتاد. به‌نظر می‌رسد علاقهٔ نیوتون به ریاضیات از سال ۱٦٦۴ با مطالعهٔ آثار فرانسوا ویت، دکارت و والیس شروع شد. او با مطالعهٔ این آثار که می‌توان از آن‌ها به «آنالیز جدید» تعبیر کرد، با اکتشافات بدیع در هندسهٔ تحلیلی، جبر، مسألهٔ مماس، تربیع و سری‌ها آشنا شد. با استفاده از برخی نتایج والیس و محاسبهٔ مساحت زیر خم و به‌ویژه خم $y = x^n$ به رابطهٔ مربوط به بسط دوجمله‌ای دست یافت. توجه کنیم که نماد توان‌های کسری و منفی که والیس پیشنهاد کرده بود در اینجا نقش مهمی داشتند. از سوی دیگر، نزد نیوتون (برخلاف دکارت) خم‌ها فقط با معادلات جبری متناهی توصیف نمی‌شدند، بلکه سری‌های بی‌پایان نیز می‌توانستند چنین کنند.

اولین رسالهٔ منسجم نیوتون در ریاضیات، De analysi per aequationes numero terminoruum infinitas نام داشت. این رساله عمدتاً به بسط سری‌ها و کاربرد آن‌ها در حل مسألهٔ مساحت می‌پردازد. وی در آنجا با سه قاعده برای محاسبهٔ مساحت شروع می‌کند. مثلاً یکی از آن‌ها مربوط به تابع $y = ax^{\frac{m}{n}}$ است.

یکی از کلی‌ترین نتایج در باب تربیع منحنی‌ها (یا همان انتگرال‌گیری) قضیهٔ بنیادی حسابان است که نیوتون آن را در سال ۱٦٦۵ کشف کرد. وی این مطلب را برای خم‌های خاص به روش هندسی و استفاده از بی‌نهایت‌کوچک‌ها اثبات می‌کند ولی روش او کاملاً کلی است. به کمک قضیهٔ

بنیادی، نیوتون توانست به‌جای مسأله تربیع، به دنبال به‌اصطلاح امروزی، توابع اولیه بگردد.

نیوتون در کتاب «De methodis serierum et fluxionum» که در ۷۱ ـ ۱٦۷۰ منتشر شد، به بررسی کاربرد الگوریتمی می‌پردازد که در سال‌های ٦٦ ـ ۱٦٦۵ ابداع کرده بود. این الگوریتم برای کمیت‌هایی که به زمان بستگی دارند به‌کار گرفته می‌شد. مثلاً حرکت یک ذره، یک خط و حرکت خط، یک سطح تولید می‌کند. کمیت‌هایی که با یک «جریان» تولید می‌شوند را «فلوئنت» نامید و سرعت لحظه‌ای آن‌ها را «فلوکسیون». «اندازهٔ حرکت» کمیت‌های فلوئنت، افزایش بسیار کوچکی هستند که طی مدت زمان بی‌نهایت کوچکی در این کمیت‌ها رخ می‌دهند. مثلاً نقطه‌ای را که با سرعت متغیر روی یک خط راست جریان دارد در نظر بگیرید. مسافت طی‌شده در زمان t فلوئنت، سرعت لحظه‌ای فلوکسیون و تغییر بی‌نهایت کوچکی که بعد از مدت زمان بی‌اندازه کوچکی حاصل می‌شود، همان اندازه حرکت است. نیوتون نمادهای خاصی برای این کمیت‌ها وضع نکرد. حتی برای مساحت زیر منحنی نیز که لایب‌نیتس با همان نماد انتگرال امروزی نشان می‌دهد، نماد یکسانی به‌کار نمی‌برد. او در De methodis حل یک سری مسائل را عرضه می‌کند که مهم‌ترین آن‌ها یافتن ماکسیمم و مینیمم، مماس، خمیدگی، مساحت و طول خم است. حال که کمیت‌ها می‌توانند توسط یک جریان پیوسته تولید شوند، مسائل مذکور را به دو مسأله تقلیل می‌دهد:

۱) طول پیموده‌شده در زمان، داده شده است. سرعت لحظه‌ای را بیابید.

۲) سرعت حرکت داده شده است. مسافت پیموده‌شده را بیابید.

و نیوتون برای هر دو مسأله الگوریتم‌هایی عرضه می‌کند.

در خلال سال‌های ۱٦۷۱ تا ۱۷۰۴، نیوتون حسابان فلوکسین‌ها را رها می‌کند و به هندسهٔ فلوکسین‌ها که در آن کمیت‌های بی‌نهایت‌کوچک به‌کار گرفته نمی‌شوند، می‌پردازد. وی روشش را «روش ترکیبی فلوکسیون‌ها» می‌نامند. در روش قبل، کمیت‌های فلوئنت را با نمادهای جبری نشان می‌داد ولی در این روش جدید، آن‌ها را به‌صورت اشکال هندسی در نظر می‌گیرد. یکی از این دست مسائل، مطالعهٔ مقداری است که نسبت دو فلوئنت هندسی وقتی هر دو همزمان صفر می‌شوند، به آن میل می‌کند.

در سال‌های ۱٦۸۷ تا ۱٦۹۲ نیوتون به فلوکسیون‌های مراتب بالاتر و به‌اصطلاح امروزی، به بسط تیلور می‌پردازد که نقش مهمی در حسابان قرن هجدهم دارد. در تمامی کارهای نیوتون سری‌ها یکی از ابزارهای تحلیلی مهم هستند.

لایب‌نیتس علاقهٔ وافری به ترکیبیات داشت و این موجب شد تا دنباله عددی تفاضلات را در نظر بگیرد و با شیوهٔ «تفاضلات متناهی»، مجموع برخی سری‌ها از جمله $\sum \frac{۲}{n(n+۱)}$ را محاسبه کند. علاقه به تفاضلات دنباله‌ها در ابداع حسابان او نیز تأثیر تمام داشته است. از سال ۱٦۷۳ تا ۱٦۷۴ به گفتهٔ خودش، هنگام خواندن یکی از کتاب‌های پاسکال که به مسائل تربیع و مساحت پرداخته است، متوجه می‌شود پاسکال به هر نقطه روی محیط دایره، یک مثلث با ابعاد بی‌نهایت‌کوچک

وابسته کرده است. لایب‌نیتس این ایده را تعمیم می‌دهد. با در نظر گرفتن یک منحنی به‌صورت یک چندضلعی که از بی‌نهایت اضلاع بی‌نهایت‌کوچک تشکیل شده است و در نظر گرفتن یکی از آن اضلاع به‌صورت مماس، مسألهٔ یافتن مساحت را به مسأله‌های دیگری که حل آن‌ها ساده‌تر است، تحویل می‌کند. در این بین، دستوری را که امروزه انتگرال‌گیری جزء به جزء نامیده می‌شود، به‌دست می‌آورد. در خلال محاسبات متوجه می‌شود که ارتباطی بین مماس بر خم و مسألهٔ محاسبهٔ مساحت وجود دارد. او همچنین در ضمن مباحث فوق به اهمیت کمیت‌های بی‌نهایت‌کوچک نیز پی می‌برد. لایب‌نیتس در ابتدا نماد کاوالیری «.Omn» را برای مساحت به‌کار می‌بُرد اما بعد نماد $\int ydx$ را برای مساحت برگزید. وی اولین بار در سال ۱۶۸۴ نماد d و نماد انتگرال $\int$ را در سال ۱۶۸۶ در مقالات خود به‌کار برد.

در اینجا هم باید دقت کرد که لایب‌نیتس به تابع یا مشتق آن نمی‌پردازد، زیرا با چنین مفاهیمی آشنا نیست؛ بلکه آن دسته مفاهیمی که لایب‌نیتس در چارچوب آن‌ها می‌اندیشد عبارت‌اند از حرکت کمیت‌های متغیر و تفاضلات. لذا dy/dx مشتق تابع y نسبت به x نیست، بلکه نسبت دو کمیت دیفرانسیلی dy و dx است. با حذف یک بی‌نهایت‌کوچک در مقایسه با بی‌نهایت‌کوچک دیگر، به شرطی که از مرتبهٔ بالاتر باشد، توانست قواعد محاسبه مثل $d(xy) = xdy + ydx$ را بیان و اثبات کند. لایب‌نیتس عموماً محاسبه انتگرال را از طریق جایگزینی متغیر و روش جزء به جزء انجام می‌داد. این روش‌ها می‌توانند به شیوه‌ای کاملاً تحلیلی بدون نیاز به ساخت‌های پیچیدهٔ هندسی انجام شوند؛ این حسن نمادهای وی بود. لایب‌نیتس نمادهایی را وارد حسابان کرده است که بسیار مفیدند و تا به امروز استفاده می‌شوند. نمادهای لایب‌نیتس مسائلی را که حل آن‌ها به استعداد کم‌نظیر ارشمیدس و نیوتن احتیاج داشت، در سرانگشت هر دانشجوی متوسط ریاضی قرار داد. با این حال، گرچه نمادها فهم و حل مسأله را آسان‌تر می‌کنند، همین نمادگرایی او مانع از صورت‌بندی دقیق مفاهیم شدند و او را وادار کردند تا نسبت دیفرانسیل‌ها را یک کسر، و انتگرال را مجموع در نظر بگیرد.

دربارهٔ تقدم نیوتن یا لایب‌نیتس در ابداع حسابان گرچه به‌قطع نمی‌توان چیزی گفت، ولی باید توجه کرد که نیوتون در سال ۱۶۸۷ کتاب مشهورش، «اصول ریاضی فلسفهٔ طبیعی»، را که دربارهٔ نظریهٔ گرانش است منتشر کرد. با انتشار این کتاب، نظریهٔ ریاضی وی اولین بار در اختیار عموم قرار گرفت، گرچه وسعت کلی ریاضی او را ابداً نشان نمی‌داد. او در آن کتاب، قدری هم حسابان به‌کار گرفت ولی اولین رسالهٔ منسجم او دربارهٔ حسابان با عنوان De quadratura curvarum در سال ۱۷۰۴ منتشر شد. از طرف دیگر، لایب‌نیتس در سال‌های ۱۶۸۴ و ۱۶۸۶ نتایجی دربارهٔ حساب دیفرانسیل‌ها منتشر کرد. مقالات کوتاه بودند و در محافل ریاضی توجه چندانی را به خود جلب نکردند. گرچه ظاهراً لایب‌نیتس از برخی کارهای ریاضی نیوتن آگاهی داشت، ولی مستقلاً حساب دیفرانسیل و انتگرال را در خلال سال‌های ۱۶۷۶ ــ ۱۶۷۲ کشف کرده بود.

مقایسهٔ کار لایب‌نیتس و نیوتون دشوار است. لایب‌نیتس هیچ‌گاه رسالهٔ منسجمی دربارهٔ حسابان خود منتشر نکرد. بیشتر کارهای او در مقالات و نامه‌ها پراکنده بودند. لایب‌نیتس در وجود

بی‌نهایت‌کوچک‌ها شک داشت و آن‌ها را به‌صورت ابزار راهنما به‌کار می‌گرفت. همچنین نیوتون نیز مفهوم «اندازه حرکت» را یک خلاصه‌نویسی می‌دانست و می‌پنداشت با استفاده از فرآیندهای حدی دقیق می‌توان از آن‌ها صرف‌نظر کرد. به‌علاوه، مفهوم فلوکسین در نظر وی مفهوم فیزیکی نبود بلکه مفهومی بسیار مجرد بود. نیوتون و لایب‌نیتس هر دو به کمیت‌های متغیر می‌پرداختند. لیکن برای نیوتون کمیت‌ها نسبت به زمان متغیر بودند ولی برای لایب‌نیتس آن‌ها روی یک دنبالهٔ بی‌نهایت نزدیک از مقادیر حرکت می‌کردند. برای نیوتون انتگرال‌گیری، محاسبهٔ کمیت فلوئنت یک فلوکسین داده شده بود و بنابراین قضیهٔ اساسی حسابان در تعریف انتگرال مستتر بود. اما لایب‌نیتس انتگرال را نوعی مجموع‌یابی می‌دید. بنابراین قضیهٔ اساسی حسابان برای وی از تعریف نتیجه نمی‌شد، بلکه نتیجه‌ای از ارتباط معکوس بین جمع‌بندی و تفاضل‌یابی بود.

شک و تردیدهایی دربارهٔ مبانی نظری هر دو رویکرد مطرح شد. برخی از آن‌ها را خود نیوتون و لایب‌نیتس پاسخ دادند. مثلاً بی‌نهایت کوچک‌ها واقعاً چه هستند؟ و آیا وجود دارند؟ دیفرانسیل حقیقتاً چیست؟ اما از مهم‌ترین انتقاداتی که بر مبانی حسابان گرفته شده است نه از جانب ریاضیدانان، بلکه از جانب فیلسوف مشهور، جورج بارکلی، است. وی در کتابی تحت عنوان خلاصه‌شدهٔ The Analyst به‌سال ۱۷۳۴ انتقادات تندی دربارهٔ مبهم بودن کمیت‌های بی‌نهایت‌کوچک و رشد نسبت آن‌ها، دیفرانسیل‌های مراتب بالاتر و مسائلی از این دست، بیان کرده است. انتقادهای بارکلی بحث و جدل‌های طولانی دربارهٔ مبانی حسابان برانگیخت که بسیاری درصدد رفع آن برآمدند.

لایب‌نیتس و طرفداران وی به اثبات‌های هندسی نیوتون با دیدهٔ تردید می‌نگریستند. یکی از اهداف آن‌ها بیان اثبات‌های هندسی نیوتون برحسب حساب دیفرانسیل و انتگرال بود. واقع امر این است که مکانیک سرچشمهٔ الهام برای طرفداران لایب‌نیتس بود. از طریق گسترش ابزارهای ریاضی برای مسائل متنوع مکانیک (جامدات، سیالات)، ریاضیدانانی مانند یوهان و دانیل برنولی، کلرو، اویلر، دالامبر و لاگرانژ حسابان را بسط قابل توجهی دادند. مشخصهٔ قرن هجدهم، رویکرد تحلیلی است که پیروان مکتب لایب‌نیتس در پیش گرفتند. ریاضیدانان در ابتدا به مسائل ملموس در مکانیک، نورشناسی و اخترشناسی می‌پرداختند که اغلب به معرفی برخی خم‌های جدید می‌انجامید. مکانیک نظری طی فرآیندی طولانی، خود را از زبان هندسی نیوتن جدا کرد و به زبان معادلات دیفرانسیل صورت‌بندی شد. از جملهٔ ریاضیدانانی که در این دوره سهیم بودند می‌توان به برادران برنولی، بروک تیلور، جیمز استرلینگ، لئونارد اویلر، کولین مک‌لورن، آلکس کلرو، جان لوراند دالامبر، یوهان لمبرت، ژوزف ـ لویی لاگرانژ، سیمون لاپلاس و آدرین ماری لژاندر اشاره کرد.

حسابان نیوتون به‌دلیل فقدان ریاضیدان قابل و دور بودن از تحولات قارهٔ اروپا و همچنین عدم تمایل در به‌کار بردن نمادهای کارآمد در همان بریتانیای کبیر باقی ماند. اما در عوض، حسابان لایب‌نیتس بسیار جذاب بود. یاکوب برنولی (۱۷۰۵ ــ ۱۶۵۴) مقالات لایب‌نیتس را به‌طور کامل مطالعه کرد و به درک کامل آن‌ها نائل آمد. وی حسابان را به برادر خود یوهان (۱۷۴۸ ــ ۱۶۶۷)

نیز آموخت. این دو نمایندگان برجستهٔ مکتب لایب‌نیتس در حساب بی‌نهایت‌کوچک‌ها در اروپا بودند. مفهوم تابع هم اولین بار در نامه‌های بین یوهان برنولی و لایب‌نیتس مطرح شد. برنولی تابع را کمیت متغیری در نظر می‌گرفت که ترکیب شده است از یک کمیت متغیر دیگر و ثابت‌ها. مارکی دو لوپیتال (۱۷۰۴ ـ ۱۶۶۱) پس از اتمام مطالعاتش در طب، به پاریس رفت و نزد برنولی طی قراردادی در ازای پرداخت مبلغ کافی، حسابان را آموخت. لوپیتال آن درس‌ها را در کتابی با عنوان «آنالیز کمیت‌های بی‌نهایت‌کوچک برای درک خطوط منحنی» در ۱۶۹۶ منتشر کرد. این کتاب، اولین کتاب درسی در حساب دیفرانسیل به روش لایب‌نیتس بود.

در ابتدا حسابان تشکیل شده بود از روش‌های نه‌چندان مرتبط و مسائلی که با آن روش‌ها حل می‌شد. کسی که حسابان لایب‌نیتس را به‌صورت یک موضوع ریاضی منسجم تبدیل کرد، یکی از سرشناس‌ترین شخصیت‌های سال‌های میانی قرن ۱۸ در قاره اروپا و برجسته‌ترین شاگرد یوهان برنولی، لئونارد اویلر (۱۷۸۳ ـ ۱۷۰۷) بود. اویلر سه کتاب در سال‌های ۱۷۴۸، ۱۷۵۵ و ۱۷۶۸ نوشت که نقش اساسی در تأسیس آنالیز ریاضی داشتند.

اویلر در این کتاب‌ها بحث کاملی دربارهٔ انتگرال‌گیری توابع برحسب توابع مقدماتی و انتگرال معین و برخی شیوه‌های حل معادلات با مشتقات جزئی می‌آورد. جالب است توجه کنیم که هر چه از زمان برنولی جلوتر می‌رویم، حسابان از کاربردها جدا می‌شود. مثلاً با مقایسه نوشته‌های برنولی و اویلر درمی‌یابیم که گرچه برنولی مسائل مکانیکی و هندسی را در نوشته‌هایش به‌صورت برجسته‌ای می‌آورد، در کتاب‌های اویلر کاربردها کمتر دیده می‌شود و رویکردی جبری در پیش گرفته شده است. به‌طور کلی از ابتدای قرن هجدهم تا سال ۱۷۳۰ شیوه‌های هندسی حاکم بود. در دورهٔ میانی، مفاهیم جبری به‌صورت مشخصی غالب بود. مفاهیم اصلی به هندسه برمی‌گشت. اما پس از این می‌بینیم که اویلر در یکی از کتاب‌های خود از کمیت‌های عددی و نه کمیت‌های هندسی صحبت می‌کند. مفاهیم و اشیائی که وی به‌کار می‌برد کاملاً ماهیت جبری دارند. مفهوم تابع برای او مفهومی اساسی است و تابع را با عبارت‌های تحلیلی و جبری تعریف می‌کند. در پایان قرن هم کتاب لاگرانژ را می‌بینیم که مفاهیم به‌کار رفته در آن به‌طور صریح ماهیتی جبری دارند. لاگرانژ دیفرانسیل و بی‌نهایت‌کوچک‌ها را کنار می‌گذارد و مشتق تابع را بدون کاربرد حد و برحسب بسط تابع به‌صورت سری تعریف می‌کند.

اشاره کردیم که یوهان برنولی وقت خود و شاگردانش را صرف نشان دادن برتری روش لایب‌نیتس بر روش نیوتون کرد، به‌ویژه در مسألهٔ توصیف حرکت محیط‌های پیوسته بر اساس قانون جاذبهٔ نیوتون. در واقع این دوران مکانیک استدلالی پس از نیوتون است که در آن به مطالعهٔ مکانیک تیرک‌ها، غشاءها، تارها، مایعات و موادی از این گونه پرداخته می‌شود. اویلر در سال ۱۷۳۴ مطالبی دربارهٔ مشتقات جزئی، انتگرال‌گیری از آن‌ها و جابه‌جایی مشتقات جزئی عرضه کرده بود که ابزار ریاضی قدرتمندی برای تحلیل این مسائل به‌دست می‌دادند.

ژان لُراند دالامبر (۱۷۸۳ ـــ ۱۷۱۷) در سال ۱۷۴۷ برخی از معادلاتی را که در

بسیاری از مسائل فیزیکی ظاهر می‌شوند، یافت. یکی از آن معادلات، معادلهٔ تار مرتعش $\partial^۲ y/\partial x^۲ = (۱/c^۲)\partial^۲ y/\partial t^۲$ بود. در واقع، هدف، به‌دست آوردن معادلهٔ حرکت تاری است که دو سر آن ثابت نگه‌داشته شده و در امتداد محور x قرار گرفته است. دالامبر با استدلالی طولانی که امروزه برای ما آشناست، جواب $y = F(x+ct) + G(x-ct)$ (F و G توابع دلخواه هستند) را برای این معادله به‌دست آورد. با شرایط اولیهٔ $y = ۰$ در نقاط $x = ۰$ و $x = l$ برای تمام tها (که در اینجا l طول تار است)، جواب به‌صورت $y = F(ct+x) - F(ct-x)$ تبدیل می‌شود که تابع F دارای دورهٔ $۲l$ است. این پیشرفتی اساسی در تحلیل این مسأله بود که پس از ۳۰ سال از حل $y = k\sin(\pi x/l)$ برای مسألهٔ حرکت پایا توسط بروک تیلور (۱۷۳۱ ــ ۱٦۸۵) در ۱۷۱۳، داده شده بود. دالامبر تأکید می‌کرد که تمام توابعی که در معادله صدق می‌کنند باید مشتق‌پذیر باشند به این دلیل که برنولی و پیروان او قصد داشتند برتری حسابان لایب‌نیتس را برای حل مسائل فیزیکی نشان دهند. حسابان اساساً برای آن‌ها حسابان عملگرها روی عبارت‌های جبری بود. عملگرها نیز مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری بودند و رابطهٔ عکس آن‌ها را نیز نیوتون و لایب‌نیتس کشف کرده بودند. مسائل مشکل مماس و مساحت اکنون به‌راحتی حل می‌شدند. تنها شرط لازم این بود که اشیائی که انتخاب می‌کنیم تا این عملگرها روی آن‌ها اثر کنند، مشتق‌پذیر باشند. لذا حسابان روی آن توابعی درست عمل می‌کرد که این شرط یعنی مشتق‌پذیری را داشته باشند، مثل توابع چندجمله‌ای، مثلثاتی، توابع نمایی و تمامی عبارت‌های جبری که این اعمال روی آن‌ها نتیجه معینی به‌دست می‌دهد.

زیبایی مسألهٔ تار مرتعش، اویلر را بر آن داشت که حل خود را در سال ۱۷۴۹ منتشر کند. مسأله چنان جذاب بود که وی نسخهٔ فرانسوی و لاتینی نیز از مقاله‌اش منتشر کرد. وی جواب معادله را برحسب دو تابع دلخواه بیان و استدلال می‌کند که بنابر شرایط فیزیکی مسأله، لزومی ندارد آن توابع مشتق‌پذیر باشند. وی بعدها در این باره به دالامبر می‌نویسد «درنظر گرفتن چنین توابعی که مقید به هیچ شرط پیوستگی نیستند قلمروی کاملاً جدیدی را در آنالیز به سوی ما می‌گشاید.»

اویلر در کتاب‌هایش دربارهٔ آنالیز که در سال ۱۷۴۸ منتشر کرد، وضعیت را مشروح‌تر بیان می‌کند. جلد اول به نظریهٔ جبری توابع می‌پردازد و در آن، طبقه‌بندی توابع به‌صورت جبری و متعالی، ضمنی یا صریح، یک صورتی یا چند صورتی (تک یا چند ــ مقداری) را به‌دست می‌دهد. اویلر تابع برحسب یک کمیت متغیر را عبارتی تحلیلی مرکب از آن کمیت متغیر و کمیت‌های ثابت و اعداد تعریف می‌کند. عبارت تحلیلی نیز عبارتی است که از انجام اعمال جبری (جمع، تفریق، و ...) یا اعمال متعالی مانند به توان رساندن و لگاریتم و دیگر اعمالی که در حسابان موجود است بر متغیرها و ثابت‌ها حاصل شود. در جلد دوم تحت تأثیر مسألهٔ تار مرتعش این نظریه با تمایز قائل شدن بین خم‌های پیوسته و ناپیوسته یا «مخلوط» گسترش داده می‌شود. توجه کنیم اصطلاحات اویلر با اصطلاحات ما (که منشأ آن‌ها به قرن نوزدهم برمی‌گردد) متفاوت است. مفهوم پیوستگی برای اویلر با مفهوم مشتق‌پذیری نزد ما هم‌معنی است و ناپیوستگی به‌مفهوم اویلر با پیوستگی به‌مفهوم امروزین یکی است و منظور توابعی هستند که از عبارت‌های تحلیلی مناسب روی هر قسمت از

دامنه تشکیل می‌شوند.

دالامبر به این گسترش بسیار انتقاد داشت. او می‌گفت حل مسأله فقط برای حالت‌هایی امکان‌پذیر است که صورت‌های مختلف تار مرتعش را بتوان در یک معادلهٔ واحد جمع کرد. در حالت‌های دیگر به نظر غیرممکن می‌رسد که صورت کلی y را بتوان به‌دست داد. مهم‌تر این‌که در نقاط به‌اصطلاح کناری، مشتق تعریف نشده است و چطور $\partial^۲ y/\partial x^۲$ می‌تواند با $(۱/c^۲)(\partial^۲ y/\partial t^۲)$ برابر باشد. چون اویلر به بی‌نهایت‌کوچک‌ها گرایش داشت، بیان می‌کرد که مطمئناً خطاهایی اتفاق می‌افتد اما چنان کوچک‌اند که می‌توان از آن‌ها صرف‌نظر کرد. اما دالامبر این مطلب را نمی‌پذیرفت.

اویلر در سال ۱۷۴۷ به‌دنبال توابعی برای حل معادلهٔ تار مرتعش بود که شرط تناوب مورد نظر را نیز داشته باشند. وی طبیعتاً به‌سراغ جواب تیلور رفت و جواب کلی‌تر به‌صورت $y = \alpha \sin(\pi x/l) + \beta \sin(۲\pi x/l) + \cdots$ را درنظر گرفت. این‌که آیا او سری باپایان یا بی‌پایان را در نظر گرفته است معلوم نیست، اما یک چیز قطعی است و این‌که جواب فقط برای توابع «پیوسته» (یعنی مشتق‌پذیر) برقرار است و بنابراین در قیاس با راه‌حل خودش آن‌چنان اهمیتی ندارد. لیکن این جواب را در سال ۱۷۵۳ دانیل برنولی (۱۷۸۲ ــ ۱۷۰۰) پسر یوهان برنولی جدی گرفت. دانیل برنولی مجذوب یکی گرفتن حل $y = k \sin(\pi x/l)$ با فرکانس تار مرتعش بود که تیلور ارائه کرده بود. لذا استدلالی فیزیکی در جهت تأیید سری‌های مثلثاتی اقامه کرد. او می‌گفت تار می‌تواند ارتعاش یکنواخت خود را به بی‌نهایت طریق انجام دهد و لذا همهٔ اجسام توانایی تولید بی‌نهایت صدا و بی‌نهایت نوع ارتعاش منظم را دارند. پس تار، همهٔ هارمونی‌های تیلوری را به هر ترکیب ممکن دارد که این ایجاب می‌کند حل مثلثاتی به‌صورت

$$y = \alpha \sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi c t}{l} + \beta \sin \frac{۲\pi x}{l} \cos \frac{۲\pi c t}{l} + \cdots$$

جواب کلی حرکت باشد. البته برنولی برهان ریاضی برای این ادعا ارائه نکرد.

آنچه دیدیم فضای فکری بود که بر آن قرن حاکم بود، قرنی که در آن، شیوه‌های جبری برای حل مسائل غیرجبری به‌کار می‌رفت. ریاضیدان بعدی که وارد صحنه شد، ژوزف لوئی لاگرانژ (۱۸۱۳ ــ ۱۷۳۶) بود. او مسألهٔ n جسم را که با کمانی بی‌وزن به یکدیگر متصل هستند بررسی و تعداد نقاط را به بی‌نهایت میل داد و جوابی برحسب توابع مثلثاتی به‌دست آورد. اما کار اساسی را پنجاه سال بعد ژوزف فوریه (۱۸۳۰ ــ ۱۷۶۸) انجام داد. لاگرانژ فقط یک قدم با نتایج فوریه فاصله داشت، ولی نتوانست در این کار موفق شود، شاید به این دلیل که افق دیدش به سوی اهداف دیگری بود.

فوریه معادلهٔ دیفرانسیل خطی با مشتقات جزئی دیگری را بررسی کرد: معادلهٔ انتشار گرما $k(\partial^۲ \nu/\partial x^۲) = \partial \nu/\partial t$. فوریه با استفاده از سری‌های مثلثاتی جواب را محاسبه کرد. با کار فوریه است که ما به هندسه‌ای که اویلر آرزوی آن را داشت برمی‌گردیم. لاگرانژ در سال ۱۸۰۷ زنده بود و یکی از ممتحنان رسالهٔ انتشار گرمای فوریه بود. علی‌رغم این‌که فوریه با مثال‌های متنوعی مسأله را

توضیح داده بود، وی انتقادهای شدیدی به آن وارد کرد و مانع انتشار آن شد. انتقاد لاگرانژ هم به روش جداسازی متغیرها بود که به حل اولیهٔ برنولی برمی‌گشت و هم به خود سری‌ها. فوریه اشاره می‌کرد که «من معتقدم حرکت تار مرتعش به همان دقت از طریق بسط‌های مثلثاتی در همهٔ حالت‌های ممکن قابل نمایش است که با روابطی متضمن انتگرال‌گیری از توابع».

حقیقت این است که کارهای فوریه یکی از پیش‌زمینه‌های مهم در نظریهٔ انتگرال ریمان است. در کارهای فوریه دربارهٔ شار گرما در اجسام جامد، سؤالاتی که قبلاً دربارهٔ تار مرتعش نیز وجود داشت، مطرح شد: این‌که آیا می‌توان تابع «دلخواه» f بر بازهٔ $[-l,l]$ را به سری مثلثاتی $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(\frac{n\pi x}{l}) + b_n\sin(\frac{n\pi x}{l}))$ برای هر x در بازهٔ $[-l,l]$ بسط داد؟

فوریه با کارهایی که در قرن هجدهم دربارهٔ مسأله تار مرتعش انجام شده بود، آشنایی داشت. در واقع، استدلال او برای بسط تابع دلخواه برحسب سری‌های مذکور متقاعد کننده‌تر از ریاضیدانان پیش از او نیست. لیکن برای اولین بار این مسأله را که آیا سری مذکور به تابع f همگراست یا نه، در کانون توجه قرار داد. او حالت مهمی را که پاسخ آن مثبت است عرضه می‌کند، گرچه برهانش قابل مناقشه است. سری بالا را معادله‌ای با بی‌نهایت متغیر a_i و b_i تلقی می‌کند و روشی برای «حل» آن جستجو می‌کند. مثلاً برای یافتن a_0 داریم

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = \int_{-l}^{l}\frac{1}{2}a_0 dx + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}(a_n\cos(\frac{n\pi x}{l}) + b_n\sin(\frac{n\pi x}{l}))dx$$

و چون انتگرال‌هایی که توابع $\sin$ و $\cos$ را دربر دارند، برابر صفر هستند، پس $a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx$. در اینجا فوریه این فرض را که تا آن زمان بی چون و چرا می‌پذیرفتند به‌کار برد: انتگرال یک مجموع بی‌پایان برابر است با مجموع انتگرال‌ها. در این فرض در واقع عبور حد از انتگرال مجاز دانسته می‌شود. با این فرض، دستورهای زیر به‌دست می‌آیند:

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{l})dx, \qquad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin(\frac{n\pi x}{l})dx.$$

فوریه ادعا می‌کند که سری مثلثاتی با ضرایب بالا که امروزه به سری‌های فوریه مشهورند، به تابع f همگراست. فوریه حالت ویژه‌ای را که ادعای بالا برای آن برقرار است در کتابش با عنوان «نظریهٔ تحلیلی گرما» در سال ۱۸۲۲ عرضه می‌کند. فوریه بر این باور بود که توابع «دلخواه» یا «ناپیوسته» به‌مفهوم اویلر برحسب این سری‌های مثلثاتی قابل نمایش هستند.

تابع دلخواه در نظر فوریه با تابع «پیوسته» که در قرن هجدهم بیان می‌شد، بسیار متفاوت است و در واقع، بسیار شبیه توابع «ناپیوسته» در نظرِ اویلر است. حقیقت آن است که فوریه خیلی به مفهوم جدید تابع به‌عنوان یک تناظر خوش‌تعریف نزدیک می‌شود. این مفهومِ تابع در کارهای وی نقش مهمی ایفا می‌کند.

توابع دلخواهی که فوریه در نظر می‌گیرد اکثراً به‌صورت توابع چندضابطه‌ای است، یعنی تعداد متناهی از توابع به‌اصطلاح «پیوسته» روی بازهٔ $[-l,l]$. فوریه با این تعریف جدید از تابع نیاز به تغییر

مفهوم انتگرال قرن هجدهمی نیز داشت. به‌عبارت دیگر باید مشخص می‌کرد منظور از انتگرال یک تابع «دلخواه» چیست. او انتگرال تابع را به‌صورت مساحت زیر نمودار آن تابع در نظر گرفت. بدین ترتیب ناآگاهانه سؤال مهمی مطرح کرد و آن این‌که اگر f تابع دلخواهی باشد، چگونه می‌توان $\int_{-l}^{l} f(x)dx$ را به‌صورت مساحت تعریف کرد؟ کُشی، دیریکله و ریمان در خلال سال‌های ۱۸۲۱ تا ۱۸۵۴ پاسخ‌هایی به این پرسش دادند.

۴. انتگرال نزد کُشی و ریمان

آگوستین ــ لویی کُشی (۱۸۵۷ ــ ۱۷۸۹) اولین ریاضیدانی بود که به پرسش فوریه پاسخ داد. او در دو کتاب مشهورش یعنی «رساله‌ای در باب آنالیز» (۱۸۲۱) و «خلاصهٔ درس‌های مدرسهٔ فنی سلطنتی در باب حساب بی‌نهایت‌کوچک‌ها» (۱۸۲۳) سعی کرد گزاره‌هایی اساسی دربارهٔ حسابان با دقتی در حد دقت هندسهٔ یونانی عرضه کند. این‌که کُشی تا چه حد تحت تأثیر فوریه بوده معلوم نیست ولی به‌وضوح کُشی رویکرد صوری ــ جبری رایج به حسابان را رد کرد و به‌جای آن رویکردی برآمده از هندسه را برگزید. کُشی همزمان با بولتسانو در فرانسه، اندیشه‌هایی را دنبال می‌کرد که سرانجام موفق به بنا نهادن پایه‌های محکمی برای حسابان گردید. در واقع، عصر دقت در آنالیز ریاضی با کُشی آغاز می‌شود. مفهوم حد در روش یونانیان برای محاسبهٔ حجم و مساحت مخفی بود و در کارهای دالامبر یک مفهوم پایه‌ای تلقی می‌شد، اما چون عمدتاً بر مفاهیم هندسی مبتنی بود، هیچ‌گاه تعریف دقیقی نیافت. کُشی و البته قبل از او بولتسانو، حد را بر مبنایی عددی و نه هندسی بنا نهادند. کُشی مفهوم حد را در سال ۱۸۲۱ میلادی در کتاب «رساله‌ای در باب آنالیز» خود، فارغ از هرگونه ارجاع به مفاهیم هندسی، تعریف کرد. اکنون با داشتن مفهوم حد، بی‌نهایت‌کوچک در نظر کُشی چیزی نبود جز یک متغیر که به صفر میل می‌کند. البته نباید تأثیر مفهوم رایج تابع در قرن هجدهم به‌عنوان رابطهٔ بین دو متغیر را بر این برداشت، از نظر دور داشت.

نقطهٔ شروع کُشی برای تعریف انتگرال، تعریف تحلیلی وی برای پیوستگی تابع بود. وی در خلاصهٔ درس‌ها به سال ۱۸۲۳ با استفاده از مفهوم تابع پیوسته تعریفی از انتگرال ارائه کرد که با دیدگاه فوریه بیشتر سازگار است. با فرض پیوستگی f روی بازهٔ $[a,b]$، افراز P از $[a,b]$ به‌صورت $a = x_۰ < x_۱ < \cdots < x_n = b$ را در نظر می‌گیرد و «مجموع کُشی» را به‌صورت $S = \sum_{n=۱}^{n} f(x_{i-۱})(x_i - x_{i-۱})$ تعریف می‌کند. با فرض پیوستگی نشان می‌دهد برای هر دو افراز P و P'، تفاضل مجموع‌های متناظر S و S' را می‌توان به‌دلخواه کوچک کرد به‌شرطی که طول زیربازه‌های $[x_{i-۱}, x_i]$ در هر دو افراز به‌دلخواه کوچک شده باشد. لذا کُشی در ۱۸۲۱ می‌نویسد «مقدار S به‌وضوح به مقدار مشخصی خواهد گرایید». این مقدار را انتگرال معین می‌نامند. بدین ترتیب کُشی به پرسش فوریه پاسخ می‌دهد، منتها در حالتی که تابع پیوسته باشد. اثبات وی را

می‌توان برای تابع کرانداری که در تعداد متناهی نقطه نیز ناپیوسته باشد بیان کرد؛ چیزی که به انتگرال ناسرهٔ کُشی ـ ریمان معروف است. اما در کار کُشی شکاف‌های منطقی وجود دارد. مثلاً تعریف حد بر اساس معنای شهودی حرکت بنا شده است. مجموعهٔ بی‌پایان که در دنباله‌های بی‌پایان و تعریف مشتق و انتگرال به‌کار می‌روند، معنی دقیقی ندارند و از همه مهم‌تر شکاف‌هایی در مورد خود مفهوم عدد وجود دارد که در تعریف حد نقش اساسی به‌عهده دارند.

پاسخ جزئی دیگری به سؤال فوریه را یوهان گوستاو لژون دیریکله (۱۸۵۹ ـ ۱۸۰۵) عرضه کرده است. دیریکله مطالعهٔ ریاضیات را در سال ۱۸۲۲ شروع کرد و چون در آلمان آن روز به استثنای گاوس ریاضیدان برجسته‌ای نبود، به مرکز ریاضیات آن روز یعنی پاریس مهاجرت کرد. وقتی به پاریس رسید، کتاب فوریه تازه منتشر شده بود. وی کتاب فوریه و کتاب «رساله‌ای در آنالیز» کُشی را مطالعه کرد. دیریکله نتایجی دربارهٔ بسط تابع برحسب سری‌های مثلثاتی به‌دست آورد و آن‌ها را در مجلهٔ کِرِل در سال ۱۸۲۹ منتشر کرد. تابع مشهور دیریکله مربوط به این دوره است که نشان می‌دهد انتگرال کُشی برای هر تابع «دلخواه» معنی‌دار نیست.

دیریکله اشاره می‌کند که پیوستگی تابع یا حتی متناهی بودن تعداد نقاط ناپیوستگی نیز برای معنی‌دار بودن انتگرال تابع شرط لازم نیست، بلکه (به زبان امروزی) تنها لازم است که نقاط ناپیوستگی هیچ‌جا چگال باشند. او این ادعا را ثابت نمی‌کند و می‌نویسد: «اثبات نیازمند برخی جزئیات مربوط به اصول اساسی آنالیز بی‌نهایت‌کوچک‌ها است که در جایی دیگر عرضه خواهد شد». این وعده هیچ‌گاه برآورده نشد شاید به این دلیل که دریافت نمی‌تواند چنین کند. در واقع اگر با رویکرد کُشی کار کنیم، این ادعا اصلاً نادرست است. به هر حال دیریکله به این نکتهٔ مهم اشاره می‌کند که تابع یک توالی از مختصات (یا به زبان امروزی تناظر) است و باید گسترش تعریف انتگرال به توابعی که تعداد نامتناهی نقطه ناپیوستگی دارند، امکان‌پذیر باشد. در سال ۱۸۲۶ دیریکله به آلمان برگشت و با خود این پرسش‌ها را آورد: تا چه حد شرط پیوستگی می‌تواند ضعیف شود؟ بدون از دست رفتن انتگرال‌پذیری تا چه تعداد نقطهٔ ناپیوستگی برای تابع امکان‌پذیر است؟

گام بعدی را یکی از شاگردان خاص دیریکله یعنی برنهارت ریمان (۱۸۶۶ ـ ۱۸۲۶) برداشت. ریمان در سال ۱۸۵۳ نتایج خود را با عنوان «دربارهٔ نمایش‌پذیری تابع‌ها بر حسب سری‌های مثلثاتی» عرضه کرد. در آنجا در ضمن مطالب دیگر، مفهوم انتگرال‌پذیری را بسط داد و تحت تأثیر دیریکله، تابع را به مفهوم تناظر در نظر گرفت. ریمان توابع ناپیوسته را به‌طور جدی وارد ریاضیات کرد. کارهای او دو سال بعد از مرگش در ۱۸۶۸ منتشر شد. رساله‌اش حاوی بخشی دربارهٔ تعریف انتگرال، معیار انتگرال‌پذیری و یک مثال جالب است. پرسش اصلی ریمان این بود که معنای $\int_a^b f(x)dx$ چیست؟

تعریف ریمان اساساً شبیه تعریف کُشی است اما بدون شرط محدود کنندهٔ پیوستگی. ریمان با برداشتن شرط پیوستگی و دادن آزادی انتخاب بیشتر در برگزیدن نقاطِ به‌اصطلاح بینی یا نمونه،

تعریف بسیار کلی‌تری ارائه کرد. ریمان همانند کُشی با افراز $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ برای بازهٔ $[a,b]$ شروع کرد. سپس برخلاف کُشی، مجموع متفاوت $S = \sum_{i=1}^{n} \delta_i f(x_{i-1} + \delta_i \epsilon_i)$ را که $\delta_i = x_i - x_{i-1}$، $i = 1, \ldots, n$ و ϵ_i اعداد گویای مثبت هستند، در نظر گرفت. ریمان اشاره می‌کند که S به δ و ϵها وابسته است و سپس تعریف زیر را ارائه می‌دهد:

تعریف [**ریمان (۱۸۵۴)**] اگر مجموع بالا دارای این خاصیت باشد که به هر صورتی δ و ϵ انتخاب شوند، این مجموع‌ها به عدد ثابت A میل کنند به شرطی که δ بی‌نهایت کوچک شود، این حد $\int_a^b f(x)dx$ نامیده می‌شود.

به بیان دیگر اگر با تظریف بیشتر افرازها و مستقل از انتخاب نقاط $x_{i-1} + \epsilon_i(x_i - x_{i-1})$، $\epsilon_i \in (0, 1) \cap \mathbf{Q}$، مجموع ریمان به عدد ثابت A میل کند، در این صورت، f انتگرال‌پذیر و A انتگرال f روی $[a,b]$ است.

ریمان حالتی را که f در اطراف یک نقطه، بی‌کران باشد نیز بررسی کرده است. انتگرال ریمان به توابع کراندار روی بازه‌های کراندار محدود می‌شود. بنابراین لازم است تعریف‌های خاص به‌منظور گسترش انتگرال به توابع و یا بازه‌های بی‌کران انجام شود. این گسترش‌ها را که اولین بار کُشی به آن‌ها پرداخته است، گاهی اوقات انتگرال‌های کُشی ــ ریمان می‌نامند. او همچنین معیار مهمی که انتگرال‌پذیری تابع را مشخص می‌کند به‌دست داد. فرض کنید $P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ افرازی از $[a,b]$ و $\delta(P) = \max\{x_i - x_{i-1} \ : \ 1 \leq i \leq n\}$ نرم P باشد. فرض کنید $\mathcal{P}$ مجموعهٔ همهٔ افرازهای $[a,b]$ را نشان دهد و $\mathcal{P}_d = \{P \in \mathcal{P} \ : \delta(P) < d\}$. ریمان نشان داد که

قضیه فرض کنید f روی $[a,b]$ کراندار و انتگرال‌پذیر باشد. در این صورت برای هر $\epsilon > 0$ و هر $\delta > 0$، عدد $d > 0$ موجود است به‌طوری که برای هر افراز $P \in \mathcal{P}_d$ داریم $l(P, \delta) < \epsilon$. در اینجا $l(P, \delta)$ مجموع طول بازه‌هایی از افراز P را نشان می‌دهد که نوسان f روی آن‌ها بزرگتر از δ است.

ریمان نوسان تابع روی یک بازه را به‌صورت تفاضل بین بزرگترین و کوچکترین مقدار تابع در فاصلهٔ مربوط تعریف می‌کند. توجه می‌کنیم این تعریف دقت لازم را ندارد چراکه فرق بین بزرگترین و سوپریمم و همچنین کوچکترین و اینفیمم، لحاظ نشده است.

ریمان با این معیار نشان می‌دهد شرطی که دیریکله برای انتگرال‌پذیری حدس زده بود، لازم نیست. در واقع یک تابع می‌تواند ناپیوستگی‌های بسیاری داشته باشد ولی در عین‌حال انتگرال‌پذیر باشد. توجه کنیم که هنوز مفاهیم مجموعهٔ نقاط وارد ریاضیات نشده بود و این بیان‌ها فاقد صورت‌بندی برحسب مفهوم مجموعه هستند. مثال جالب ریمان تابع انتگرال‌پذیری است که نقاط ناپیوستگی آن مجموعه‌ای چگال است: قسمت غیرصحیح عدد حقیقی x را با (x) نشان می‌دهیم و تابع ϕ را برابر با (x) به‌ازای xهایی که $(x) < 1/2$، 0 به‌ازای xهایی که $(x) = 1/2$ و $(x) - 1$ برای xهایی که $(x) > 1/2$ تعریف می‌کنیم. توجه می‌کنیم که تابع ϕ در نقاط $x = \pm(2k+1)/2$، $k \in \mathbf{N}_0$، ناپیوسته و در نقاط دیگر پیوسته است و $\phi(\mathbf{R}) = (-1/2, 1/2)$. برای هر $n \in \mathbf{N}$ و

$x \in \mathbf{R}$، قرار می‌دهیم $\phi_n(x) = \phi(nx)$. توابع ϕ_n فقط در نقاط $x = \pm(2k+1)/2n$، $k \in \mathbf{N}_0$ ناپیوسته اند. مثال ریمان عبارت است از تابع $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x)/n^2$. این تابع فقط در نقاط $x = p/2q$ که p و q نسبت به هم اولند، ناپیوسته است. ریمان با به‌کار بردن قضیهٔ بالا نشان داد که f انتگرال‌پذیر است.

۵. انتگرال ریمان پس از ریمان؛ ضعف‌ها و قوت‌ها

تصور انتگرال‌پذیری و انتگرال یک تابع کراندار فراتر از این، غیرممکن به نظر می‌رسید، زیرا اگر مجموع کُشی ـ ریمان تابعی همگرا نباشد، دیگر معلوم نیست چطور می‌توان از مساحت زیر منحنی آن صحبت کرد. این رویکرد هندسی به دوران ارشمیدس برمی‌گردد. علی‌رغم رواج چنین گرایشی در قرن نوزدهم دربارهٔ انتگرالِ ریمان، کشفیاتی اتفاق افتاد که ضعف‌های نظریهٔ انتگرال ریمان را آشکار ساخت. همچنین باید افزود که در قرن نوزدهم شاهد تغییر رویکردها به مبانی آنالیز هستیم. به‌علاوه، فرضیاتی که درست پنداشته می‌شدند ولی هیچ اثباتی برای آن‌ها آورده نشده بود، مورد پرسش قرار گرفتند. مثال مشهور وایرشتراس در همین فضای انتقادی به بنیان‌ها قرار می‌گیرد. یکی از اولین کسانی که به مفهوم جدید تابع و به‌ویژه انتگرال ریمان واکنش نشان داد، هرمان هانکل (۱۸۳۹ ــ ۱۸۷۳) بود. او در گوتینگن تحصیل کرده بود و تحت تأثیر شدید ریمان بود. هانکل در سال ۱۸۷۰ مقاله‌ای با عنوان «پژوهش‌هایی دربارهٔ توابع بی‌نهایت‌بار نوسانی و ناپیوسته» منتشر ساخت که بلافاصله مورد توجه قرار گرفت. مقالهٔ هانکل خطای جالبی دارد که تا مدتی مانع از بسط و رشد ایده‌های نظریهٔ اندازه شد.

هانکل به مفهوم تابع نزد اویلر و دیریکله اشاره می‌کند و مفهوم تابع اویلر را برای آنالیز کافی می‌داند. با فرض مفهوم جدید تابع، هانکل به تعریف پیوستگی به‌مفهوم امروزی می‌پردازد. وی توابع به‌طور خطی ناپیوسته را، یعنی توابعی که در بی‌نهایت نقطه از یک بازه ناپیوسته‌اند، بررسی می‌کند.

ناپیوسته بودن f در نقطهٔ a یعنی این‌که

$$\exists\delta > 0\ \forall\epsilon > 0\ \exists\sigma \in (-\epsilon, +\epsilon) \quad | f(a+\sigma) - f(a) | > \delta.$$

هانکل این حالت را «پرش در a بزرگتر از δ» می‌نامند که ما آن را به‌لحاظ تاریخی با $j_f(a) > \delta$ نشان می‌دهیم. سپس به مجموعهٔ پرش‌های (ناپیوستگی‌های) تابع و به‌ویژه مجموعه‌ای که امروزه به‌صورت $S_\delta(f) = \{x \in \mathbf{R} \mid j_f(x) > \delta\}$ نوشته می‌شود، می‌پردازد. روشن است که هانکل در بررسی نوسان تابع در یک بازه تحت تأثیر ریمان بوده است. با وجود این، او به ارتباط بین نوسان و پرش‌های تابع f در نقاط انتهایی اشاره می‌کند. چند نماد امروزی را به‌کار می‌بریم: فرض کنید $\mathcal{I}$ مجموعهٔ همهٔ بازه‌ها باشد، $\mathcal{I}_a = \{I \in \mathcal{I} : a \in I\}$ و $a \in \mathbf{R}$. نوسان f در بازهٔ I را به‌صورت $\omega_f(I) = \sup\{f(x) : x \in I\} - \inf\{f(x) : x \in I\}$ تعریف می کنیم (این تعریف متعلق به داربو

است). اکنون می‌توانیم آنچه را هانکل در نظر داشت بیان کنیم

$$a \in S_\delta(f) \Longrightarrow \forall I \in \mathcal{I}_a \quad : \omega_f(I) > \delta, \qquad a \notin S_\delta(f) \Longrightarrow \exists I \in \mathcal{I}_a \quad : \omega_f(I) < ۲\delta.$$

در اینجا دو جنبهٔ توپولوژیک و نظریه ـ اندازه‌ای نقاط ناپیوستگی f تلاقی می‌کنند. از یک طرف مجموعهٔ $S_\delta(f)$ را داریم که یا چگال یا هیچ‌جا چگال است (جنبهٔ توپولوژیکی) و از طرف دیگر مجموعهٔ بازه‌هایی که نوسان روی آن‌ها بزرگتر از δ است (جنبهٔ نظریه ـ اندازه‌ای).

امروزه به‌راحتی می‌توانیم نشان دهیم اگر f انتگرال‌پذیر باشد، مجموعهٔ $S_\delta(f)$ را برای هر $\delta > ۰$ می‌توان با تعدادی شمارا بازه با طول به‌دلخواه کوچک پوشاند. لذا اگر f انتگرال‌پذیر باشد، مجموعهٔ نقاط ناپیوستگی آن اندازه ـ صفر است. هانکل به‌جای پرسش از جهت عکس این حکم، دو مفهوم را تعریف می‌کند که معادل همان چگال و هیچ‌جا چگال بودنِ امروزی است. او ثابت می‌کند اگر $S_\delta(f)$ هیچ‌جا چگال باشد، مجموع طول بازه‌هایی را که برای آن‌ها $\omega_f(I) > ۲\delta$ می‌توان به‌دلخواه کوچک کرد و به‌عکس. مطلب جالب و به‌لحاظ تاریخی مهم این است که قسمتِ «اگر» این قضیه، اشتباه است؛ اما اشتباهی خوب!

آنچه از دید ریمان پنهان مانده بود ارتباط مشخص بین انتگرال‌پذیری و درجهٔ ناپیوستگی تابع بود. دو بوا ــ ریموند (۱۸۸۹ ــ ۱۸۳۱) چنین ارتباطی را به‌دست می‌دهد گرچه تقریباً همزمان و مستقل از او، هارناک و دینی نیز در سال ۱۸۷۰ چنین ارتباطی را کشف کردند. دو بوا ـ ریموند ثابت کرد که اگر $\omega(f,x) = \lim_{\delta\to ۰^+} \omega_f(x-\delta, x+\delta)$ و برای هر $\alpha > ۰$ مجموعهٔ $E_\alpha = \{x : \omega(f,x) > \alpha\}$ را بتوان در تعداد متناهی بازه با مجموع طول به‌دلخواه کوچک قرار داد، آن‌گاه شرط انتگرال‌پذیری ریمان برقرار است و به‌عکس.

در سال ۱۸۷۵ ریاضیدان انگلیسی هـ. ج. س. اسمیت (۱۸۸۳ ـ ۱۸۲۶) تابعی کشف کرد که نقاط ناپیوستگی آن هیچ‌جا چگال (و به‌ویژه $S_\delta(f)$ هیچ‌جا چگال) است، ولی انتگرال‌پذیر نیست. بنابراین به زبان امروزی، مجموعه‌های هیچ‌جا چگال لزوماً اندازه ـ صفر نیستند؛ مطلبی که هانکل از آن برای اثبات انتگرال‌پذیری توابع با مجموعهٔ $S_\delta(f)$ $(\delta > ۰)$ هیچ‌جا چگال، استفاده کرده بود. مثال‌هایی از این دست نشان داد که مجموعه‌های کوچک به‌لحاظ توپولوژیک، لزوماً به‌لحاظ اندازه کوچک نیستند. این، عاملِ بسط نظریهٔ محتوی شد. اگر اشتباه هانکل نبود شاید بسط و توسعهٔ زبان نظریهٔ اندازه به‌گونهٔ فعلی نبود.

گام مهم بعدی در توسعهٔ انتگرال ریمان را ریاضیدان فرانسوی، ژان گاستون داربو (۱۹۱۷ ــ ۱۸۴۲)، برداشت. او سه مقاله بین سال‌های ۱۸۷۲ تا ۱۸۷۹ منتشر کرد و در آن‌ها لزوم دقت بیشتر را در شیوه‌های آنالیز گوشزد کرد. او با ارائهٔ مثال‌هایی، خطراتی را که از اعتماد کردن به شهود ناشی می‌شوند نشان داد. در این باره به‌ویژه از مفهوم همگرایی یکنواخت استفاده اساسی می‌کرد.

اگر f تابعی کراندار روی بازهٔ $I = [a,b]$ و $a = x_۰ < x_۱ < \cdots < x_n = b$ افراز دلخواهی از

بازهٔ I باشد، قرار می‌دهیم $\delta_i = x_i - x_{i-1}$، $i = 1, \ldots, n$ و M_i و m_i را سوپریمم و اینفیمم تابع روی زیربازهٔ i ـ ام می‌گیریم. نوآوری داربو در این است که نشان داد اگر $n \longrightarrow \infty$ و $\delta_i \longrightarrow 0$ مقادیر $\sum_{i=1}^{n} M_i\delta_i$ و $\sum_{i=1}^{n} m_i\delta_i$ به مقدارهای ثابتی میل می‌کنند که فقط به a و b و f بستگی دارد. داربو توابعی را که برای آن‌ها دو مقدار بالا مساوی‌اند از دیگر توابع جدا کرد. اکنون می‌توان به فرمول‌بندی داربو از انتگرال ریمان رسید. برای تابع f و افراز $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ از آن و $\theta_i \in [0, 1]$، مجموع داربو را به‌صورت $S(n, \delta, \theta) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i f(x_{i-1} + \theta_i\delta_i)$ که به $\delta = (\delta_i)$ و $\theta = (\theta_i)$ و n وابسته است در نظر می‌گیریم. با نمادهای پئانو، انتگرال بالایی و پایینی را به‌صورت $\overline{\int_a^b} f(x)dx := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} M_i\delta_i$ و $\underline{\int_a^b} f(x)dx := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m_i\delta_i$ می‌نویسیم.

قضیه [داربو (۱۸۷۵)] مجموع داربو به حد منحصر به‌فردی میل می‌کند اگر و تنها اگر $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$.

داربو مقدار مشترک فوق را $\int_a^b f(x)dx$ نامید و مثلاً ثابت کرد که هر تابع پیوسته انتگرال‌پذیر (داربو) است. همچنین نشان داد تابع $x \longmapsto \int_a^x f(x)dx$ پیوسته است و اگر f در x_0 پیوسته باشد، تابع مذکور در x_0 مشتق‌پذیر و مشتق آن برابر با $f(x_0)$ است. به‌ویژه نشان داد

قضیه اگر F روی $[a, b]$ مشتق‌پذیر و مشتق آن تابع انتگرال‌پذیرِ f باشد، آن‌گاه $F(x) - F(a) = \int_a^x f(x)dx$.

اگر f تابعی غیرثابت باشد که مشتق آن f' کراندار و صفرهای آن مجموعه‌ای چگال تشکیل دهند، f' نمی‌تواند انتگرال‌پذیر ریمان باشد، چراکه به‌راحتی می‌بینیم $\int_a^x f'dt = 0$ و طبق قضیه بالا باید $f(x) - f(a) = 0$، یعنی f باید ثابت باشد که تناقض است. اولین بار ریاضیدان ایتالیایی، اولیسّه دینی (۱۹۱۸ ـ ۱۸۴۵) در سال ۱۸۷۸ متوجه این نکته شد. دینی مثالی ارائه نکرد اما کمی بعد از بحث دینی مثال‌های نقضی پیدا شدند. یکی از آن‌ها متعلق به ولترا در سال ۱۸۸۱ است. مثال دیگر را ریاضیدان سوئدی تورستن بُردِن در ۱۸۹۶ منتشر کرد. لذا فرآیند مشتق می‌تواند تابعی با مشتق کراندار تولید کند که انتگرال ریمان ندارد. پس انتگرال ریمان و مشتق‌گیری کاملاً وارون یکدیگر نیستند. این اولین بحران نظریهٔ ریمان است که البته تا قبل از لبگ از محبوبیت آن نظریه چیزی نمی‌کاست.

دینی در سال ۱۸۷۸ در کتابی با عنوان «مبانی نظریهٔ توابع حقیقی‌مقدار» مشتق‌های چهارگانهٔ خود را تعریف کرد و نشان داد اگر f انتگرال‌پذیر ریمان باشد و $F(x) = \int_a^b f(t)\,dt$، آن‌گاه مشتق دینی F، DF، کراندار و انتگرال‌پذیر است و $\int_a^b DF(t)\,dt = F(b) - F(a)$.

قضیهٔ بنیادی حسابان از دو قسمت تشکیل شده است و فرآیندهای انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری را به یکدیگر مرتبط می‌کند و نشان می‌دهد این دو عمل به‌نوعی معکوس یکدیگرند.

قضیه [قضیهٔ بنیادی حسابان صورت (۱)] فرض کنید $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ و مشتق آن f' انتگرال‌پذیر

باشد. در این صورت، $\int_a^b f' = f(b) - f(a)$.

شرط انتگرال پذیری f' در قضیهٔ فوق، اساسی است. تابع $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ را با $f(x) = x^2 \cos \frac{\pi}{x^2}$ برای $0 < x \leq 1$ و $f(0) = 0$ تعریف کنید. مشتق f به‌صورت $f'(x) = 2x \cos \frac{\pi}{x^2} + \frac{2\pi}{x} \sin \frac{\pi}{x^2}$ برای $0 < x \leq 1$ و $f'(0) = 0$ به‌دست می‌آید. تابع f' روی $[0, 1]$ بی‌کران است و در نتیجه نمی‌تواند انتگرال‌پذیر باشد. شاید دلیل انتگرال‌پذیر نبودن f' در این مثال، به بی‌کران بودن f' نسبت داده شود، ولی مثال دشوار و تکنیکی زیر که متعلق به ولترا است، نشان می‌دهد که این چنین نیست. در سال ۱۸۸۱، ولترا مثالی از یک مجموعهٔ هیچ‌جا چگال با اندازهٔ ناصفر ارائه داد و با استفاده از آن، حدس دینی مبتنی بر وجود تابع با مشتق کراندار ولی انتگرال‌ناپذیر را اثبات کرد. باید متذکر شد که مستقل از او، دو بوا ــ ریموند نیز در سال ۱۸۸۰ مثالی از چنین مجموعه‌ای ساخته بود.

برای تشریح مثال ولترا، ابتدا توجه کنید که می‌توان زیرمجموعهٔ هیچ‌جا چگال از $[0, 1]$ مانند E ساخت که $0, 1 \in E$ و اندازه لبگ E مثبت باشد. چنین مجموعه‌ای را می‌توان به این صورت ساخت که ابتدا فاصلهٔ بازی به طول ۱/۴ از میانهٔ بازهٔ $[0, 1]$ را حذف می‌کنیم و از هر یک از فاصله‌های بستهٔ باقیمانده نیز فاصلهٔ باز به طول ۱/۱۶ را می‌برداریم. اکنون فرض کنید که در مرحلهٔ n ــ ام از میانهٔ هر یک از 2^{n-1} بازهٔ بستهٔ باقیمانده بعد از $n - 1$ ــ امین مرحله، بازهٔ بازی به طول 4^{-n} را حذف کنیم. با ادامهٔ این فرآیند، از بازهٔ $[0, 1]$ فاصله‌های بازی را حذف کرده‌ایم که مجموع طول آن‌ها برابر است با $\frac{1}{4} + 2\frac{1}{4^2} + \cdots + 2^{n-1}\frac{1}{4^n} + \cdots = \frac{1}{2}$. حال E را مجموعهٔ بستهٔ باقیمانده را در نظر می‌گیریم. به‌وضوح اندازهٔ E مثبت است و $[0, 1] \setminus E = \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k, b_k)$. اکنون فرض کنید $[a, b]$ بازهٔ دلخواهی باشد. تابع زیر را درنظر بگیرید:

$$g(x) = \begin{cases} (x-a)^2 \sin \frac{1}{x-a} & a < x \leq b \\ 0 & x = a \end{cases}$$

به‌راحتی دیده می‌شود که

$$g'(x) = \begin{cases} 2(x-a) \sin \frac{1}{x-a} - \cos \frac{1}{x-a} \sin \frac{\pi}{x^2} & a < x \leq b \\ 0 & x = a \end{cases}$$

تابع g تعداد نامتناهی فرینهٔ نسبی دارد و در هر یک از آن‌ها، g' برابر صفر است. تابع g' کراندار است. اکنون c را در بازهٔ $(a, (a+b)/2)$ انتخاب می‌کنیم به‌طوری که $g'(c) = 0$ و همچنین d را در بازهٔ $((a+b)/2, b)$ چنان انتخاب می‌کنیم که $c - a = b - d$. توجه کنید که $(c-a)^2 \sin \frac{1}{c-a} = -(d-b)^2 \sin \frac{1}{d-b}$. تابع $h : [a, b] \to \mathbf{R}$ را با ضابطهٔ

$$g(x) = \begin{cases} (x-a)^2 \sin \frac{1}{x-a} & a < x \leq c \\ (c-a)^2 \sin \frac{1}{c-a} & c < x < d \\ -(x-b)^2 \sin \frac{1}{x-b} & d \leq x < b \end{cases}$$

و $h(a)=\circ=h(b)$ تعریف می‌کنیم. اگر E مجموعه ساخت شده در بالا باشد، تابع f_k را برابر تابع h تعریف شده روی بازهٔ $[a_k,b_k]$ می‌گیریم. اکنون تابع $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ با ضابطهٔ $f(x)=f_k(x)$ برای $x\in(a_k,b_k)$ و $f(x)=\circ$ برای $x\in E$ همان تابع مورد نظر خواهد بود.

قسمت دوم قضیهٔ بنیادی حسابان مربوط به مشتق‌گیری از یک انتگرال نامعین است. فرض کنید $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ انتگرال‌پذیر ریمان باشد. انتگرال نامعین f در نقطهٔ $x\in[a,b]$ به‌صورت $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ تعریف می‌شود.

قضیه [قضیهٔ بنیادی حسابان صورت (۲)] فرض کنید $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ انتگرال‌پذیر باشد. در این صورت انتگرال نامعین آن، F، روی $[a,b]$ پیوسته است و چنانچه f در $c\in[a,b]$ پیوسته باشد، F در c مشتق‌پذیر است و $F'(c)=f(c)$.

بحران دیگر در نظریهٔ انتگرال از فرضی ناشی می‌شود که فوریه در بررسی‌های خود بدیهی می‌پنداشت؛ این‌که از یک سری می‌توان جمله‌به‌جمله انتگرال گرفت. به عبارت دیگر مسألهٔ عبور حد از انتگرال. تا پیش از نیمهٔ دوم قرن نوزدهم فرض جابه‌جایی حد و انتگرال بی‌چون و چرا قبول عام یافته بود. اما در سال ۱۸۷۰ یکی از دوستان وایرشتراس، ادوارد هاینه (۱۸۸۱ ــ ۱۸۲۱)، در مقاله‌ای اشاره کرد که این فرض درست پنداشته می‌شد تا این‌که وایرشتراس متوجه شد که نه‌تنها سری باید همگرا باشد بلکه باید همگرای یکنواخت نیز باشد. در واقع وایرشتراس بین همگرایی نقطه‌ای و یکنواخت برای جابه‌جایی حد و انتگرال تفاوت قائل شد. اما این تمایز تا قبل از اشارهٔ صریح هاینه به آن، شناخته نشده بود.

انتگرال ریمان نسبت به فرآیند حد بسیار بد رفتار می‌کند و فاقد قضایای همگرایی مطلوب است. اگر $\{f_k\}_k$ دنباله‌ای از توابع انتگرال‌پذیر باشد و به تابع f به معنایی همگرا باشد، مسألهٔ مهم این است که آیا f انتگرال‌پذیر است؟ و آیا رابطهٔ $\int_a^b f=\lim_{k\to\infty}\int_a^b f_k$ برقرار است؟ هر قضیه‌ای که شرایطی برای پاسخ دادن به این سؤال‌ها ارائه کند، یک قضیهٔ همگرایی نامیده می‌شود. اگر همگرایی یکنواخت باشد، آن‌گاه f انتگرال‌پذیر است و جابه‌جایی حد و انتگرال امکان‌پذیر است، اما در حالت کلی چنین نیست. مثلاً فرض کنید $f_k:[\circ,۱]\to\mathbf{R}$، $f_k(x)=k\chi_{[\circ,۱/k]}(x)$. دنبالهٔ $\{f_k\}_k$ همگرای نقطه‌ای به تابع ثابت صفر است، ولی به‌وضوح تساوی $\int_\circ^۱ f=\lim_{k\to\infty}\int_\circ^۱ f_k$ برقرار نیست.

علاوه بر شرایط همگرایی نقطه‌ای، دو فرض طبیعی دیگر نیز می‌توان بر دنبالهٔ توابع اعمال کرد: یکی کرانداری دنباله است و دیگری یکنوایی. اما این دو نیز همان‌طور که مثال زیر نشان می‌دهد، به تنهایی کافی نیستند. فرض کنید $\{r_n\}_n$ شمارشی از اعداد گویای بازهٔ $[\circ,۱]$ باشد. تعریف کنید $f_k:[\circ,۱]\to\mathbf{R}$، $f_k(x)=\chi_{\{r_۱,\dots,r_k\}}(x)$. در این صورت، $\{f_k\}_k$ دنباله‌ای صعودی و کراندار از توابع انتگرال‌پذیر و همگرای نقطه‌ای به تابع انتگرال‌ناپذیر دیریکله است.

گاستون داربو صریحاً به کار هاینه اشاره و در سال ۱۸۷۵ همگرایی یکنواخت را مجدداً صورت‌بندی می‌کند و قضیهٔ جابه‌جایی حد و انتگرال را هنگامی که همگرایی یکنواخت باشد، اثبات

می‌کند. آنچه اهمیت دارد این است که داربو در آن رساله مثال‌های روشنگری بیان می‌کند. مثلاً از سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-2nxe^{-n^2x^2}+2(n+1)^2xe^{-(n+1)^2x^2})$ که به $-2xe^{-x^2}$ همگراست نمی‌توان جمله‌به‌جمله انتگرال گرفت. پس انتگرال ریمان با فرآیندهای حدی نیز در حالت کلی سازگار نیست.

مراجع

[1] M. E. Baron, *The origins of the infinitesimal calculus*, Pergamon Press, Oxford, 1969.

[2] U. Bottazzini, *The higher calculus: A history of real and complex analysis from Euler to Weirstrass*, Springer-Verlag, New York, 1986.

[3] C. B. Boyer, *The history of the calculus and its conceptual development*, Dover Publication, New York, 1959

[4] W. Dunham, "Touring the calculus gallery", *Amer. Math. Monthly*, **112**(2005), 1–19.

[5] C. H. Edwards, *The historical development of the calculus*, Springer-Verlag, New York, 1979.

[6] R. A. Gordon, *The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, Amer. Math. Soc. GSM Vol. 4, Providence, Rohde Island, 1994.

[7] I. Grattan-Guinness, *The development of the foundations of mathematical analysis from Euler to Riemann*, MIT Press, Massachusetts, 1970.

[8] I. Grattan-Guinness, *From the calculus to set theory, 1630-1910: An introductory history*, Princeton University Press, Princeton, 2000.

[9] T. Hawking, *Lebesgue's theory of integration: It's origins and development*, Chelsea Pub. Co., New York, 1975.

[10] H. N. Janke, *A history of analysis*, Amer. Math. Soc. History of Math. Vol. 24, Providence, Rhode Island, 2003.

[11] I. Kleiner, "History of the infinitely small and the infinitely large in calculus", *Ed. Stud. Math.*, **48**(2001), 137–174.

[12] G. H. Moore, "The emeregence of open sets, closed sets, and limit points in analysis and topology", *Historia Math.*, **35**(2008), 220–241.

[13] I. N. Pesin, *Classical and modern integration theories*, Academic Press, New York, 1970.

[14] J. P. Pier, *Histoire de l'intégration*, Masson, Paris, 1996.

[15] C. Swartz, *Measure, integration and function spaces*, World Scientific, Singapore, 1994.

[۱۶] م. رجبعلی‌پور، «کسرهای مصری»، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، شمارهٔ ۴۲، تابستان ۱۳۸۸، ۱–۳۸.

[۱۷] س. مقصودی، «نظریه‌های انتگرال‌گیری دانژوا، پرون، و هنستاک ـ کورزویل روی خط حقیقی»، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، شمارهٔ ۴۷، تابستان ۱۳۹۰، ۱۹–۳۵.

سعید مقصودی
دانشگاه زنجان، گروه ریاضی
s_maghsodi@znu.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۲ (بهار ۱۳۹۲) صص. ۳۷ تا ۵۲

مساحت و کاستی در مدل بلترامی ـ کلاین

سید قهرمان طاهریان

چکیده

آبراهام اونگار[1] در [12] فرمول‌هایی برای محاسبهٔ کاستی یک مثلث در مدل بلترامی ـ کلاین ارائه کرده است. وی بر اساس ساختار جبری حاصل از جمع سرعت‌های نسبیتی روی مجموعهٔ سرعت‌های مجاز (کمتر از سرعت نور)، تعریف جدیدی برای مساحت (با نام جایرو ـ مساحت) پیشنهاد می‌کند که همهٔ ویژگی‌های بنیانی مساحت را ندارد. برای مثال اگر مثلثی را به دو مثلث تقسیم کنیم مجموع جایرو ـ مساحت مثلث‌های پدید آمده برابر جایرو ـ مساحت مثلث اولیه نیست. در سال ۲۰۰۵، هلموت کارتسل[2] و ماریو مارکی[3] در [3] با رهیافتی جدید، مفهوم تابع کاستی را در هندسهٔ مطلق (به معنای [1]) بیان کردند. در این مقاله بر اساس ایده‌های کارتسل و اونگار، تعریف دقیقی برای کاستی و مساحت در مدل بلترامی ـ کلاین ارائه می‌شود. به‌کمک این تعریف، برای فرمول‌های محاسبهٔ کاستی، اثبات‌های ساده و مقدماتی به‌دست می‌آیند.

۱. مقدمه

یکی از اهداف این مقاله آشنا کردن دانشجویان و اساتید با پیشرفت‌های جدید در هندسه‌ی هذلولوی است. بسیاری از مفاهیم هندسهٔ هذلولوی مانند مساحت و حجم در کتاب‌های مقدماتی به شکل رضایت‌بخشی ارائه نمی‌شوند. در این نوشتار، یک رهیافت مقدماتی ولی کاملاً دقیق برای مفهوم کاستی به‌کمک بازتاب‌های نقطه‌ای بیان می‌شود. با این رهیافت که نگارنده و یکی از دانشجویانش در [6] به چاپ رسانده‌اند، اثبات‌ها به‌شکل مشروح و مقدماتی بیان شده‌اند.

1) Abraham. A. Ungar 2) Helmut Karzel 3) Mario Marchi

فلیکس کلاین[۱] در سال ۱۸۷۱ یک مدل تحلیلی برای هندسهٔ غیراقلیدسی بر اساس تعریف آرتور کیلی[۲] از همنهشتی پاره‌خط‌ها در هندسهٔ تصویری ارائه کرد. او این هندسه را **هندسهٔ هذلولوی** نامید که به آن **مدل بلترامی ـ کلاین** هم گفته می‌شود. در این مدل، نقاط صفحه، نقاط درونی دایرهٔ واحد به مرکز مبدأ مختصات و خطوطِ صفحه، وترهای این دایره بدون نقاط انتهایی در صفحهٔ اقلیدسی هستند. به عبارت دیگر، مجموعهٔ نقاط عبارت است از $\mathbf{D} := \{z \in \mathbf{C} \ : \ |z| < ۱\}$ که $\mathbf{C}$ صفحهٔ مختلط و $|z| = z\bar{z}$ اندازهٔ بردار z است. مجموعهٔ خطوط $\mathfrak{G}_h$ عبارت است از $\mathfrak{G}_h := \{A \cap D : \ A \cap D \neq \emptyset\}$ که A نشان‌دهندهٔ یک خط در صفحهٔ اقلیدسی است. در این مدل، دو پاره‌خط (a, b) و (c, d) همنهشت (قابل‌انطباق) هستند اگر و تنها اگر $\rho(a, b) = \rho(c, d)$ که در آن، ρ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho(x, y) := \frac{(۱ - \langle x, y\rangle)^۲}{(۱ - x\bar{x})(۱ - y\bar{y})} \ , \qquad \langle x, y\rangle := \frac{۱}{۲}(x\bar{y} + y\bar{x}).$$

۱.۱. مفهوم مساحت

یکی از مفهوم‌های بنیادی در مبانی هندسه، مساحت است. مساحت یکی از مباحث نظریهٔ اندازه[۳] محسوب می‌شود ولی در مبانی هندسه با رهیافت‌های ساده‌تری هم قابل بیان است. در هندسهٔ اقلیدسی می‌توان مساحت ناحیه‌های دلخواه هندسی را به‌کمک مساحت مربع واحد بیان کرد، ولی این کار در هندسهٔ هذلولوی باید به‌شکل دیگری انجام گیرد، زیرا در هندسهٔ هذلولوی مربع وجود ندارد. تفاوت مهم هندسهٔ، هذلولوی با هندسهٔ اقلیدسی، «بُنداشت توازی» است. به‌کمک بُنداشت توازی اقلیدسی ثابت می‌شود که مجموع زوایا در یک مثلث دلخواه برابر دو قائمه است و در نتیجه، چهارگوش با چهار زاویهٔ قائمه (مربع) وجود دارد. در این هندسه به‌کمک مربع با ضلع واحد، واحد مساحت تعریف می‌شود و در نتیجه مساحت مستطیل، متوازی‌الاضلاع و مثلث قابل تعریف است. اما در هندسهٔ هذلولوی مجموع زوایای مثلث کوچکتر از دو قائمه است و هر چهارگوش را می‌توان به دو مثلث با مساحت یکسان تقسیم کرد. پس در هندسهٔ هذلولوی مربع وجود ندارد و مفهوم مساحت باید به‌صورت دیگری تعریف شود. رهیافت‌های گوناگونی برای تعریف مساحت در هندسهٔ هذلولوی وجود دارد. در یک روش متداول، مساحت مثلث به‌کمک کاستی آن تعریف می‌شود. به‌طور شهودی انتظار داریم که مساحت مثلث عددی مثبت باشد و اگر مثلثی را به دو مثلث تقسیم کنیم، جمع مساحت آن‌ها برابر با مساحت مثلث نخست باشد. با توجه به این‌که کاستیِ مثلث این ویژگی‌ها را دارد، بسیاری از مؤلفین از آن برای تعریف مساحت در هندسهٔ هذلولوی استفاده کرده‌اند. در بیشتر کتاب‌های مقدماتی هندسه، این روش دقت کافی ندارد و به‌طور عمیق به آن پرداخته نمی‌شود. از جمله رهیافت‌های دیگر می‌توان به رهیافت تحلیلی بر اساس چارچوب

---

1) Felix Klein 2) Arthur Kayley 3) Masure theory

کلی مفهوم مساحت در هندسه‌های ریمانی اشاره کرد. مثلاً هانفرید لنتز[1] در [4] نشان می‌دهد که در مدل قرص پوانکاره، $ds^2 = \frac{4}{(1-x^2-y^2)^2}(dx^2 + dy^2)$ و بر این اساس، مساحت ناحیهٔ دلخواه D در این مدل را به‌صورت $\int_D \sqrt{EG - F^2}dxdy$ تعریف می‌کند که در آن، $G = \frac{4}{(1-x^2-y^2)^2}$، $F = 0$ و $E = \frac{4}{(1-x^2-y^2)^2}$. لنتز در ادامه ثابت می‌کند که مساحت مثلث برابر با کاستی آن است ([4]، صفحهٔ ۱۴۲).

با رهیافتی کاملاً متفاوت، اونگار در [12] مفهوم **جایرو ــ مساحت** یک مثلث را در مدل بلترامی ــ کلاین برابر با $2 \tan \frac{\delta}{2}$ تعریف می‌کند که در آن، δ کاستی این مثلث است. اما بر اساس این تعریف، ویژگی اساسی مساحت یعنی قاعدهٔ جمع مساحت‌ها برقرار نیست. بنا بر این قاعده، در مثلث دلخواه $\triangle(a, b, c)$ برای هر نقطهٔ x واقع بر پاره‌خط (a, b) و بین a و b، مساحت مثلث $\triangle(a, b, c)$ برابر است با جمع مساحت مثلث‌های $\triangle(c, b, x)$ و $\triangle(a, x, c)$. در این مقاله همانند بیشتر کتاب‌های هندسه، مساحت یک مثلث در مدل بلترامی ــ کلاین برابر با کاستی آن مثلث تعریف می‌شود و در قضیهٔ ۵ ثابت می‌شود که قاعدهٔ جمع مساحت‌ها برقرار است. روشی که برای اثبات قضیهٔ ۵ به‌کار رفته رهیافت جدیدی بر اساس ایده‌های کارتسل و اونگار، به‌ترتیب در [2,3] و [12، 11، 10، 9، 8] است.

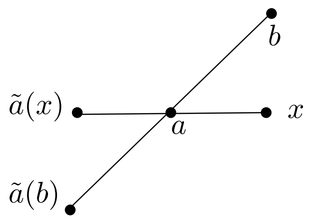
۲.۱. تعبیر هندسی جمع

یادآوری می‌کنیم که در صفحهٔ اقلیدسیِ $\mathcal{P}$ با انتخاب یک نقطهٔ مرجع O (مبدأ مختصات) می‌توان عمل جمع «+» را به‌قسمی تعریف کرد که $(\mathcal{P}, +)$ یک گروه آبلی باشد. برای نقاط a و b، مجموع $a + b$ رأس چهارم متوازی‌الاضلاعی است که سه رأس دیگر آن a، b و O هستند (شکل ۳). این روش را **قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع** می‌نامند. ویژگی اساسیِ این تعبیر، استفادهٔ ضمنی از اصل توازی است و در نتیجه، در صفحهٔ هذلولوی قابل استفاده نیست. روش دیگر برای تعبیر هندسی جمع که در [5] و [13] به‌طور مفصل بیان شده، استفاده از مفهوم **بازتاب (انعکاس)** نسبت به نقطه یا خط است. با این رهیافت برای بسیاری از مفاهیم در مدل بلترامی ــ کلاین از جمله کاستی و ویژگی‌های آن اثبات‌های دقیق و زیبایی به‌دست می‌آید. برای راحتی خوانندگانی که به مراجع اشاره شده دسترسی ندارند، برخی از مفاهیم پایه یادآوری می‌شوند.

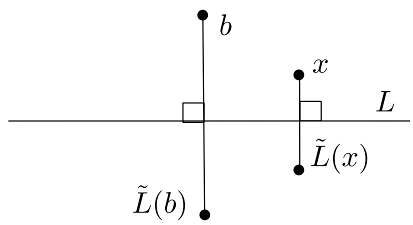
یک **خودریختی** صفحهٔ مطلق، نگاشتی یک‌به‌یک و پوشا از صفحه به خود آن صفحه است که خط را به خط تصویر می‌کند. در حالت خاص، یک خودریختی φ **حرکت** نامیده می‌شود اگر **طولپا** باشد. به بیان دیگر، برای هر دو نقطهٔ a و b، پاره‌خط (a, b) با تصویر آن تحت φ یعنی $(\varphi(a), \varphi(b))$ قابل‌انطباق باشد. مجموعهٔ $\mathcal{M}$، شامل همهٔ حرکت‌های یک صفحهٔ مطلق

1) Hanfried Lenz

با عمل ترکیب توابع یک گروه است که به آن **گروه حرکت‌های صفحهٔ مطلق** می‌گوییم. مهم‌ترین حرکت‌های صفحهٔ مطلق بازتاب‌های نقطه‌ای و خطی هستند. فرض کنیم a و b دو نقطهٔ متمایز در صفحه و $\overline{a,b}$ خط منحصر به‌فردی است که a و b بر آن واقع هستند. منظور از بازتاب b نسبت به نقطهٔ a که آن را با $\tilde{a}(b)$ نشان می‌دهیم، نقطهٔ منحصر به‌فردِ متمایز با b و واقع بر خط $\overline{a,b}$ است به‌قسمی که پاره‌خط (a,b) با پاره‌خط $(a,\tilde{a}(b))$ قابل‌انطباق باشد. به این ترتیب برای $a\in\mathcal{P}$، نگاشت $\tilde{a}:\mathcal{P}\longrightarrow\mathcal{P}$ با ضابطهٔ $x\mapsto \tilde{a}(x),\ \tilde{a}(a):=a$ را **بازتاب نقطه‌ای نسبت به a** می‌نامیم (شکل ۱). یادآوری می‌کنیم که در صفحهٔ مطلق برای هر نقطهٔ $p\in\mathcal{P}$ و هر خط L، دقیقاً یک خط H وجود دارد که p بر H واقع و H بر L عمود است. از این پس، برای بیان تعامد از نماد $H\perp G$ استفاده می‌کنیم. به عبارت دیگر، از هر نقطهٔ صفحه می‌توان بر هر خط دلخواه صفحه، عمود منحصر به‌فردی رسم کرد. برای سادگی می‌نویسیم $H:=\{p\perp L\}$. برای هر خط L، نگاشت $\widetilde{L}:\mathcal{P}\longrightarrow\mathcal{P}$ با ضابطهٔ $x\mapsto\widetilde{x}_L(x)$ به‌قسمی که $x_L=\{x\perp L\}\cap L$، **بازتاب خطی نسبت به خط L** نامیده می‌شود.



شکل ۱ بازتاب نقطه‌ای.



شکل ۲ بازتاب خطی.

در ادامه به چند نتیجهٔ مهم در مورد بازتاب‌های نقطه‌ای و خطی اشاره می‌کنیم:

۱. بازتاب‌های نقطه‌ای و خطی، حرکت‌های خودوارون (مرتبه‌ی ۲) هستند.

۲. هر حرکت را می‌توان به‌صورت حاصلضرب حداکثر سه بازتاب خطی بیان کرد.

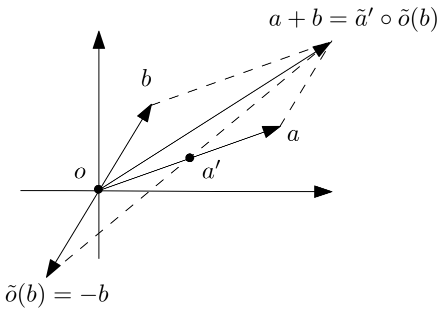
۳. حاصلضرب سه بازتاب خطی برای سه خط واقع بر یک نقطه، همواره یک بازتاب خطی نسبت به خطی است که از آن نقطه می‌گذرد.

۴. برای دو خط A و B، از $A\perp B$ و $c:=A\cap B$، نتیجه می‌شود $\widetilde{c}=\widetilde{A}\circ\widetilde{B}$.

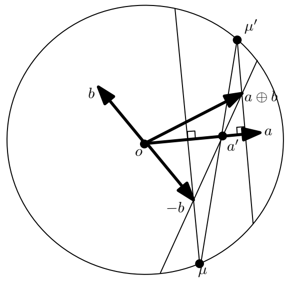
۵. هر حرکت با نقطهٔ ثابت منحصر به‌فرد a لزوماً همان انعکاس نقطه‌ای $\tilde{a}$ است و برای دو نقطهٔ متمایز a و b همواره $\widetilde{a}\circ\widetilde{b}\circ\widetilde{a}$ یک انعکاس نقطه‌ای است.

اکنون به یادآوری تعبیر هندسی جمع در صفحهٔ مطلق با روش مبتنی بر بازتاب‌های نقطه‌ای می‌پردازیم. این روش مستقل از اصل توازی است (شکل ۳). فرض کنیم a' نقطهٔ وسط a و O

باشد. مشاهده می‌شود که $a+b=\tilde{a}'\circ\tilde{O}(b)$.



شکل ۳ تعبیر جمع بر اساس بازتاب.



شکل ۴ تعبیر هندسی جمع نسبیتی.

این قاعدهٔ ساده و اساسی را نخستین بار کارتسل در صفحهٔ مطلق به‌کار برد ([2]). مزیت اصلی این تعبیر، استقلال آن از مفهوم توازی است. این همان قاعدهٔ جمع در نظریهٔ نسبیت خاص است.

۳.۱. جمع در مدل بلترامی ـ کلاین

در مدل بلترامی ـ کلاین، عمل جمع به‌وسیلهٔ رابطهٔ $a\oplus b:=\widetilde{a'}\circ\widetilde{O}(b)$ تعریف می‌شود. در این مقاله از نماد «$+$» برای جمع در $\mathbf{R}$ و از نماد «$\oplus$» برای جمع نسبیتی (هذلولوی) در $\mathbf{D}$ استفاده می‌کنیم. در ادامهٔ بحث، روش هندسی به‌دست آوردن $a\oplus b$ را یادآوری می‌کنیم. بازتاب نسبت به نقطهٔ O، نقطهٔ b را به $-b$ می‌نگارد. پس برای محاسبهٔ $\widetilde{a'}\circ\widetilde{O}(b)=\widetilde{a'}(-b)$، اگر $b=O$، آن‌گاه $a\oplus b=a\oplus O=a$. فرض کنیم $b\neq O$. در این صورت، به‌ازای $\mu\in\mathbf{S}\cap(-b\perp A)$ و $\mu'\in\mathbf{S}\cap\overline{\mu,a'}$ که در آن، $\mu'\neq\mu$ (شکل ۴)، داریم

$$a\oplus b=\widetilde{a'}(-b)=\overline{-b,a'}\cap(\mu'\perp A).$$

در این نوشتار، یکی از قضیه‌های [17] و [13] را مورد استفاده قرار می‌دهیم.

قضیه ۱. فرض کنیم $\mathbf{D}$ قرص واحد باز در مجموعهٔ اعداد مختلط $\mathbf{C}$ باشد. در این صورت، مدل بلترامی ـ کلاین مجموعهٔ $\mathbf{D}$ است و ساختار متریک در این مدل به‌صورت زیر مشخص می‌شود:

۱. برای هر $a\in\mathbf{D}$، انعکاس نسبت به نقطهٔ a توسط نگاشت متعامد زیر به‌دست می آید:

$$\widetilde{a}:\ D\to D\ ;\ x\mapsto\frac{(a\bar{a}-۱)x+(۲-(a\bar{x}+x\bar{a}))a}{۱+a\bar{a}-(a\bar{x}+x\bar{a})}. \qquad (۱)$$

۲. برای هر دو نقطهٔ $a,b \in \mathbf{D}$، نقطهٔ m وسطِ a و b از رابطهٔ

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{\sqrt{۱-b\bar{b}}}{\sqrt{۱-a\bar{a}}+\sqrt{۱-b\bar{b}}}\, a + \frac{\sqrt{۱-a\bar{a}}}{\sqrt{۱-a\bar{a}}+\sqrt{۱-b\bar{b}}}\, b \\
&= \frac{\| b \|_h}{\| a \|_h + \| b \|_h}\, a + \frac{\| a \|_h}{\| a \|_h + \| b \|_h}\, b.
\end{aligned} \tag{۲}
$$

به‌دست می آید که در آن، $(\| a \|_h = \sqrt{۱-a\bar{a}} = \sqrt{۱-|a|^۲})$. به‌ویژه، نقطهٔ a' وسطِ a و O از رابطهٔ

$$
a' = \frac{۱}{۱+\sqrt{۱-a\bar{a}}}\, a = \frac{۱}{۱+\| a \|_h}\, a. \tag{۳}
$$

به‌دست می آید.

۳. برای هر خط U که $O \in U$ و برای هر $a,b \in U$، $a \oplus b = \frac{۱}{۱+\bar{a}b}(a+b)$. همچنین مجموعهٔ U یک گروه جابه‌جایی یکریخت با $((-۱,۱),\oplus)$ و در نتیجه یکریخت با $(\mathbf{R},+)$ است.

۴. برای $a,b \in \mathbf{D}$، داریم

$$
a \oplus b = \frac{a+b}{۱+\langle a,b\rangle} + \frac{۱}{۱+||a||_h}\left(\frac{\langle a,b\rangle\, a - |a|^۲\, b}{۱+\langle a,b\rangle} \right), \tag{۴}
$$

$$
(۱+\langle a,b\rangle)\, \|a \oplus b\|_h = \|a\|_h\, \|b\|_h. \tag{۵}
$$

۲. ساختار جبری جمع نسبیتی روی مجموعهٔ سرعت‌های مجاز

در این بخش، ابتدا به یادآوری ساختار جبری $(\mathbf{D},\oplus)$ می‌پردازیم. این ساختار یک لوپ خاص موسوم به K ـ لوپ است. مفهوم K ـ لوپ به روش‌های مختلف قابل تعریف است که همه هم‌ارزند. یک تعریف ساده این است که لوپ K یک K ـ لوپ (یا بروک ـ لوپ) است هرگاه رابطهٔ «بُل»:

$$
a+(b+(a+c)) = (a+(b+a))+c \tag{٦}
$$

و ویژگی معکوس خودریخت به‌شکل زیر در آن برقرار باشند:

$$
-(a+b) = (-a)+(-b). \tag{۷}
$$

در تساوی فوق، $-a$ وارون راست a است و بر مبنای رابطهٔ $a + (-a) = ۰$ تعریف می‌شود. روش دیگر تعریف K ـ لوپ به‌کمک جایگشت‌ها است. اگر $(K, +)$ یک لوپ باشد، برای هر $a, b, x \in K$، رابطهٔ

$$a + (b + x) = (a + b) + \delta_{a,\, b}(x)$$

یک نگاشت دوسویی $\delta_{a,\, b} : K \longrightarrow K$ تعریف می‌کند که آن را **نگاشت چرخش**[1] هم می‌نامیم. نگاشت‌های چرخش در یک K ـ لوپ خودریختی‌های آن ($\mathrm{Aut}(K, +)$) هستند. لوپ $(K, +)$ یک K ـ لوپ است هرگاه برای هر $a, b \in K$ داشته باشیم

$$[K_۱] \qquad \delta_{a,b} \in Aut\ (K, +), \qquad (۸)$$

$$[K_۲] \qquad \delta_{a,b} = \delta_{a,b+a}, \qquad (۹)$$

$$[K_۳] \qquad -(a + b) = (-a) + (-b). \qquad (۱۰)$$

ثابت می‌شود ([5] و [13]) که $(\mathbf{D}, \oplus)$ یک K ـ لوپ با عضو همانی O است. همچنین $\mathbf{D}^+ = \{\tilde{a}^+ :\ a \in \mathbf{D},\ \ a^+ = \tilde{a}' \circ \tilde{O}\}$ زیر مجموعه‌ای از گروه حرکت‌های صفحهٔ هذلولوی است. افزون بر این، $\tilde{O} \in \mathrm{Aut}(\mathbf{D}, \oplus)$، یعنی

$$-(a \oplus b) = (-a) \oplus (-b)$$

و تساوی بل برقرار است ([2]):

$$a^+ \circ b^+ \circ a^+ = c^+ = (a + (b + a))^+.$$

نکتهٔ مهم دیگر این است که $(\mathbf{D}, \oplus)$ نه تعویض‌پذیر است و نه شرکت‌پذیر. اگر قرار دهیم $\delta_{a,b} = (a^+(b)^+)^{-۱} \circ a^+ \circ b^+ = ((a + b)^+)^{-۱} \circ a^+ \circ b^+$، آن‌گاه طبق تعریف،

$$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus \delta_{a,b}(c)$$

و $\delta_{a,b}(O) = O$. در [17] نشان داده شده که برای هر $x, y \in \mathbf{D}$ داریم

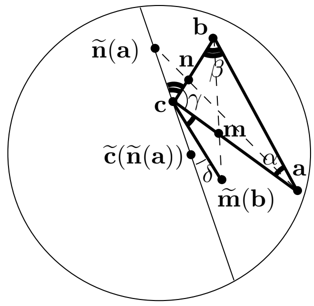
$$\delta_{a,b}(x) \oplus \delta_{a,b}(y) \quad = \quad \delta_{a,b}(x \oplus y),$$

یعنی $\delta_{a,b}$ یک خودریختی $(\mathbf{D}, \oplus)$ است. نگاشت $\delta_{a,b}$ که پیش از این نگاشت چرخش نامیده شد، یک دوران حول O است و **دوران توماس**[2] نامیده می‌شود ([10] و [7]). در بخش بعد نشان می‌دهیم که زاویهٔ دوران توماس برابر با کاستی مثلث $\triangle(O, a, -b)$ است. یک ویژگی دیگر دوران توماس که مورد استفادهٔ ما قرار می‌گیرد این است که برای هر $x, y \in \mathbf{D}$،

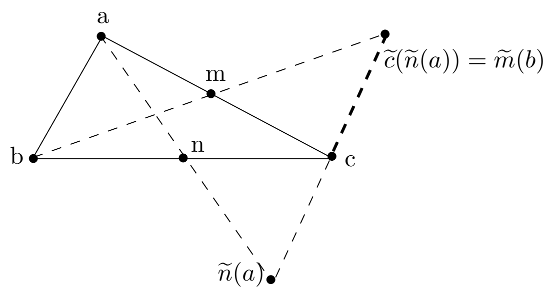
$$\delta_{y,x}(x \oplus y) = y \oplus x. \qquad (۱۱)$$

---

1) precession map   2) Thomas rotation



شکل ٦ کاستی در مدل بلترامی ــ کلاین.



شکل ۵ کاستی صفر در صفحهٔ اقلیدسی.

۳. کاستی در مدل بلترامی ــ کلاین

فرض کنیم $\triangle(a,b,c)$ یک مثلث دلخواه در صفحهٔ اقلیدسی، m نقطهٔ وسط a و c و n نقطهٔ وسط b و c باشد. نقطهٔ وسط x و y نقطهٔ $\frac{x+y}{۲}$ است و بازتاب نقطهٔ x نسبت به نقطهٔ z با رابطهٔ $\widetilde{z}(x) = ۲z - x$ مشخص می‌شود. با توجه به این که در مدل تحلیلی هندسهٔ اقلیدسی، عمل جمع شرکت‌پذیر و تعویض‌پذیر است، روابط $\widetilde{m}(b) = ۲m - b = a + c - b$ و $\widetilde{c}(\widetilde{n}(a)) = \widetilde{c}(۲n - a) = ۲c - (۲n - a) = a + c - b$ برقرار هستند. بنابراین $\widetilde{m}(b) = \widetilde{c}(\widetilde{n}(a))$، یعنی زاویهٔ $\delta := \angle\big(\widetilde{m}(b), c, \widetilde{c}(\widetilde{n}(a))\big)$ برابر با صفر است (شکل ۵).

اکنون مثلث دلخواه $\triangle(a,b,c)$ را در مدل بلترامی ــ کلاین در نظر می‌گیریم. حرکت $\widetilde{n}$ نقطهٔ b را به c و نقطهٔ a را به $\widetilde{n}(a)$ تصویر می‌کند. بنابراین خط $\overline{b,a}$ به خط $\overline{c,\widetilde{n}(a)}$ تصویر و خط $\overline{b,c}$ ثابت نگه‌داشته می‌شود. در نتیجه زاویهٔ $\beta := \angle(a,b,c)$ به زاویهٔ $\angle(\widetilde{n}(a),c,b)$ تصویر می‌شود. پس $\beta \equiv \angle(\widetilde{n}(a),c,b)$. به همین ترتیب، $\alpha := \angle(b,a,c) \equiv \angle(a,c,\widetilde{m}(b))$ (شکل ٦). فرض کنیم $\delta := \angle\big(\widetilde{m}(b), c, \widetilde{c}(\widetilde{n}(a))\big)$ و $\gamma := \angle(b,c,a)$. در مدل بلترامی ــ کلاین که مدلی برای هندسهٔ هذلولوی است، اندازهٔ $\alpha + \beta + \gamma$ کمتر از دو قائمه است. پس با توجه به این‌که اندازهٔ زاویهٔ $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ برابر با دو قائمه است، نتیجه می‌شود که کاستی مثلث $\triangle(a,b,c)$ برابر با δ است (شکل ٦).

برای به‌دست آوردن یک فرمول تحلیلی ساده برای محاسبهٔ کاستی مثلث $\triangle(a,b,c)$ بدون کم شدن از کلیت مسأله می‌توان فرض کرد که $c = O$، یعنی رأس c بر مبدأ منطبق است. دلیل این است که می‌توان مثلث $\triangle(a,b,c)$ را با حرکت $\widetilde{c'}$ به مثلثی همنهشت با آن نگاشت که یک رأس مثلث مبدأ مختصات باشد. در این صورت، $m = a'$ و $n = b'$. در نتیجه $\widetilde{m}(b) = a \oplus (-b)$ و $\widetilde{c}(\widetilde{n}(a)) = -(\widetilde{n}(a)) = (-b) \oplus a$. بنابر قضیهٔ ۱، داریم

$$||a \oplus (-b)||_h = \frac{\|a\|_h \; \|-b\|_h}{۱ + \langle a, -b\rangle} = \frac{\|a\|_h \; \|b\|_h}{۱ - \langle a, b\rangle} = \frac{\|-b\|_h \; \|a\|_h}{۱ + \langle -b, a\rangle} = \|(-b) \oplus a\|_h .$$

در نتیجه $|a \oplus (-b)| = |(-b) \oplus a|$. پس

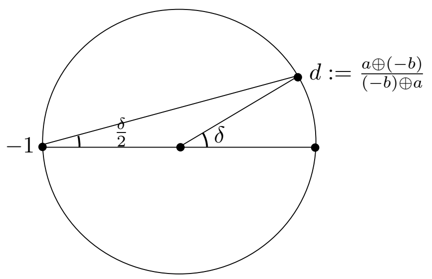
$$\delta = \arccos\Big(\frac{\langle a \oplus (-b)\ ,\ (-b) \oplus a\rangle}{|(-b) \oplus a|^{۲}}\Big). \tag{۱۲}$$

از سوی دیگر، بنابر رابطهٔ (۸)، $\delta_{a,-b}((-b) \oplus a) = a \oplus (-b)$ و لذا

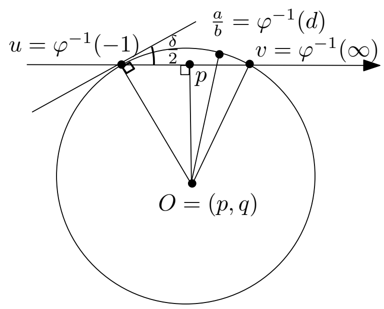
قضیه ۲. در مثلث $\triangle(a,b,c)$ زاویهٔ دوران نگاشت توماس، $\delta_{a,-b}$، برابر با کاستی $\triangle(a,b,c)$ است.

پس $d := \dfrac{a \oplus (-b)}{(-b) \oplus a}$ یک بردار واحد است با $\cos\delta = \dfrac{d + \bar{d}}{۲}$ (شکل ۷) و طبق قضیهٔ ۱، داریم

$$\begin{aligned} a \oplus (-b) &= \frac{۱}{۱ - \langle a,b\rangle}\Big(-||a||_h\ b + (۱ - \frac{\langle a,b\rangle}{۱ + ||a||_h})a\Big),\\ (-b) \oplus a &= \frac{۱}{۱ - \langle a,b\rangle}\Big(||b||_h\ a - (۱ - \frac{\langle a,b\rangle}{۱ + ||b||_h})b\Big). \end{aligned}$$



شکل ۷ زاویهٔ کاستی.



شکل ۸ اثر نگاشت همدیس $\varphi^{-۱}$.

در نتیجه

$$d = \frac{a \oplus (-b)}{(-b) \oplus a} = \frac{-||a||_h\ b + (۱ - \frac{\langle a,b\rangle}{۱+||a||_h})a}{-(۱ - \frac{\langle a,b\rangle}{۱+||b||_h})b + ||b||_h\ a}.$$

فرض کنیم φ نگاشت همدیسی با ضابطهٔ

$$z \mapsto \frac{-||a||_h\ + (۱ - \frac{\langle a,b\rangle}{۱+||a||_h})z}{-(۱ - \frac{\langle a,b\rangle}{۱+||b||_h}) + ||b||_h\ z}$$

باشد. در این صورت، $d = \varphi(\frac{a}{b})$ و $\varphi^{-۱}$ نگاشت همدیسی با ضابطهٔ

$$z \mapsto \frac{-||a||_h\ + (۱ - \frac{<a,b>}{۱+||b||_h})z}{-(۱ - \frac{<a,b>}{۱+||a||_h}) + ||b||_h\ z}$$

خواهد بود. بنابراین

$$\varphi^{-1}(d) = \frac{a}{b}, \quad \varphi^{-1}(-1) = \frac{1 + \|a\|_h}{1 + \|b\|_h} =: u, \quad \varphi^{-1}(\infty) = \frac{1 + \|b\|_h - \langle a, b\rangle}{\|b\|_h(1 + \|b\|_h)} =: v$$

و لذا φ^{-1} محور x را بر خودش می‌نگارد (شکل ۸). علاوه بر این، فرض کنیم $O = (p, q)$ مرکز دایرهٔ $\varphi^{-1}(\mathbf{S})$ باشد ($\mathbf{S} := \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$). چون $\|a \oplus (-b)\|_h < 1$، از قضیهٔ ۱ نتیجه می‌شود که $\|a\|_h \, \|b\|_h < 1 - \langle a, b\rangle$ و این معادل است با $u < v$. پس

$$p = \frac{u + v}{2} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\|b\|_h + \|a\|_h \, \|b\|_h + 1 + \|b\|_h - \langle a, b\rangle}{\|b\|_h(1 + \|b\|_h)}\Big).$$

اگر قرار دهیم $b^{\perp} := ib$، $r := \dfrac{\langle a, b\rangle}{|b|^2}$ و $s := \dfrac{\langle a, b^{\perp}\rangle}{|b|^2}$، آن‌گاه $\dfrac{a}{b} = r + si$. چون مرکز دایرهٔ $\varphi^{-1}(\mathbf{S})$ عمودمنصف پاره‌خط (u, v) است، پس $(p-r)^2 + (q-s)^2 = (m-u)^2 + q^2$. از این‌رو

$$q = \frac{1}{2s}\Big(\frac{|a|^2}{|b|^2} + uv - rv - ru\Big).$$

در نتیجه $\tan\dfrac{\delta}{2} = |\dfrac{p-u}{q}|$ یا به‌طور معادل

$$\tan\frac{\delta}{2} = \Big|\frac{-\langle a, b^{\perp}\rangle\big(\|a\|_h \, \|b\|_h - 1 + \langle a, b\rangle\big)}{\big(\|a\|_h \, \|b\|_h - 1 + \langle a, b\rangle\big)\big(\langle a, b\rangle - (1 + \|a\|_h)(1 + \|b\|_h)\big)}\Big|.$$

به این ترتیب اثبات کوتاه و ساده‌ای برای فرمول اونگار در [12] (قضیهٔ ۱۵) به‌دست می‌آید:

$$\tan\frac{\delta}{2} = \Big|\frac{\langle a, b^{\perp}\rangle}{(1 + \|a\|_h)(1 + \|b\|_h) - \langle a, b\rangle}\Big|. \tag{۱۳}$$

به‌ویژه اگر $\triangle(a, b, O)$ قائم‌الزاویه باشد، این فرمول به‌صورت ساده‌تری قابل بیان است:

$$\tan\frac{\delta}{2} = \frac{|a| \, |b|}{(1 + \|a\|_h)(1 + \|b\|_h)} = |a'| \, |b'|. \tag{۱۴}$$

اونگار به‌کمک نرم‌افزارهای ریاضی فرمول زیر را برای محاسبهٔ کاستی مثلث به‌دست آورده که با (۱۰) هم‌ارز است ([12]):

$$\tan\frac{\delta}{2} = \frac{\sqrt{1 + 2\gamma_a\gamma_b\gamma_c - \gamma_a^2 - \gamma_b^2 - \gamma_c^2}}{1 + \gamma_a + \gamma_b + \gamma_c}, \qquad \gamma_x := \frac{1}{\sqrt{1 - |x|^2}}. \tag{۱۵}$$

به‌کمک این فرمول نشان می‌دهد که در قرص به شعاع r، به‌عنوان مدل بلترامی ـ کلاین، اگر h_a را ارتفاع نظیر رأس a در نظر بگیریم، آن‌گاه

$$\gamma_a a \gamma_{h_a} h_a = r^2(1 + \gamma_a + \gamma_b + \gamma_c)\tan\frac{\delta}{2}.$$

به این ترتیب، می‌توانیم مساحت مثلث هذلولوی $\triangle ABC$ با کاستی δ در دایرهٔ به شعاع r را برابر با $r^{۲}\delta$ تعریف کنیم. در حالت $r=۱$ مساحت مثلث هذلولوی برابر با δ می‌شود و داریم

$$r^{۲}\delta = ۲r^{۲}\tan^{-۱}\frac{\gamma_a a\gamma_{h_a}h_a}{r^{۲}(۱+\gamma_a+\gamma_b+\gamma_c)}.$$

وقتی r به بی‌نهایت میل می‌کند، نتیجه می‌گیریم

$$\lim_{r\to\infty} r^{۲}\delta = \lim_{r\to\infty} ۲r^{۲}\left(\frac{\frac{\gamma_a a\gamma_{h_a}h_a}{r^{۲}(۱+\gamma_a+\gamma_b+\gamma_c)}}{\frac{\gamma_a a\gamma_{h_a}h_a}{r^{۲}(۱+\gamma_a+\gamma_b+\gamma_c)}}\right)\tan^{-۱}\left(\frac{\gamma_a a\gamma_{h_a}h_a}{r^{۲}(۱+\gamma_a+\gamma_b+\gamma_c)}\right) = \frac{۱}{۲}ah_a.$$

پس اگر $r\to\infty$؛ یعنی اگر صفحهٔ هذلولوی به صفحهٔ اقلیدسی تبدیل شود، آن‌گاه فرمول مساحت مثلث در هندسهٔ هذلولوی به فرمول آشنای مساحت مثلث اقلیدسی تبدیل می‌شود.

۴. ویژگی‌های کاستی مثلث در مدل بلترامی ــ کلاین

بر اساس یکی از ویژگی‌های بنیادی کاستی مثلث در مدل بلترامی ــ کلاین، مفهوم مساحت مثلث در این مدل تعریف می‌شود. این ویژگی در قضیهٔ زیر بیان شده است.

قضیه ۳. برای هر نقطهٔ $x\in(a,b)$ کاستی مثلث $\triangle(a,b,c)$ برابر مجموع کاستی‌های دو مثلث $\triangle(c,a,x)$ و $\triangle(c,b,x)$ است.

برای اثبات این قضیه ابتدا به بیان یک لم از [3] ((۱.۲) و (۴.۱)) می‌پردازیم.

لم ۴. فرض کنیم α یک حرکت و $\widetilde{x,y}$ بازتاب نقطه‌ای یکتایی باشد که x و y را به هم تصویر می‌کند. در این صورت، برای نقاط a,b,O داریم

۱ــ $\alpha\circ\widetilde{a,b}\circ\alpha^{-۱}=\widetilde{\alpha(a),\alpha(b)}$.

۲ــ $\widetilde{a}\circ\widetilde{b}\circ\widetilde{a}=\widetilde{\widetilde{a}(b)}$.

۳ــ $\widetilde{O,\ominus b}=\widetilde{O}\circ\widetilde{O,b}\circ\widetilde{O}$.

۴ــ $\widetilde{O,a}\circ\widetilde{o,a\ominus b}\circ\widetilde{O,a}=\widetilde{a,b}$.

۵ــ $\delta_{a,b}=\widetilde{O,a\oplus b}\circ\widetilde{O,a}\circ\widetilde{O}\circ\widetilde{O,b}$.

اثبات. ۱) نقطهٔ m وسط پاره‌خط (a,b) تنها نقطهٔ ثابت بازتاب نقطه‌ای $\widetilde{a,b}$ است. پس

$$\alpha\circ\widetilde{a,b}\circ\alpha^{-۱}(x)=x \iff \widetilde{a,b}\,(\alpha^{-۱}(x))=\alpha^{-۱}(x)\iff \alpha^{-۱}(x)=m\iff x=\alpha(m)$$

به این ترتیب تنها نقطهٔ ثابت $\alpha\circ\widetilde{a,b}\circ\alpha^{-۱}$ که یک حرکت مرتبهٔ ۲ است، نقطهٔ $\alpha(m)$ است. از سوی دیگر، چون $\alpha\circ\widetilde{a,b}\circ\alpha^{-۱}(\alpha(a))=\alpha(b)$، پس $\alpha\circ\widetilde{a,b}\circ\alpha^{-۱}=\widetilde{\alpha(a),\alpha(b)}$.

۲) شبیه قسمت (۱) است.

۳) برای $\alpha = \widetilde{O}$ از قسمت (۱) نتیجه می‌شود.
۴) برای $\alpha = \widetilde{O,a}$ از قسمت (۱) نتیجه می‌شود.
۵) بنابر تعریف دوران توماس (نگاشت چرخش) $\delta_{a,b}$، داریم

$$\delta_{a,b} = ((a \oplus b)^{+})^{-1} \circ a^{+} \circ b^{+} = \widetilde{O} \circ \widetilde{O,a \oplus b} \circ \widetilde{O,a} \circ \widetilde{O} \circ \widetilde{O,b} \circ \widetilde{O}.$$

همچنین

$$O = \delta_{a,b}(O) = \delta_{a,b}(x \oplus (-x)) = \delta_{a,b}(x) \oplus \delta_{a,b}(-x)$$

و در نتیجه $-\delta_{a,b}(x) = \delta_{a,b}(-x)$، یعنی $\widetilde{O} \circ \delta_{a,b} \circ \widetilde{O} = \delta_{a,b}$. به این ترتیب

$$\delta_{a,b} = \widetilde{O,a \oplus b} \circ \widetilde{O,a} \circ \widetilde{O} \circ \widetilde{O,b}\,. \tag{۱۶}$$

اکنون به اثبات ویژگی مهم کاستی می‌پردازیم. با توجه به آنچه در مورد رابطهٔ کاستی مثلث با دوران توماس در قضیهٔ ۲ گفته شد، قضیهٔ ۳ معادل قضیهٔ زیر است.

قضیه ۵. اگر $a, b, x \in \mathbf{D}$ سه نقطهٔ هم‌خط باشند، آن‌گاه

$$\delta_{a,-b} = \delta_{a,-x} \circ \delta_{x,-b}. \tag{۱۷}$$

اثبات. بنابر رابطهٔ (۱۳)، تساوی (۱۴) معادل است با

$$\widetilde{O,a \ominus b} \circ \widetilde{O,a} \circ \widetilde{O} \circ \widetilde{O,\ominus b} = \widetilde{O,a \ominus x} \circ \widetilde{O,a} \circ \widetilde{O} \circ \widetilde{O,\ominus x} \circ \widetilde{O,x \ominus b} \circ \widetilde{O,x} \circ \widetilde{O} \circ \widetilde{O,\ominus b}.$$

این رابطه با حذف عبارت‌های یکسان، به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\widetilde{O,a \ominus b} \circ \widetilde{O,a} = \widetilde{O,a \ominus x} \circ \widetilde{O,a} \circ \widetilde{O} \circ \widetilde{O,\ominus x} \circ \widetilde{O,x \ominus b} \circ \widetilde{O,x}\,.$$

با ترکیب دو طرف این معادله با $\widetilde{O,a}$ از چپ، تساوی زیر به‌دست می‌آید:

$$\widetilde{O,a} \circ \widetilde{O,a \ominus b} \circ \widetilde{O,a} = (\widetilde{O,a} \circ \widetilde{O,a \ominus x} \circ \widetilde{O,a}) \circ \widetilde{O} \circ \widetilde{O,\ominus x} \circ \widetilde{O,x \ominus b} \circ \widetilde{O,x}\,.$$

بنابر لم ۴، تساوی بالا به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\widetilde{a,b} = \widetilde{a,x} \circ (\widetilde{O,x} \circ \widetilde{O} \circ \widetilde{O,x}) \circ (\widetilde{O,x} \circ \widetilde{O,x \ominus b} \circ \widetilde{O,x}) = \widetilde{x,a} \circ \widetilde{x} \circ \widetilde{b,x}\,.$$

به عبارت دیگر، باید ثابت کنیم $\widetilde{x,a} \circ \widetilde{a,b} \circ \widetilde{b,x} = \widetilde{x}$. اما این رابطه درست است، زیرا a، b و x هم‌خط هستند، $\widetilde{x,a} \circ \widetilde{a,b} \circ \widetilde{b,x}\,(x) = x$ و نقطهٔ ثابت یک بازتاب نقطه‌ای یکتا است. ■

۵. مساحت و محیط دایره در مدل بلترامی ـ کلاین

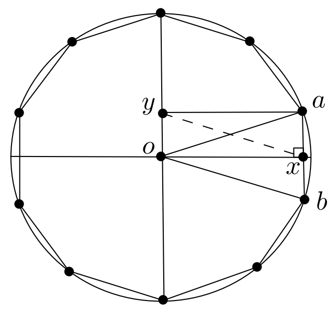
در این بخش، بر اساس فرمول جمع نسبیتی، به بررسی مساحت و محیط دایره در مدل بلترامی ـ کلاین می‌پردازیم. شبیه به روش معمول برای تعریف مساحت و محیط دایره در صفحهٔ

اقلیدسی، در اینجا نیز مساحت و محیط دایره را حد مساحت و محیط یک n ـ ضلعی منتظم P_n وقتی $n \to \infty$ تعریف می‌کنیم که P_n در این دایره محاط شده است.

بدون کم شدن از کلیت مسأله، فرض می‌کنیم C دایره‌ای به شعاع $۱ > r > ۰$ و مرکز مبدأ مختصات، S_r مساحت و C_r محیط آن باشند. همچنین فرض کنیم a و b دو نقطهٔ مجاور در P_n و x نقطهٔ وسط پاره‌خط (a,b) باشد (شکل ۹). در این صورت، مثلث $\triangle(a,O,x)$ یک مثلث قائم‌الزاویه در رأس x و مساحت P_n برابر با جمع مساحت‌های $۲n$ مثلث قائم‌الزاویهٔ همنهشت است. در این مثلث داریم $|x| = r\cos\dfrac{\pi}{n}$. فرض کنیم $y := \tilde{O} \circ \widetilde{x}'(a)$. بنا بر تعریف، $a = x \oplus y$ و $\triangle(y,O,x) \equiv \triangle(a,x,O)$. پس بنابر قسمت (۳) قضیهٔ ۱، $\| a \|_h = \| x \|_h \| y \|_h$ و در نتیجه

$$\sqrt{۱ - r^۲} = \sqrt{۱ - r^۲\cos^۲(\pi/n)}\ \ \sqrt{۱ - |y|^۲}.$$

بنابراین $|y| = \dfrac{r\sin(\pi/n)}{\sqrt{۱ - r^۲\cos^۲(\pi/n)}}$..



شکل ۹ مساحت و محیط دایره به‌عنوان حد مساحت و محیط یک n ـ ضلعی منتظم P_n.

فرض کنیم δ کاستی $\triangle(a,O,x) \equiv \triangle(y,O,x)$ باشد. در این صورت، بنابر معادلهٔ (۱۱) داریم

$$\frac{\delta}{۲} = \tan^{-۱}(|x'||y'|)$$

پس مساحت P_n به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} S_n &= ۴n\tan^{-۱}(|x'||y'|) \\ &= ۴n\tan^{-۱}\left(|\frac{x}{۱+\| x \|_h}|\,|\frac{y}{۱+\| y \|_h}|\right) \\ &= ۴n\tan^{-۱}\left(\frac{r\cos(\pi/n)}{۱+\sqrt{۱-r^۲\cos^۲(\pi/n)}}\ \ \frac{r\sin(\pi/n)/\sqrt{۱-r^۲\cos^۲(\pi/n)}}{۱+\sqrt{۱-(\frac{r\sin(\pi/n)}{\sqrt{۱-r^۲\cos^۲(\pi/n)}})^۲}}\right) \end{aligned}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}
S_n &= ۴n\tan^{-۱}\frac{۱}{۴n}\Big[\Big(\frac{r\cos(\pi/n)}{۱+\sqrt{۱-r^۲\cos^۲(\pi/n)}} \quad \frac{۴nr\sin(\pi/n)}{\sqrt{۱-r^۲\cos^۲(\pi/n)}+\sqrt{۱-r^۲}}\Big)\Big] \\
&= ۴n\tan^{-۱}\frac{۱}{۴n}\Big[\Big(\frac{r\cos(\pi/n)}{۱+\sqrt{۱-r^۲\cos^۲(\pi/n)}} \quad \frac{۴\pi r\frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n}}{\sqrt{۱-r^۲\cos^۲(\pi/n)}+\sqrt{۱-r^۲}}\Big)\Big].
\end{aligned}$$

اکنون اگر $n\to\infty$، آن‌گاه مساحت دایرهٔ C در مدل بلترامی ـ کلاین به‌دست می‌آید:

$$S_n \to \frac{۲\pi r^۲}{۱-r^۲+\sqrt{۱-r^۲}} := S_r.$$

برای سادگی قرار می‌دهیم $\gamma_r = \frac{۱}{\sqrt{۱-r^۲}}$. در این صورت

$$S_r = \pi r^۲\frac{۲\gamma_r^۲}{۱+\gamma_r}.$$

به همین ترتیب محیط P_n عبارت است از

$$C_n = ۲n\,|y| = ۲n\frac{r\sin(\pi/n)}{\sqrt{۱-r^۲\cos^۲(\pi/n)}}.$$

در این حالت نیز اگر $n\to\infty$، محیط دایرهٔ C در مدل بلترامی ـ کلاین را خواهیم یافت:

$$C_n \to \frac{۲\pi r}{\sqrt{۱-r^۲}} := C_r.$$

به این ترتیب $C_r = ۲\pi r\gamma_r$.

مشاهده می‌شود که اگر $r\to ۰$، آن‌گاه $\gamma_r \to ۱$ و فرمول‌های مساحت و محیط برای دایره‌های با شعاع کوچک به همان فرمول‌های شناخته شدهٔ مساحت و محیط دایره در هندسهٔ اقلیدسی نزدیک می‌شوند. به عبارت دیگر، در جهان هذلولوی برای دایره‌های کوچک می‌توان از فرمول‌های مساحت و محیط در هندسهٔ اقلیدسی استفاده کرد. پیش از این نیز دیدیم که تعریف مساحت مثلث به‌کمک کاستی آن با این نکتهٔ مهم سازگار است که مساحت مثلث در هندسهٔ اقلیدسی حد مساحت آن در مدل بلترامی ـ کلاین به‌ازای دایره‌ای به شعاع بی‌نهایت بزرگ است.

مراجع

[1] Karzel H., Sörensen K., Windelberg D., *Einführung in die Geometrie*, Vandenhoeck, Göttingen, 1973.

[2] Karzel H., “Recent developments on absolute geometries and algebraization by K-loops”, *Discrete Math.*, **208/209**(1999), 387-409.

[3] KARZEL H. AND MARCHI, M., "Relation between the K-loop and the defect of an absolute plane", *Results Math.*, **47**(2005), 305-326.

[4] LENZ H., *Nichteuklidische Geometrie* , B.I Hochschultaschenbücher, Mannheim, 1967.

[5] TAHERIAN S. GH., "On algebraic structures related to Beltrami-Klein model of hyperbolic geometry", *Results Math.*, **57**(2010), 205-219.

[6] ROSTAMZADEH M. AND TAHERIAN S. GH., "Defect and Area in Beltrami-Klein Model of Hyperbolic Geometry", *Results Math.*, **63**(2013), 229-239.

[7] THOMAS H. L., "The motion of the spinning electron", *Nature* (1926), 117-514.

[8] UNGAR A. A., "Thomas rotation and the parametrization of the Lorentz transformation group", *Found. Phys. Lett.*, **1**(1988), 57-89.

[9] UNGAR A. A., "The relativistic noncommutative nonassociative group of velocities and the Thomas rotation", *Resultate Math.*, **16**(1989), 168-179.

[10] UNGAR A. A., "Thomas precession and its associated grouplike structure", *Amer. J. Phys.*, **59**(1991), 824-834.

[11] UNGAR A. A., *Beyond the Einstein addition law and its gyroscopic Thomas Precession.* Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 2001.

[12] UNGAR A. A., "Einsteins velocity addition law and its hyperbolic geometry", *Comput. Math. Appl.*, **53**(2007), 1228-1250.

[۱۳] سید قهرمان طاهریان، «ساختار جبری جمع در نظریهٔ نسبیت اینشتین»، فرهنگ و اندیشه ریاضی، ۳۰، شماره پیاپی ۴۸، پاییز ۹۰، صص. ۲۲—۱.

سید قهرمان طاهریان
دانشگاه صنعتی اصفهان، دانشکدهٔ علوم ریاضی
taherian@cc.iut.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۲ (بهار ۱۳۹۲) صص. ۵۳ تا ۷۱

نظریهٔ شمارشی پولیا

فاطمه کوره‌پزان مفتخر و علی‌رضا اشرفی

چکیده

در این مقاله به بازنگری فرمول شمارشی پولیا می‌پردازیم. این روش، راه‌حلی را برای شمارش تعداد گراف‌های غیریکریخت از مرتبهٔ n ارائه می‌دهد. به‌علاوه، کاربردهایی از قضیهٔ شمارش پولیا در حل مسائلی از شیمی ارائه خواهد شد که با استفاده از آن می‌توان تعداد ایزومرهای خانواده‌ای از ترکیبات شیمیایی را به‌دست آورد.

واژه‌ها و اصطلاحات کلیدی: شاخص دوری، عمل گروه، قضیهٔ شمارشی پولیا.
رده‌بندی موضوعی: انجمن ریاضی آمریکا: 05E18.

۱. مروری بر زندگی علمی جورج پولیا

پدر و مادر جورج پولیا[۱]، آنا دویچ[۲] و یاکاب پولیا[۳]، هر دو یهودی بودند. آنا از خانواده‌ای اصیل بود که مدت زیادی در شهر بودا[۴] زندگی کرده بودند. در سال ۱۸۷۲ زمانی که آنا ۱۹ ساله بود شهرهای بودا، ابودا[۵] و پست[۶] با هم ادغام شدند و به شهر بوداپست[۷] تبدیل شدند. شاید بهتر است کمی در مورد نام خانوادگی جورج پولیا توضیح دهیم، زیرا کاملاً آن‌گونه که به‌نظر می‌آید نبوده است. وقتی جورج متولد شد، پنج سال بود که نام خانوادگیشان به پولیا تغییر یافته بود. قبل از این نام پدرش، یاکاب پالیک[۸] بود اما برای پی بردن به دلیل این موضوع احتیاج به نگاهی اجمالی به تاریخچهٔ مجارستان و همچنین دورهٔ زندگی یاکاب پالیک داریم.

یاکاب وکیل بود. پس از ورشکستگی شرکت حقوقی خودش، در یک شرکت بین‌المللی بیمه مشغول به‌کار شد. اما آنچه او واقعاً می‌خواست یک پست دانشگاهی بود تا بتواند در موضوعاتی که

1) George Polya 2) Anna Deutsch 3) Jakab Polya 4) Buda 5) Obuda 6) Pest 7) Budapest 8) Jakab Pollak

واقعاً به آن‌ها علاقه‌مند بود، نظیر اقتصاد و آمار، کار پژوهشی انجام دهد. پس از سال ۱۸۶۷ مجارستان از حکومت سلطنتی اتریش ـ مجارستان استقلال کامل پیدا کرد و سیاست کشور به سمت دولت مجارستان متمایل شد. این بهترین زمان بود تا یاکاب پالیک شانس خود را برای یافتن یک پست دانشگاهی بهبود بخشد. برای این منظور، در سال ۱۸۸۲ یک نام خانوادگی مجاری برای خود انتخاب کرد، اما این‌که آیا این کار به او در موفقیتش در گرفتن منصب استادیاری در دانشگاه بوداپست کمک کرده یا نه، چیزی نمی‌توان گفت. او این کرسی را در اوایل دههٔ پنجاه زمانی که جورج ده ساله بود، مدت کوتاهی قبل از فوتش، به‌دست آورد. یاکاب پولیا در سال ۱۸۹۷ فوت کرد. آن موقع، جورج یک برادر بزرگتر به نام ینو[1] داشت که ۲۱ ساله بود و در رشتهٔ پزشکی تحصیل می‌کرد و برادری کوچکتر به نام لازلو[2] که ۴ سال از او جوان‌تر بود. ذکر این نکته با ارزش است که ینو عاشق ریاضیات بود و همیشه از این‌که ریاضیات را دنبال نکرده بود پشیمان بود. به‌همان اندازه که جورج به‌عنوان یک ریاضیدان شهرت داشت، ینو در حرفهٔ پزشکی معروف بود. با وجود این‌که ینو باهوش‌ترین کودک خانواده بود، اما متأسفانه قبل از آن‌که شهرتی برای خود دست و پا کند، در جنگ جهانی اول کشته شد. با وجود تلاش‌های پدر پولیا برای ورود به یک محیط علمی، اصرار مادر برای این‌که جورج حرفهٔ پدرش را ادامه دهد، جای تعجب دارد.

جورج در بوداپست به مدرسهٔ ابتدایی رفت و گواهی‌نامهٔ خود را در سال ۱۸۹۴ دریافت کرد. پس از آن، وارد دبیرستان شد و زبان‌های کلاسیک یونانی و لاتین را به‌خوبی زبان‌های آلمانی و مجارستانی مطالعه کرد. در مدرسه موضوعات مورد علاقه‌اش زیست شناسی و ادبیات بودند و در درس ادبیات موفق به دریافت درجهٔ ممتاز شد که البته در درس جغرافی و موضوعات دیگر نیز این اتفاق افتاده بود. نسبتاً غیرعادی است که شخصی غرق در شاخه‌های مختلف ریاضیات باشد اما در مدرسه عاشق این رشته نبوده باشد. اما این همان اتفاقی است که برای جورج پولیا افتاده است. او در دوران دبیرستان نمرات خوبی در ریاضیات کسب نکرد و کار خود را در هندسه صرفاً با درجهٔ رضایت‌بخش به اتمام رساند. با این حال، در درس حساب نمرات بهتری کسب می‌کرد. دلیل عدم موفقیت او در ریاضیات به‌خاطر ضعف آموزش بود و او بعدها از دو تا از سه معلم ریاضیش به‌عنوان معلم‌های مطرود یاد می‌کند.

در سال ۱۹۰۵، پولیا در دانشگاه بوداپست ثبت نام کرد و از لحاظ مالی توسط برادرش ینو که آن زمان یک جراح بود حمایت می‌شد. او شروع به مطالعهٔ حقوق کرد اما برایش خسته کننده بود و بیشتر از یک ترم دوام نیاورد. سپس دو سال به موضوعات مورد علاقه‌اش در مدرسه، یعنی زبان و ادبیات پرداخت و گواهی‌نامهٔ تدریس لاتین و مجارستانی در دبیرستان را کسب کرد. اما این صرفاً یک مدرک تحصیلی بود که به آن می‌بالید و هرگز از آن استفاده نکرد. بعداً به فلسفه علاقه‌مند شد اما استادش به او پیشنهاد کرد برای فهم بهتر فلسفه دروس ریاضی و فیزیک را بگذراند و لذا در نهایت، به مطالعهٔ ریاضیات پرداخت. پولیا در دانشگاه بوداپست فیزیک را نزد اُتووش[3] و ریاضیات را

1) Jeno 2) Laslo 3) Eotvos

نزد فِجِر[۱] آموخت.

در سال تحصیلی ۱۹۱۱—۱۹۱۰ پولیا در دانشگاه وین تحصیلات خود را ادامه داد. در این مدت هزینهٔ تحصیلش را از تدریس خصوصی به پسر یکی از مقامات عالی‌رتبه به‌دست می‌آورد. او در وین در سخنرانی‌های ریاضیات که توسط ویرتینگر[۲] و مرتنس[۳] ارائه می‌شد، حضور پیدا می‌کرد و به‌خاطر علاقهٔ وافری که به فیزیک داشت، پیوسته در سخنرانی‌های مربوط به نسبیت و اپتیک شرکت می‌کرد. سال بعد به بوداپست برگشت و سپس مدرک دکتری خود را به‌خاطر کار بر روی مسئله‌ای در احتمالات هندسی دریافت کرد. او بیشتر وقتش در سال‌های ۱۹۱۲ و ۱۹۱۳ را در دانشگاه گوتینگن[۴] بود جایی که ریاضیدانان برجسته‌ای مانند کاراتئودوری[۵]، کلاین[۶]، هیلبرت[۷]، هکه[۸]، ادموند لانداو[۹]، رونگه[۱۰]، کورانت[۱۱] و تئوپلیتز[۱۲] حضور داشتند.

پولیا در سال ۱۹۱۳ به بوداپست بازگشت وابتدا سگو[۱۳] را ملاقات کرد. در آن زمان، سگو یک دانشجو بود و پولیا به همراه او حدسی را دربارهٔ ضرایب فوریه مطرح کرده بودند. چند سال بعد که پولیا تصمیم به نوشتن کتاب مسائل و قضایای آنالیز گرفت، می‌دانست که به تنهایی قادر به انجام آن کار نیست. بنابراین به‌همراه سگو در زمانی بیش از یک سال، دو مجموعهٔ فوق‌العاده از مسائل را نوشتند. در ([۱]) پولیا دلیل این‌که چرا ایده‌های ریاضی مسائلی را که قبلاً حل شده‌اند از راه‌های مختلف توضیح می‌دهد، بیان می‌کند.

> «من خیلی دیر به ریاضیات روی آوردم. همان‌طور که به طرف ریاضیات آمدم و مطالب را یاد گرفتم با خودم فکر می‌کردم که چگونه این اثبات به ذهن افراد خطور کرده است و چگونه می‌توانند به این نتایج برسند. مشکل من در فهم ریاضیات، چگونگی کشف راه‌حل‌ها بود.»

کتاب پولیا و سگو چه چیز تازه‌ای داشت که آن را از دیگر کتاب‌ها متمایز می‌کرد؟ آن چیز، ایدهٔ پولیا در طبقه‌بندی مسائل نه بر اساس موضوع بلکه بر اساس روش حل آن‌ها بود. پولیا و سگو در سال ۱۹۲۳ برای چاپ کتابشان با انتشارات اشپرینگر گفتگو کردند و سرانجام در سال ۱۹۲۵ کتاب مسائل و قضایای آنالیز در دو جلد و به زبان آلمانی منتشر شد.

> «این یک شاهکار ریاضی بود که خود کتاب اعتبارش را تضمین می‌کرد ([۲]).»

دانشگاه استنفورد اهمیت کار پولیا را این‌گونه توصیف می‌کند ([۸]):

> «بین آموزش ریاضیات و جهان حل مسئله یک خط فاصل مشخص وجود دارد. حل مسئله قبل و بعد از پولیا.»

پولیا در کتاب «چگونه مسئله حل کنیم» ([۹]) بیان می‌کند که برای حل مسائل به مطالعهٔ اکتشافی نیاز است.

1) Fejer 2) Wirtinger 3) Mertnes 4) Gottingen 5) Caratheodory 6) Klein 7) Hilbert 8) Hecke 9) Edmund Landau 10) Runge 11) Courant 12) Toeplitz 13) Szego

«هدف بحث اکتشافی مطالعهٔ روش‌ها و قانون‌های کشف و اختراع است... .
هدف، کشف یک راه‌حل برای مسئلهٔ پیش رو است. آموزش خوب عبارت است از این که با یک روش معین به دانش‌آموزان فرصت بدهیم مطالب را خودشان کشف کنند.»

او همچنین رهنمودهای حکیمانه‌ای دارد:

«اگر شما نمی‌توانید مسئله‌ای را حل کنید، حتماً یک مسئله آسان‌تری وجود دارد که می‌توانید آن را حل کنید، پس پیدایش کنید.»

تقارن هندسی و شمارش رده‌های تقارن اشیاء، علاقهٔ اصلی پولیا در بیش از چندین سال بود. او در سال ۱۹۲۴ مقاله‌ای در مورد هفده گروه کریستالوگرافی نوشت که بعدها الهام‌بخش اِشِر[1] در نقاشی‌های مشهورش شد. پولیا با استفاده از مفهوم تابع مولد و گروه جایگشتی، تعداد ایزومرها را در شیمی آلی شمرد، که در آن زمان از اهمیت اساسی برخوردار بود. منظور از ایزومر، مولکول‌های شیمیایی است که فرمول شیمیایی یکسان اما آرایش اتمی متفاوت دارند. سهم اصلی پولیا در ترکیبیات، قضیهٔ شمارشی او است که در سال ۱۹۳۷ منتشر شد.

۲. جورج پولیا و ریاضیات شمارشی

جورج پولیا پدر بی چون و چرای حل مسائل ترکیبیاتی است. طی زندگی طولانی و پر فراز و نشیبش (۱۸۸۷ ــ ۱۹۸۵) به آنالیز کلاسیک و حل مسائل کاربردی جبر پرداخت. او سهم قابل‌توجهی در بسیاری از شاخه‌های مختلف ریاضیات داشته است. اما در بین متخصصان ترکیبیات، بیش از هر چیز به‌خاطر قضیهٔ شمارشی خود که در مقاله‌ای در سال ۱۹۳۷ به چاپ رسید، مشهور است ([۷]). این مقاله از بسیاری جهات قابل توجه است؛ برای مثال مقاله‌ای طولانی است که منحصراً به یک قضیه و کاربردهای آن اختصاص دارد.

قضیهٔ پولیا دستهٔ بزرگی از مسائل ترکیبیاتی روزمره را به شرح ذیل حل می‌کند: فرض کنیم یک تعدادی جعبه و یک فروشگاه از اشیاء، به‌نام شکل، داریم که هر کدام از آن‌ها دقیقاً در یک جعبه قرار دارد. البته ممکن است در دو یا چند جعبه شکل‌های یکسانی قرار داده باشیم. ساختار نهاییِ جعبه‌ها به‌علاوهٔ اشکال پیکربندی نامیده می‌شود. علاوه بر این، فرض کنیم که هر شکلی دارای یک ظرفیت است که معمولاً یک عدد صحیح نامنفی است و ظرفیت یک پیکربندی را برابر جمع ظرفیت‌های شکل‌های داخل جعبه‌ها تعریف می‌کنیم. حال اگر همهٔ جعبه‌ها متمایز باشند، یک مسئلهٔ ساده، تعیین تعداد پیکربندی‌هایی که محتوایی معین دارند.

اگر جعبه‌ها متمایز نباشند چه اتفاقی می‌افتد؟ در آن صورت تجدید آرایش مشخص جعبه‌ها در یک پیکربندی، یک پیکربندی جدیدی را ایجاد می‌کند که از بعضی جهات هم‌ارز پیکربندی اصلی

1) Escher

است. به عبارت دقیق‌تر، یک گروه G از جایگشت‌های روی جعبه‌ها داریم. دو پیکربندی را هم‌ارز می‌نامیم اگر یکی از روی دیگری به‌وسیلهٔ جابه‌جا کردن جعبه‌ها توسط اعضایی از G به‌دست آمده باشد. حال این سؤال مطرح است که چه تعداد پیکربندی ناهم‌ارز داریم که محتوایی مشخص دارند؟ این مسئله‌ای است که قضیهٔ پولیا به آن پاسخ می‌دهد. پولیا استفادهٔ ظریفی از سری شمارش و توابع مولد در مقاله‌اش کرده است. سری شمارش اشکال در مسئلهٔ پولیا یک سری توانی است که در آن، ضریب x^n برابر تعداد شکل‌های با محتوای n است. این مطلب معمولاً از حکم مسئله معلوم است. سری شمارش پیکربندی به‌طور مشابه برای پیکربندی‌های با محتوای n تعریف می‌شود. بنابراین، این سری همهٔ جواب‌های مسئله را خلاصه می‌کند. چه ارتباطی بین این دو سری هست که ما را قادر می‌سازد سری دوم را از روی سری اول به‌دست آوریم؟ به‌وضوح این مطلب باید به گروه G بستگی داشته باشد. هر جایگشت را می‌توان به حاصل‌ضرب دورهای مجزا تجزیه کرد و این تجزیه صرف‌نظر از ترتیب دورها یکتا است. به هر جایگشت g از G، تک‌جمله‌ای $s_1^{j_1} s_2^{j_2} \ldots$ را نسبت می‌دهیم که در آن، j_i تعداد دورهای به طول i در g است. میانگین این تک‌جمله‌ای‌ها روی تمام عناصر G عبارتی است که پولیا به آن شاخص دوری گروه G می‌گوید. قضیهٔ پولیا بیان می‌کند که سری شمارشی پیکربندی از جایگزینی سری شمارشی اشکال در شاخص دوری به‌دست می‌آید، به این معنی که اگر سری اشکال را با $f(x)$ نشان دهیم، با جایگزینی هر پیشامد s_i با $f(x^i)$ در شاخص دوری، سری شمارشی پیکربندی به‌دست می‌آید. این قضیه حل طیف گسترده‌ای از مسائل محاسباتی با کاربرد تجربی را ممکن کرده است. در اینجا تعدادی از کاربردهای این قضیه را بیان می‌کنیم.

کاربرد ویژه‌ای از قضیهٔ پولیا در شمارش درختان ریشه‌دار دیده می‌شود. در یک درخت ریشه‌دار، یک رأس به‌عنوان ریشه از بقیه رأس‌ها متمایز است. فرض کنیم kتا یال به ریشه متصل باشد. در طرف دیگر این یال‌ها، دوباره یک درخت ریشه‌دار داریم. بنابراین kتا جعبه داریم و در هر کدام از آن‌ها می‌توانیم یک درخت ریشه‌دار قرار بدهیم. در مسئلهٔ اساسی از این نوع، یال‌های متصل به ریشه و بنابراین جعبه‌ها، می‌تواند به هر طریقی جابه‌جا شوند و لذا با استفاده از قضیهٔ پولیا، به این نتیجه می‌رسیم که این گروه برابر گروه تقارن‌های کامل S_k است. قضیهٔ پولیا، سری شمارش درخت‌های ریشه‌دار با kتا یال متصل به ریشه را برحسب سری شمارشی $T(x)$، برای همهٔ درختان ریشه‌دار بیان می‌کند. با جمع این نتایج روی همهٔ مقادیر k و ریشه، سری شمارش $T(x)$ را که به‌طور بازگشتی تعریف شده است، بازیابی می‌کنیم. این دست تعاریف بازگشتی از سری‌های شمارشی در بسیاری از کاربردهای قضیهٔ پولیا متداول هستند، ولی به‌ندرت به یک فرمول صریح برای تعداد پیکربندی‌های شمارش شده منجر می‌شوند و معمولاً برای محاسبات عددی مناسب هستند.

ترکیبات شیمیایی را می‌توان با فرمول ساختاری نشان داد که این فرمول‌ها با نظریهٔ مقدماتی گراف‌ها قابل بررسی هستند. خصوصاً ترکیبات شیمیایی غیرحلقوی که فاقد مدار می‌باشند، متناظر با درخت‌ها هستند. پولیا با استفاده از روش‌هایی مشابه آنچه در پاراگراف آخر مطرح شد، شمارش

انواع مختلف ترکیبات غیرحلقوی مانند آلکان‌ها (یا پارافین‌ها)، آلکان‌های استخلافدار شده و بسیاری از خانواده‌های دیگر از ترکیبات را به‌منظور تعیین تعداد ایزومرها انجام داد. با انتخاب مناسب گروه G او قادر بود این شمارش را برای حالت ایزومرهای فضایی به خوبی وقتی که شکل مولکول مهم نبود انجام دهد. پولیا همچنین برخی از انواع ترکیبات شیمیایی حلقوی را که از طریق افزایش رادیکال‌های آلکین یا ترکیبات شبه‌درختی دیگر به اتم‌های ساختارهای حلقوی ساده مختلف به‌دست آمده بودند، در مقالهٔ سال ۱۹۳۷ و در برخی مقالات دیگری که در سال‌های قبل از آن چاپ شده بود، شمرد. این موارد و بسیاری از کاربردهای دیگر قضیه، بخش اصلی مقالهٔ پولیا را کامل می‌کند؛ هرچند در بخش آخر، پولیا توانایی‌های تحلیلی قابل توجه‌اش را برای استنتاج نتایج تقریبی برای خیلی از مسائل شمارشی حل‌شده در بخش‌های قبلی به‌کار می‌برد. با این کار، او مسیری را برای شمارش تقریبی ایجاد کرده است که باید توسط گروه‌های تحقیقاتی دیگر پیموده شود.

پولیا علاوه بر مسائلی که در قضیهٔ اصلیش آمده بود، مسائل زیاد دیگری را هم حل کرد. در سال ۱۹۴۰، از قضیه‌اش برای حل مسئله‌ای در منطق استفاده کرد و مشهور است که درخت‌های غیربرچسب‌دار با تعداد رأس‌ها و یال‌های معلوم را شمرده است. در کمال تعجب او کارش را روی این مسئله هرگز منتشر نکرد. این شمارش را می‌توان به این شرح اجرا کرد: برای گراف‌های با p رأس، هر جفت از رأس‌های یک گراف را به‌عنوان یک جعبه در نظر می‌گیریم که در آن می‌توانیم یکی از دو شکل با یال یا بدون یال را قرار دهیم که محتوایشان به ترتیب ۱ و ۰ است. چون هیچ تفاوتی بین رأس‌های گراف بدون برچسب نیست، بنابراین می‌تواند توسط هر عضوی از گروه متقارن S_p جابه‌جا شود. این جایگشت‌ها، گروه $S_p^{(2)}$ را روی جفت رأس‌ها، جعبه‌ها در این مسئله، القا می‌کنند. شاخص دوری $S_p^{(2)}$ به‌راحتی با استفاده از قضیهٔ شمارش پولیا محاسبه می‌شود.

طی پنجاه سال پس از انتشار مقالهٔ پولیا، بسیاری از پیشرفت‌ها در حوزهٔ ترکیبات شمارشی به مقالهٔ پولیا مربوط می‌شود. شیمی‌دانان پی بردند که قضیهٔ پولیا در رشتهٔ آن‌ها نه فقط برای پیدا کردن تعداد ایزومرهای خانواده‌ای از ترکیبات، بلکه در بسیاری از مسائل دیگر که ماهیت تجربی دارند می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. نظریه‌پردازان علاقه‌مند به شمارش، بیشترین استفاده را از قضیهٔ پولیا کرده‌اند و در تلاش خود برای شمارش گراف‌های پیچیده‌تر، کار پولیا را به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای گسترش دادند. در واقع در دو یا سه دههٔ گذشته، «نظریهٔ گراف شمارشی» به‌عنوان یک شاخه از ترکیبیات به رسمیت شناخته شده است. این، به‌واسطهٔ سهم برجستهٔ پولیا در نظریهٔ شمارش بود: قضیه‌ای عالی در مقاله‌ای عالی که نقطهٔ عطفی در تاریخچهٔ آنالیز ترکیبی است.

قدیمی‌ترین کاربرد نظریهٔ گراف در شیمی کار کیلی ([۳]) در سال ۱۸۷۵ است که تعداد درخت‌های ریشه‌دار با تعداد رأس داده شده را محاسبه کرد. یک مولکول شیمیایی را می‌توان با یک گراف با در نظر گرفتن هر اتم به‌عنوان رأس و پیوندهای کووالانسی، به‌عنوان یال‌ها نمایش داد. بنابراین درجهٔ هر رأس چنین گرافی، ظرفیت اتم مورد نظر را به‌دست می‌دهد.

آلکان‌ها دارای فرمول مولکولی $C_nH_{۲n+۲}$ هستند. آن‌ها $۳n+۲$ رأس دارند که از این تعداد nتا اتم کربن و $۲n+۲$ اتم باقی‌مانده هیدروژن هستند. همگی آن‌ها $۳n+۱$ یال دارند. کیلی با استفاده از روش‌های شمارشی در نظریهٔ گراف تعداد ایزومرهای $C_nH_{۲n+۲}$ را شمرد. فرمول او نشان می‌دهد که پارافین با فرمول مولکولی $C_{۱۳}H_{۲۸}$ دارای ۸۰۲ ایزومر متفاوت است.

۳. قضیهٔ شمارشی پولیا

در این قسمت به معرفی شاخص دوری و اثبات قضیهٔ شمارشی پولیا می‌پردازیم. فرض کنیم G یک گروه جایگشتی از مرتبهٔ n است. هر جایگشت $g\in G$ دارای یک تجزیهٔ یکتا به دورهای مجزا است. طول دور c را با $|c|$ نشان می‌دهیم و $j_k(g)$ معرف تعداد دورهای به طول k در G است. به‌سادگی می‌توان دید که

$$\circ \leq j_k(g) \leq \lfloor \frac{n}{k} \rfloor \text{ و } \sum_{k=۱}^{n} k j_k(g) = n.$$

مثال ۱. فرض کنیم $g=(۱)(۲۳)(۴)$. در این صورت

$$j_۱(g)=۲,\quad j_۲(g)=۱,\quad j_۳(g)=\circ,\quad j_۴(g)=\circ$$

و لذا $j_۱(g)+j_۲(g)=۲+۲=۴$. به هر عضو g، تک‌جمله‌ای $\prod_{k=۱}^{n} a_k^{j_k(g)} = \prod_{c\in g} a_{|c|}$ را نسبت می‌دهیم.

تعریف ۲. شاخص دوری گروه جایگشتی G عبارت است از میانگین تک‌جمله‌ای‌های بالا روی تمام عناصر G، یعنی

$$Z(G) = \frac{۱}{|G|} \sum_{g\in G} \prod_{k=۱}^{n} a_k^{j_k(g)}.$$

مثال ۳. فرض کنیم $G=S_۳$ و $X=\{۱,۲,۳\}$. در این صورت

$$g_۱=(\ ),\quad g_۲=(۱\ ۲\ ۳),\quad g_۳=(۱\ ۳\ ۲),\quad g_۴=(۱\ ۲), g_۵=(۲\ ۳),\quad g_۶=(۱\ ۳).$$

همچنین $z(g_۱)=a_۱^۳$، $z(g_۲)=z(g_۳)=a_۳^۱$ و $z(g_۴)=z(g_۵)=z(g_۶)=a_۱^۱\, a_۲^۱$. بنابراین

$$Z(S_۳) = \frac{۱}{۶}(a_۱^۳ + ۲\, a_۳^۱ + ۳\, a_۱^۱\, a_۲^۱).$$

در حالت کلی بنابر قضیه‌ای معروف در نظریهٔ گروه‌های جایگشتی، شاخص دوری گروه متقارن S_n از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$Z(S_n) = \sum_{(j)} \frac{۱}{\prod_{k=۱}^{n} j_k! k^{j_k}} \prod a_k^{j_k(g)}$$

که در آن، جمع روی همهٔ افرازهای (j) از n گرفته شده است که $j_1 + 2j_2 + \cdots + kj_k = n$.

قضیه ۴. فرض کنیم C_n گروه دوری تولیده شده به‌وسیلهٔ جایگشت $(1\ 2\ 3 \cdots n) = \pi$ است. در این صورت برای هر مقسوم‌علیه d از n، $\varphi(d)$ جایگشت در C_n وجود دارد که $\frac{n}{d}$ دور از طول d دارد و بنابراین شاخص دوری C_n عبارت است از

$$Z(C_n) = \frac{1}{n}\sum_{\frac{d}{n}} \varphi(d) a_d^{\frac{n}{d}}.$$

مثال ۵. فرض کنیم

$$\begin{aligned} D_8 = \quad & \{g_1 = (\ ), g_2 = (1\ 2\ 3\ 4), g_3 = (1\ 4\ 3\ 2), g_4 = (1\ 3)(24), g_5 = (1\ 4)(2\ 3), \\ & g_6 = (1\ 2)(3\ 4), g_7 = (1\ 3), g_8 = (2\ 4)\}. \end{aligned}$$

در این مورد $z(g_1) = a_1^4$، $z(g_2) = z(g_3) = a_4^1$، $z(g_4) = z(g_5) = z(g_6) = a_2^2$ و $z(g_7) = z(g_8) = a_1^2\, a_2^1$. بنابراین

$$Z(D_8) = \frac{1}{8}(a_1^4 + 2\ a_4^1 + 3\ a_2^2 + 2\ a_1^2\ a_2^1).$$

قضیه ۶. شاخص دوری گروه D_n عبارت است از

$$Z(D_n) = \frac{1}{2}Z(C_n) + \begin{cases} \frac{1}{2}a_1 a_2^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ فرد} \\ \frac{1}{4}\left(a_1^2 a_2^{\frac{n-2}{2}} + a_2^{\frac{n}{2}}\right) & n \text{ زوج} \end{cases}$$

تعریف ۷. فرض کنیم X یک مجموعه و C مجموعه‌ای از رنگ‌ها است. یک رنگ‌آمیزی X عبارت است از یک تابع $\omega : X \to C$. همچنین فرض کنیم Ψ مجموعهٔ تمام رنگ‌آمیزی‌های X است. اگر $g \in G \subset S_X$، آن‌گاه تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} \hat{g} : \Psi &\to \Psi \\ \hat{g}(\omega)(x) &= \omega(g(x)). \end{aligned}$$

$\hat{G}$ را مجموعهٔ تمام $\hat{g}$هایی در نظر می‌گیریم که در آن، $g \in G$. در حل هر مسئلهٔ شمارشی به دنبال تابع مولد $K_E(c_1, c_2, \ldots, c_k)$ هستیم که در آن، E مجموعه‌ای از رنگ‌آمیزی‌ها شامل یک نماینده از هر مدار $\hat{G}$ روی Ψ است. ضریب $\ldots c_1^s c_2^t$ در K_E برابر است با تعداد رنگ‌آمیزی‌های اساساً متمایزی که در آن رنگ c_1، s بار، c_2، t بار و ... به‌کار رفته‌اند.

قضیه ۸ (پولیا). فرض کنیم شاخص دوری گروه جایگشتی G روی X برابر $Z_G(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ است. در این صورت تابع مولد تعداد رنگ آمیزی‌های متمایز X با رنگ‌های c_1، c_2، ...، c_n عبارت است از

$$K_E(c_1, c_2, \ldots, c_n) = Z_G(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$$

که در آن،

$$\tau_i = c_1^i + c_2^i \cdots + c_n^i \quad (1 \le i \le n).$$

مثال ۹. رنگ‌آمیزی‌های یک مربع با دو رنگ را در نظر بگیرید. می‌دانیم که $16 = 2^4$ شکل متمایز داریم. با در نظر گرفتن D_8 به‌عنوان گروه تقارن‌ها، ۶ رنگ آمیزی اساساً متمایز به شکل زیر خواهیم داشت. با توجه به مثال ۵، می‌دانیم که

$$Z_{D_8}(a_1, \ldots, a_n) = \frac{1}{8}(a_1^4 + 2\ a_4^1 + 3\ a_2^2 + 2\ a_1^2\ a_2^1).$$

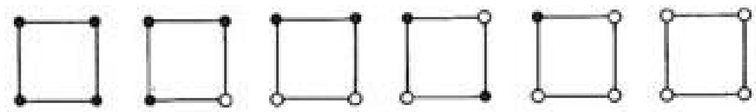
حال با جایگزینی‌های قضیهٔ پولیا،

$$a_1 = r + w, \quad a_2 = r^2 + w^2, \quad a_3 = r^3 + w^3, \quad a_4 = r^4 + w^4$$

و داریم

$$\begin{aligned} K_E(r,w) &= \frac{1}{8}[(r+w)^4 + 2(r+w)^2(r^2+w^2) + 3(r^2+w^2)^2 + 2(r^4+w^4)] \\ &= r^4 + r^3 w + r w^3 + w^4 + 2r^2 w^2. \end{aligned}$$

بنابراین $K_E(1,1) = 6$، یعنی ۶ رنگ‌آمیزی متفاوت داریم.



شکل ۱: ۶ رنگ‌آمیزی متفاوت از یک مربع.

قضیه ۱۰ (شکل وزندار لم برنساید). فرض کنیم G گروهی است که روی X عمل می‌کند. تعداد مدارهای G روی X برابر است با

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} |F(g)|$$

که در آن، $F(g) = \{x \in X, g \in G \mid g(x) = x\}$.

صورت وزندار این عبارت به شکل زیر است:

$$\sum_{x \in D} I(x) = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G}\sum_{x \in F(g)} I(x).$$

تعریف ۱۱. فرض کنیم مجموعهٔ X با $U = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ رنگ‌آمیزی شده است. متناظر با هر رنگ‌آمیزی $\omega : X \to U$، نشانگر ω به‌صورت

$$\mathrm{ind}(\omega) = c_1^{h_{c_1}} c_2^{h_{c_2}} \ldots c_n^{h_{c_n}}$$

تعریف می‌شود که در آن، h_{c_i} تعداد عناصر X است که با رنگ c_i رنگ‌آمیزی شده‌اند. در اینجا $h_{c_1}+h_{c_2}+\cdots+h_{c_n}=h$ و $|X|=h$. اگر B زیرمجموعهٔ Ψ باشد، آن‌گاه تابع مولد K_B را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$K_B(c_1, c_2, \ldots, c_n) = \sum_{\omega \in B} \mathrm{ind}(\omega).$$

اکنون می‌خواهیم صورت دیگری از قضیهٔ پولیا را بیان کنیم. قبل از آن، لازم است مطلبی را یادآوری کنیم. برای هر دو مجموعهٔ متناهی A و B، B^A مجموعهٔ تمام توابع از A به B است. فرض کنیم گروه G روی A عمل می‌کند. در این صورت برای هر $g\in G$، تابع $f^g : A \to B$ با ضابطهٔ $f^g(x)=f(x^{g^{-1}})$ یک عمل از G روی B^A است.

قضیه ۱۲ (شکل دوم قضیهٔ پولیا). فرض کنیم A و B دو مجموعهٔ متناهی باشند و G روی A عمل کند. همچنین فرض کنیم $c_k(G)$ تعداد جایگشت‌هایی از G است که در عمل روی A به k دور مجزا تجزیه می‌شوند. در این صورت تعداد مدارهای G روی B^A برابر است با $\frac{1}{|G|}\sum_{k=1}^{\infty} c_k(G)\cdot|B|^k$.

اگر در قضیهٔ ۱۲، B مجموعهٔ رنگ‌ها باشد، آن‌گاه هر تابع $f : A \to B$ یک رنگ‌آمیزی از A است. در واقع در این قضیه تعداد رنگ‌آمیزی‌های A را می‌شماریم، یعنی تعداد مدارها برابر تعداد رنگ‌آمیزی‌های A است. این در واقع همان قضیهٔ ۸ است که تعداد رنگ‌آمیزی‌ها را حساب می‌کرد.

در جدول ۱ می‌توان عناصر گروه D_6 را مشاهده نمود.

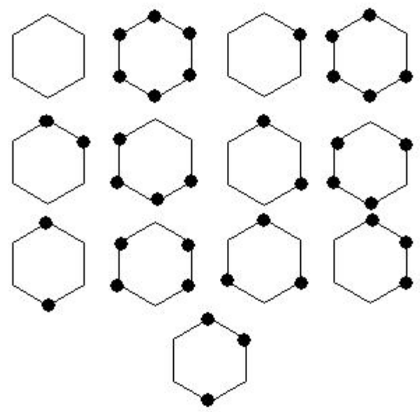
جدول ۱: عناصر گروه D_6.

ρ_0	(۱)(۲)(۳)(۴)(۵)(۶)
ρ_1	(۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶)
ρ_2	(۱ ۳ ۵)(۲ ۴ ۶)
ρ_3	(۱ ۴)(۲ ۵)(۳ ۶)
ρ_4	(۱ ۵ ۳)(۲ ۶ ۴)
ρ_5	(۱ ۶ ۵ ۴ ۳ ۲)
μ_1	(۱ ۶)(۲ ۵)(۳ ۴)
μ_2	(۱)(۲ ۶)(۳ ۵)(۴)
μ_3	(۱ ۲)(۳ ۶)(۴ ۵)
μ_4	(۱ ۳)(۲)(۵)(۴ ۶)
μ_5	(۱ ۴)(۲ ۳)(۵ ۶)
μ_6	(۶)(۱ ۵)(۲ ۴)(۳)

مثال ۱۳. فرض کنیم $G = D_6$، A نشان دهندهٔ رئوس یک شش‌ضلعی منتظم و B مجموعه‌ای از رنگ‌ها است. در این صورت عمل G روی B^A معرف تعداد رنگ آمیزی‌های اساساً متمایز است. بنابراین $c_1(G) = 2$، $c_2(G) = 2$، $c_3(G) = 4$، $c_4(G) = 3$، $c_5(G) = 0$ و $c_6(G) = 1$. با به‌کار بردن قضیهٔ پولیا و این فرض که $|B| = 2$، داریم

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{6} |B|^k c_k(G) \\ &= \frac{1}{12}(2|B| + 2|B|^2 + 4|B|^3 + 3|B|^4 + |B|^6) \\ &= \frac{1}{12}(4 + 8 + 32 + 48 + 64) = 13. \end{aligned}$$

در شکل بعد می‌توان ۱۳ رنگ آمیزی متمایز را مشاهده کرد.



شکل ۲: رنگ آمیزی‌های متمایز رئوس یک شش ضلعی منتظم با دو رنگ.

۴. کاربرد قضیهٔ شمارشی پولیا در پیدا کردن گراف‌های غیریکریخت

اغلب مهم است بدانیم که چند گراف با یک خاصیت مشخص داریم. در واقع زمانی که گراف‌ها برای مدل‌سازی برخی از ساختارهای فیزیکی مورد استفاده قرار می‌گیرند، روش‌های شمارش گرافیکی بسیار باارزش هستند. خیلی از روش‌های شمارش گراف‌ها بر اساس قضیهٔ اصلی جورج پولیاست. فرانک هراری[1] و دیگران از قضیهٔ پولیا در شمارش گراف‌های ساده، گراف‌های چندگانه، گراف جهت‌دار و ساختارهای گرافیکی مشابه استفاده کردند.

1) Frank Harary

تعریف ۱۴. فرض کنیم $\alpha \in S_n$. جایگشت دوگانهٔ α' القا شده توسط α، جایگشتی روی زیرمجموعه‌های دو عضوی $X_n = \{۱, ۲, \dots, n\}$ است که $\alpha' : \{x, y\} \to \{\alpha(x), \alpha(y)\}$. گروه جایگشتی $\{\alpha' : \alpha \in S_n\}$ را گروه متقارن دوگانه روی n حرف نامیده با $S_n^{۲}$ نمایش می‌دهیم.

برای شمارش بهتر گراف‌ها، باید دو گراف متمایز را تعریف کنیم. دو گراف G و G' را مجزا می‌نامیم هرگاه هیچ جایگشتی از رأس‌ها وجود نداشته باشد که یال‌های G و G' را به هم تصویر کند. گروه جایگشتی روی رأس‌های گراف از مرتبهٔ n دقیقاً برابر گروه متقارن S_n است. این گروه یک گروه جایگشتی القا می‌کند که روی یال‌های K_n به‌طور طبیعی عمل می‌کند و آن را با $S_n^{۲}$ نشان می‌دهیم. سپس گراف‌های متمایز به‌وسیلهٔ کلاس‌های هم‌ارزی متمایز تحت عمل $S_n^{۲}$ ارائه می‌شود.

مثال ۱۵. می‌خواهیم شکل دوری $S_n^{۲}$ را پیدا کنیم. فرض کنیم $V = \{۱, ۲, ۳\}$ مجموعهٔ رأس‌ها، $S_۳$ گروه جایگشتی روی V و $S_۳^{۲}$ گروه جایگشتی روی $V^{(۲)} = \{(i, j) : i, j \in V, i \neq j\}$ است. در این صورت

$$|V^{(۲)}| = \binom{۳}{۲} = ۳.$$

اگر عناصر $V^{(۲)}$ را با ترتیب لغت‌نامه‌ای مرتب کنیم، آن‌گاه $\{۱,۲\} < \{۱,۳\} < \{۲,۳\}$. طبق تعریف ۱۴، برای هر $\alpha \in S_۳$، $\alpha' \in S_۳^{(۲)}$ وجود دارد به‌طوری که $\alpha'\{i, j\} = \{\alpha_i, \alpha_j\}$. می‌دانیم که شکل دوری $S_۳$ به‌صورت زیر است:

جدول ۲: شکل دوری $S_۳$.

$\rho_\circ = (۱)(۲)(۳)$	$\rho_۱ = (۱\ ۲\ ۳)$	$\rho_۲ = (۱\ ۳\ ۲)$
$\mu_۱ = (۱)(۲\ ۳)$	$\mu_۲ = (۱\ ۳)(۲)$	$\mu_۳ = (۱\ ۲)(۳)$

شکل دوری عناصر $S_۳^{۲}$ را پیدا می‌کنیم. فرض کنیم $\rho_\circ = (۱)(۲)(۳) \in S_۳$، $\rho_\circ' \in S_۳^{(۲)}$ و $\rho_\circ'\{i, j\} = \{\rho_\circ i, \rho_\circ j\}$. در این صورت

$$\begin{aligned}
\rho_\circ'\{۱, ۲\} &= \{۱, ۲\},\\
\rho_\circ'\{۱, ۳\} &= \{۱, ۳\},\\
\rho_\circ'\{۲, ۳\} &= \{۲, ۳\}.
\end{aligned}$$

در نتیجه $\rho_\circ' = (۱۲)(۱۳)(۲۳)$. به‌طور مشابه، اگر $\rho_۱ = (۱\ ۲\ ۳)$، آن‌گاه $\rho_۱' = (۱۲\ ۲۳\ ۱۳)$. همچنین برای $\rho_۲ = (۱\ ۳\ ۲)$ داریم $\rho_۲' = (۱۲\ ۱۳\ ۲۳)$. اگر $\mu_۱ = (۱)(۲\ ۳)$، $\mu_۲ = (۱\ ۳)(۲)$ و $\mu_۳ = (۱\ ۲)(۳)$، آن‌گاه به‌ترتیب داریم $\mu_۱' = (۱۲\ ۱۳)(۲۳)$، $\mu_۲' = (۱۲\ ۲۳)(۱۳)$ و $\mu_۳' = (۱۲)(۱۳\ ۲۳)$.

جدول ۳: مقایسهٔ بین $S_۳$ و $S_۳^۲$.

$S_۳$	شکل دوری	$S_۳^{(۲)}$	شکل دوری
(۱)(۲)(۳)	$a_۱^۳$	(۱۲)(۱۳)(۲۳)	$a_۱^۳$
(۱ ۲ ۳)	$a_۳$	(۱۲ ۲۳ ۱۳)	$a_۳$
(۱ ۳ ۲)	$a_۳$	(۱۲ ۱۳ ۲۳)	$a_۳$
(۱)(۲ ۳)	$a_۱a_۲$	(۱۲ ۱۳)(۲۳)	$a_۱a_۲$
(۱ ۳)(۲)	$a_۱a_۲$	(۱۲ ۲۳)(۱۳)	$a_۱a_۲$
(۱ ۲)(۳)	$a_۱a_۲$	(۱۲)(۱۳ ۲۳)	$a_۱a_۲$

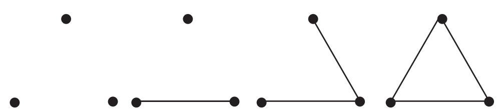
عناصر اخیر جایگشت هستند و عمل ضرب همان ترکیب دو جایگشت است. در بین اعضای اخیر هیچ جایگشتی وجود ندارد که ضرب آن در گروه نباشد. بنابر تعریف ۲، شاخص‌های دوری گروه متقارن $S_۳$ و گروه متقارن دوگانهٔ $S_۳^۲$ از جدول ۳ به‌دست می‌آیند. بنابراین

$$Z(S_۳) = Z(S_۳^{(۲)}) = \frac{۱}{۶}a_۱^۳ + \frac{۱}{۲}a_۱a_۲ + \frac{۱}{۳}a_۳.$$

گروه جایگشتی دوگانهٔ $S_۳^۲$ روی رأس‌ها عمل می‌کند. زمانی که گراف‌ها را می‌شماریم، تابع مولد اشیاء برابر $z + ۱$ است. این مشخص می‌کند که آیا یک یال حاضر است یا نه. با جایگزینی $a_k = ۱ + z^k$ در $Z(S_۳^{(۲)})$ داریم

$$\begin{aligned}
Z(S_۳^{(۲)}) &= \frac{۱}{۶}(۱+z)^۳ + \frac{۱}{۲}(۱+z)(۱+z^۲) + \frac{۱}{۳}(۱+z^۳) \\
&= \frac{۱}{۶}z^۳ + \frac{۱}{۲}z^۲ + \frac{۱}{۲}z + \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۲}z^۳ + \frac{۱}{۲}z^۲ + \frac{۱}{۲}z + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳}z^۳ + \frac{۱}{۳} \\
&= z^۳ + z^۲ + z + ۱.
\end{aligned}$$

عبارت بالا بیان می‌کند که یک گراف با سه یال، یک گراف با دو یال، یک گراف با یک یال و یک گراف با هیچ یال وجود دارد. بنابراین تعداد گراف‌های غیریکریخت با سه رأس برابر چهار است و در شکل ۳ نشان داده شده است.



شکل ۳: ۴ گراف غیر یکریخت سه رأسی.

مثال ١٦. شکل دوری $S_{۴}^{۲}$ را پیدا می‌کنیم. فرض کنیم $V = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ و $V^{(۲)} = \{a, b, c, d, e, f\}$. اگر عناصر $V^{(۲)}$ را با ترتیب لغت‌نامه‌ای مرتب کنیم، آن‌گاه

$$a = \{۱, ۲\}, b = \{۱, ۳\}, c = \{۱, ۴\}, d = \{۲, ۳\}, e = \{۲, ۴\}, f = \{۳, ۴\}.$$

پس هر $\alpha' \in S_v^{(۲)}$ می‌تواند با یک جایگشت در $S_٦$ مشخص شود. مثلاً اگر $\alpha = (۱\ ۴\ ۳) \in S_۴$، آن‌گاه تجزیهٔ دوری متمایز $\alpha' \in S_v^{(۲)}$ به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
\alpha'(a) &= \alpha'\{۱, ۲\} = \{\alpha(۱), \alpha(۲)\} = \{۴, ۲\} = e,\\
\alpha'(e) &= \alpha'\{۲, ۴\} = \{\alpha(۲), \alpha(۴)\} = \{۲, ۳\} = d,\\
\alpha'(d) &= \alpha'\{۲, ۳\} = \{\alpha(۲), \alpha(۳)\} = \{۲, ۱\} = a.
\end{aligned}$$

بنابراین $(a\ e\ d)$ یکی از دورها در تجزیهٔ دوری α' به دورهای مجزا است. ادامه می‌دهیم

$$\begin{aligned}
\alpha'(b) &= \alpha'\{۱, ۳\} = \{\alpha(۱), \alpha(۳)\} = \{۴, ۱\} = c,\\
\alpha'(c) &= \alpha'\{۱, ۴\} = \{\alpha(۱), \alpha(۴)\} = \{۴, ۳\} = f,\\
\alpha'(f) &= \alpha'\{۳, ۴\} = \{\alpha(۳), \alpha(۴)\} = \{۱, ۳\} = b.
\end{aligned}$$

بنابراین $\alpha' = (a\ e\ d)(b\ c\ f)$. محاسباتی مشابه منجر به جدول ۴ می‌شود که در آن، هر $\alpha' \in S_v^{(۲)}$ متناظر با یک عضو از $S_٦$ است. توجه می‌کنیم که $|S_v^{(۲)}| = |S_v| = ۴! = ۲۴$ عامل کوچکی از $٦! = ۷۲۰$ است، زیرا برای $V = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$، $S_۴$ و $S_۴^{(۲)}$ زیرمجموعه‌های $S_٦$ هستند.

جدول ۴: مقایسهٔ بین $S_۴$ و $S_۴^۲$.

α	α'	α	α'
(۱)(۲)(۳)(۴)	$(a)(b)(c)(d)(e)(f)$	(۱ ۴ ۲)	$(a\ c\ e)(b\ d\ f)$
(۱ ۲)	$(b\ d)(c\ e)$	(۱ ۴ ۳)	$(a\ e\ d)(b\ c\ f)$
(۱ ۳)	$(a\ d)(c\ f)$	(۲ ۳ ۴)	$(a\ b\ c)(d\ f\ e)$
(۱ ۴)	$(a\ e)(b\ f)$	(۲ ۴ ۳)	$(a\ c\ b)(d\ e\ f)$
(۲ ۳)	$(a\ b)(e\ f)$	(۱ ۲ ۳ ۴)	$(a\ d\ f\ c)(b\ e)$
(۲ ۴)	$(a\ c)(d\ f)$	(۱ ۲ ۴ ۳)	$(a\ e\ f\ b)(c\ d)$
(۳ ۴)	$(b\ c)(d\ e)$	(۱ ۳ ۲ ۴)	$(a\ f)(b\ d\ e\ c)$
(۱ ۳)(۲ ۴)	$(a\ f)(c\ d)$	(۱ ۳ ۴ ۲)	$(a\ b\ f\ e)(c\ d)$
(۱ ۲ ۳)	$(a\ d\ b)(c\ e\ f)$	(۱ ۴ ۲ ۳)	$(a\ f)(b\ c\ e\ d)$
(۱ ۲ ۴)	$(a\ e\ c)(b\ d\ f)$	(۱ ۴ ۳ ۲)	$(a\ c\ f\ d)(b\ e)$
(۱ ۳ ۲)	$(a\ b\ d)(c\ f\ e)$	(۱ ۲)(۳ ۴)	$(b\ e)(c\ d)$
(۱ ۳ ۴)	$(a\ d\ e)(b\ f\ c)$	(۱ ۴)(۲ ۳)	$(a\ f)(b\ e)$

با توجه به جدول ۴، شاخص دوری $S_۴$ عبارت است از

$$Z(S_۴) = \frac{۱}{۲۴}(a_۱^۴ + ۶a_۱^۲a_۲ + ۸a_۱a_۳ + ۳a_۲^۲ + ۶a_۴).$$

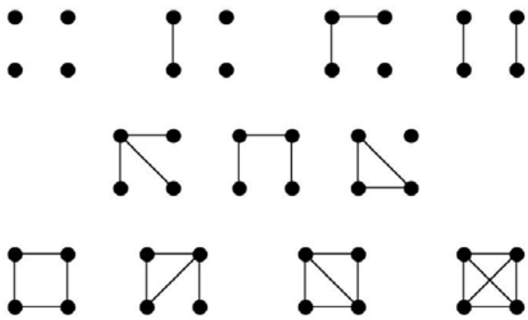
از جدول ۴ می‌توان دید که چگونه با تغییر چندجمله‌ای شاخص دوری $S_۴$ می‌توان چندجمله‌ای شاخص دوری $S_۴^۲$ را به‌دست آورد. مشاهده می‌کنیم که چندجمله‌ای $a_۱^۴$ در $S_۴$ را باید با چندجمله‌ای $a_۱^۶$ جایگزین کرد. طبق جدول ۴، $\alpha = (۱\ ۲)(۳\ ۴)$ متناظر با $\alpha' = (b\ e)(c\ d)(a)(f)$ است. بنابراین عبارت $۳a_۲^۲$ باید با $۳a_۱^۲a_۲^۲$ جایگزین شود. با فرآیندی مشابه عبارات $a_۴$، $a_۱^۲a_۲$ و $a_۱a_۳$ به‌ترتیب با عبارات $۶a_۲a_۴$، $۶a_۱^۲a_۲^۲$ و $۸a_۳^۲$ جایگزین می‌شوند. بنابراین چندجمله‌ای شاخص دوری $S_۴^۲$ برابر است با

$$Z(S_۴^{(۲)}) = \frac{۱}{۲۴}(a_۱^۶ + ۹a_۱^۲a_۲^۲ + ۸a_۳^۲ + ۶a_۲a_۴).$$

پس گروه جایگشتی برابر $S_۴^۲$ و تابع مولد اشیاء، $z + ۱$ است. با جایگزینی $a_k = ۱ + z^k$ در $Z(S_۴^{(۲)})$، داریم

$$\begin{aligned} Z(S_۴^{(۲)}) &= \frac{۱}{۲۴}((۱+z)^۶ + ۹(۱+z)^۲(z^۲+۱)^۲ + ۸(z^۳+۱)^۲ + ۶(z^۲+۱)(z^۴+۱)) \\ &= z^۶ + z^۵ + ۲z^۴ + ۳z^۳ + ۲z^۲ + z + ۱. \end{aligned}$$

عبارت بالا بیان می‌کند که یک گراف با شش یال، یک گراف با پنج یال، دو گراف با چهار یال، سه گراف با سه یال، دو گراف با دو یال، یک گراف با یک یال و یک گراف با صفر یال وجود دارد. در شکل زیر، ۱۱ گراف غیریکریخت ۴ رأسی نشان داده شده است:



شکل ۴: ۱۱ گراف غیر یکریخت چهار رأسی.

با استفاده از قضیهٔ پولیا و محاسباتی کم و بیش مشابه بالا ولی با پیچیدگی بیشتر، می‌توان قضیه زیر را ثابت نمود.

قضیه ۱۷. به‌ترتیب ۳۴، ۱۵۶ و ۱۰۴۴ ردهٔ یکریختی از گراف‌های ساده ۵ رأسی، ۶ رأسی و ۷ رأسی وجود دارند.

اکنون به کاربرد قضیهٔ پولیا در شمارش چندگراف‌ها اشاره می‌کنیم. چندگراف n رأسی را در نظر می‌گیریم که بین هر جفت از رأس‌ها حداکثر دو یال داشته باشیم. در این حالت، دامنه و گروه جایگشتی همانند گراف‌های ساده است؛ اگرچه برد متفاوت است. یک جفت از رأس‌ها می‌تواند با هیچ یال، ۱ یال یا ۲ یال به‌هم متصل باشند. بنابراین برد شامل سه عضو s، t و u است که به‌ترتیب دارای محتوای a_0، a_1 و a_2 هستند. در اینجا a_i دلالت دارد بر این‌که i یال بین یک جفت از رأس‌ها هست که $i = 0, 1, 2$. بنابراین سری شمارش شکل عبارت است از $1 + a + a^2$. با جایگزینی $1 + a^r + a^{2r}$ به‌جای y_r در $Z(R_n)$ به سری شمارش ساختار مورد نظر می‌رسیم.

مثال ۱۸. تعداد چهارگراف‌های ۴ رأسی را پیدا می‌کنیم. فرض کنیم $S = \{1, 2, 3, 4\}$ و $D = \{$ دو مرتبه حاضر، غایب، یک مرتبه حاضر $\}$. فرض کنیم $S_4^{(2)}$ گروه متقارن دوگانه روی مجموعهٔ زوج‌های نامرتب تعریف شده روی مجموعهٔ S است. شاخص دوری $S_4^{(2)}$ عبارت است از:

$$Z(S_4^{(2)})(a_1, \ldots, a_4) = \frac{1}{24}(a_1^6 + 9a_1^2a_2^2 + 8a_3^2 + 6a_2a_4).$$

به‌وضوح $f(a) = 1 + a + a^2$. بنابراین سری شمارش شکل به‌وسیلهٔ جایگزینی a_i با

$f(z^i) = ۱ + z^i + z^{۲i}$ به‌دست می‌آید. بنابراین

$$\begin{aligned} Z(S_۴^{(۲)}) &= \frac{۱}{۲۴}[(۱ + z + z^۲)^۶ + ۹((۱ + z + z^۲)^۲(۱ + z^۲ + z^۴)^۲ + ۸(۱ + z^۳ + z^۶)^۲ \\ &+ ۶(۱ + z^۲ + z^۴)(۱ + z^۴ + z^۸)] \\ &= ۱ + z + ۳z^۲ + ۵z^۳ + ۸z^۴ + ۹z^۵ + ۱۲z^۶ + ۹z^۷ + ۸z^۸ + ۵z^۹ + ۳z^{۱۰} \\ &+ z^{۱۱} + z^{۱۲}. \end{aligned}$$

ضریب z^j، $۰ \leq j \leq ۱۲$ برابر تعدادگراف‌های ساده ۴ رأسی با j یال است.

یک صورت بسیار مفید دیگر از قضیهٔ پولیا وجود دارد که در آن از مفهوم محتوا استفاده می‌شود. در این حالت، C را مجموعه‌ای از اشکال در نظر می‌گیریم و نگاشت از X به C پیکربندی نامیده می‌شود. همان‌طور که خواهیم دید، این قضیه مخصوصاً در شمارش ایزومرهای ترکیبات شیمیایی کاربرد دارد. هر شکل در C یک محتوا دارد که عددی صحیح و نامنفی است. سری شمارش شکل عبارت است از

$$c(x) = c_۰ + c_۱x + c_۲x^۲ + \cdots + c_kx^k + \cdots$$

که c_k برابر تعداد اشکال در C از محتوای k است.

قضیه ۱۹ (صورت محتوایی قضیهٔ پولیا). فرض کنیم گروه جایگشتی G روی مجموعهٔ X عمل می‌کند. در این صورت G روی مجموعهٔ نگاشت‌های از X به C نیز عمل می‌کند. فرض کنیم سری شمارش شکل برابر $c(x)$ است. در این صورت سری شمارش شکل ناهم‌ارز $\varphi(x)$، به‌وسیلهٔ جایگزینی $c(x^r)$ با s_r در شاخص دوری G به‌دست می آید؛ یعنی $\varphi(x) = Z(G; c(x))$.

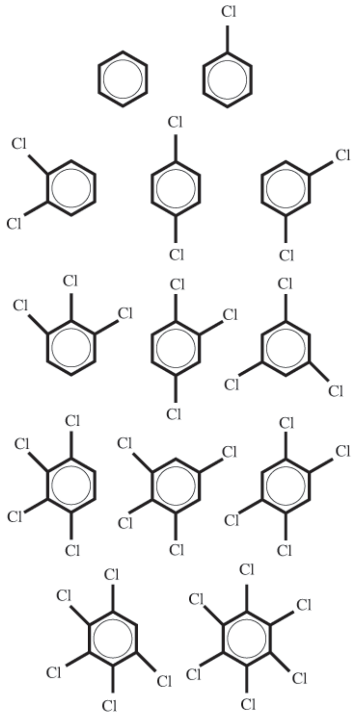
مثال ۲۰. یکی از مهم‌ترین کاربردهای قضیهٔ پولیا پیدا کردن ایزومرهای مختلف ترکیبات شیمیایی است. در این مثال قصد داریم تعداد حلقه‌های بنزنی را پیدا کنیم که در آن کلر با هیدروژن جایگزین شده است. گروه تقارن حلقهٔ بنزن $D_۶$ است. از طرفی می‌دانیم که

$$Z(D_۶) = \frac{۱}{۱۲}(a_۱^۶ + ۴a_۲^۳ + ۲a_۳^۲ + ۳a_۱^۲a_۲^۲ + ۲a_۶).$$

اینجا $X = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ و $C = \{H, Cl\}$. فرض می‌کنیم محتوای هیدروژن برابر صفر و محتوای کلر برابر یک است. در این صورت $c(x) = ۱ + x$.

$$\begin{aligned} &\sum \varphi(x) \\ &= \frac{۱}{۱۲}[(۱ + x)^۶ + ۴(۱ + x^۲)^۳ + ۲(۱ + x^۳)^۲ + ۳(۱ + x)^۲(۱ + x^۲)^۲ + ۲(۱ + x)^۶] \\ &= ۱ + x + ۳x^۲ + ۳x^۳ + ۳x^۴ + x^۵ + x^۶. \end{aligned}$$

بنابراین ۱۳ ترکیب شیمیایی با استفاده از این روش به‌دست می‌آید که در شکل زیر نشان داده شده‌اند:



شکل ۵: ایزومرهای مختلف مثال ۲۰.

اخیراً شیمی‌دانی ژاپنی به‌نام شینساکو فوجیتا[1] تعمیم‌های بسیار زیبا و کاربردی از قضیه پولیا یافته و دسته‌های بزرگی از مسائل شیمی را با آن حل نموده است. در اینجا فرصت پرداختن به این تعمیم‌ها نیست ولی به‌عنوان نمونه خوانندگان علاقه‌مند را به [۴، ۵] ارجاع می‌دهیم.

سپاسگزاری:

نویسندگان مقاله مراتب تشکر خود را از جناب آقای دکتر روح‌اله جهانی پور، ویراستار محترم مجلهٔ فرهنگ و اندیشه ریاضی جهت اصلاحات و پیشنهادات ارائه شده، ابراز می‌دارند.

1) Shinsaku Fujita

مراجع

[1] D. J. Albers & G. L. Alexanderson, *Mathematical People: Profiles and Interviews*, Birkhauser Boston, 1985.

[2] G. L. Alexanderson & L. H. Lange, "Obituary: George Polya", *Bull. Lond. Math. Soc.*, **19**(1987), 563 – 603.

[3] A. Cayley, "On the theory of analytical forms called trees", *Philos. Mag.*, **13**(1857), 172 – 176.

[4] S. Fujita, "Restricted enumerations by the unit-subduced-cycle-index(USCI) approch. III. the restricted— partial-cycle-index (RPCI) method for treating interactions between two or more orbits", *MATCH commun. Math. Comput. Chem.*, **69**(2013), 311–332.

[5] S. Fujita, "Restricted enumerations by the unit-subduced-cycle-index(USCI) approch. IV. the restricted— subduced-cycle-index (RSCI) method for enumeration of Kekule structures and of perfect matchings of graphs", *MATCH commun. Math. Comput. Chem.*, **69**(2013), 333–354.

[6] F. Harary & E. M. Palmer, *Graphical enumeration*, Academic Press, New York, 1973.

[7] G. Polya, "Combinatorial number of terms for groups, graphs and chemical compounds", *Acta Mathematica*, **68**(1937), 145 – 254.

[8] A. H. Schoenfeld, "Polya, problem solving, and education", *Math. Mag.*, **60**(1987), 283 – 291.

[۹] جورج پولیا،چگونه مسئله را حل کنیم؟، ترجمه احمد آرام، مؤسسه کیهان، ۱۳۶۹.

فاطمه کوره‌پزان مفتخر f.k.moftakhar@gmail.com

و علی‌رضا اشرفی ashrafi@kashanu.ac.ir

دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان