بسم‌الله الرحمن الرحیم

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

علمی ـ ترویجی

ISSN 1022-6443

سال ۳۲، شمارهٔ ۲، پاییز ۱۳۹۲

(تاریخ انتشار: زمستان ۱۳۹۲)

شمارهٔ پیاپی: ۵۳

صاحب امتیاز: انجمن ریاضی ایران
مدیر مسؤول: سید منصور واعظ‌پور
سردبیر: احمد صفاپور
ویراستار ارشد: ابوالفضل رفیع پور
مدیر اجرایی: شیوا زمانی

نشانی: تهران ـ صندوق پستی: ۴۱۸ـ۱۳۱۴۵
تلفن: ۸۸۸۰۸۸۵۵، ۸۸۸۰۷۷۹۵، ۸۸۸۰۷۷۷۵
نشانی الکترونیک: iranmath@ims.ir
نشانی اینترنتی: http://www.ims.ir
سامانهٔ نشریه: mct.iranjournals.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی نشریهٔ علمی ـ ترویجیِ انجمن ریاضی ایران است که به چاپ و انتشارِ مطالبی می‌پردازد که هم جنبه‌های عام و فلسفیِ ریاضیات را ترویج دهند و هم بازگوکنندهٔ فرهنگ و روند ریاضیاتِ حاکم بر جامعهٔ ریاضی باشند. فرهنگ و اندیشه ریاضی از مقالات در زمینه‌های ریاضیات محض، ریاضیات کاربردی، تدریس، یادگیری و آموزش ریاضی، تاریخ و فلسفهٔ ریاضی، علومِ کامپیوتر، فیزیک نظری و کاربردهای ریاضیات در علوم دیگر که در چارچوب زیر نوشته شده باشند استقبال می‌کند:

- ارائهٔ موضوعیْ فعال و مطرح در ریاضیات در قالبی که علاقه‌مندان به زمینه‌های پژوهشی را برای پیگیریِ موضوع مورد بحث آماده سازد؛
- ترجمهٔ مقاله‌هایی از نوع یاد شده در بالا یا ترجمهٔ مقالات کلاسیکِ ریاضی (ترجمهٔ آزاد پذیرفته نمی‌شود)؛
- ارائهٔ موضوعاتِ آموزشی حاوی نکات و قضایا و برهان‌هایی ساده‌تر از آنچه در متون کلاسیک موجود است.

علاقه‌مندان می‌توانند سه نسخه از مقالهٔ خود را با شرایط زیر به نشانی دفتر مجله ارسال نمایند:

- مقالات تحت ادیتور «فارسی تک» تهیه شده و نسخهٔ پی دی اف آن از طریق سامانهٔ نشریه به آدرس mct.iranjournals.ir ارسال شود. در صورتی که مقالهٔ فرستاده شده، پس از طی شدن مراحل داوری برای چاپ پذیرفته شود، فایل «اف ـ تک» مقاله می‌بایست از طریق پست الکترونیکی مجله ارسال شود.
- فرستادن اصل مقالهٔ ترجمه شده همراه با ترجمهٔ آن الزامی است.
- نام و نشان اصل مقالهٔ ترجمه شده باید به صورت پاورقی در صفحهٔ اول ترجمهٔ مقاله ذکر شود.
- اصطلاحات ریاضی به کار رفته باید بر طبق واژه‌نامهٔ ریاضی و آمار انجمن ریاضی ایران چاپ مرکز نشر دانشگاهی باشد و اگر لغتی در این واژه‌نامه نیست، معادل انگلیسی آن در پاورقی داده شود.
- مقالات ارسالی به فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی نباید برای بررسی و چاپ به مجلات دیگر فرستاده شده باشد.
- مقالهٔ ارسالی باید مشتمل بر نام و نام خانوادگی نویسنده(گان) یا مترجم(ان)، سمت علمی، آدرس کامل پستی و آدرس الکترونیکی باشد.

• در ابتدای مقاله، چکیده‌ای در حداکثر ۲۰۰ کلمه شامل نکات اصلی بیان شده در مقاله، آورده شود.

• پس از چکیده، واژه‌ها و اصطلاحات کلیدی (حداکثر ۵ تا) مشخص شود.

• رده‌بندی موضوعی اولیه و ثانویهٔ مقاله، بر مبنای رده‌بندی موضوعی انجمن ریاضی آمریکا، ذکر شود.

• اسامی افراد خارجی در متن مقاله باید به صورت فارسی در پاورقی به زبان اصلی نوشته شود.

• به منظور تسریع در ویرایش و چاپ مقالات، اصول سجاوندی، نگارش و ویرایش فارسی را در نوشتن مقالات رعایت فرمائید.

• فهرست مراجع را در انتهای مقاله، به ترتیب حروف الفبای نام خانوادگی افراد تنظیم کنید نه به ترتیبی که در مقاله ارجاع می‌دهید. ضمناً در نوشتن مراجع، قالب زیر را رعایت کنید:

الف) اگر مرجع ذکر شده، مقالهٔ لاتین است، عنوان مقاله به صورت رومن، نام مجله به صورت ایتالیک، شمارهٔ مجلد آن به صورت سیاه، سال چاپ داخل پرانتز و در انتها، صفحاتی که مقالهٔ مرجع در آنها چاپ شده است، تایپ شود.

ب) اگر مرجع ذکر شده، کتاب لاتین است، نام کتاب به صورت ایتالیک تایپ شود.

• توجه کنید که تعداد صفحات مقالهٔ ارسالی در قالب صفحه‌بندی مجله، از ۲۵ صفحه نباید بیشتر باشد.

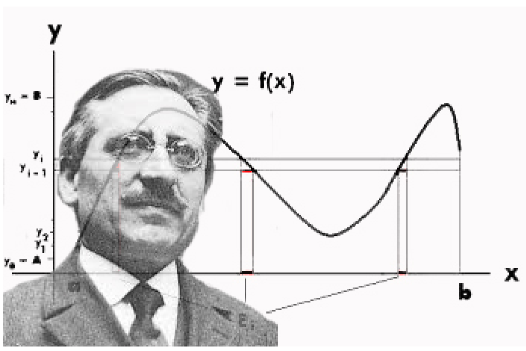
• هیأت تحریریه در رد، قبول، حک و اصلاح مقالات آزاد است.

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی امسال در دو شماره (بهار و پاییز) منتشر و به اعضای حقیقی، حقوقی و مشترکین انجمن ریاضی ایران ارسال می‌شود.

علاقه‌مندان به عضویت حقیقی و دانشگاه‌ها، مؤسسات و کتابخانه‌ها که تمایل به عضویت حقوقی یا اشتراک سالانه دارند می‌توانند با دبیرخانهٔ انجمن ریاضی ایران تماس حاصل نمایند.

شماره‌های قبلی مجله را می‌توانید از دبیرخانهٔ انجمن ریاضی ایران خریداری فرمایید.

فهرست مطالب



عکس روی جلد: هانری لبگ (Henri Lebesgue) **مربوط به مقالهٔ دوم**

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۳ (پاییز ۱۳۹۲) صص. ۱ تا ۳

سخن سردبیر

احمد صفاپور

سی و یک سال از انتشار نخستین شمارهٔ **فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی** گذشته است و در حال به پایان رساندن سی و دومین سال آن هستیم. در سرمقالهٔ شمارهٔ هشتم (سال نهم ــ ۱۳۶۹) این نشریه آمده است: «جوامع علمی ما هرگز نتواسته‌اند به نشریات علمی، جنبهٔ حرفه‌ای و سازمانی بدهند و به همین دلیل، یا نشریهٔ علمی معتبری در ایران پا نگرفته است و یا پس از مدتی کوتاه، تعطیل شده است. پابرجاترین نشریه در زمینهٔ ریاضیات در ایران نشریهٔ **یکان** بوده است که بیش از یک دهه با نظم و ترتیبی در خور توجه، انتشار یافت. آن هم به گمان ما، دلیلش حرفه‌ای بودن آن بود. اما از آن‌جا که جنبهٔ سازمانی و نهادی به خود نگرفت، با کهولت سنِ اداره کنندهٔ آن، تعطیل شد. تحولات اخیر در جامعه ریاضی ایران که از یک سو ناشی از رشد و توسعهٔ سریع فرهنگ و تحولات ریاضیات در جهان امروز است و از سویی دیگر، [ناشی از] افزایش قابل‌توجه ریاضی آموختگان ایران در دهۀ ۱۳۵۰ است، این نوید و امید را می‌دهد که [در] دهۀ آینده جامعهٔ ریاضی ایران بتواند صاحب چند نشریهٔ پایدار در زمینهٔ ریاضیات باشد.» جای خوشوقتی است که حداقل بخشی از امیدهای نویسندگان سرمقاله برآورده شده و آن هم، استمرار انتشار نشریهٔ فرهنگ و اندیشه ریاضی است؛ اگرچه به نظر می‌رسد تا رسیدن به «انتشار چند نشریهٔ پایدار در زمینه ریاضیات» راهی دراز در پیش است.

در استمرار انتشار نشریه، نقش اعضای هیأت تحریریهٔ دوره‌های مختلف و نیز حمایت‌های مادی و معنوی شوراهای اجرایی انجمن در این دوره‌ها، غیرقابل انکار است. با تلاش ایشان، نشریه که به استناد آیین‌نامهٔ مصوب ۶۱/۶/۲۵ باید دو شماره در سال منتشر می‌شد و در سال‌های اولیه حتی انتشار سالانه یک شماره از آن نیز به‌سختی و با تأخیر انجام می‌شد، در اواخر دهه ۱۳۷۰ و با اصلاح آیین‌نامه در تاریخ ۷۸/۷/۲۲، به فصلنامه تبدیل گردید (اگرچه هنوز تا این زمان امکان انتشار آن به‌صورت چهار شماره در سال، امکان‌پذیر نگشته است). یکی دیگر از دستاوردهای این استمرار، ایجاد شکل ظاهری و قطع یکنواختی است که در بند ۶ مصوبهٔ ۷۸/۷/۲۲ انجام آن الزامی شده و از آن پس، شکل ظاهری مجله و چگونگی درج محتویات و مقالات آن، سبک خاصی

یافته‌اند. البته انتشار نامنظم آن به دلایل مختلف فنی و غیرفنی تا سال ۸۷ همچنان ادامه داشته و از این تاریخ به بعد است که نشریه تقریباً به‌موقع منتشر شده است.

سردبیر محترم وقت نشریه در «سخن سردبیر» شمارهٔ ۳۴ (بهار ۱۳۸۴) تحت عنوان «اندیشهٔ ریاضی، ریاضیِ فرهنگ‌ساز» ضمن برشمردن برخی مشکلات فرهنگ ریاضی ایران، «پر کردن شکاف بین فرهنگ موجود ریاضی در ایران و فرهنگ اصیلِ ریاضی» را یکی از اهداف اصلی فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی عنوان نموده‌اند و سپس برای رسیدن به هدف فوق، راهکارهایی را مطرح و حرکت در آن راستا را وظیفهٔ خود و اعضای هیأت تحریریه ذکر نموده‌اند. ایشان در «سخن سردبیر» شمارهٔ پیاپی ۴۴ (بهار ۱۳۸۹) به‌عنوان سردبیر دو دورهٔ متوالی نشریه متذکر می‌شوند: «در ارزیابی این شش سال، با خرسندی اعلام می‌کنیم اکثر هدف‌های [ذکر شده] به‌طور نسبی محقق شده‌اند».

اکنون و در سال ۱۳۹۲ نیز می‌توان پرکردن شکاف بین فرهنگ موجود ریاضی در جامعهٔ ما و فرهنگ اصیلِ ریاضی را همچنان یکی از اهداف اصلی فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی دانست. اما در کنار آن، باید هدف دیگری نیز مد نظر قرار گیرد و آن کمک به عمومی کردنِ ریاضیات است. انجمن ریاضی ایران در سال‌های اخیر با انتشار منظم «بولتن» و «خبرنامه»، مخاطبان خاص این نشریات را در دانشگاه‌ها پیدا نموده است، اما مشکلِ پیدا کردن مخاطب خاص برای فرهنگ و اندیشه ریاضی، علیرغم انتشار منظم آن و حتی افزایش تعداد شماره‌های هر سال به سه شماره، همچنان باقی است. در مادهٔ ۲ آیین‌نامهٔ مصوب تاریخ ۷۸/۷/۲۲، هدف از انتشار نشریه «معرفی همهٔ جنبه‌های عام علوم ریاضی در سطح قابل استفاده برای دانشجویان، دبیران و اعضای هیأت علمی دانشگاه‌ها و پژوهشگاه‌ها» ذکر شده است. اما واقعیت این است که به جز اعضای حقیقی و حقوقی انجمن و برخی کتابخانه‌ها که به‌اقتضای عضویت‌شان نشریه برای آن‌ها ارسال می‌گردد، در حال حاضر تقاضای دیگری برای دریافت فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی در بین هیچ‌یک از اقشار فوق وجود ندارد. پر واضح است که نبود درخواست برای این نشریه و کمبود مخاطب، تحقق اهداف آن را، هر قدر هم که نشریه پربار و منظم منتشر شود، تحت تأثیر قرار خواهد داد. تیراژ نشریه در حال حاضر، در حد همان «حداقل هزار نسخه»ی مصوب آیین‌نامه است و این برای جامعهٔ چند ده‌هزار نفری ریاضی‌ورزان و ریاضی‌خوانان کشور، نشانهٔ خوبی نیست. به‌ویژه این‌که در نظر داشته باشیم این تنها نشریهٔ فارسی‌زبان است که با این کیفیت منتشر می‌شود.

در این راستا، هیأت تحریریهٔ جدید نشریه دست کمک به‌سوی همهٔ اعضای جامعهٔ ریاضی کشور و دیگر صاحب‌نظران دراز می‌کند و از یکایک این عزیزان برای پیدا نمودن راه‌هایی برای افزایش مخاطبان نشریه در بین همهٔ طیف‌های ذکر شده به‌ویژه دانشجویان که آینده‌سازانِ فرهنگ ریاضی کشور هستند، یاری می‌طلبد.

مشکل دیگر، کمیت و کیفیت مقالات ارسالی برای نشریه است. کمیت مقالات ارسالی در سال‌های اخیر افزایش قابل توجهی داشته است اما متأسفانه بخش زیادی از آن‌ها به دلایل مختلف از قبیل تخصصی بودن بیش از حد، ضعف محتوا، نارسایی در ترجمه و امثال این‌ها، قابل انتشار

نمی‌باشد. برای حرکت به‌سوی انتشار منظم و پرمحتوای چهار شماره در سال، مقالات مناسب بیشتر از این، مورد نیاز است. در این رابطه نیز از همهٔ اعضای جامعهٔ ریاضی که دستی به قلم داشته و امکان نوشتن مقالات توصیفی مناسب و در چهارچوب اهداف نشریه را دارند، بالاخص از بزرگان و پیشکسوتان، درخواست می‌شود با ارسال نوشته‌های ارزشمند خود، هیأت تحریریه را در حرکت به‌سوی اهداف نشریه یاری نمایند.

در پایان، لازم است از زحمات اعضای هیأت تحریریه دوره‌های قبل که تلاش آن‌ها نشریه را به جایگاه فعلی رسانده است قدردانی شود، به‌ویژه عزیزانی که در دورهٔ گذشته از اعضای هیأت تحریریه بوده و در دورهٔ جدید از موهبت حضور آنان برخوردار نیستیم، یعنی سرکار خانم دکتر سهیلا غلام آزاد (مدیر اجرایی محترم دورهٔ قبل) و آقایان دکتر بهمن طباطبایی (سردبیر محترم دورهٔ قبل)، دکتر روح‌اله جهانی‌پور (ویراستار ارشد محترم دورهٔ قبل)، دکتر منصور معتمدی و دکتر بامداد یاحقی. فراهم شدن امکان انجام کلیهٔ امور مربوط به فرآیند دریافت، داوری و اعلام نتایج بررسی مقالات دریافتی به‌صورت بَرخطْ (Online) محصول زحمات طولانی‌مدت جناب آقای دکتر جهانی‌پور و همکاری بی‌دریغ سرکار خانم فریده صمدیان (متصدی امور فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی در دبیرخانهٔ انجمن ریاضی ایران) در آماده‌سازی سامانهٔ نشریه می‌باشد که از این بابت نیز از این بزرگواران تشکر ویژه‌ای می‌شود.

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۳ (پاییز ۱۳۹۲) صص. ۵ تا ۱۵

آزمایش ذهنی فرایلینگ

احسان ممتحن

(آیا عقل عرفی و فرض پیوستار با یکدیگر سر ناسازگاری دارند؟)

چکیده

هدف این مقاله، معرفی و شرح آزمایش ذهنی کریستوفر فرایلینگ در رد فرض پیوستار کانتور و نتایج فلسفی آن به زبانی ساده و تا حد امکان غیر فنّی [۱] است.

۱. مقدمه

در ستایش افلاطون مشربی سخن‌های بسیار خوانده‌ایم و شنیدیم و گفته‌اند؛ از جمله این‌که در افلاطون‌گرایی راه بر روش‌های جدید پژوهش گشوده‌تر است و ذهن جستجوگر می‌تواند در هواهای تازه‌تری نفس زند. مگر ریاضی‌دانان ضمانت داده‌اند تا ابدالاباد در اسارت اثبات‌های سنتی یعنی همان اثبات‌های متشکل از کلمات و نمادها باقی بمانند؟ آیا باید آن همه اثبات‌های تصویری کوتاه و زیبا را بگذاریم و بگذریم به این بهانه که شکل‌ها دقیق نیستند؟ مگر اثبات‌ها، در تحلیل نهایی، جز نشانه‌هایی بر سر راه هستند؟ جز انگشت اشاره‌ای که جایی را نشانه رفته است: آنک قُلّه، آنک کعبه [۲]. همین که تو و من نیز بتوانیم قله را ببینیم، اثبات وظیفه‌اش را به انجام رسانده است ([۴]). پیش از این، در [۷]، دیدیم که چطور پارادایم (= الگوی تبیینی، دیدمان) ریاضی در حال تغییر است و بورباکی‌گرایی آهسته آهسته جایش را به بینشی تجربی‌تر از ریاضیات می‌دهد.

---

۱) جیمز رابرت براون در [۲] فصلی کامل (فصل یازده) را به آزمایش ذهنی فرایلینگ اختصاص داده است. فصل مذکور یکی از جالب‌ترین بخش‌های کتاب وی است. مقالهٔ حاضر، کم و بیش چکیده و ساده‌شدهٔ فصل یازده کتاب مذکور است.

۲) اشاره به خوابی است که ناصر خسرو قبادیانی، پیر یُمگان، دید که کسی به سوی کعبه اشارت همی‌کرد. وی در آن زمان ۴۰ ساله بود. از خواب بیدار شدن همان و آغاز تحول همان.

انتشار مجله‌ای وزین با عنوان *ریاضیات تجربی*[1] خود نشانه‌ای روشن بر آغاز این تغییر پارادایم تواند بود. اگر همهٔ این مقدمات، پذیرفتنی باشند، آزمایش‌های ذهنی که تاکنون میدان تاخت و تاز نبوغ فیزیک‌دانانی چون اینشتین[2] و شرودینگر[3] بوده است اکنون می‌تواند جولانگاه ریاضیدانان باشد. یکی از طبع آزمایی‌ها در این عرصه، آزمایش ذهنی کریستوفر فرایلینگ در ردّ فرض پیوستار است.

پرسشی که فوراً به ذهن می‌آید این است که مگر گودل و کوهن ثابت نکردند که فرض پیوستار مستقل از مابقی اصول موضوعهٔ (= بُنداشت‌های) نظریهٔ مجموعه‌هاست؟ پس ردّ فرض پیوستار به چه معنی است؟ استقلال فرض پیوستار مطلبی است کاملاً جا افتاده اما اگر افلاطون‌گرا باشی و واقع گرا، اگر به وجود اشیاء ریاضی مستقل از ما باور داشته باشی و بالاخره اگر هر گزارهٔ ریاضی را بیان امری واقع در عالم مُثُل بدانی، آن‌وقت باور خواهی کرد که هر گزارهٔ ریاضی یا درست است یا غلط و لذا دارای ارزشی است. به هر حال، یا سیب از درخت می‌افتد یا نمی‌افتد و کسی هم نمی‌پرسد منظورت در کدام چارچوب یا با پذیرش کدام اصل فیزیکی است. واقع‌گرایان، به همین سان در ریاضیات برای هر گزاره‌ای ارزشی قایل‌اند. از این منظر، آیا فرض پیوستار درست است؟ کریستوفر فرایلینگ می‌گوید نه، نیست و دلیل وی آزمایشی ذهنی است که نشان می‌دهد پذیرش فرض پیوستار با شهود، عقل عرفی[4] و به‌طور دقیق‌تر با این نکته که پدیده‌ای که علی‌الاصول نباید اتفاق بیافتد در صورت پذیرش فرض پیوستار، هر دَمْ اتفاق می‌افتد در تخالف است.

۲. مقدمات کار

همهٔ ما دیده‌ایم که عدد اصلی $P(X)$، مجموعه توانی X، با عدد اصلی 2^X، مجموعهٔ تمام توابع از X به $\{0, 1\}$، برابر است. معمولاً پس از بیان این مطلب، قضیه‌ای معروف از کانتور را می‌خوانیم که عدد اصلی $P(X)$، یعنی $|P(X)|$ از $|X|$ اکیداً بزرگتر است. اکنون اگر بیاد بیاوریم که $|P(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$، این نتیجه به‌دست می‌آید: $\aleph_0 = |\mathbb{N}| < c = |\mathbb{R}|$. پس تا اینجای کار می‌دانیم که c اکیداً بزرگتر از $\aleph_0$ است. مشکل از آنجا آغاز می‌شود که بخواهیم بدانیم که c چقدر بزرگتر از $\aleph_0$ است؟

قضیهٔ کانتور وجود سلسله مراتبی از مجموعه‌هایی با عدد اصلی نامتناهی را به اثبات می‌رساند: $\cdots > 2^{2^{2^{\aleph_0}}} > 2^{2^{\aleph_0}} > 2^{\aleph_0} > \aleph_0$. پرسش جالبی که وی با آن رویارو شد، به جایگاه عدد اصلی $\mathbb{R}$، پیوستار، در سلسله مراتب $\cdots > \aleph_3 > \aleph_2 > \aleph_1 > \aleph_0 > \cdots > 2 > 1 > 0$ مربوط بود. آیا $2^{\aleph_0} = \aleph_1$؟ یا با $\aleph_2$ مساوی است؟ یا شاید هم با $\aleph_3$؟ فرض پیوستار کانتور، CH، مدعی

1) Experimental Mathematics

۲) اینشتین تعداد زیادی آزمایش ذهنی ابداع کرده که از آن جمله می‌توان از آزمایش ای. پی. آر نام برد.

۳) گربهٔ شرودینگر

4) Common sense

است که $|\mathbb{R}| = \aleph_1$؛ معادلاً $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. اگر CH نادرست باشد، آن‌گاه ممکن است $|\mathbb{R}|$ با $\aleph_2$ مساوی باشد، یا با $\aleph_{1392}$، یا شاید هم به‌ازای هر n متناهی، از هر $\aleph_n$ بزرگتر باشد. هرچند فرض پیوستار معمولاً در چارچوب اعداد اصلی ترامتناهی بیان می‌گردد، این مفاهیم برای بیان آن ضروری نیستند. در واقع، فرض پیوستار در آنالیز استاندارد به‌سادگی قابل بیان است: هر زیرمجموعهٔ نامتناهی از اعداد حقیقی یا با مجموعهٔ اعداد طبیعی در تناظر یک‌به‌یک است یا با مجموعهٔ اعداد حقیقی ([۸]).

اوایل سدهٔ بیستم تلاش‌های ناکامِ بسیاری برای ابطال یا اثبات فرض پیوستار صورت گرفت. نخستین پیشرفت چشمگیر، زمانی رخ داد که کورت گودل در سال ۱۹۳۸ ثابت کرد که فرض پیوستار با بقیهٔ اصول نظریهٔ مجموعه‌ها سازگار است. وی این مهم را با فراهم آوردن الگویی مبتنی بر به‌اصطلاح «مجموعه‌های ساخت‌پذیر» به‌اجرا در آورد که در آن، همهٔ بنداشتهای ZFC (نظریهٔ مجموعه‌های تسرملو ــ فرانکل به‌همراهِ اصل انتخاب) صادق بودند و فرض پیوستار نیز صادق بود. این، البته به آن معنی است که CH نمی‌تواند به شیوه‌ای عادی (استنتاج $\sim CH$ از بقیهٔ بنداشت‌های ZFC) ابطال گردد.

پال کوهِن استقلال کامل را در سال ۱۹۶۳ اثبات کرد. او ابزار نیرومند نوینی با نام تَحمیل[1] معرفی کرد که به وی امکان داد الگویی از نظریهٔ مجموعه‌ها بسازد که در آن، ZFC صادق اما CH کاذب بود. نتایج گودل و کوهن بر روی هم، تصمیم‌ناپذیری فرض پیوستار را اثبات می‌کنند. CH مستقل از ZFC است: نه می‌تواند اثبات شود نه ابطال ــ دست‌کم نه به شیوه‌های متداول.

در اینجا با مسألهٔ فلسفی جذّابی روبه‌رو می‌شویم. در ریاضیات رایج، قایل به پیوندی ناگسستنی میان *صدق* و *اثبات* هستیم. دو اردوگاه فلسفی، صورت‌گرایان و ساخت‌گرایان، این نکته را تصریح کرده‌اند، هر چند انگیزهٔ آنان در این راه، متفاوت بوده است. چون ساخت‌گرایان با بخش اعظم مجموعه‌های نامتناهی کانتور میانهٔ خوبی ندارند، این مکتب را کنار می‌گذاریم. از طرف دیگر، صورت‌گرایان با کمال میل، نظریهٔ مجموعه‌های کانتور را می‌پذیرند. آن‌ها نوعاً این دیدگاه را که CH صاحب ارزشی نیست اختیار می‌کنند، زیرا استقلالِ آن اثبات شده است ــ فرض پیوستار نه صادق است و نه کاذب. دلیل بنیادی این تلقی این است که ریاضیات را پیکره‌ای مبتنی بر بنداشت‌ها می‌پندارند که آن‌ها را به دلایل گوناگونی پذیرفته‌ایم اما داشتن صدق عینی، از جملهٔ این دلایل نیست. گفتن این‌که گزارهٔ P صادق است با این سخن یکی است که: P می‌تواند منطقاً از بنداشت‌های پذیرفته‌شده استنتاج شود؛ و گفتن این‌که P کاذب است مساوی است با گفتن این‌که $\sim P$ می‌تواند از بنداشت‌های مذکور استنتاج شود. هیچ‌کدام از این دو شِق برای CH ممکن نیست، پس فرض پیوستار، نزد ریاضی‌دانِ صورت‌گرا، صاحب هیچ ارزشی نیست.

بر خلافِ صورت‌گرایان، افلاطون‌گرایان مدعی‌اند که صدق، سوا از اثبات است. اثباتی برای P،

1) Forcing

P را به گزاره‌ای صادق تبدیل نمی‌کند بلکه تنها در حکم قرینه‌ای (= شاهدی، گواهی) بر صدق P است. عدم استنتاج از اصول اولیه بدان معنی است که ممکن است برای همیشه از ارزش P بی‌اطلاع بمانیم اما P همچنان صاحب ارزش خواهد بود. احساس افلاطون‌گرا همانند احساس اکثر ما در باب گزاره‌های علوم طبیعی است. ممکن است قرینه‌ای بر این که ۴ میلیون سال قبل، در محل کنونیِ انجمن ریاضی ایران واقع در پارک ورشو، نبردی هولناک میان یک ماموت و یک ببر دندان‌خنجری رخ داده است، در دست نداشته باشیم. با وجود این، اکثر ما بر این باوریم که این ادعا یا صادق است یا کاذب. امکان ابطال یا اثبات یک ادعا، هیچ ربطی به صدق یا کذبش ندارد. گرایش افلاطون‌گرایانه نسبت به CH نیز وضعی همانند دارد. فرض پیوستار، واقعاً صادق یا واقعاً کاذب است حتی اگر نتوانیم هیچ‌کدام را اثبات کنیم.

علاوه بر ملاحظات کلیِ نشأت گرفته از افلاطون‌گرایی، دلایل دیگری برای این‌که فکر کنیم CH صاحب ارزش معینی است وجود دارد؛ دلایلی که از ملاحظات موجود در نظریهٔ مجموعه‌ها الهام گرفته شده‌اند. در اینجا (برای آنان که با نظریهٔ مجموعه‌ها قدری آشنایی دارند ـ بقیه می‌توانند آن را نادیده بگیرند) دلیل جالبی وجود دارد حتی اگر با اقبال همگانی روبه‌رو نشود. تصور کنید مشغول مطالعهٔ اعداد ترتیبی (= اوردینال‌ها) هستید. هر بار که از اوردینالی چون β به اوردینال بعدی می‌روید، عددی حقیقی مثل r گزینش کنید و با آن اردینال متناظرش سازید و بنویسید r_β. چون مجموعهٔ اعداد حقیقی، $\mathbb{R}$، صرفاً یک مجموعه است ولی اوردینال‌ها، Ord، یک کلاس محض است، قطعاً پیش از آن‌که اوردینال‌ها به پایان برسند، به انتهای اعداد حقیقی می‌رسیم[1]. بنابراین برای اوردینالی چون α، $\{r_\beta \ : \ \beta \in \alpha\}$ مجموعهٔ $\mathbb{R}$ را در بر می‌گیرد. حال چنین به نظر می‌رسد که $|\mathbb{R}|$ کوچکترین αیی است که می‌تواند به‌صورت $\{r_\beta \ : \ \beta \in \alpha\}$ فهرست شود. این یعنی α عددی اصلی مانند a است و لذا می‌توانیم نتیجه بگیریم که پیوستار، عددی اصلی مانند $\aleph_a$ دارد. البته اگر $a = ۱$، آن‌گاه CH صادق است و اگر $a \neq ۱$، آن‌گاه CH کاذب است. اما یکی از این دو باید اتفاق بیافتد، پس فرض پیوستار قطعاً صاحب ارزش است.

حال که اثبات در نزد افلاطون‌گرایان نوعی قرینه، شاهد و گواه به‌حساب می‌آید، انواع دیگر قرینه و شاهد نیز به همان اندازهٔ اثبات، خواستنی و مطلوب‌اند. به عبارت دیگر، چون اثبات، محکی برای صدق نیست بلکه صرفاً گونه‌ای گواهی برای صدق فراهم می‌آورد، رغبتی طبیعی برای معرفی انواع دیگری از استدلال‌های موجّه وجود دارد. از هر چه بگذریم، خود بنداشت‌ها قابل استنتاج نیستند بلکه باید آن‌ها را به دلایل دیگری صادق پنداشت. برخی فیلسوفان ریاضی، گرایش افلاطونیِ بی‌تعصبی برگزیده‌اند که بر طبق آن، ریاضیات را همانند علوم طبیعی می‌دانند([۲] فصل یازدهم).

---

۱) کلاس‌های محض عضو دارند درست به همان صورت که مجموعه‌ها عضو دارند اما آن‌ها خودشان عضوی از مجموعه‌ای بزرگتر نیستند. «خیلی بزرگتر از آن‌اند» که مجموعه انگاشته شوند. همهٔ اعداد ترتیبی یک مجموعه تشکیل نمی‌دهند چراکه فرضِ وجود چنین مجموعه‌ای، به پارادوکس منجر می‌شود. اما بی هیچ مشکلی می‌توان از کلاس همهٔ اعداد ترتیبی سخن گفت.

همان گونه که برخی از مهمترین اختراعات نظیر میکروسکوپ، آغازگر روش‌های جدیدی برای تولید قرائن تازه است، آزمایشی ذهنی که متضمن پرتاب تیر است، ممکن است دست‌کم در بنیاد، قرینه‌ای برای صدق یا کذب CH فراهم کند.

۳. ردّیهٔ فرایلینگ بر CH

در این بخش از مقاله، به توضیح مطالب ریاضی و فنّی‌ای خواهیم پرداخت که بعداً در اثبات فرایلینگ نقشی مهم ایفا خواهند کرد. سعی شده است که این مطالب به زبانی تا حدّ ممکن غیرفنی شرح داده شوند.

۱.۳. ZFC و خوش‌ترتیبی

ما ZFC و نتیجهٔ مهم آن، یعنی «اصل خوش‌ترتیبی» را مسلّم فرض خواهیم کرد. این اصل می‌گوید که هر مجموعه می‌تواند خوش‌ترتیب شود، یعنی چنان مرتب شود که هر زیر مجموعهٔ ناتهیِ آن، عضو ابتدا داشته باشد. ترتیب معمولی، $<$، روی مجموعهٔ اعداد طبیعی نیز یک خوش‌ترتیبی برای اعداد طبیعی است. مجموعه‌ای را برگزینید، مثلاً $\{۸۲, ۳۶, ۴۷, ۶۳۹۷۲\}$. این مجموعه عضو ابتدا دارد: ۳۶. اما بر خلافِ اعداد طبیعی، ترتیب معمولی روی اعداد حقیقی، $<$، یک خوش‌ترتیبی نیست. به‌عنوان مثال، مجموعهٔ $(۰, ۱) = \{x : ۰ < x < ۱\}$ عضو ابتدا ندارد. با وجود این، اصل خوش‌ترتیبی تضمین می‌کند که اعداد حقیقی می‌توانند با رابطه‌ای چون $<'$، خوش‌ترتیب شوند هرچند هیچ‌کس تاکنون چنین رابطه‌ای را نیافته است.

۲.۳. تیرها، نقاط، اعداد حقیقی

آزمایش ذهنی فرایلینگ متضمن پرتاب به یک خط به‌منظور انتخاب اعداد حقیقی است. فرض‌های مهمی در این آزمایش لحاظ شده‌اند. یکی از آن‌ها این است که خطی شامل نقاط از قبل موجود می‌باشد. به‌عکس، ارسطو، می‌اندیشید که نقاط، مثلاً با پرتاب تیر می‌توانند ساخته شوند اما پیش از این وجود نداشته‌اند. اگر حق با جناب ارسطو باشد، در آن صورت، آزمایش فرایلینگ به‌طور قطع، کارآیی‌اش را از دست می‌دهد. پس فرضِ از پیش موجود بودنِ نقاط، فرضی اساسی است. امروزه به یُمن هندسهٔ تحلیلی دکارت، این فرض‌ها و هر چیزی که بر آن‌ها استوار گردد را آسانتر می‌پذیریم.

به‌علاوه، ایده‌آل‌سازی‌های متعددی صورت می‌گیرد. به‌طور قطع، هیچ خط مادی‌ای پیوسته نیست. جهان و محتملاً خودِ فضا، از جهات گوناگون، گسسته است. پس این نوعی خط ایده‌آل‌شده است که به آن تیر می‌افکنیم. همچنین هیچ‌کس باور ندارد که می‌توانیم عدد حقیقی مشخصی را با محل اصابت تیر یکی بگیریم. این نیز ایده‌آل‌سازی است. همهٔ این‌ها نشان می‌دهند که آزمایش

فرایلینگ، آزمایشی ذهنی است.

۳.۳. آزمایش ذهنی

اکنون نوبت به بخش تجسمی دیداری آزمایش ذهنی می‌رسد. تصور کنید که به خط حقیقی یا دقیق‌تر بگوییم به بازهٔ [۱ ,۰] تیر پرتاب می‌کنیم. دو تیر پرتاب می‌شود و آن دو از یکدیگر مستقل هستند. هدف، انتخاب دو عدد تصادفیِ p و q است. اگر از آن بیم دارید که تیرها اگر یکی پس از دیگری افکنده شوند، ممکن است از یکدیگر مستقل نباشند، دو تیرانداز را تصور کنید که همدیگر را نمی‌بینند و هر دو پس از شمارش «یک، دو، سه، پرتاب» تیرشان را به‌سوی خط رها می‌کنند؛ یا از هم جدایشان کنید و از آن‌ها بخواهید که تیرشان را به نسخه‌های متفاوتی از [۱ ,۰] بیفکنند.

در این آزمایش ذهنی، سه نکتهٔ مهم وجود دارند که باید به آن‌ها توجه کرد: زوجی از اعداد حقیقی به‌طور تصادفی، مستقل از یکدیگر و به نحوی متقارن انتخاب می‌شوند. بگذارید قدری این مفاهیم را بررسی کنیم.

۴.۳. متغیرهای تصادفی، استقلال و تقارن

تعاریف ریاضی متعارف از متغیرهای تصادفی چیزی از این دست هستند: یک *متغیر تصادفی* تابعی اندازه‌پذیر از یک فضای احتمال به یک فضای اندازه است. ذکر یک مثال به فهم این مطلب کمک خواهد کرد. تصور کنید دو تاس را پرتاب می‌کنیم. می‌توانیم به پرتاب‌ها عدد نسبت دهیم: پرتاب ۱، پرتاب ۲، پرتاب ۳ و غیره. نتیجهٔ یک پرتاب که مجموع عددهای ظاهر شده روی تاس‌ها است، عددی بین ۲ و ۱۲ است. می‌توانیم هر پرتاب را یک آزمایش و عددی که روی تاس نمودار می‌شود را نتیجهٔ آن بینگاریم. متغیر تصادفی تابعی است چون X با دامنهٔ {پرتاب ۱، پرتاب ۲، پرتاب ۳، ...} و برد $\{۲, ۳, \cdots, ۱۲\}$. پرتاب یک تیر متغیری تصادفی با نتیجه‌هایی در [۱ ,۰] است. آن طور که دیوید مامفرد ([6]) می‌گوید، این‌ها «متغیرهای تصادفی حقیقی» هستند.

دو عدد حقیقی، به‌طور مستقل انتخاب می‌شوند چراکه دو تیر اثری بر یکدیگر ندارند. در واقع، پیش‌بینی متکی بر یکی از پرتاب‌ها بر پیش‌بینی دربارهٔ پرتاب دوم هیچ اثری ندارد. ذکر مثالی در این باب خالی از فایده نیست. پیش‌بینی کسی که دربارهٔ نمرهٔ یک خودرو در حال عبور می‌گوید: «شگفتا، شانس اتفاق چنین چیزی یک در میلیون است» را در نظر آورید. می‌توانیم این پیش‌بینی را نادیده و در شگفت‌ماندنِ آن شخص را بی‌مورد بدانیم، زیرا تنها هنگامی حقِ حیرت کردن داریم که نصبِ نمرهٔ خودرو مستقل از نتیجهٔ به‌دست آمده باشد، حال آن‌که در همان زمانِ نصب نمره هم معلوم بوده است که این نمره، نمرهٔ خاصّی است (مثلاً فرض کنید نمرهٔ کذایی شمارهٔ شناسنامه و سال تولدتان را نشان دهد). مستقل بودن و تصادفی بودن تیرها، تقارن پرتاب‌ها را تضمین می‌کند. در نتیجه، هر یک از دو تیر را می‌توان نخستین تیری انگاشت که مجموعه‌ای از اعداد حقیقی را که از قبل خوش‌ترتیب شده است، معین می‌کند. به قول فرایلینگ «خط حقیقی واقعاً نمی‌داند که کدام

تیر، اول و کدام یک بعداً پرتاب شده است» ([۳]).

۵.۳ اعداد اصلی، اعداد ترتیبی و پاره‌های آغازین

در استدلالی که در پی می‌آید از نکتهٔ مهمی در نظریهٔ مجموعه‌ها استفاده می‌کنیم. اعداد ترتیبی (= اوردینال‌ها) مرتب هستند (در واقع، خوش ترتیب‌اند):

$$\begin{aligned} & ۰ < ۱ < ۲ < \cdots < \omega < \omega + ۱ < \omega + ۲ < \cdots < \omega ۲ < \omega ۲ + ۱ < \cdots \\ & < \omega ۳ < \cdots < \omega^{۲} < \cdots < \omega^{\omega} < \cdots < \epsilon_{۰} < \cdots . \end{aligned}$$

اعداد ترتیبی این ویژگی بسیار مهم را دارند که هر دوتای آن‌ها یا با هم یکریخت هستند یا یکی با پارهٔ آغازین دیگری یکریخت است. *پاره‌ای آغازین* از یک مجموعهٔ مرتب صرفاً یک زیرمجموعهٔ سرهٔ آن است. اگر S پارهٔ آغازینِ مجموعهٔ خوش‌ترتیب W باشد، آن‌گاه $a \in W$ وجود دارد که $S = \{x \ : \ x < a\}$. بنابراین عدد $\{۰, ۱, ۲\} = ۳$ پارهٔ آغازین عدد ترتیبی ۴ است (و همچنین پارهٔ آغازین ۵، ٦ و ۷، ...). برای هر عدد طبیعی n، مجموعهٔ $\{۰, ۱, ۲, \cdots, n\}$، پاره‌ای آغازین از ω (مجموعهٔ اعداد طبیعی) است. یک قضیهٔ مهم می‌گوید: هیچ مجموعهٔ خوش‌ترتیبی با پاره‌های آغازین خود یکریخت نیست.

اعداد اصلی به‌کمک اعداد ترتیبی تعریف می‌شوند. در حالت متناهی، آن‌ها به‌وضوح یکی هستند. بنابراین عدد ترتیبی ۲۷ همان عدد اصلی ۲۷ است. در حالت نامتناهی، امور قدری دشوارتر می‌شوند. اعداد ترتیبی متمایز بسیاری وجود دارند که میان آن‌ها توابع یک‌به‌یک و پوشا (و نه ترتیبْ نگه‌دار) وجود دارد و به این معنی، بزرگی یکسانی دارند. به‌عنوان مثال، $\omega, \omega + ۱, \omega + ۲, \ldots, \omega ۲, \omega ۲ + ۱, \omega ۲ + ۲, \ldots, \omega ۳, \omega ۳ + ۱, \ldots, \omega^{۲}, \omega^{۲} + ۱, \ldots$ همگی می‌توانند در تناظری یک‌به‌یک با یکدیگر قرار گیرند. یک *عدد اصلی* کوچکترین عضو مجموعهٔ همهٔ اوردینال‌های یکریخت است. بنابراین $\aleph_{۰}$ را با ω یکی می‌گیریم.

بر این تعریف نتیجه‌ای مترتب است که ممکن است آن را تاکنون دریافته باشید. چون هر پارهٔ آغازینِ یک عدد ترتیبی از خودِ عدد ترتیبی کوچکتر است و چون یک عدد اصلی با کوچکترین عدد ترتیبیِ یکریخت با خودش یکی گرفته می‌شود، پس نتیجه می‌شود که عدد اصلی پارهٔ آغازین باید از عدد اصلی مجموعهٔ اولیه‌مان کوچکتر باشد. در چند حالت، این نکته کاملاً مشهود است. اگر با مجموعهٔ ω آغاز کنیم و پارهٔ آغازینی از آن را برگزینیم، در آن صورت، مجموعه‌ای با تنها تعدادی متناهی عضو برگزیده‌ایم. این موضوع در این مثال بدیهی بود اما در حالت کلی هم صادق است. در نتیجه، اگر با مجموعه‌ای با عدد اصلی $\aleph_{۱}$ آغاز کنیم و پاره‌ای آغازین از آن را برداریم، عدد اصلی این پارهٔ آغازین شمارا خواهد بود، یعنی یا $\aleph_{۰}$ یا متناهی. ما از این نکته در استدلال پایانی بهره خواهیم جست.

۶.۳. اندازه و احتمال

مفهوم احتمال را در حالتی که فضای نمونه‌ای متناهی است، بیان کردیم. مفهوم احتمال در حالت نامتناهی قدری فنّی‌تر است. اگر یک جفت تاس را پرتاب کنیم، ۳۶ نتیجهٔ ممکن وجود دارد. با نمایش این نتایج به‌صورت زوج مرتب (تاس اول، تاس دوم)، به‌اصطلاح فضای نمونه‌ای $\{(1,1),(1,2),(2,1),\cdots,(6,6)\}$ را با ۳۶ نتیجهٔ متفاوت در اختیار خواهیم داشت. با فرض آن‌که این دو، تاس‌های سالمی باشند، احتمال رخداد همهٔ نتایج یکسان است. احتمال به‌دست آوردن مجموع ۲ عبارت است از $\frac{1}{36}$، زیرا تنها به یک طریق ممکن است چنین اتفاقی رخ دهد، یعنی وقتی که برآمد آزمایش، $(1,1)$ باشد. به سه طریق ممکن است نتیجهٔ ۴ را به‌دست آورد، یعنی $(1,3)$، $(3,1)$ و $(2,2)$. بنابراین احتمال به‌دست آوردنِ مجموع ۴، عبارت است از $\frac{1}{12} = \frac{3}{36}$. احتمال به‌دست آوردن یک عدد زوج، یکْ دومْ، به‌دست آوردنِ عددی بین ۲ و ۱۲، یک و به‌دست آوردن نتیجهٔ ۱۳، صفر است. همگی این‌ها کاملاً سرراست است اما در حالت نامتناهی امور، به این سادگی نیستند.

تیری به پاره‌خط $[0,1]$ پرتاب کنید. ممکن است تیر را به $\frac{1}{5}$، $\frac{2}{\pi}$، یا $\frac{e}{3}$ یا نقاط دیگر بزنید. اما شانس برخورد تیر به هر یک از این نقاط چقدر است؟ شانس، یکی در نامتناهی است که به معنی احتمالِ صفر است. با شگفتی، رویدادهایی با شانس صفر واقعاً رخ می‌دهند. این موضوع هرچند عجیب است اما غیرمنطقی نیست. ممکن است بپنداریم که معنابخشی به حالت نامتناهی، آبْ در هاون کوبیدن است اما چنین نیست. شاخه‌ای از آنالیز به‌نام نظریهٔ اندازه به فریادمان می‌رسد.

نظریهٔ اندازه، یا با بیانی دقیق‌تر، نظریهٔ اندازهٔ لبگ، راهی پیش پای ما می‌نهد تا به تعداد بی‌شماری مجموعه‌های متفاوت، اندازه نسبت دهیم. اندازهٔ مجموعه‌ای از نقاط به‌شکل یک بازه، به‌سادگی برابر طول بازه تعریف می‌شود. بنابراین طول پاره‌خطِ میان ۷ و ۱۳ عبارت است از $6 = 13 - 7$. به‌زبان نمادین، $\mu([7,13]) = 6$ (که معمولاً حرف یونانی μ (بخوانید میو) برای نمایش اندازه به‌کار می‌رود). روشن است که $\mu([0,1]) = 1$. دومین اصل نظریهٔ اندازه می‌گوید که اگر مجموعه‌ای مانند S برابر با اجتماع تعداد شمارایی مجموعه‌های مجزا از هم باشد، یعنی $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \cdots$، آن‌گاه $\mu(S) = \mu(S_1) + \mu(S_2) + \mu(S_3) + \cdots$. جهت ارائهٔ مثالی آسان، اگر S اجتماع مجموعه‌های $[0,\frac{1}{2}]$، $[\frac{3}{4},\frac{7}{8}]$ و $[\frac{9}{10},1]$ باشد، آن‌گاه $\mu(S) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} = \frac{29}{40}$. در این چارچوب، احتمال به‌آسانی فهم می‌شود. در پرتاب تیر به پاره‌خط $[0,1]$، شانس برخورد تیر به پاره‌خط $[0,\frac{1}{2}]$ آشکارا $\frac{1}{2}$ است. پس احتمال فرود آمدن تیر در S مساوی است با اندازهٔ S. تا اینجا همه چیز خوب پیش رفت. اما نظرتان دربارهٔ احتمال برخورد تیر با عددی گویا چیست؟ اندازهٔ مجموعهٔ اعداد گویا در $[0,1]$ چیست؟ این مجموعه‌ای از نقاط است که در سراسر $[0,1]$ پخش شده‌اند اما به‌یقین، یک بازه را تشکیل نمی‌دهند. من از $\mathbb{Q}_1$ و I_1 برای نشان دادن مجموعه‌های نقاط گویا و گنگ در $[0,1]$ استفاده خواهم کرد.

اندازهٔ هر مجموعهٔ تک‌عضوی صفر است؛ یعنی یک نقطهٔ واحدِ a، هیچ طولی ندارد. پس

$\mu(\{a\}) = ۰$. همان‌طور که می‌دانید $\mathbb{Q}_۱$ شمارا است. قضیه‌ای در نظریهٔ اندازه چنین می‌گوید: اگر S اجتماع شمارش‌پذیری از مجموعه‌های اندازه ــ صفر باشد، آن‌گاه اندازهٔ S نیز صفر است. چون $\mathbb{Q}_۱$ اجتماع شمارایی از مجموعه‌های تک‌عضوی است که اندازه هر یک صفر است، از قضیهٔ مذکور نتیجه می‌شود که اندازهٔ $\mathbb{Q}_۱$ نیز صفر است. نظرتان دربارهٔ نقاط گنگ چیست؟ $I_۱$ ناشمارا است، پس قضیهٔ فوق، قابل اعمال به $I_۱$ نیست. با وجود این، به‌آسانی می‌توانیم اندازه‌اش را معین کنیم. چون $I_۱ \cup \mathbb{Q}_۱ = [۰, ۱]$، لذا $\mu([۰, ۱]) = \mu(\mathbb{Q}_۱) + \mu(I_۱)$. چون $\mu([۰, ۱]) = ۱$ و $\mu(\mathbb{Q}_۱) = ۰$، پس $\mu(I_۱) = ۱$. خط حقیقی به‌طرزی چشمگیر زیر سیطرهٔ اعداد گنگ است. در چارچوب نظریهٔ احتمال، شانس برخورد تیر به عددی گنگ یک است.

نظریهٔ اندازه به ما کمک می‌کند تا دربارهٔ اندازهٔ بعضی از مجموعه‌های کاملاً عجیب و غریب و نه فقط اعداد گویا و گنگ، سخن بگوییم. لحظاتی بعد با یکی از این مجموعه‌های عجیب رویارو خواهیم شد. نکتهٔ کلیدی برای به‌خاطر سپردن، این است که اندازهٔ هر زیرمجموعهٔ شمارا از $[۰, ۱]$ صفر است و از این‌رو، احتمال برخورد تیر به هر یک از اعضای چنین مجموعه‌ای صفر است.

۴. به هم بافتن زنجیر استدلال

در این بخش، تمامی آنچه را که در بخش‌های قبل تهیه دیدیم به‌کار خواهیم برد تا استدلال فرایلینگ را بازسازی کنیم.

۱. ZFC را مفروض می‌داریم و علاوه بر این (با هدف تولید یک تناقض)، فرض می‌کنیم که CH صادق باشد.

۲. به‌منظور گزینش دو عدد حقیقی، دو تیر به بازهٔ $[۰, ۱]$ از اعداد حقیقی پرتاب می‌کنیم.

۳. نقاط پاره‌خط می‌توانند خوش‌ترتیب شوند به‌طوری که برای هر عدد $q \in [۰, ۱]$، مجموعهٔ $\{p \in [۰, ۱] : p \prec q\}$ شمارا است. (توجه کنید که $\prec$ رابطه‌ای خوش‌ترتیب است نه رابطهٔ «کوچکتر از» $>$). خوش‌ترتیبی با ZFC تضمین می‌شود. این واقعیت که این مجموعه شمارا است، همان‌طور که در بالا توضیح دادیم، از طبیعت خوش‌ترتیبی هر مجموعه با عدد اصلی $\aleph_۱$ نشأت می‌گیرد. برای آن‌که موضوع را مرور کنیم، یک عدد اصلی به‌عنوان کوچکترین عضو در میان اعداد ترتیبی یکریخت تعریف می‌شود، پس پارهٔ آغازینی که q تعریف می‌کند باید عدد اصلی‌اش از عدد اصلی $[۰, ۱]$ کوچکتر باشد. با مفروض گرفتن CH، $\aleph_۱$، نخستین عدد اصلی ناشمارا است. بنابراین $\{p \in [۰, ۱] \ : \ p \prec q\}$ باید شمارا باشد.

۴. مجموعهٔ اعدادی که پیش از p در خوش‌ترتیبی ظاهر می‌شوند را S_p می‌نامیم. فرض کنید نخستین پرتاب، به نقطهٔ p و دومین پرتاب، به نقطهٔ q اصابت کند. یا $p \prec q$ یا برعکس. اولی را فرض می‌گیریم. بنابراین $p \in S_q$. توجه کنید به‌خاطر دلیلی که بلافاصله پیش از این بیان شد، S_q شمارا است.

۵. چون دو تیر از یکدیگر مستقل‌اند، می‌توانیم بگوییم پرتابی که در نقطهٔ q فرود می‌آید، مجموعهٔ S_q را به طریقی تعریف یا تثبیت می‌کند که مستقل از پرتابی است که p را گزینش می‌کند.

۶. اندازهٔ هر مجموعهٔ شمارا صفر است، پس $\mu(S_q) = 0$. در نتیجه احتمال فرود تیر در نقطه‌ای از S_q نیز صفر است.

۷. با استدلالی مشابه، می‌توانیم مجموعهٔ S_p از نقاطی را که در خوش‌ترتیبی پیش از p ظاهر می‌شوند، تعریف کنیم و اندازهٔ آن هم صفر است: $\mu(S_p) = 0$.

۸. بالأخره یکی از این دو تیر باید در مجموعه‌ای فرود آید که توسط مجموعهٔ دیگر تعریف شده است؛ هرچند که احتمال چنین پیشامدی صفر است. می‌توان به‌گونه‌ای دیگر نیز این معضل را توضیح داد. گیریم تیری را من و تیری را شما پرتاب کنید. اگر عدد شکار شده با تیر من، از عدد شما بزرگتر بود، من برنده‌ام و در غیر این صورت، شما برنده‌اید. بر اساس آنچه گفته شد، هم من و هم شما به‌دلیل تقارن پرتاب‌ها خود را برندهٔ به‌حق می‌بینیم و این با عقل عرفی نمی‌خواند.

بنابراین باید فرض اولیه، CH، را رها کنیم، زیرا به چنین امر نامعقولی منجر می‌شود. پس CH ابطال می‌شود و لذا تعداد نقاط روی خط از $\aleph_1$ بیشتر است. به عبارت دیگر، فرض پیوستار با عقل عرفی در تعارض است.

فرایلینگ از آزمون تیر استفاده می‌کند تا دربارهٔ تعدادی از نتایج بنام در نظریهٔ مجموعه‌ها به جدل بنشیند. به‌عنوان مثال، او اصل انتخاب، اصل خوش‌ترتیبی، بنداشت مارتین و بسیاری از دیگر اصول را مورد تردید قرار می‌دهد. برای مطالعهٔ بیشتر، خوانندگان را به مقالهٔ وی ([۳]) ارجاع می‌دهیم.

۵. نگرش پایانی

اثبات‌های تصویری و آزمایش‌های ذهنی منابع بالقوهٔ معرفت ریاضی هستند که وسیعاً نامکشوف باقی مانده‌اند. آن‌ها باید کشف شوند و مورد بهره‌برداری قرار گیرند. این منبعی است که تاکنون تنها از آن به‌عنوان ابزاری راهگشایانه و کمکی روانشناختی استفاده شده است نه چیزی بیشتر. بر خلاف چنین پنداری، همان‌گونه که در سراسر [۲] استدلال شده است، بسی بیش از اینها میسر است. تنها کسانی که مأیوس و فاقد قدرت تخیّل‌اند ممکن است این دیدگاه که برخی مسائل ریاضی واقعاً حل‌ناپذیرند را قبول کنند. چنین مسائلی ممکن است با روش‌های موجود حل‌ناپذیر باشند اما دلیلی وجود ندارد که خود را گرفتار چنین ابزارهای ناتوانی کنیم. شاید آزمایش‌های ذهنی از پس حل همهٔ مسائل برنیایند اما ممکن است بعضی را که به شیوه‌ای دیگر قابل حل نیستند، حل کنند. «نه خدا و نه شیطان» و نه حتی گاوس استفاده از آن‌ها را قدغن نکرده‌اند.

مراجع

[1] P. Bartha, “Symmetry and Brown-Freiling refutation of the Continuum Hypothesis”, *Symmetry*, **3**(2011), 636-652.

[2] James Robert Brown, *Philosophy of mathematics: A contemporary introduction to the world of proofs and pictures*, second edition, Routledge, 2008.

[3] C. Freiling, “Axioms of symmetry: Trowning darts at the real number line”, *Journal of symbolic logic*, **51**, 190-200, 1986.

[4] G. H. Hardy, “Mathematical proof”, *Mind*, **38**, 1929.

[5] K. Hauser, *What new axioms could not be*, personal homepage.

[6] D. Mumford, *Dawning of the age of stochasticity* in V. Arnold (ed.) in Mathematics, Frontires and Perspectives, New York, American Mathematical Society, 2000.

[۷] ایان استیوارت، «بدرود بورباکی، تغییر دیدمان در ریاضیات»، فرهنگ و اندیشه ریاضی، سال ۲۷، شمارهٔ پیاپی ۴۲، ۱۳۸۷.

[۸] کورت گودل، «فرض پیوستار کانتور چیست ؟»، ترجمهٔ ضیاء موحد،نشر ریاضی، سال ۲، شمارهٔ ۱، فروردین ۱۳۶۸.

احسان ممتحن
گروه ریاضی، دانشگاه یاسوج
momtahan_e@hotmail.com

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۳ (پاییز ۱۳۹۲) صص. ۱۷ تا ۳۱

انتگرال: از ارشمیدس تا لبگ (قسمت دوم)

سعید مقصودی

چکیده

در این مقاله، شرحی تاریخی ــ توصیفی از شکل‌گیری و تکامل مفهوم انتگرال از ابتدا تا زمان لبگ ارائه می‌کنیم. همچنین با تمرکز بر روی برخی جنبه‌های خاص نظریه‌های انتگرال ریمان و لبگ و با ارائه مثال‌هایی، به برخی کاستی‌های این دو نظریهٔ انتگرال‌گیری اشاره خواهیم کرد.

۶. به‌سوی چارچوبی نظریه ــ اندازه‌ای برای انتگرال ریمان

اشاره کردیم که هانکل، یکی از شاگردان ریمان، در سال ۱۸۷۰ به‌دنبال شرایط لازم و کافیی بود که انتگرال‌پذیری تابع مثال ریمان را مستقیماً بررسی کند. در این راستا، او مجموعهٔ نقاطی را که جهش‌های تابع در آن‌ها بزرگتر از عدد مثبت δ است، S_δ، مورد مطالعه قرار داد. هانکل می‌پنداشت ثابت کرده است که تابع کراندار f انتگرال‌پذیر است اگر و تنها اگر برای هر $\delta > 0$، S_δ هیچ‌جا چگال باشد. لذا این قضیه، حدس دیریکله را تصدیق می‌کرد بدین مضمون که اگر مجموعهٔ نقاط ناپیوستگی یک تابع کراندار، هیچ‌جا چگال باشد، آن‌گاه تابع انتگرال‌پذیر است. اما قضیهٔ هانکل به‌طور یک طرفه برقرار است، یعنی اگر f انتگرال‌پذیر باشد، برای هر $\delta > 0$، $c_e(S_\delta) = 0$ و لذا برای هر $\delta > 0$، S_δ هیچ‌جا چگال است (در اینجا c_e محتوای بیرونی است که بعداً تعریف می‌کنیم). عکس این مطلب برقرار نیست. در بررسی جهت عکس، وی نشان داد که هر مجموعهٔ هیچ‌جا چگال را می‌توان در تعداد متناهی بازه با مجموع طول به‌دلخواه کوچک قرار داد و می‌پنداشت یک معیار به‌اصطلاحِ امروزی ما، توپولوژیک، برای انتگرال‌پذیری برحسب S_δ به‌دست آورده است و لذا دیگر نیازی به پروراندن مشخصه‌سازی نظریهٔ اندازه‌ای نیست. اما اثباتش درست نبود. در واقع، مشکل اینجا بود که تفاوت پوچ بودنِ توپولوژیکی و نظریهٔ اندازه‌ای روشن نشده بود، زیرا در ۱۸۷۰ هنوز ابزارهای کنونیِ نظریهٔ مجموعه‌ها ابداع نشده بود و برهان‌هایی که به مجموعه‌های

بی‌پایان از نقاط مربوط می‌شد اغلب بسیار خام، ابتدایی و غیردقیق بودند ([9]).

مجموعهٔ $A \subseteq \mathbb{R}$ را اندازه (محتوا) ــ صفر می‌نامیم اگر آن را بتوان با تعداد شمارا (متناهی) از بازه‌ها با مجموع طول به‌دلخواه کوچک پوشاند. هانکل فکر می‌کرد مجموعه‌های به‌لحاظ توپولوژیکی کوچک (هیچ‌جا چگال) به‌مفهوم نظریهٔ اندازه‌ای نیز کوچک (اندازه ــ صفر) هستند و به‌عکس. اما این طور نیست، زیرا بعداً مجموعه‌هایی کشف شدند که هیچ‌جا چگال ولی با اندازهٔ مثبت هستند.

ورود گئورگ کانتور (۱۹۱۸ ــ ۱۸۴۵) به صحنه با تحقیقاتش در نظریهٔ مجموعه‌ها که ریشه در مطالعات مربوط به سری‌های فوریه داشتند، به سردرگمی مذکور افزود. کانتور در سال ۱۸۶۷ از رساله دکتری خود در نظریهٔ اعداد دفاع کرد. پس از دریافت مدرک استادی، به آنالیز روی آورد و به دانشگاه هاله که ادوارد هاینه در آنجا بود و روی سری‌های مثلثاتی کار می‌کرد، رفت. هاینه استعداد فوق‌العادهٔ کانتور را تشخیص داد و به وی پیشنهاد کرد روی یکی از مسائل مهم آنالیز قرن نوزدهم کار کند. هاینه خود مشغول چنین کاری بود، یعنی کار روی مسألهٔ یکتایی ضرایب سری‌های فوریه. کانتور یکی از قضایای هاینه در این باره را با افزودن شرطی برحسب نقطهٔ انباشتگی یک مجموعهٔ بی‌پایان، گسترش داد. در کار بعدی که در سال ۱۸۷۲ در این باره منتشر ساخت، یک بخش مقدماتی به آن مبحث افزود که به نوشتهٔ خودش «در اغلب وضعیت‌هایی که یک تعداد متناهی یا نامتناهی از کمیت‌های عددی داده شده است، پیش می‌آید». مفهوم‌های نقطهٔ حدی و مجموعهٔ مشتق در بحث او اهمیت اساسی دارند. گرچه مفهوم نقطهٔ حدی یک مجموعه را اولین بار کانتور در سال ۱۸۷۲ منتشر کرد و برای آن، واژهٔ «Grenzpunkt» را به‌کار برد، وایرشتراس آن را ابداع کرده بود. این مفهوم در بیان او از قضیهٔ بولتسانو ــ وایرشتراس به‌کار گرفته شده است. بد نیست توجه کنیم که قضیهٔ مذکور در هیچ نوشته‌ای از بولتسانو ظاهر نشده است. آنچه در کارهای بولتسانو دیده می‌شود، روش نصف کردن بازه‌ها است که در اثبات وایرشتراس از این قضیه، به‌کار رفته است. نقطهٔ حدی در ایتالیا نیز با انتشار کتاب اولیسّه دینی در سال ۱۸۷۸ رواج یافت. دینی در آن کتاب، صورت دقیق‌تری از قضیهٔ بولتسانو ــ وایرشتراس را بیان و اثبات کرد. همچنین برای اولین بار نشان داد که هر مجموعهٔ نوع اول، محتوای صفر دارد.

کانتور مجموعهٔ P را از نوع νام نامگذاری کرد اگر مجموعهٔ مشتق $(\nu + ۱)$امِ آن، $P^{(\nu+۱)}$، تهی باشد. سپس برحسب این مفاهیم، قضیه‌ای دربارهٔ منحصربه‌فرد بودن ضرایب سری‌های فوریه عرضه کرد. کانتور مجموعهٔ E را که $E^{(n)} = \{۰\}$، به‌ازای یک n، مجموعه‌ای از نوع اول نامید. او دریافت که برخی خواصِ مجموعه‌های متناهی به‌استقرا، برای مجموعه‌های نوع اول نیز برقرار است. به‌سادگی دیده می‌شود مجموعه‌های نوع اول هیچ‌جا چگال هستند و با تعداد متناهی بازه با مجموع طول به‌دلخواه کوچک پوشیده می‌شوند. بنابراین برای این دسته از مجموعه‌ها، دو مفهوم پوچی توپولوژیکی و نظریهٔ اندازه‌ای، یکسان است. بسیاری از ریاضیدانان می‌پنداشتند مجموعه‌های نوع اول، تنها مجموعه‌های هیچ‌جا چگال هستند. لذا مجموعهٔ هیچ‌جا چگال باید به‌لحاظ نظریهٔ اندازه

نیز پوچ باشند. به‌نظر می‌رسد اولین مثال نقض را هنری جی. استفان اسمیت در سال ۱۸۷۵ عرضه کرده است. مثال‌های دیگری نیز ساخته شده‌اند که همگی از یک ساختار کلی پیروی می‌کنند. اسمیت به تحلیل برهان هانکل می‌پردازد و اشاره می‌کند که برهان فقط برای مجموعه‌های متناهی، پذیرفتنی است. نه اسمیت و نه معاصرانش اهمیت مثال را درک نکردند. اما در آلمان مثال ولترا و اسمیت هر دو شناخته شده بودند و در ابتدای قرن هجدهم پیشرفت‌هایی در شرف وقوع بود.

علاوه بر پال دوبوا ـ ریموند که در سال‌های ۱۸۸۰ و ۱۸۸۲ اهمیت مثال‌ها را متذکر شده بود، باید به نقش آکسل هارناک (۱۸۰۵ ـ ۱۸۸۸) نیز اشاره کنیم. هارناک در ابتدا به مسألهٔ سری‌های مثلثاتی و نمایش‌پذیری توابع دلخواه علاقه‌مند بود و در یکی از کارهایش در سال ۱۸۸۰ تحت تأثیر تأکید وایرشتراس بر مسألهٔ همگرایی یکنواخت، به موضوع نمایش‌پذیری توابع می‌پردازد و به اهمیت مجموعهٔ نقاطی که با تعداد متناهی بازه با مجموع طول به‌دلخواه کوچک پوشیده می‌شوند، اشاره می‌کند. پرسش اصلی هارناک این بود که آیا متمم اجتماع شمارا از بازه‌ها برابر اجتماع شمارایی از بازه‌هاست؟ پاسخ او مثبت بود که البته اشتباه است.

در کار هارناک نیز در ابتدا قدری سردرگمی رایج دربارهٔ این مفاهیم را می‌بینیم. لیکن او بر این مشکلات فائق آمد به‌طوری که در کتاب درسی که دربارهٔ ریاضیات می‌نویسد شاهد تعریف دقیق مفاهیم هستیم. در آنجا به مجموعهٔ ناپیوستگی‌های توابع در مبحث انتگرال می‌پردازد و دو دسته مجموعه را در این باره از هم تمیز می‌دهد. اما باید مطلب دیگری دربارهٔ هارناک اضافه کنیم و آن این که در مقاله‌ای در سال ۱۸۸۵ اشاره می‌کند که در تعریفِ، به‌اصطلاح امروزی، مجموعهٔ با محتوای صفر (یا مجموعهٔ گسسته به‌اصطلاح هارناک) محدودیت تعداد متناهی بازه وجود دارد و برای اجتناب از سوء تفاهم باید گفت که هر مجموعهٔ شمارا دارای این خاصیت است که می‌توان آن را با بازه‌هایی که مجموع طول آن‌ها به‌دلخواه کوچک است پوشاند. او مجموعهٔ اعداد گویا در بازهٔ [۰, ۱] را مثال می‌زند که با بازه‌های مجزا از هم با طول ϵ_i، $i \in \mathbb{N}$، پوشیده شود که $\sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_i = \delta$ و $\delta > 0$ دلخواه است. لذا اگر خود را به تعداد متناهی بازه مقید نکنیم، مجموعه‌های به‌لحاظ توپولوژیکی بزرگ (مثل مجموعه‌های چگال) ممکن است به‌لحاظ نظریهٔ اندازه‌ای کوچک باشند. برای کانتور هم عجیب بود که با محتوای بیرونی که او معرفی کرده بود، محتوای مجموعهٔ اعداد گویا در بازهٔ [۰, ۱] برابر ۱ می‌شد و نه صفر؛ در حالی که همین مجموعه در مطالعاتش دربارهٔ مجموعه‌های شمارا قابل صرف‌نظر کردن بود. بنابراین حذف محدودیت تعداد متناهی بازه به نتایج عجیبی می‌انجامید. سپس این پرسش مطرح شد که اندازهٔ مجموعهٔ شمارا چیست؟ کانتور مسأله را در حالت n ـ بعدی نیز بررسی کرد، اما از طرف جامعهٔ ریاضی چندان اقبالی نیافت.

کشف مجموعه‌ای با بزرگی صفر، منجر به مفهوم اندازهٔ یک مجموعه شد. اندازه را با پوشاندن مجموعه‌ها به‌وسیلهٔ مجموعه‌های مقدماتی که طول، مساحت، ... آن‌ها شناخته شده بود و در دسترس بودند تعریف کردند. اما اولین کسی که به‌طور صریح تعریفی از محتوی بیرونی ارائه کرد، اوتو شتولتس (۱۸۴۲ ـ ۱۹۰۵) است. او در ضمن کار روی مسألهٔ تعریف طول خم، متوجه شد که

حجم و مساحت باید برحسب انتگرال تعریف شوند. مستقل از او، کانتور نیز در سال ۱۸۸۳ برای محتوا، تعریفی بر اساس انتگرال چندگانه ارائه کرد. کمی بعد نیز هارناک در سال ۱۸۸۴ تعریف معادلی آورد. ولی نظریهٔ انتگرال چندگانه تا قبل از ژُردان، به هیچ وجه دقت منطقی نداشت. واژهٔ محتوا را کانتور به‌کار برد. تمایز بین محتوای درونی و بیرونی را پئانو در ۱۸۸۷ بیان کرد و با انتشار کتاب دوره‌ای در آنالیز ژُردان این مفاهیم رواج عام یافتند. به این ترتیب، با کارهای هانکل، کانتور و دیگران در مشخص کردن ارتباط خواص مجموعه‌های نقاط و انتگرال‌پذیری توابع، چهارده سال بعد از مقالهٔ ریمان، عناصر نظریهٔ اندازه‌ای مخفی در محک انتگرال‌پذیری ریمان، مفهوم‌سازی شدند.

جوزپّه پئانو (۱۸۵۸ ــ ۱۹۳۲) که در دانشگاه تورین تحصیل و تدریس کرده بود، در سال ۱۸۸۳ انتگرال بالایی و پایینی داربو را که ولترا ابداع کرده بود، به‌منظور ارائه برهان‌های ساده‌تر برای برخی قضایای ریمان به‌کار گرفت. وی جزء اولین کسانی بود که در مقاله‌ای در سال ۱۸۸۳، تعریف دقیقی از درون و مرز یک مجموعه عرضه کرد. همچنین از تعریف انتگرال بر اساس مفهوم مساحت ناخرسند بود، زیرا تعریف مساحت نیز از دقت کافی برخوردار نبود. به همین دلیل، در سال ۱۸۸۳ میلادی سعی کرد تعریفی برای مساحت ناحیه‌های ساده ارائه دهد. روش او مبتنی بر محاط و محیط کردن چندضلعی‌ها و محاسبهٔ سوپریمم و اینفیمم مساحت‌های به‌دست آمده بود. وی تعریف اندازه برای مجموعه‌های دوبعدی و سه‌بعدی را جداگانه بررسی کرد. پئانو برای یک مجموعهٔ دوبعدی A، مساحت درونی را برابر سوپریمم مساحت چندضلعی‌هایی که A را در بر دارند و مساحت بیرونی را برابر اینفیمم مساحت چندضلعی‌هایی که در A هستند تعریف می‌کند. او مساحت را مقدار مشترک این دو (در صورت وجود) در نظر می‌گیرد. همچنین در سال ۱۸۸۷، به ارتباط این تعریف و تعریف انتگرال می‌پردازد. در واقع، ثابت می‌کند انتگرال پایینی برابر مساحت درونی و انتگرال بالایی برابر مساحت بیرونی است. بنابراین تابع f انتگرال‌پذیر است اگر ناحیهٔ محصور به نمودار f و محور حقیقی، اندازه‌پذیر باشد؛ به‌عبارت دیگر، دارای مساحت باشد. به بیانی دیگر، تابع f انتگرال‌پذیر ریمان است اگر و تنها اگر مجموعهٔ $E(f,[a,b])=\{(x,y): x\in[a,b]\ 0\leq y<f(x)\}$ اندازه‌پذیر به‌مفهوم پئانو ــ ژُردان باشد و به‌علاوه، $\int_a^b f(x)\,dx=c(E(f^+,[a,b]))-c(E(f^-,[a,b]))$.

خوب است اشاره کنیم که نقطهٔ درونی که کانتور تعریف می‌کند، بسیار شبیه به نقطهٔ درونی است که پئانو در کتابش با عنوان کاربردهای هندسی حسابان بی‌نهایت کوچک‌ها در ۱۸۸۷ تعریف کرده است. البته پئانو فراتر می‌رود و نقطهٔ بیرونی را نیز تعریف می‌کند. ایده پئانو به‌راحتی می‌توانست به تعریف مجموعهٔ باز منتهی شود ولی نشد. این کار را ژُردان در سال ۱۸۹۲ انجام داد. پئانو می‌توانست مجموعهٔ باز را مجموعه‌ای تعریف کند که با مجموعهٔ نقاط درونی خودش برابر است. عجیب است که مفاهیم مشابهی را ددکیند مدت‌ها پیش در درس‌گفتارهای منتشرنشده‌اش به سال ۱۸۷۹ بیان کرده بود. این دست‌نوشته‌ها بعداً در ۱۹۳۱ به‌چاپ رسید. در زمان پئانو تعمیم این مفاهیم و گسترش آن‌ها در دستور کار فعالیت‌های ریاضیدانان نبود و بنابراین نتایج درخوری هم از این مفاهیم به‌دست نیامد؛ همان‌طور که کُشی نیز تعریف انتگرال را برای توابع پیوسته بیان کرد، زیرا

در زمان او نیازی به انتگرال‌گیری از توابع ناپیوسته احساس نمی‌شد.

مسألهٔ دیگری که نقش مهمی در توسعهٔ نظریهٔ انتگرال داشت، انتگرال‌گیری از توابع چندمتغیره بود. راه‌حل طبیعی، جایگزین کردن افراز بازه‌ها با افراز مستطیل‌ها و در نظر گرفتن مجموع‌هایی مشابه مجموع کُشی ــ ریمان بود. ولی کدام مستطیل‌ها را باید در مجموع لحاظ کرد؟ آن‌هایی که در ناحیهٔ مربوطه قرار می‌گیرند یا با آن اشتراک دارند؟ دیدگاه عموم این بود که در هر دو روش، مساحت کلی مرزِ ناحیه، با ظریف‌تر کردنِ افرازها به صفر میل می‌کند و هر دو روش یک عدد به‌دست می‌دهند. اما وقتی پئانو خمی در مربع واحد کشف کرد که تمام مربع را می‌پوشانْد، فرض مذکور مورد پرسش اساسی واقع شد. سؤال این بود که چه شرایطی روی ناحیه باید اعمال شود تا یک عدد منحصر به‌فرد برای انتگرال به‌دست آید؟ اولین کسی که درصدد پاسخ به این مسائل برآمد، کامیل ژُردان (۱۸۳۸ ــ ۱۹۲۲)، ریاضیدان فرانسوی، بود که ۲ سال بعد از انتشار خم پئانو، رویکرد جدیدی را به انتگرال ارائه کرد. انگیزهٔ او در این کار، تعریف انتگرال دوگانه بود. مفهوم اندازه‌پذیری هنگام تعمیم انتگرال دوگانه به مجموعه‌های دلخواه اهمیت می‌یابد. البته این اولین بار نبود که اندازه‌پذیری بررسی می‌شد. در خلال سال‌های ۱۸۵۰ تا ۱۸۹۲، کارهایی مربوط به انتگرال دوگانه انجام شده بود که در آن‌ها، به مفهوم اندازه‌پذیری اشاره کرده بودند. ژُردان در سال ۱۸۹۲ می‌نویسد: «گرچه نقش تابع f در انتگرال‌گیری کاملاً روشن است ولی به‌نظر می‌رسد اثر دامنه با همان دقت بررسی نشده است.» از این‌رو، ابتدا نظریهٔ محتوای مجموعه‌ها در $\mathbb{R}^n$ را بسط داد.

مسألهٔ اندازه‌پذیری در قضیهٔ فوبینی نیز مطرح می‌شود. کُشی در اوایل قرن ۱۹ اشاره می‌کند که قضیهٔ جابه‌جایی انتگرال‌های مکرر برای توابع بی‌کران برقرار نیست و وقتی تومی در سال ۱۸۷۸ تابع کرانداری با این خاصیت پیدا کرد، این موضوع بیشتر مورد توجه قرار گرفت. مسائلی از این دست، نشان می‌دهند که اگرچه مفهوم انتگرالِ توابع یک متغیره دقت و کلیتی یافته بود ولی فاقد چنین کیفیتی در کاربست به توابع دو متغیره بود. به عبارت دیگر، دامنهٔ انتگرال‌گیری به همان نسبتِ مفهوم تابع موشکافی نشده بود.

تا اینجا سه ضعفِ انتگرال ریمان مشخص شد:

۱ــ توابعی با مشتق کراندار وجود دارند که مشتق آن‌ها انتگرال‌پذیر نیست. پس مشتق و انتگرال عمل‌های عکس یکدیگر نیستند؛

۲ــ انتگرال ریمان با فرآیندهای حدی در حالت کلی سازگاری ندارد؛

۳ــ برای انتگرال چندگانه راه‌حل رضایت بخشی وجود ندارد.

ژُردان که از شیوه تعریف انتگرال ریمان برای توابع چندمتغیره خرسند نبود، بیشترین سهم را در دقیق ساختن و تعریف مجدد و اصولی انتگرال چندمتغیره دارد. روش کار چنین بود که ناحیهٔ E در صفحه را چنان می‌پنداشتند که به یک خم بستهٔ ساده محدود شده است. سپس با افراز ناحیه به مستطیل‌هایی با اضلاع موازی محورها، مجموع کُشی ــ ریمان را تشکیل می‌دادند. ژُردان این روش

را در ویرایش اول کتابش در سال ۱۸۸۳ به‌کار برد. اما در ۱۸۹۰ پئانو با کشف خمی در صفحه که مربع واحد را پر می‌کرد، فرض پذیرفته شده دربارهٔ مرز یک ناحیه را مورد سؤال قرار داد. به نظر می‌رسد مثال پئانو باعث شد ژُردان فرض مرسوم محدود بودنِ ناحیه به یک خم را کنار بگذارد. لذا در سال ۱۸۹۲ پیشنهاد کرد ناحیهٔ انتگرال‌گیری همچون مجموعه‌ای از نقاط همچون دیدگاه کانتور در نظر گرفته شود. به این ترتیب، فرض محدود بودن به یک خم با فرض اندازه‌پذیری جایگزین شد. او مرز ناحیه را مجموعهٔ نقاطی مانند p تعریف کرد که هر گوی حول p نقاطی از E و متمم آن را در بر داشته باشد و ثابت کرد E اندازه‌پذیر است اگر و تنها اگر مرز E دارای محتوای بیرونی صفر باشد. بنابراین شرطی که خم مرزی ناحیه انتگرال‌گیری باید می‌داشت، اندازه‌پذیری بود. پس از این، ژُردان انتگرال تابع دومتغیره را روی ناحیهٔ E تعریف می‌کند و سپس به توابع nمتغیره تعمیم می‌دهد.

ویرایش دوم کتاب ژُردان با عنوان دوره‌ای در آنالیز که در ۱۸۹۳ منتشر شد و در آن به‌طور جدی نظریهٔ مجموعه‌های کانتور در آنالیز به‌کار گرفته شده است، به سبب تأثیر ژُردان در فضای ریاضیات فرانسه، باعث مقبولیت کاربرد نظریهٔ مجموعه‌ها در آنالیز ریاضی شد. چند سال بعد از انتشار کتاب مذکور، سه ریاضیدان فرانسوی تأثیرگذار در نظریهٔ انتگرال‌گیری، یعنی امیل بورل، رنه بِر و هانری لبگ به‌طور وسیعی از آن بهره بردند. لبگ، به حق، ژُردان را سنت‌گرای نوآور نامیده است. ژُردان آنچه را از قبل بود با نوآوری خاصِ خود، رویکردی متمایز (نظریه ــ مجموعه‌ای) بخشید.

برای یک افراز ناحیهٔ E توسط مستطیل‌هایی با قطر r، S را اجتماع مستطیل‌هایی که تماماً در E قرار می‌گیرند و S' را اجتماع مستطیل‌هایی که مرز E را می‌پوشانند، در نظر بگیرید. ژُردان در سال ۱۸۹۲ نشان داد که اگر افراز ناحیه چنان تغییر کند که r به سمت صفر میل کند، مساحت S و $S \cup S'$ به اعداد ثابت A و a میل می‌کنند. اثبات او نه‌تنها از شهود هندسی سرچشمه می‌گیرد، بلکه بسیار دقیق نیز هست. اگر دو مقدار a و A مساوی باشند، مساحت مجموعهٔ S' که مرز را می‌پوشاند باید به سمت صفر میل کند. از اینجا تعریف اندازه‌پذیری و محتوا به‌دست می‌آید.

در واقع، با استفاده از نمادهای امروزی، اگر $E \subseteq [a,b]$ و $l(I)$ طول بازهٔ I را نشان دهد، محتوای بیرونی و درونی E به‌ترتیب، به‌صورت $c_e(E) = \inf_P\{\sum l(I_k) \ : \ I_k \cap E \neq \emptyset\}$ و $c_i(E) = \sup_P\{\sum l(I_k) \ : \ I_k \subseteq E\}$ تعریف می‌شوند که در اینجا، سوپریمم و اینفیمم روی همهٔ افرازهای P برای بازهٔ $[a,b]$ گرفته می‌شود. مجموعهٔ Eژُردان ــ اندازه‌پذیر نامیده می‌شود اگر $c_i(E) = c_e(E)$ که در این حالت، محتوای آن را با $c(E)$ نشان می‌دهند.

حال اگر $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع کراندار روی درون مجموعهٔ اندازه‌پذیر $E \subseteq \mathbb{R}^2$ باشد، فرض کنید P افراز E به تعداد متناهی مجموعهٔ اندازه‌پذیر است: $E = \cup_{i=1}^n E_i$. برای $1 \leq k \leq n$ قرار دهید $m_k = \inf\{f(x) \ \mid x \in E_k\}$ و $M_k = \sup\{f(x) \ \mid x \in E_k\}$ و مجموع‌های بالایی و پایینی داربوی تعمیم‌یافته را به‌صورت $S(P) = \sum_{k=1}^n M_k c(E_k)$ و $s(P) = \sum_{k=1}^n m_k c(E_k)$ تعریف کنید. ژُردان اشاره می‌کند که «داربو نشان داده است که اگر افرازها به‌گونه‌ای تغییر کنند که قطر اعضای آن‌ها به سمت صفر میل کند، آن‌گاه S و s به حدود ثابتی میل می‌کنند». سپس اثبات

جدیدی برای این مطلب ارائه می‌کند و آن حدود را انتگرال‌های بالایی و پایینی و اگر این دو با هم برابر باشند تابع را انتگرال‌پذیر می‌نامد. با اثباتی اساساً مشابه با تومی، نشان می‌دهد که $\mathcal{U}$ (اینفیمم Sها) و $\mathcal{L}$ (سوپریمم Sها) به مقدار مشترکی میل می‌کنند، به‌شرطی که ابعاد E_iها به صفر نزدیک شود. او انتگرال چندگانهٔ f روی E را برابر با این مقدار مشترک تعریف می‌کند. اکنون ژُردان قادر بود قضیهٔ فوبینی را در کلی‌ترین حالت خود اثبات کند.

گرچه اثبات‌ها و مفاهیم فوق به‌نوعی، قبل از او نیز شناخته شده بودند، ژُردان بحث را در یک چارچوب نظریهٔ مجموعه‌ای کامل قرار داد و با تعریف اندازه‌پذیری، به این نظریه کلیت و شفافیت خاصی بخشید. اندازه‌پذیری و مفاهیم وابسته به آن، به‌دلیل ظرافتی که ژُردان در ارائهٔ آن‌ها به‌کار گرفت، بیش از پیش مورد قبول واقع شدند. توجه کنید که اندکی پس از انتشار کارهای ریمان، مشخصه‌سازی ریمان ــ انتگرال‌پذیری برحسب انتگرال بالایی و پایینی نیز عرضه شد ولی آنچه ژُردان انجام داد، وارد کردن مفاهیم نظریهٔ اندازه‌ای است؛ هرچند خودش آگاه نبود که راه را برای یک نظریهٔ کلی‌تر باز کرده است.

مقالهٔ سال ۱۸۹۲ ژُردان نظریهٔ ریمان را در بستر نظریهٔ اندازه قرار داد و زمینه را برای نظریهٔ جدید انتگرال مهیا کرد اما اندازه به‌مفهوم جدید آن، از جای دیگری سرچشمه گرفته است. آن سرچشمه، کارهای امیل بُرل در نظریهٔ توابع بود. امیل بورل ۲۲ ساله بود که مدیر بخش ریاضی در دانشگاه لیل شد. در سال ۱۹۰۹ استاد توابع مختلط در سوربن شد و در ۱۹۲۰ ریاست بخش آمار و فیزیکِ ریاضی آنجا را بر عهده گرفت. او در امور سیاسی نیز فعالیت داشت. مجامع و مؤسسات علمی بسیاری را تأسیس و مدیریت کرد. بُرل بی‌شک یکی از تأثیر گذارترین ریاضیدانان قرن بیستم بود. بُرل به‌دنبال حل مسأله‌ای که ریمان مطرح کرده بود، به مجموعه‌های چگال که دارای اندازهٔ صفر به‌مفهومی متفاوت از معنای رایج این اصطلاح، برخورد کرد. او دریافت که بحث‌های کانتور را می‌توان در یک مسأله از توابع مختلط به‌کار گرفت. مسأله از آنجا شروع شد که پوانکاره در سال ۱۸۸۳ بسط تحلیلی $f(z)=\sum_{1}^{\infty}A_n(z-a_n)^{-1}$ را برای اعداد مختلط a_n، A_n، z که $\sum_{1}^{\infty}\mid A_n\mid<\infty$ در نظر گرفت و نشان داد که اگر C خم سادهٔ بسته در صفحهٔ مختلط و $\{a_n\}$ زیرمجموعه‌ای چگال از C باشد، آن‌گاه $f(z)$ دو تابع تحلیلی متفاوت تعریف می‌کند؛ یکی داخل C و دیگری بیرون C.

بُرل در تز دکترایش در سال ۱۸۹۴، ایدهٔ کانتور را به‌کار برد و نشان داد که این دو تابع می‌توانند به یکدیگر مرتبط شوند و یک تابع از نوع ادامهٔ تحلیلی تعمیم‌یافته به‌دست دهند. در این بین، به ماهیت مجموعهٔ نقاط همگرایی برخی سری‌های حاصل در این مسأله برخورد کرد. لذا باید نوعی اندازه برای مجموعه‌های شمارا می‌یافت. مفاهیم محتوا و اندازه‌پذیری به‌مفهوم ژُردان انتظارات وی را برآورده نمی‌کردند، زیرا ماهیت جمع‌پذیری متناهی داشتند و نه جمع‌پذیری شمارا. در کتابی که مجموعهٔ درس‌های او در دانشسرای عالی معلمین در دورهٔ ۱۸۹۶ ــ۱۸۹۷ بود و به احتمال زیاد، لبگ که در آن زمان در آنجا دانشجو بود، در کلاس‌های وی حضور داشته است، تعریف جدیدی

برای اندازه‌پذیری مجموعه‌ها پیشنهاد می‌کند و بر مبنای فلسفهٔ ریاضی‌اش تعریفی ساختنی عرضه می‌کند. او با سه فرض آغاز کرد:

۱ــ اندازهٔ بازه‌های کراندار برابر طول آن‌ها است؛

۲ــ اندازهٔ اجتماع شمارا از مجموعه‌های اندازه‌پذیرِ دوبه‌دو مجزا برابر جمع اندازهایشان است؛

۳ــ اگر R و S اندازه‌پذیر باشند و $R \subseteq S$، آن‌گاه $S \setminus R$ نیز اندازه‌پذیر است و اندازهٔ آن برابر با تفاضل اندازه‌های S و R است.

اندازهٔ بُرل بسیار به مفهوم اندازهٔ امروزی نزدیک است، الّا این که بُرل خود را به مجموعه‌هایی محدود ساخته بود که از طریق اجتماع شمارا و متمم‌گیری از بازه‌ها ساخته می‌شود. بُرل یک مجموعه را اندازه‌پذیر نامید اگر بتوان با حفظ اصول بالا، به آن اندازه نسبت داد. در این بررسی، به حالت خاصی از قضیهٔ به‌اصطلاح ما، هاینه ــ بُرل می‌پردازد که بعداً یکی از مفیدترین ابزارها در اثبات قضایا در نظریهٔ اندازه و انتگرال لبگ شد. کسی اهمیت کار بُرل را در اواخر قرن نوزدهم درک نکرد به‌جز یک ریاضیدان جوان که در زمان ارائهٔ درس‌های بُرل، در دانشسرای عالی معلمین دانشجو بود و کار بُرل را به ثمر رساند: هانری لبگ.

در پایان این بخش، به مطلبی درباره نقطهٔ حدی و مجموعه‌های باز که بی‌ربط به کارهای بُرل هم نیست اشاره می‌کنیم. در فرانسه، مفهوم نقطهٔ حدی یک مجموعه را پوانکاره و ژولی تانری به‌کار بردند. اما از همه مهم‌تر ژُردان بود که آن را به‌صورتی که ما امروز تعریف می‌کنیم، بیان کرد. اما ژُردان مجموعهٔ باز را به‌طور کاملاً طبیعی یعنی مجموعه‌ای که با مجموعهٔ نقاط درونی خودش برابر باشد، تعریف نکرد. شاید نیازی به چنین مفهومی احساس نمی‌کرد. در عوض، به نقاط مرزی علاقه‌مند بود. اما جایی که اولین بار مجموعهٔ باز به‌طور اساسی نیاز است، قضیهٔ هاینه ــ بُرل یا در اصطلاح فرانسوی‌ها، بُرل ــ لبگ، است که مفهوم فشردگی در آن استفاده می‌شود. صورتی از این قضیه را بُرل در رسالهٔ دکتری خود بیان کرده است ولی اشاره‌ای به مجموعهٔ باز نمی‌کند. بُرل بیان می‌کند که اگر روی خطی تعداد نامتناهی بازهٔ جزئی چنان باشند که هر نقطه از خط در حداقل یکی از آن‌ها قرر گیرد، آن‌گاه می‌توان تعداد متناهی از همان بازه‌ها یافت که همان خاصیت را داشته باشند (یعنی هر نقطه از خط در یکی از آن‌ها باشد). سی سال طول کشید تا این صورت اولیهٔ قضیهٔ بُرل به‌شکل جدیدِ قضیهٔ هاینه ــ بورل تبدیل شود. اما اولین تعریف از مجموعهٔ بُرل را چهار سال بعد از قضیهٔ بُرل، رنه ــ لویی بِر (۱۸۷۴ ــ ۱۹۳۲) در رسالهٔ دکتری خود عرضه کرد. او در بحث از توابع نیم‌پیوستهٔ پایینی، دامنهٔ باز در فضای n ــ بعدی را تعریف کرد. عبارت مجموعهٔ باز را لبگ در رسالهٔ دکتری خود در سال ۱۹۰۲ به‌منظور تعریف اندازهٔ لبگ به‌کاربرده است. وی تحت تأثیر ژُردان با استفاده از نقطهٔ درونی و مرز مجموعه، مجموعهٔ باز را تعریف کرد. تعریف مجموعهٔ باز به‌کندی در جامعهٔ ریاضی رواج یافت. برای مطالعهٔ بحثی جالب و دقیق در این باره، به [12] مراجعه کنید.

۷. انتگرال لبگ

هانری لبگ بین سال‌های ۱۸۹۴ تا ۱۸۹۷ در دانشسرای عالی معلمین در پاریس، دانشجو بود و به‌نظر می‌رسد در درس‌های بُرل شرکت می‌کرده است. او در زمانی تعلیم ریاضیات دید که کتاب ژُردان و شیوه‌های نظریهٔ مجموعه‌ای حاکم بودند. نتایجش تحقیقاتش را در سال‌های ۱۸۹۹ تا ۱۹۰۱ منتشر ساخت و رسالهٔ وی در ۱۹۰۲ رسماً پذیرفته شد. در مقاله‌اش به سال ۱۸۹۹ به مسألهٔ مساحت می‌پردازد. در این مسأله، نسبت دادن یک عدد به نام مساحت به هر سطح محدود به یک خم سادهٔ بسته مورد نظر است به‌طوری که دو سطح معادل دارای یک مساحت باشند و مساحت اجتماع باپایان و یا بی‌پایان از سطوح که همپوشانی نکنند، برابر مجموع مساحت‌های آن‌ها باشد. لبگ دریافت که به اندازه‌ای نیاز دارد که مجموعه‌های اندازه‌پذیر ژُردان و مجموعه‌های اندازه‌پذیر بُرل را در بر گیرد. بعد از شک و تردیدهایی، سرانجام مسألهٔ مساحت را به‌عنوان موضوع رسالهٔ دکتری خود انتخاب کرد. رسالهٔ دکترایش با عنوان «انتگرال، طول، مساحت» در سال ۱۹۰۲ در مجلهٔ ایتالیایی Annali di Mathematica چاپ می‌شود. لبگ مسألهٔ نسبت دادن عددی نامنفی به مجموعهٔ کراندار $E \subseteq \mathbb{R}$، $m(E)$، را که در شرایط زیر صدق کند:

(الف) مجموعه‌های همنهشت، اندازهٔ مساوی داشته باشند؛

(ب) اندازهٔ اجتماع شمارا از مجموعه‌های دوبه‌دو مجزا، برابر مجموع اندازه‌های آن‌ها باشد؛

(ج) اندازهٔ بازهٔ $[0, 1]$ برابر یک باشد،

مطرح کرد. او برخلاف بُرل به‌دنبال وسیع‌ترین خانواده از زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$ بود که اندازه‌ای با سه خاصیت بالا برایش وجود داشته باشد. به‌راحتی می‌توان دید که اگر $m(E)$ برای E قابل تعریف باشد، باید $m(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_i)$ که در آن، $\ell(I_i)$ طول بازهٔ I_i و $\{I_i\}$ دنبالهٔ بازه‌هایی با درون مجزا هستند که E را می‌پوشانند. لبگ به‌منظور یافتن راهی برای گسترش مفهوم طول، راه کم و بیش طولانی زیر را برگزید.

فرض کنید $E \subseteq \mathbb{R}$. اندازه بیرونی E به‌صورت $m^*(E) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_i) : E \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} I_i\}$ تعریف می‌شود. اما m^* در شرط (ب) بالا صدق نمی‌کند. لبگ که خود را به بازهٔ $[a, b]$ محدود کرده بود، اندازهٔ درونی را برای $E \subseteq [a, b]$ به‌صورت $m_*(E) = b - a - m^*([a, b] \setminus E)$ تعریف می‌کند. اکنون به‌طور کاملاً طبیعی، مجموعهٔ E را اندازه‌پذیر نامید اگر $m^*(E) = m_*(E)$. شرط لبگ به‌صورت $m^*([a, b]) = m^*(E) + m^*([a, b] \setminus E)$ نیز قابل بیان است. اندازهٔ لبگ گسترش محتوای ژُردان است. یعنی اگر مجموعه‌ای ژُردان ـ اندازه‌پذیر باشد، لبگ ـ اندازه‌پذیر نیز هست و مقدار محتوای آن با اندازهٔ لبگش برابر می‌شود. ولی متأسفانه، چنانچه بخواهیم زیرمجموعه‌های دلخواه اعداد حقیقی را در نظر بگیریم، مشخصه‌سازی بالا دیگر به‌کار نمی‌آید. کاراتئودوری اولین کسی است که بسیار زیبا و زیرکانه تعریف معادلی برای اندازه‌پذیری در حالت کلی ارائه داد. کنستانتین کاراتئودوری (۱۸۷۳ ـ ۱۹۵۰) که تباری یونانی داشت در بلژیک رشد و نمو یافت و در آنجا مهندسی خواند. او در خلال سال‌های ۱۸۹۷ تا ۱۹۰۰ در اوقات فراغت، کتاب ژُردان

را مطالعه می‌کرد. سپس به دانشگاه برلین رفت و تحت‌نظر هرمان مینکوفسکی در ریاضیات دکتری گرفت. وی در ۱۹۱۴ تعریف جایگزینی برای اندازه‌پذیری معرفی کرد. منشأ این تعریفِ جایگزین، گسترشی از مفهوم اندازهٔ زیر مجموعه‌های k ـ بعدی $\mathbb{R}^n$ است که قبلاً ارائه کرده بود و در ۱۹۱۹، هاسدورف آن را برای بررسی ساختار مجموعه‌ها با بُعد غیرصحیح به‌کار برد. در واقع، $E \subseteq \mathbb{R}$ را اندازه‌پذیر می‌نامیم اگر $m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E)$ برای هر $A \subseteq \mathbb{R}$. خانوادهٔ مجموعه‌های اندازه‌پذیر را با $\mathcal{M}$ نمایش می‌دهیم. تحدید m^* به $\mathcal{M}$ رااندازه لبگ می‌نامیم و با m نشان می‌دهیم. می‌توان مجموعه‌هایی ساخت که اندازه‌پذیر نیستند. در سال ۱۹۰۵ جوزپّه ویتالی (۱۸۷۵ ـ ۱۹۳۲)، ریاضیدان ایتالیایی، مثالی از یک زیرمجموعهٔ اندازه‌ناپذیرِ $\mathbb{R}$ منتشر کرد. وی از دانشسرای عالی معلمین در پیزا تحت نظر اولیسّه دینی فارغ‌التحصیل شده بود. مسألهٔ اندازه برای مجموعه‌های اندازه‌پذیر به‌صورتی که اشاره کردیم حل می‌شود. اما باید توجه کرد که در حالت کلی، مسأله جواب ندارد. می‌توان به طریق مشابه، اندازهٔ لبگ را برای زیرمجموعه‌های فضای n ـ بعدی $\mathbb{R}^n$ تعریف کرد.

نظریهٔ اندازهٔ لبگ گرچه بسیار روشن‌تر از نظریهٔ بُرل است، همان اندیشه‌ها را دنبال می‌کند. اما کار اساسی لبگ ارتباط دادن انتگرال با مفهوم اندازه است. با رابطهٔ $\int_a^b f = m(E^+) - m(E^-)$ که در آن، E^+ و E^- به‌ترتیب، مساحت‌های محدود به نمودار تابع f و محور xها از بالا و پایین است، شروع می‌کند. قبلاً به رابطه‌ای مشابه که پئانو به‌دست آورده بود، اشاره کردیم. لبگ سپس به ارائهٔ تعریفی تحلیلی و نه هندسی اقدام می‌کند. تعریفی که مانند تعریف ریمان بر اساس مجموع‌ها باشد. انتگرال ریمان مبتنی بر افراز دامنه و جمع کردن مساحت مستطیل‌های محیطی و محاطی در ناحیهٔ E، بناشده بر افراز مفروض است. ایدهٔ لبگ افراز بُرد تابع به‌جای افراز دامنهٔ آن است. لبگ در سال ۱۹۰۴ کتابی با عنوان «درس‌هایی در باب انتگرال و جستجوی توابع اولیه» منتشر کرد که تسلط و آشنایی عمیق وی با مباحث انتگرال را به‌خوبی نشان می‌دهد. فصل آخر کتاب، به نظریهٔ انتگرال اختصاص دارد. به تقلید از بُرل، آن فصل را با مسألهٔ انتگرال‌گیری آغاز می‌کند: یافتن عددی است متناظر به تابع $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ که در شرایط زیر صدق کند:

الف) $\int_a^b f = \int_{a+h}^{b+h} f$؛

ب) $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$؛

پ) $\int_۰^۱ ۱ = ۱$؛

ت) $\int_a^b f + \int_b^c f + \int_c^a f = ۰$؛

ث) $\int_a^b f \geq ۰$ اگر و تنها اگر $f \geq ۰$؛

ج) اگر (f_n) دنباله ای از توابع همگرا به f باشد، آن‌گاه $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$.

به عبارت دیگر، او خواصی را که انتگرال باید داشته باشد معرفی و توصیف می‌کند. این چنین تعریفی از انتگرال را تعریف توصیفی می‌نامند. به‌راحتی می‌توان دید که از شرایط فوق نتیجه می‌شود که اگر تابعی ریمان ـ انتگرال‌پذیر باشد، باید مقدار انتگرال لبگ آن با مقدار انتگرال ریمانش برابر باشد.

اکنون فرض کنید $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ تابعی کراندار و $\mathcal{P}=\{l_{\circ},\cdots,l_n\}$ افرازی از برد f است. چنانچه قرار دهیم $E_i=\{x\in[a,b]:l_{i-1}\leq f(x)<l_i\}$ و تابع سادهٔ $\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n}l_i\chi_{E_i}(x)$ را درنظر بگیریم، داریم $f\leq\varphi$. بنابر خاصیت خطی، $\int_a^b\varphi=\sum_{i=1}^{n}l_{i-1}\int_a^b\chi_{E_i}$. حال اگر $\mathcal{P}_{\circ}$ افراز دلخواهی باشد، $\{\mathcal{P}_n\}$ را دنباله‌ای از افرازهای بُرد می‌گیریم که $\mathcal{P}_{n-1}\subseteq\mathcal{P}_n$ و $\mu(\mathcal{P}_n)\leq 1/2\mu(\mathcal{P}_{n-1})$ و فرض می‌کنیم φ_n را تابع سادهٔ نظیر افراز $\mathcal{P}_n$ باشد. واضح است $\varphi_n\to f$ و در نتیجه $\int_a^b\varphi_n\to\int_a^b f$. بنابراین محاسبهٔ انتگرال تابع f به محاسبهٔ انتگرال توابع سادهٔ φ_n و آن هم در نهایت، به محاسبهٔ انتگرال تابع مشخصهٔ یک مجموعه منتهی می‌شود. به عبارت دیگر، همان‌طور که لبگ اشاره می‌کند، برای دانستن این‌که چگونه انتگرال تابعی محاسبه می‌شود، کافی است انتگرال تابعی که فقط مقدار صفر یا یک می‌گیرد را بدانیم. اکنون انتگرال تابع مشخصهٔ یک بازه با طول آن برابر می‌شود. پس مسألهٔ انتگرال‌گیری به مسأله گسترش مفهوم طول از بازه‌های $\mathbb{R}$ به زیرمجموعه‌های دلخواه آن منجر می‌شود. به عبارت دیگر، به مسألهٔ اندازه. برای مطالعهٔ بحثی کامل و جالب از چگونگی شکل‌گیری انتگرال لبگ و مفاهیم وابسته، به [9] مراجعه کنید.

در اینجا لبگ به‌خوبی ضرورت تعریف‌هایی را که در رسالهٔ دکتری خود آورده بود، نشان می‌دهد. به‌راحتی دیده می‌شود اگر E مجموعه‌ای اندازه‌پذیر باشد، آن‌گاه $\int_a^b\chi_E=m(E)$. تعریف توصیفی لبگ از انتگرال به‌طور طبیعی منجر به تعریف اندازه برای مجموعه‌های $\mathbb{R}$ شد. اکنون با داشتن مفهوم اندازه می‌توانیم مسئلهٔ انتگرال را حل کنیم.

گوییم تابع $f:E\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ اندازه‌پذیر است اگر مجموعهٔ $\{x\in E:f(x)>\alpha\}$ برای هر $\alpha\in\mathbb{R}$ اندازه‌پذیر باشد. اگر $\varphi=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{E_i}$ تابعی ساده باشد که در آن، E_iها اندازه‌پذیرند، تعریف می‌کنیم $\int\varphi=\sum_{i=1}^{n}a_im(E_i)$. چنانچه $f:E\to\mathbb{R}$ تابع اندازه‌پذیر نامنفی باشد، تعریف می‌کنیم $\int_E f=\sup\{\int_E\varphi:\circ\leq\varphi\leq f\}$ که در آن، φها توابع ساده هستند. از آنجا که برای هر تابع دلخواه $f:E\to\mathbb{R}$ می‌توانیم بنویسیم $f=f^+-f^-$ که f^+، f^- به‌ترتیب، قسمت مثبت و منفی f را نشان می‌دهند، می‌توانیم انتگرال f را به‌صورت $\int_E f=\int_E f^+-\int_E f^-$ (در صورت متناهی بودن حداقل یکی از انتگرال‌های طرف راست) تعریف کنیم. به‌راحتی می‌توان دید انتگرالی که بدین صورت به‌دست می‌آید، دارای خواص یکنوایی و خطی بودن است. لبگ همچنین قضیهٔ اندازه‌پذیری حد نقطه‌ای دنبالهٔ توابع اندازه‌پذیر را بیان و اثبات می‌کند. با اثبات این قضیه که یک تابع کراندار، ریمان ــ انتگرال‌پذیر است اگر و تنها اگر مجموعهٔ نقاط ناپیوستگی آن اندازه ــ صفر باشد، نشان می‌دهد که حوزهٔ توابع انتگرال‌پذیر نسبت به نظریهٔ ریمان وسعت قابل ملاحظه‌ای یافته است.

نظریهٔ جدید اندازه، در ابتدا خیلی به مذاق ریاضیدانان به‌ویژه ریاضیدانانی که جوانی‌شان در دهه‌های ۱۸۷۰ و ۱۸۸۰ گذشته بود خوش نیامد، زیرا آن‌ها نظریهٔ ریمان را نظریهٔ نهایی انتگرال‌گیری می‌پنداشتند. با این حال، گزارهٔ زیر یکی از تفاوت‌های انتگرال لبگ را با انتگرال ریمان نشان می‌دهد. در واقع، توابع انتگرال‌پذیر لبگ برخلاف توابع ریمان ــ انتگرال‌پذیر، به‌طور مطلق

انتگرال‌پذیرند.

گزاره. فرض کنید $f : E \to \mathbb{R}$ اندازه‌پذیر باشد. آن‌وقت f انتگرال‌پذیر است اگر و تنها اگر $|f|$ انتگرال‌پذیر باشد.

برای مثال، تابع $f(x) = (\sin x)/x$ روی $[\circ, \infty)$ انتگرال‌پذیر به مفهوم لبگ نیست؛ در حالی که روی این فاصله دارای انتگرال ریمان ناسره است.

بعد از انتشار کارهای لبگ، ریاضیدانان دیگری به مطالعهٔ آن‌ها پرداختند و اثبات‌های بهتری برای آن‌ها عرضه کردند. یکی از این افراد بِپّو لوی (۱۸۷۵ ــ۱۹۶۱) بود که در فهم بهترِ ما از انتگرال لبگ کمک فراوانی کرد. قضیهٔ همگرایی یکنوا را وی در سال ۱۹۰۶ اثبات کرد. این قضیه راه بسیار مؤثری برای اثبات قضیهٔ همگرایی تسلطی لبگ در اختیار می‌گذارد. همچنین باید به پی‌یر فاتو (۱۸۷۸ ــ ۱۹۲۹)، ریاضیدان فرانسوی، اشاره کنیم که لم فاتو اکنون در هر کتاب آنالیز حقیقی به چشم می‌خورد. او این لم را اولین بار در رسالهٔ دکتری خودش اثبات کرد. اکثر کارهای ریاضی وی صرف اثبات وجود جواب برای دستهٔ خاصی از معادلات دیفرانسیل شده است.

اکنون به بررسی رفتار انتگرال لبگ نسبت به دو موضوع مهم، یعنی قضیهٔ اساسی حسابان و قضیهٔ همگرایی می‌پردازیم. خواهیم دید در ازای بهای پرداخت شده، آنچه به‌دست آورده‌ایم بسیار قابل توجه است.

قضیه. (قضیهٔ همگرایی یکنوا) فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای صعودی از توابع اندازه‌پذیر نامنفی روی مجموعهٔ اندازه‌پذیر E و f حد نقطه‌ای این دنباله باشد. در این صورت، $\int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n$.

قضیه زیر مشهورترین و قوی‌ترین قضیهٔ همگرایی در این نظریه است.

قضیه. (قضیهٔ همگرایی تسلطی) فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع انتگرال‌پذیر روی E باشد که تقریباً همه‌جا روی E به تابع حدی f همگراست. همچنین فرض کنید تابع انتگرال‌پذیر g موجود است به‌طوری که $|f_n(x)| \leq g(x)$ برای هر n و تقریباً هر $x \in E$. آن‌وقت f انتگرال‌پذیر است و $\int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n$.

علی‌رغم این‌ها، باید توجه کرد که در این نظریه هم بدون اعمال شرایط اضافی نمی‌توان انتظار جابه‌جایی حد و انتگرال را در کلی‌ترین حالت داشت.

لبگ در کتابی با عنوان درس‌گفتارهایی دربارهٔ انتگرال، بحثی عالی دربارهٔ انتگرال ریمان و قوت و ضعف‌های آن ارائه می‌کند و هنوز هم یکی از منابع جالب دربارهٔ نظریه انتگرال لبگ است. لبگ در آن کتاب با داشتن تمام ابزار لازم، نتایج و قضایای بیشتری دربارهٔ قضیه اساسی حسابان بیان می‌کند. اثبات‌ها بسیار موجز و در مواردی نارسا هستند و تلاش‌های او برای اثبات کلی‌ترین حالت قضیهٔ اساسی حسابان و بازیابی تابع از مشتق آن توسط فرآیند انتگرال‌گیری، به موفقیت نمی‌انجامد. ایده‌های او را بعدها دانژوا برای یافتن چنین فرآیندی به‌کار گرفت. مثال زیر نشان می‌دهد انتظار

اینکه در حالت کلی تابع از مشتقش به‌وسیلهٔ انتگرال‌گیری قابل بازیابی باشد، بی‌جاست.

مثال. تابع f در مثال ۴.۵ را در نظر بگیرید. ادعا می‌کنیم تابع f' انتگرال‌پذیر نیست. چون f' روی $[a,b]$ با شرط $0 < a < b < 1$ پیوسته است، پس $\int_a^b f' = b^2 \cos\frac{\pi}{b^2} - a^2 \cos\frac{\pi}{a^2}$. حال اگر قرار دهیم $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ و $a_n = \sqrt{\frac{2}{4n+1}}$، آن‌گاه $\int_{a_n}^{b_n} f' = 1/2n$ و چون بازه‌های $[a_n, b_n]$ دوبه‌دو مجزا هستند، $\int_0^1 |f'| \geq \sum \int_{a_n}^{b_n} |f'| \geq \sum \frac{1}{2n}$ که نشان می‌دهد f' نمی‌تواند انتگرال‌پذیر به مفهوم لبگ باشد.

دینی در کتابش به این نکته توجه می‌کند که اگر تابع f مشتق دینی داشته باشد و از بالا یا پایین کراندار باشد، آن‌گاه f را می‌توان به‌صورت تفاضل دو تابع صعودی نوشت. این مطلب با توجه به قضیهٔ دیریکله دربارهٔ سری‌های فوریه اهمیت پیدا می‌کند. سه سال بعد، ژُردان در مقاله‌ای شرطی ساده بیان کرد که معادل است با این‌که بتوان تابعی را به‌صورت تفاضل دو تابع صعودی نوشت. این، همان شرط کراندار بودنِ تغییرات تابع است.

تعریف. تغییر کل تابع $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ روی $[a,b]$ عبارت است از

$$V(f,[a,b]) = \sup\{\sum_{i=1}^{n} |f(d_i) - f(c_i)|\}$$

که در آن، سوپریمم روی تمام مجموعه‌های متناهی $\{[c_i, d_i] : 1 \leq i \leq n\}$ از بازه‌هایی با درون مجزا در $[a,b]$ محاسبه می‌شود. تابع f را با تغییر کراندار گویند اگر $V(f,[a,b])$ متناهی باشد.

ویژگی پیوستگی مطلق انتگرال معین را اولین بار آکسل هارناک در ۱۸۸۴ دریافت. واژهٔ پیوستهٔ مطلق را ویتالی در ۱۹۰۵ به‌کار برد، گرچه ریاضیدانانی مثل پواسون، ژُردان، شتولتس، و ای. اچ. مور نیز از این خاصیت آگاه بودند. تعریف امروزین آن از این قرار است.

تعریف. تابع $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ را پیوستهٔ مطلق گویند هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$، $\delta > 0$ یافت شود به‌طوری که اگر $\{[c_i, d_i] : 1 \leq i \leq n\}$ مجموعه متناهی از بازه‌ها در $[a,b]$ با درون مجزا باشد و $\sum_{i=1}^{n} (d_i - c_i) < \delta$، آن‌گاه $\sum_{i=1}^{n} |f(d_i) - f(c_i)| < \varepsilon$.

اکنون آماده‌ایم تا قضیهٔ اساسی حسابان را برای انتگرال لبگ بیان کنیم.

قضیه. (قضیهٔ بنیادی حسابان صورت (۱)) فرض کنید $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ انتگرال‌پذیر باشد و $F(x) = \int_a^x f$ برای هر $x \in [a,b]$. آن‌وقت F پیوسته مطلق است و تقریباً همه‌جاروی $[a,b]$ داریم $F'(x) = f(x)$.

قضیه. (قضیهٔ بنیادی حسابان صورت (۲)) اگر تابع $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ پیوستهٔ مطلق باشد، آن‌گاه f' روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است و داریم $\int_a^x f' = f(x) - f(a)$.

انتگرال لبگ در جهت رفع کاستی‌های انتگرال ریمان بسط داده شد. کاربرد قضیه‌های همگرایی در نظریهٔ لبگ در جابه‌جایی حد و انتگرال و قضیهٔ اساسی حسابان، و وسیع‌تر شدن حوزهٔ توابع انتگرال‌پذیر، پیشرفت‌های قابل توجهی نسبت به نظریهٔ انتگرال ریمان محسوب می‌شوند. در خلال

سال‌های ۱۹۰۲ تا ۱۹۰۷ کارهای بسیار مهمی که قدرت نظریهٔ لبگ را نشان می‌دادند، انجام شد ولی همان‌طور که شرح دادیم، در این نظریه هم کاستی‌هایی وجود دارد. شرط انتگرال‌پذیری همچنان در صورت قضیهٔ اساسی حسابان نیاز است و این مسأله‌ای است که باید بررسی شود. در مسائل کاربردی، بسیار اتفاق می‌افتد که به‌صورت کلی‌تری از قضیهٔ اساسی حسابان نیاز است. رفع این کاستی‌ها، انگیزهٔ معرفی نظریه‌های انتگرال دیگری بوده است که در [۱۷] به بررسی برخی از مهم‌ترین آن‌ها پرداخته‌ایم.

مراجع

[1] M. E. Baron, *The origins of the infinitesimal calculus*, Pergamon Press, Oxford, 1969.

[2] U. Bottazzini, *The higher calculus: A history of real and complex analysis from Euler to Weirstrass*, Springer-Verlag, New York, 1986.

[3] C. B. Boyer, *The history of the calculus and its conceptual development*, Dover Publication, New York, 1959

[4] W. Dunham, "Touring the calculus gallery", *Amer. Math. Monthly*, **112**(2005), 1–19.

[5] C. H. Edwards, *The historical development of the calculus*, Springer-Verlag, New York, 1979.

[6] R. A. Gordon, *The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, Amer. Math. Soc. GSM Vol. 4, Providence, Rohde Island, 1994.

[7] I. Grattan-Guinness, *The development of the foundations of mathematical analysis from Euler to Riemann*, MIT Press, Massachusetts, 1970.

[8] I. Grattan-Guinness, *From the calculus to set theory, 1630-1910: An introductory history*, Princeton University Press, Princeton, 2000.

[9] T. Hawking, *Lebesgue's theory of integration: It's origins and development*, Chelsea Pub. Co., New York, 1975.

[10] H. N. Janke, *A history of analysis*, Amer. Math. Soc. History of Math. Vol. 24, Providence, Rhode Island, 2003.

[11] I. Kleiner, "History of the infinitely small and the infinitely large in calculus", *Ed. Stud. Math.*, **48**(2001), 137–174.

[12] G. H. Moore, "The emeregence of open sets, closed sets, and limit points in analysis and topology", *Historia Math.*, **35**(2008), 220–241.

[13] I. N. Pesin, *Classical and modern integration theories*, Academic Press, New York, 1970.

[14] J. P. Pier, *Histoire de l'intégration*, Masson, Paris, 1996.

[15] C. Swartz, *Measure, integration and function spaces*, World Scientific, Singapore, 1994.

[۱۶] م. رجبعلی‌پور، «کسرهای مصری»، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، شمارهٔ ۴۲، تابستان ۱۳۸۸، ۱—۳۸.

[۱۷] س. مقصودی، «نظریه‌های انتگرال‌گیری دانژوا، پرون، و هنستاک ــ کورزویل روی خط حقیقی»، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، شمارهٔ ۴۷، تابستان ۱۳۹۰، ۱۹—۳۵.

سعید مقصودی
دانشگاه زنجان، گروه ریاضی
s_maghsodi@znu.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۳ (پاییز ۱۳۹۲) صص. ۳۳ تا ۴۲

معماری رویه‌های دو بعدی در $\mathbb{R}^3$ و اثباتی شهودی برای قضیهٔ گاوس ـ بونه

علیرضا بحرینی

چکیده

در این مقاله، اثباتی شهودی و در عین‌حال به‌اندازهٔ کافی دقیق از قضیهٔ کلاسیک گاوس ـ بونه ارائه می‌کنیم. این اثبات کاملاً طبیعی است و در آن از زبان هندسهٔ ذاتی و مفاهیمی چون مشتق همورد و ضرایب کریستوفل و حتی مفهوم ژئودزیک استفاده نمی‌شود. تاکنون مقالات بیشماری دربارهٔ این قضیه به رشتهٔ تحریر در آمده است و احتمال وجود اثری مشابه یادداشت حاضر در گوشه‌ای از این مجموعهٔ گسترده غیرممکن به‌نظر نمی‌رسد.

۱. مقدمه

مطالعهٔ خواص هندسی رویه‌های دو بعدی موضوع درس هندسهٔ دیفرانسیل مقدماتی در دورهٔ کارشناسی ریاضی به‌حساب می‌آید. علیرغم ظاهر مجرد، کاربردهای فراوان و البته مقدماتی از محتوای این درس در شاخه‌های مختلف علوم وجود دارد که غالباً به‌دلیل فشردگی مطالب و کمیِ وقت، فرصتی برای طرح آن‌ها دست نمی‌دهد. به‌طور طبیعی شناخت معماری رویه‌های دو بعدی در هر جایی با آن‌ها سروکار پیدا می‌کنیم، ضروری به نظر می‌رسد. چگونگی انعکاس نور از سطح یک آیینهٔ خمیده، رابطهٔ کشش سطحی سیالات با شکل هندسی سطح آن‌ها، مطالعهٔ خواص کشسانی پوسته‌ها و ... همگی وابسته به داشتن شناختی جامع از هندسهٔ رویه‌ها هستند. یکی از بنیادی‌ترین مفاهیم درس یعنی انحنای گاوسی مورد توجه و علاقهٔ فیزیک‌دانان است، زیرا در صورت‌بندی نسبیت عام، نوع تعمیم یافتهٔ آن موسوم به انحنای ریچی ارتباط تنگاتنگی با ماده و انرژی دارد. مفهوم انحنا یکی از بنیادی‌ترین و عمیق‌ترین مفاهیم در هندسه است. همان‌طور که از

نام گاوس به‌عنوان مبدع آن می‌توان حدس زد، چیزی نزدیک به دو قرن از تولد این مفهوم در دنیای ریاضیات می‌گذرد ولی هنوز هم رسیدن به درک کاملی از آن حتی برای متخصصین چندان ساده به نظر نمی‌رسد. شاید قضیه گاوس ــ بونه را بتوان شاهدی بر این مدعا دانست. چراکه که از یک سو با حدگیری از آن می‌توان به درکی جدید و ساده از مفهوم انحنا رسید از سوی دیگر، اثبات مرسومِ آن بسیار طولانی، محاسباتی و غیرشهودی است تا آنجا که مطالعهٔ این اثبات‌ها به تنهایی چندان گرهی از رازهای پشت پرده نمی‌گشاید. نوشتهٔ حاضر را می‌توان تلاشی برای دست یافتن به درکی عمیق‌تر از قضیهٔ گاوس ــ بونه به‌حساب آورد. ابتدا یادداشت هیلبرت در کتاب هندسه و تجسم ([1]) دربارهٔ انحنای گاوسی و ذاتی بودن آن را مرور می‌کنیم و سپس به ارائهٔ اثباتی طبیعی و شهودی از قضیهٔ گاوس ــ بونه می‌پردازیم. در این مسیر، نکاتی ساده که معمولاً در کتب استاندارد هندسهٔ دیفرانسیل به آن پرداخته نمی‌شود، مطرح خواهیم نمود از جمله: انگیزه‌ای طبیعی برای تعریف نگاشت گاوس، دلیل نامگذاری «انحنای ژئودزیکی» و همچنین خاصیتی جالب از خم‌های انحنا و خم‌های مجانبی و رابطهٔ آن‌ها با نگاشت گاوس.

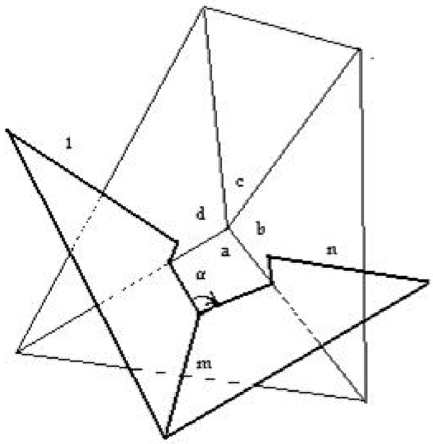
۲. نگرش هیلبرت به انحنای گاوسی

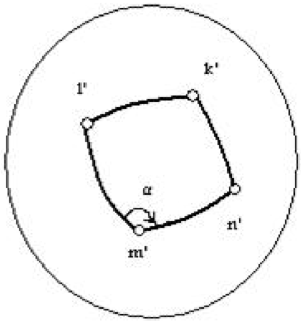
اگر S یک رویهٔ هموار (و همبند) دلخواه و $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2+z^2=1\}$ کرهٔ واحد دو بعدی در $\mathbb{R}^3$ باشد، نگاشت گاوس نگاشتی است مانند $N : S \to S^2$ که به هر نقطهٔ $p \in S$ بردار واحد عمود بر رویه در آن نقطه را نسبت می‌دهد. بنابر تعریف،انحنای گاوسی رویهٔ S در نقطهٔ p برابر است با $\kappa(p) = \det \mathrm{dN(p)}$. جلوتر در این یادداشت سعی خواهیم کرد به برخی انگیزه‌های این تعریف اشاره کنیم. انحنای گاوسی دارای خاصیت فوق‌العاده مهمِ ناوردا ماندن نسبت به خم کردن رویه است. در اینجا مقصود از خم کردن رویه، هر تغییری در شکلِ رویه نیست بلکه تغییراتی است که تحت آن‌ها طول خم‌ها و زوایای بین خم‌های ترسیم شده روی رویه پایا باشند. می‌توان مفهوم خم کردن را با کمک رویه‌های کاغذی یا تشکیل شده از هر ماده‌ای که تقریباً غیرقابل کشیدن باشد تا حدی نشان داد. ناوردا بودن نسبت به خمش، باعث ایجاد رابطه‌ای نزدیک بین انحنای گاوسی و آن خواصی از رویه می‌شود که فقط به زوایا و طول خم‌های روی آن بستگی دارند. به همین دلیل است که انحنای گاوسی و تعمیم‌های مرتبهٔ بالاتر آن، اهمیت بنیادی در نظریهٔ نسبیت پیدا می‌کند.

از آنجا که تعریف اولیهٔ انحنای گاوسی به وضعیت نسبی رویه در فضا بستگی دارد، این حقیقت که این کمیت نسبت به خمش ناوردا می‌ماند باعث شگفتی و امری غیربدیهی است. استدلال زیر راهنمایی بر درست بودن این واقعیت است. یادآوری می‌کنیم که یکی از راه‌های مرسومِ اثبات این مطلب، استفاده از قضیهٔ گاوس ــ بونه است.

فرض کنید چند صفحهٔ مثلثی صلب به گونه‌ای در فضا در کنار یکدیگر قرار گرفته باشند که هر دو صفحهٔ همسایه بتوانند نسبت به یکدیگر حول یال مشترکشان بچرخند. شکل زیر نمونه‌ای با چهار

مثلث a، b، c و d را نشان می‌دهد. در صورتی که بیش از سه وجه وجود داشته باشد، کنج سه‌بعدی متشکل از مثلث‌ها امکان تغییر شکل در فضا را خواهد داشت. تمام این تغییرات، طول‌ها و زوایای همهٔ خم‌های رسم‌شده روی سطح کنج را ثابت نگه می‌دارند و بنابراین می‌توان آن‌ها را «خمش» در نظر گرفت. با ترسیم بردارهای $(l, m, n, \ldots)$ عمود بر وجوه کنج و با انتخاب جهت برون‌گرا در هر حالت، تصویری کروی از کنج متشکل از نقاط منفرد $(l', m', n', \ldots)$ به‌دست می‌آوریم که دقیقاً همان تصویر نگاشت گاوس است. به منظور ایجاد ارتباط بین این کنج و نمایش کروی، نقاطی را که وجوه همسایه در کنج را نشان می‌دهند با دوایر عظیمه به یکدیگر وصل می‌کنیم تا یک چندضلعی روی کره به‌دست آید.





شکل ۱

خواهیم دید که مساحت این چندضلعی کروی تحت «خم‌کردن» چنان‌که در بالا تعریف شد، ثابت می‌ماند، حقیقتی که به‌طور بدیهی شبیه ناوردایی انحنای گاوس تحت خم‌کردن رویه است. اثبات ادعای ما بر مبنای قضایای مقدماتی مثلثات کروی است. همان‌طور که در بخش بعدی نیز اشاره خواهد شد، این یک قضیهٔ مشهور است که مساحت یک مثلث کروی و مشابهاً مساحت هر چندضلعی که اضلاع آن متشکل از دوایر عظیمه باشد، فقط به مجموع زوایای آن بستگی دارد. در نتیجه تنها چیزی که باید نشان دهیم، این است که زوایای چندضلعی کروی که نمایش‌دهندهٔ کنج است، تحت خم‌کردن کنج به معنی فوق، ناوردا هستند. اما همان گونه که شکل ۱ نشان می‌دهد، روشن است که هر یک از این زوایا مکمل یک زاویهٔ بین دو ضلع همسایه در کنج است و بنا به فرض ما این زوایا نمی‌توانند تغییر کنند.

بحث فوق را می‌توان با یک فرآیند حدگیری تکمیل نمود تا از آن، ناوردایی انحنای گاوسی در مورد رویه‌های محدب حاصل شود. در حین گذر به حد باید رویه را به‌وسیلهٔ چندوجهی‌های محاط با وجوه مثلثی کوچک تخمین بزنیم و سپس استدلال فوق را برای هر رأس چندوجهی تکرار کنیم.

۳. اثباتی شهودی از قضیه گاوس ـ بونه

یکی از مهم‌ترین دغدغه‌های هندسه‌دانان قرن نوزدهم را می‌توان چالش دربارهٔ نقش اصل توازی و نتایج مرتبط با آن در هندسه‌های نااقلیدسی دانست. گاوس، لباچفسکی، بویویی و ریمان را به‌طور سنتی از بنیانگذاران هندسه‌های نااقلیدسی به‌شمار می‌آورند. در هندسه‌های نااقلیدسی، اصل پنجم (اصل توازی) با یکی از ناقض‌های آن جایگزین می‌شود: «از یک نقطه خارج یک خط، یا هیچ و یا بیش از یک خط موازی آن عبور می‌کند.» کارل فریدریش گاوس ظاهراً اولین فردی بوده است که به این نتیجه رسیده که هیچ تناقضی در این اصول جدید نهفته نیست. وی در یک نامهٔ خصوصی در سال ۱۸۲۴ می‌نویسد:

> «این فرض که (در یک مثلث) مجموع زوایا کمتر یا بیشتر از ۱۸۰ درجه باشد منجر به هندسه‌های عجیبی می‌گردد کاملاً متفاوت اما سازگار با هندسه‌های ما که من آن را با رضایت کامل گسترانده‌ام.»

ما نقطهٔ آغازین حرکت خود را برای گذر به قضیهٔ گاوس ـ بونه یادآوری همین قضیهٔ مشهور دبیرستانی قرار می‌دهیم. سپس دو نوع تعمیم از این قضیه را مطرح می‌کنیم که ترکیب آن‌ها به قضیهٔ گاوس ـ بونه منجر خواهد شد.

قضیه ۱. جمع زوایای هر مثلث در صفحه برابر ۱۸۰ درجه است.

روش اول برای تعمیم قضیهٔ ۱. یک مسیر برای تعمیم قضیهٔ فوق، گذر به هندسه‌های کروی و هذلولوی است. پس از صفحهٔ دو بعدی، یکی از طبیعی‌ترین رویه‌ها که مطالعهٔ آن‌ها به دلایل مختلف مورد توجه دانشمندان مسلمان نیز بوده، کرهٔ دو بعدی $S(r,a)$ است که در آن، $r \in \mathbb{R}$ شعاع و $a \in \mathbb{R}^۳$ مرکز کره را نشان می دهند. اگر مبدأ مختصات را به مرکز کره منتقل کنیم و شعاع کره را واحد بگیریم، می‌توان نوشت:

$$S^۲ := S(۱,۰) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^۳ \mid x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱\}.$$

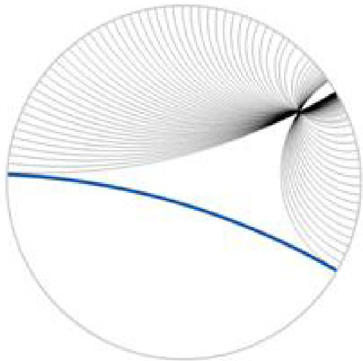
در هندسهٔ کروی دایره‌های عظیمه موسوم به ژئودزیک، نقش خطوط راست صفحهٔ اقلیدسی را بازی می‌کنند و به‌سادگی می‌توان دید که این خم‌ها به‌طور موضعی کوتاهترین مسیر بین نقاط روی کره هستند گرچه این خاصیت به‌طور سرتاسری برقرار نیست. تعمیمی از قضیهٔ ۱ در هندسهٔ کروی به شرح زیر است:

قضیه ۲. اگر $\triangle ABC$ یک مثلث با زوایای α، β و γ و مساحت S باشد، آن‌گاه

$$\alpha + \beta + \gamma - ۲\pi = S.$$

توجه کنید که در هندسهٔ کروی از یک نقطه خارج یک خط هرگز نمی‌توان خطی موازی آن رسم کرد؛ همچنین اصل بینیت هم نقض می‌شود. هندسهٔ هذلولوی دارای توصیف به‌مراتب دشوارتری

است که در آن، اصل توازی اقلیدس همان‌طور که در شکل ۲ دیده می‌شود، به شکل دیگری نقض می‌شود. به عبارت دیگر، از هر نقطه خارج یک خط بینهایت خط غیرمتقاطع با آن رسم می‌شود. مدل‌های مختلفی برای توصیف این هندسه وجود دارد. یک قرص باز به شعاع واحد در نظر بگیرید. خطوط یا ژئودزیک‌های هندسه عبارت‌اند از تمام دوایر عمود بر مرز این قرص همراه با قطرهای آن.



شکل ۲

همچنین فواصل در داخل قرص به گونه‌ای تغییر می‌کنند که مرز قرص در فاصلهٔ بینهایت دور قرار می‌گیرد. قضیه‌ای مشابه با قضایای ۱ و ۲ در این مدل نیز برقرار است.

قضیه ۳. اگر $\triangle ABC$ یک مثلث با زوایای α، β و γ و مساحت S باشد، آن‌گاه

$$۲\pi - \alpha - \beta - \gamma = S.$$

روش دوم برای تعمیم قضیهٔ ۱. برای رسیدن به مسیر دیگری برای تعمیم قضیهٔ ۱، کافی است مثلث را حالت خاص خم‌های قطعه‌ای هموار تصور کنیم. در این صورت تعبیری شهودی از قضیهٔ ۱ این است که بردار مماس بر این خم، پس از یک بار چرخش به دور آن، به اندازهٔ ۳۶۰ درجه یا ۲π رادیان می‌چرخد. بدین ترتیب قضیهٔ زیر را نیز می‌توان تعمیمی از قضیهٔ ۱ دانست.

قضیه ۴. برای هر خم هموار سادهٔ بستهٔ $\Gamma : [\circ, l] \to \mathbb{R}^۲$ که برحسب طول پرمایش شده است داریم

$$\int_\circ^l \kappa(s)\mathrm{d}s = ۲\pi.$$

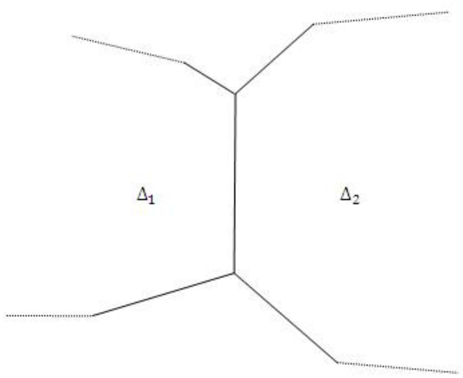
در اینجا، کمیت $\kappa(s)$ موسوم به انحنای خم، میزان چرخش بردار مماس بر خم در واحد طول را بیان می‌کند و طبیعتاً انتظار می‌رود مقدار انتگرال سمت چپ، چرخش کل این بردار پس از یک بار طی کردن خم را محاسبه کند و از آنجا مقدار سمت راست یعنی ۲π قابل پیش‌بینی خواهد بود. برای سادگی در بیان صورت این قضیه، فرض کرده‌ایم در هیچ نقطه‌ای شکستگی رخ نمی‌دهد؛ در غیر این صورت جمع زوایای خارجی در نقاط شکستگی را نیز باید به سمت چپ تساوی فوق اضافه کرد. در اثبات‌های مرسوم این قضیه، از ابزارهای توپولوژی جبری استفاده می‌شود ولی ما به اثباتی

شهودی و به‌ظاهر ساده بسنده می‌کنیم که پر کردن شکاف‌های آن به‌کمک قضایایی از توپولوژی هندسی امکان‌پذیر است.

در حقیقت برای ارائهٔ یک اثبات شهودی می‌توان به طرق مختلفی عمل کرد: یک راه آن است که ابتدا قضیه را برای یک چندضلعی اثبات و سپس خم قطعه‌ای هموار دلخواه را با چندضلعی تقریب بزنیم. روش دیگر که برای تعمیم‌های مورد نظر ما مفیدتر است، استفاده از یک مثلث‌بندی (تقریبی) درون خم مفروض است. مثلث‌بندی مورد نظر را طوری می‌گیریم که مرز آن، تخمین خوبی از خم ژردان داده شده باشد. حال کافی است به این نکته توجه کنیم که اگر Δ_1 و Δ_2 دو چندضلعی باشند که به طرز مناسبی کنار هم قرار گرفته‌اند و برای هر یک از آن‌ها رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$(\text{جمع زوایای خارجی } \Delta_i) - 2\pi = 0, \quad i = 1, 2$$

آن‌گاه برای $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ نیز رابطهٔ مشابهی برقرار خواهد بود.



شکل ۳

با تکرار این استدلال می‌توان قضیهٔ زیر را نیز اثبات نمود.

قضیه ۵. اگر Γ_1، Γ_2، ...، Γ_n خم‌هایی قطعه‌ای هموار در صفحه باشند که دو به‌دو بیرون یکدیگر و همگی در درون Γ قرار گرفته‌اند و Ω ناحیهٔ کراندار محصور به این خم‌ها باشد، آن‌گاه

$$\oint_{\partial\Omega} \kappa \mathrm{d}s - 2\pi = -2n\pi.$$

به عبارت دیگر، انتگرال انحنای مرز چنین ناحیه‌ای کمیتی است که فقط با توپولوژی ناحیه مورد نظر ارتباط دارد.

حال تلاش می‌کنیم قضیهٔ مشابهی را در هندسه کروی بیان و به روشی مشابه اثبات نمائیم. ابتدا توجه می‌کنیم که «خطوط راست» روی کره همان دایره‌های عظیمه هستند. لذا اگر بخواهیم انحنای

یک خم روی کره را تعریف کنیم باید میزان چرخش دایرهٔ عظیمهٔ مماس بر خم مورد نظر در واحد طول را در هر نقطه اندازه بگیریم. این همان چیزی است که در هندسهٔ دیفرانسیل انحنای ژئودزیکی یک خم روی یک رویه نامیده و با κ_g نمایش داده می‌شود. تعبیری معادل و مشهورتر از انحنای ژئودزیکی یک خم روی یک رویه در یک نقطه، عبارت است از انحنای (مسطح) تصویر خم بر صفحهٔ مماس بر رویه در آن نقطه. حال اگر یک خم سادهٔ بسته و قطعه‌ای هموار روی کره واحد داشته باشیم و Ω، یکی از ناحیه‌های محدود به خم، را به‌کمک مثلث‌های ژئودزیکی مثلث‌بندی کنیم به گونه‌ای که مرز مثلث‌بندی تخمین مناسبی از خم مورد نظر باشد، آن‌گاه با تکرار استدلال فوق و استفاده از قضیهٔ ۲، نتیجهٔ زیر حاصل می‌گردد.

قضیه ٦.

$$\oint_{\partial\Omega} \kappa_g \mathrm{d}s - ۲\pi = S_\Omega$$

که در آن، S_Ω مساحت ناحیهٔ Ω را نشان می‌دهد.

گذر به یک رویهٔ دلخواه S و ارائهٔ یک قضیهٔ مشابه روی آن با دشواری‌هایی همراه است. اولین ایده‌ای که ممکن است به ذهن برسد این است که رویهٔ مورد نظر را در نقاط مختلف با کره‌هایی درآن نقاط تخمین بزنیم و با کمک قضیهٔ فوق و ارائهٔ تعریفی معادل برای انحنای گاوسی به یک صورت‌بندی از قضیهٔ گاوس ــ بونه دست یابیم. باید به این نکته توجه کرد که تخمین مرتبهٔ دوم یک رویه در یک نقطه الزاماً کره از آب در نمی‌آید و به این خاطر و به دلایلی که در ادامه روشن خواهد شد، به سرانجام رساندن این ایده غیرممکن به‌نظر می‌رسد.

روش دیگری که ما در اینجا دنبال خواهیم کرد، استفاده از نگاشت گاوس $N : S \to S^۲$ است که به هر نقطه از رویه بردار واحد نرمال در «آن» نقطه از رویه را نسبت می‌دهد. به‌منظور ارائهٔ انگیزه‌ای برای تعریف این نگاشت، کافی است به نگاشت مشابهی در یک بعد پایین‌تر توجه کنیم. یک خم هموار مسطح را در نظر بگیرید. اگر یک موجود دو بعدی در راستای عمود بر این خم مسطح بایستد و با سرعت ثابتی شروع به حرکت کند، سر این فرد زاویه‌ای را روی دایرهٔ واحد جاروب می‌کند و نرخ تغییرات این زاویه در واحد طول برابر انحنای خم خواهد بود. حال به یک بعد بالاتر می‌رویم و یک انسان سه‌بعدی را تصور می‌کنیم که روی یک رویهٔ دو بعدی هموار ایستاده است. پس از نرمال‌سازی، می‌توان تصور کرد که وقتی فرد ناحیه‌ای را روی رویه جاروب می‌کند، تصویر سر او روی کرهٔ واحد نیز یک ناحیه را می‌پیماید که مساحت این ناحیه بنابر تعریف، زاویهٔ فضایی کنجی است که از کنار هم نهادن بردارهای نرمال در هر نقطه از ناحیهٔ مذکور حاصل می‌شود. بدین ترتیب، نرخ تغییرات این زاویه در واحد سطح، می‌تواند به‌عنوان معیاری برای «انحنای» رویه در آن نقطه در نظر گرفته شود و این همان «انحنای گاوسی» رویه، κ، در آن نقطه است.

حال تلاش می‌کنیم با کمک نگاشت گاوس تعمیمی از قضیهٔ ٦ به‌دست آوریم. ابتدا ناحیه‌ای مانند $\Omega_۱$ همسانریخت با یک قرص روی رویه در نظر بگیرید که به یک خم ژردان (قطعه‌ای)

هموار $\gamma_۱$ محدود شده است. برای سادگی، فرض کنید تحدید نگاشت گاوس به این ناحیه نیز یک وابرریختی باشد و قرار می‌دهیم $\Omega_۲ = N(\Omega_۱)$ و $\gamma_۲ = N(\gamma_۱)$. بنابر تعریف نگاشت گاوس، داریم

$$\text{مساحت}\, \Omega_۲ = \int_{\Omega_۱} \kappa dS.$$

از سوی دیگر، بر اساس قضیهٔ ٦، مقدار مساحت $\Omega_۲$ را می‌توان با انتگرال انحنای ژئودزیکی خم مرزی $\gamma_۱$ محاسبه کرد. از این‌رو سؤالی که ممکن است به ذهن برسد این است که آیا می‌توان کمیتی مانند $\kappa_{\gamma_۱}$ به هر نقطه از خم $\gamma_۱$ طوری نسبت داد که رابطه‌ای مانند زیر برقرار باشد:

$$\int_{\Omega_۱} \kappa \mathrm{d}S = \oint_{\gamma_۱} \kappa_{\gamma_۱} \mathrm{d}s - ۲\pi.$$

یک انتخاب طبیعی برای این مقدار، انحنای ژئودزیکی خم $\gamma_۲$ است. از این‌رو باید از خود بپرسیم چه رابطه‌ای بین انحنای ژئودزیکی خم $\gamma_۱$ در نقطهٔ p و انحنای ژئودزیکی $\gamma_۲$ در نقطهٔ $N(p)$ وجود دارد. با توجه به مطالب فوق، شاید اولین حدسی که به ذهن برسد این باشد:

$$\kappa_{۱g}(p) = d(p)\kappa_{۲g}(N(p)) \qquad (*)$$

که در آن، مقصود از $k_{ig}(q)$ انحنای ژئودزیکی خم $\gamma_i, i = ۱, ۲$ در نقطهٔ q است و $d(q)$ میزان انبساط واحد طول خم $\Omega_۱$ در نقطهٔ q توسط نگاشت گاوس را مشخص می‌کند. به عبارت دیگر، ممکن است حدس زده شود که نگاشت گاوس، انحنای ژئودزیکی خم‌ها را متناسب با عکس میزان انبساط طول آن‌ها تغییر می‌دهد. اگر چنین رابطه‌ای برقرار باشد، به‌ویژه قضیهٔ گاوس ـ بونه فوراً حاصل خواهد شد چراکه خواهیم داشت

$$\int_{\gamma_۱} \kappa_{۱g} \mathrm{d}s_۱ = \int_{\gamma_۲} \kappa_{۲g} \mathrm{d}s_۲. \qquad (**)$$

متأسفانه رابطهٔ $(*)$ درست نیست ولی چنان‌که خواهیم دید، می‌توان رابطهٔ دقیقی برای توصیف چگونگی تغییرات انحنای ژئودزیکی تحت نگاشت گاوس به‌دست آورد که منجر به $(**)$ گشته و از آن، اثباتی برای قضیهٔ گاوس ـ بونه حاصل می‌شود. برای این منظور، فرض کنید $\gamma_۱ : I \to S$ یک خم هموار پرمایش شده به‌وسیلهٔ طول، روی رویه S باشد و قرار دهید $\gamma_۲ = No\gamma_۱$، $t(s) := \dot{\gamma}_۱(s)$ و $n_T(s) := t(s) \times N(s)$. روشن است که $t(s)$ و $n_T(s)$ در هر نقطه یک پایهٔ یکامتعامد برای فضای مماس بر رویه در آن نقطه تشکیل می‌دهند. بدین ترتیب می‌توان نوشت

$$\frac{D\gamma_۲}{ds} = at(s) + bn_T(s) \qquad (۱)$$

که در آن، مقصود از $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{ds}}$ مشتق هموردا نسبت به رویهٔ S است. همچنین a و b توابعی از s هستند که می‌توان مقدار دقیق آن‌ها را نیز به‌دست آورد و ما در اینجا نیازی به به این کار نداریم. بنابر تعریف

انحنای ژئودزیکی برای خم γ_1، می‌دانیم که $\frac{\mathrm{Dt}}{\mathrm{ds}} = \kappa_{1g} n_T(s)$ و از این رابطه به‌سادگی می‌توان به تساوی $\frac{\mathrm{Dn_T(s)}}{\mathrm{ds}} = -\kappa_{1g} t(s)$ رسید.

از (۱) به‌دست می‌آوریم

$$\frac{D^2\gamma_2}{ds^2} = a't + b'n_T + \kappa_{1g}(an_T - bt). \tag{۲}$$

باید توجه کرد که در اینجا پارامتر s طول خم γ_2 نیست و لذا برای محاسبهٔ انحنای ژئودزیکی k_{2_g} برای خم γ_2 از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$\kappa_{2g} = \pm 1 / \mid \frac{D\gamma_2}{ds} \mid^3 \big(\frac{D\gamma_2}{ds} \times \frac{D^2\gamma_2}{ds^2}\big).N.$$

در اینجا علامت + یا − به جهت انتخابی روی رویه و جهت پیمایش خم γ_2 بستگی دارد. از روابط (۱) و (۲) می‌توان نتیجه گرفت

$$\frac{D\gamma_2}{ds} \times \frac{D^2\gamma_2}{ds^2} = \big((ab' - a'b) + \kappa_{1g}(a^2 + b^2)\big)N$$

و همچنین

$$\mid \frac{D\gamma_2}{ds} \mid = (a^2 + b^2)^{1/2}$$

که از آن به‌دست می‌آوریم

$$\kappa_{2g} = \frac{ab' - a'b}{(a^2 + b^2)^{3/2}} + \frac{\kappa_{1g}}{(a^2 + b^2)^{1/2}}.$$

از مقایسهٔ این رابطه با حدس اولیهٔ $(*)$ دیده می‌شود که این حدس چندان نیز نادرست نبوده است چراکه جملهٔ دوم سمت راست در بالا در حقیقت همان $(*)$ است که حدس زده بودیم ولی این مقدار نیاز به «تصحیحی» دارد که توسط جملهٔ $\frac{ab'-a'b}{(a^2+b^2)^{3/2}}$ توصیف می‌گردد.

اگر در این جمله از ضریبی به‌صورت $1/(a^2 + b^2)^{1/2}$ که بر اثر تغییر عنصر طول ایجاد شده صرف‌نظر کنیم، برای قسمت باقی مانده می‌توان نوشت

$$\frac{ab' - a'b}{a^2 + b^2} = (-\arctan(\frac{b}{a}))'.$$

اما دربارهٔ این جمله چه می‌توان گفت؟ ابتدا توجه می‌کنیم که $\theta = \arctan(\frac{b}{a})$ در واقع زاویهٔ بین $\gamma_1'(s)$ و $\gamma_2'(s)$ است. در حالتی که این زاویه همه‌جا ثابت باشد، حدس اولیه $(*)$ برقرار است و تغییرات این زاویه می‌تواند موجب بر هم خوردن $(*)$ شود.

اگر γ یک خم اصلی یا یک خم مجانبی باشد، انحنای ژئودزیکی α تنها ضریبی از انحنای ژئودزیکی γ خواهد بود و این ضریب، همان نسبت انبساط طول توسط نگاشت گاوس است. در این دو حالت داریم $\pi/2$ یا $\theta = 0$.

مطلب کلی‌تری که می‌توان بیان کرد این است که اگر به‌طور موضعی نقشه‌ای روی رویه داشته باشیم که خم‌های مختصاتی آن بر خم‌های انحنای رویه منطبق باشند، آن‌گاه خم‌هایی که انحنای ژئودزیکی آن‌ها به تعبیر رابطهٔ $(*)$ حفظ می‌شود دقیقاً عبارت‌اند از خم‌هایی که دارای زاویهٔ ثابتی نسبت به خم‌های مختصاتی هستند. بدین ترتیب می‌توان معادلهٔ دیفرانسیل آن‌ها را نوشت و به‌طور کامل مورد مطالعه قرار داد.

۱) اگر γ یک خم اصلی یا یک خم مجانبی باشد، انحنای ژئودزیکی α تنها ضریبی از انحنای ژئودزیکی γ خواهد بود و این ضریب همان نسبت انبساط طول توسط نگاشت گاوس است. در این دو حالت $\pi/2$ یا $\theta = 0$.

۲) مطلب کلی‌تری که می توان بیان کرد آن است که اگر به طور موضعی نقشه‌ای روی رویه داشته باشیم که خم‌های مختصاتی آن بر خم‌های انحنای رویه منطبق باشند آنگاه خم‌هایی که انحنای ژئودزیکی آنها به تعبیر رابطه $(*)$ حفظ می‌شود دقیقاً عبارتند از خم‌هایی که دارای زاویه ثابتی نسبت به خم‌های مختصاتی هستند. بدین ترتیب می‌توان معادله دیفرانسیل آنها را نوشت و به طور کامل آنها را مورد مطالعه قرار داد.

تکمیل قضیهٔ گاوس ـ بونه بر اساس مشاهدات فوق، آسان است. تنها مطلبی که ممکن است باعث ایجاد مشکل شود این است که گرچه جملهٔ اول در سمت راست عبارت $(*)$ مشتق کامل به نظر می‌رسد، اما در عبارتی که از آن مشتق گرفته شده متغیر $\theta = \arctan(\frac{b}{a})$ ظاهر می‌شود که تنها در حد مضرب صحیحی از 2π خوش‌تعریف است. به عبارت دیگر، پس از انتگرال‌گیری روی s، ممکن است مطابق معمول، مضرب صحیحی از 2π نیز در طرف راست ظاهر شود که مطلوب ما نیست.

نکته‌ای که باید به آن توجه شود این است که بنا بر فرض اولیه، ناحیهٔ Ω_1 همسانریخت با یک قرص و در نتیجه همبند ساده است. از این‌رو می‌توان خم مرزی γ_1 را به‌طور پیوسته در ناحیهٔ γ_1 منقبض کرد تا به یک نقطه تبدیل شود. در طی این تغییرات پیوسته، ضریب صحیح 2π که در بالا ذکر شد باید ثابت باقی بماند و این مقدار ثابت به‌دلیل فرآیند حدگیری چیزی جز صفر نمی‌تواند باشد. گذر از نواحی همبند ساده به نواحی کلی‌تر با یک فرآیند مثلث‌بندی بر اساس روش استاندارد قابل انجام است. بدین ترتیب اثبات قضیهٔ گاوس ـ بونه تکمیل می‌شود.

مراجع

[1] Hilbert, D., Cohn-Vossen, S., *Geometry and the Imagination*, AMS Chelsea Pub., 1999.

علیرضا بحرینی

دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شریف

bahraini@sharif.edu

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۳ (پاییز ۱۳۹۲) صص. ۴۳ تا ۵۴

نظریهٔ فضاهای برگمن: گذشته، حال و آینده (قسمت دوم)

علی آبکار

چکیده

در قسمت اول این مقاله با نظریهٔ فضاهای برگمن آشنا شدیم و تفاوت‌های اساسی این نظریه را با خویشاوند نزدیک آن، نظریهٔ فضاهای هاردی، توضیح دادیم. در این قسمت، به مرور پیشرفت‌های اساسی این نظریه می‌پردازیم. برای ملاحظهٔ نمادها و تعریف‌ها، خواننده را به قسمت اول مقاله ارجاع می‌دهیم.

۱. تابع‌های فرینی[۱]

اولین پیشرفت اساسی در این زمینه مرهون اِچ هدنمالم[۲] نوهٔ ریاضی آرنه برلینگ است. هدنمالم در سال ۱۹۸۵ رسالهٔ دکتری خود را زیر نظر اِ. دومار[۳] در دانشگاه اوپسالا[۴]، سوئد، نوشت. دومار شاگرد برلینگ، ریاضی‌دان مشهور در همین دانشگاه، بود. هدنمالم در مقاله‌های [۱۳] و [۱۴] موفق شد همتایی طبیعی برای تابع درونی[۵] فضای برگمن $A^{۲}$ معرفی کند. الهام‌بخش او در این کار این نکته بود که در فضای هاردی $H^{۲}$، تابع درونی متناظر با یک زیرفضای ناوردا، جواب یک مسألهٔ فرینی است. در اینجا این مطلب را توضیح می‌دهیم. فرض کنید $\{z_k\}$ دنباله‌ای متشکل از صفرهای یک تابع در A^p باشد (چنین دنباله‌ای را یک صفردنباله[۶] در A^p می‌نامند). برای راحتی، فرض می‌کنیم که هیچ‌یک از z_kها برابر صفر نیستند. اکنون زیرفضای ناوردای زیر از A^p را در نظر می‌گیریم:

$$N = \{f \in A^p : \quad f(z_k) = ۰, \;\; k = ۱, ۲, \ldots\}.$$

1) extremal functions 2) H. Hedenmalm 3) Y. Domar 4) Uppsala 5) inner function
6) zero sequence

ابتکار هدنمالم این بود که مسألهٔ فرینی زیر را در نظر گرفت: مطلوب است یافتن

$$\max\{|f(\circ)|:\quad f\in N,\ \ \|f\|_{A^p}=1\}. \tag{۱}$$

به هر جواب مسألهٔ بالا، یک تابع فرینی می‌گویند. یادآور می‌شویم که اگر بخواهیم مسألهٔ بیشینه‌سازی (۱) را در فضای هاردی H^p حل کنیم، جواب یک تابع بلاشکه[1] خواهد بود ([۹]). متذکر می‌شویم که مسألهٔ (۱) توسط هدنمالم برای حالت $p=2$ و بعداً توسط دیگران ([۱۱] و [۱۲])، برای حالت $\circ<p<\infty$ تعمیم داده شد. فرض کنیم G جواب مسألهٔ فرینی (۱) باشد. در این صورت، $G\in A^p$، $\|G\|_{A^p}=1$ و به‌ازای هر $f\in N$، $\frac{f}{G}\in A^p$. به‌علاوه،

$$\|\frac{f}{G}\|_{A^p}\le\|f\|_{A^p}.$$

G را تابع فرینی هدنمالم و یا مقسوم‌علیه کانونی[2] صفرمجموعهٔ[3] $\{z_k\}$ می‌نامند. نابرابری بالا بیان می‌کند که G به‌عنوان یک مقسوم‌علیه صفر، انقباضی است. این در تباین آشکار با نتایج شناخته شده در فضاهای هاردی است: فرض کنید $\{z_k\}$ دنباله‌ای متشکل از صفرهای یک تابع $f\in H^p$ باشد. می‌دانیم که $\{z_k\}$ در شرط بلاشکهٔ $\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)<\infty$ صدق می‌کند. اگر

$$B(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{z_k-z}{1-\overline{z_k}z}\,\frac{|z_k|}{z_k},\qquad z\in\mathbb{D}$$

حاصل‌ضرب بلاشکهٔ متناظر باشد، آن‌گاه $f=Bh$ که در آن، $\|B\|_{H^p}=1$، $h=\frac{f}{B}\in H^p$ و $\|\frac{f}{B}\|_{H^p}=\|f\|_{H^p}$. از این‌رو حاصل‌ضرب بلاشکه، به‌عنوان یک مقسوم‌علیه صفر، به‌مفهومی که بیان شد، دارای ویژگی طولپایی است.

۲. وجود و یکتایی جواب برای مسئلهٔ بیشینه‌سازی

در این بخش، به ایدهٔ کلی وجود و یکتایی جواب مسألهٔ (۱) اشاره می‌کنیم. فرض کنیم

$$m=\max\{|f(\circ)|:\quad f\in N,\ \ \|f\|_{A^p}=1\}.$$

توجه کنید که $m\le 1$، زیرا به‌ازای هر $f\in A^p$، به‌دلیل زیرهمساز بودنِ $|f|^p$ داریم $|f(\circ)|\le\|f\|_{A^p}$. حال اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای از اعضای N باشد که $\|f_n\|_{A^p}=1$ و $|f_n(\circ)|\to m$، آن‌گاه چون $\{f_n\}$ روی زیرمجموعه‌های فشردهٔ قرص یکه به‌طور یکنواخت کراندار است، پس تشکیل خانواده‌ای بهنجار[4] می‌دهد. از این‌رو زیردنباله‌ای از $\{f_n\}$ مانند $\{f_{n_k}\}$ وجود دارد که بر زیرمجموعه‌های فشردهٔ قرص یکه به‌طور یکنواخت به تابعی تحلیلی مانند f همگراست. اکنون از لم فاتو نتیجه می‌شود که $f\in A^p$ و $\|f\|_{A^p}\le 1$. بنابراین $f\in N$ و $m=|f(\circ)|$، یعنی f یک جواب مسألهٔ (۱) است.

---

1) Blaschke function 2) canonical divisior 3) zero-set 4) normal family

برهانی دیگر برای اثبات وجود جواب برای مسألهٔ (۱) به قرار زیر است. ابتدا توجه کنید که وجود جواب برای مسألهٔ (۱) هم‌ارز است با وجود جواب برای مسألهٔ یافتن

$$\min\ \{\|f\|_{A^p}:\quad f\in N,\ f(\circ)=\text{۱}\}. \qquad (\text{۲})$$

در واقع، تابع g با نرم واحد، جوابی از مسألهٔ (۱) است اگر و تنها اگر $g/g(\circ)$ جوابی برای مسألهٔ (۲) باشد. چون A^p به‌ازای $\text{۱} < p < \infty$ یک فضای باناخ یکنواخت‌محدب[1] است و چون N مجموعه‌ای بسته و محدب در A^p است، از قضیه‌های استاندارد آنالیز تابعی نتیجه می‌شود که N دارای عضوی (یکتا) با کمترین نرم است. یکتایی تابع فرینی نیز نتیجهٔ این مطلب است که $A^\text{۱}$ فضایی اکیداً محدب[2] است. در حالتی که $\circ < p < \text{۱}$، بحث یکتایی خیلی پیچیده است (رجوع کنید به مقاله‌های [۱۱] و [۱۲]، یا کتاب [۱۰]).

در پایان این بخش، لازم است دو نکته را متذکر شویم. اول این‌که فرض مخالف صفر بودنِ همهٔ z_kها محدودیتی ایجاد نمی‌کند. در واقع، می‌توان به مطالعهٔ مسألهٔ یافتن

$$\max\ \{|f^n(\circ)|:\quad f\in N,\ \ \|f\|_{A^p}=\text{۱}\}$$

به‌ازای یک عدد طبیعی مناسب n مبادرت نمود: فرض ما این بود که $f(\circ)\neq\circ$؛ اگر چنین نباشد، nی وجود دارد که مشتق nام f در مبدأ صفر نمی‌شود. نکتهٔ دوم این‌که می‌توان نشان داد تابع فرینی متناظر با هر زیرفضای ناوردای دلخواه در A^p وجود دارد (به‌جای زیرفضای صفربنیاد یعنی زیرفضایی مانند N متشکل از تابع‌هایی در فضای برگمن که روی یک صفرمجموعه برابر صفرند). برای این منظور، کافی است مسألهٔ یافتن

$$\max\ \{|f(\circ)|:\quad f\in N,\ \ \|f\|_{A^p}=\text{۱}\}$$

را برای زیرفضای ناوردای N حل کنیم. در این ارتباط، لازم است بدانیم که

مسئلهٔ باز ۱: اگر $\circ < p < \text{۱}$، آیا هر زیرفضای ناوردای A^p دارای تابع فرینی است؟ اگر تابع فرینی وجود داشته باشد، آیا یکتا است؟

مسئلهٔ باز ۲: اگر $p=\text{۱}$، آیا هر زیرفضای ناوردای $A^\text{۱}$ تابع فرینی دارد؟

برای زیرفضاهای تک‌مولد[3]، وجود و یکتایی تابع فرینی در حالت $\circ < p \leq \text{۱}$ اثبات شده است (زیرفضای M را تک‌مولد گویند اگر M توسط یک عضو A^p پدید آید، یعنی $f\in A^p$ موجود باشد به‌طوری که $M=\mathrm{cl}\ \{Qf:\ $ یک چندجمله‌ای است $Q\}$).

۳. صفرمجموعه‌ها

دنبالهٔ $\{z_k\}$ از نقاط متمایز قرص یکهٔ باز را یک صفردنبالهٔ فضای برگمن نامیم اگر تابعی

1) uniformly convex 2) strictly convex 3) singly generated

نامتحد با صفر در A^p یافت شود که دقیقاً روی $\{z_k\}$ صفر شود. مشهور است که صفردنباله‌های فضاهای هاردی، دنباله‌های بلاشکه هستند. در قسمت اول این مقاله، تفاوت صفردنباله‌ها در فضاهای برگمن و هاردی را توضیح دادیم. در اینجا به توضیح دو مفهوم دیگر مرتبط به این موضوع می‌پردازیم. دنبالهٔ $\{z_k\}$ از نقاط متمایز قرص یکهٔ باز را یک دنبالهٔ نمونه‌گیری[1] برای فضای برگمن A^p نامیم هرگاه عددهای ثابت و مثبت $K_۱$ و $K_۲$ یافت شوند به‌طوری که به‌ازای هر $f \in A^p$،

$$K_۱\|f\|_{A^p}^p \leq \sum_{k=۱}^{\infty}(۱-|z_k|^۲)^۲|f(z_k)|^p \leq K_۲\|f\|_{A^p}^p.$$

به سخن کلی، مقادیر f در این نقاط تخمینی از نرم f است. مشابهاً، $\{z_k\}$ را یک دنبالهٔ درونیابی[2] برای A^p می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر دنبالهٔ $\{w_k\}$ از نقاط قرص یکه که در شرط

$$\sum_{k=۱}^{\infty}(۱-|z_k|^۲)^۲|w_k|^p < \infty$$

صدق کند، تابع $f \in A^p$ موجود باشد که $f(z_k) = w_k$. توجه کنید که هر دنبالهٔ درونیابی یک صفردنباله است، زیرا اگر $\{z_k\}$ یک دنبالهٔ درونیابی باشد، آن‌گاه $f \in A^p$ یافت می‌شود که $f(z_۱) = ۱$ و $f(z_k) = ۰$ $(k = ۲, ۳, \ldots)$. اکنون تابع $g(z) = (z - z_۱)f(z)$ را در نظر می‌گیریم که به A^p تعلق دارد، روی دنبالهٔ $\{z_k\}$ صفر می‌شود ولی متحد با صفر نیست. $\{z_k\}$ زیرمجموعه‌ای از یک صفرمجموعهٔ A^p است و لذا خودش یک صفرمجموعه است [۱۰]. از طرف دیگر، یک دنبالهٔ نمونه‌گیری هیچ‌گاه نمی‌تواند یک صفرمجموعه باشد، زیرا اگر $f \in A^p$ روی یک دنبالهٔ نمونه‌گیری $\{z_k\}$ صفر شود، آن‌گاه از نابرابری مربوطه نتیجه می‌شود که $\|f\|_{A^p} = ۰$ و لذا $f = ۰$. بنابراین هیچ دنباله‌ای نمی‌تواند هم دنباله‌ای درونیابی باشد و هم دنباله‌ای نمونه‌گیری.

همتای معادلی برای مفهوم دنبالهٔ نمونه‌گیری در H^p وجود ندارد، زیرا در این وضع لازم است تعریف به‌صورت زیر درآید:

$$K_۱\|f\|_{H^p}^p \leq \sum_{k=۱}^{\infty}(۱-|z_k|^۲)|f(z_k)|^p \leq K_۲\|f\|_{H^p}^p.$$

حال اگر $f = ۱$، از نابرابری سمت راست نتیجه می‌شود که $\{z_k\}$ یک دنبالهٔ بلاشکه است. از طرف دیگر، اگر تابع بلاشکهٔ متناظر را در نابرابری سمت چپ جایگزین کنیم، خواهیم داشت $K_۱ = ۰$ که تناقض است (توجه کنید که تابع بلاشکه در نقاط $\{z_k\}$ برابر صفر می‌شود). مهم‌ترین مسأله در این زمینه، یافتن توصیفی برای دنباله‌های نمونه‌گیری و درونیابی است. در فضاهای هاردی، دنباله‌های درونیابی توسط لنارت کارلسون[3] در سال ۱۹۸۵ توصیف شدند [۸]. پیش از بیان قضیهٔ کارلسون متذکر می‌شویم که دنبالهٔ $\{z_k\}$ را یک دنبالهٔ درونیابی عام[4] می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر $\{w_k\} \in \ell^\infty$،

---

1) sampling sequence 2) interpolation sequence 3) Lenart Carleson 4) universal interpolation sequence

تابع $f \in H^\infty$ یافت شود به‌طوری که $f(z_k) = w_k$. دنبالهٔ $\{z_k\}$ را یک دنبالهٔ درونیابی برای H^p می‌خوانیم اگر به‌ازای هر دنبالهٔ $\{w_k\}$ با شرط $\sum_{k=1}^\infty (1-|z_k|^2)|w_k|^p < \infty$، تابع $f \in H^p$ موجود باشد به‌طوری که $f(z_k) = w_k$. قضیهٔ کارلسون بیان می‌کند که $\{z_k\}$ یک دنبالهٔ درونیابی عام است اگر و تنها اگر دنباله‌ای به‌طور یکنواخت جداشده[1] باشد، یعنی عدد $\delta > 0$ موجود باشد به‌طوری که

$$\prod_{j \neq k} \left| \frac{z_j - z_k}{1 - \overline{z_j} z_k} \right| \geq \delta, \qquad k = 1, 2, 3, \dots .$$

متعاقباً در سال ۱۹۶۱، شاپیرو و شیلدز ثابت کردند که دنبالهٔ $\{z_k\}$ یک دنبالهٔ درونیابی برای H^p است اگر و تنها اگر دنباله‌ای به‌طور یکنواخت جداشده باشد ([۲۰]).

توصیف دنباله‌های نمونه‌گیری و درونیابی برای فضاهای برگمن در سال ۱۹۹۴ توسط کریستیان زیپ[2] صورت پذیرفت. برای بیان نتایج زیپ در این مورد، به چند نماد نیاز داریم. فرض کنید

$$\rho(z, \xi) = \left| \frac{\xi - z}{1 - \overline{\xi} z} \right|$$

متریک شبه‌هذلولوی در قرص یکه باشد. قرص شبه‌هذلولوی $\rho(z, \xi) < r$ را با $\Delta(\xi, r)$ نشان می‌دهیم. مساحت هذلولوی زیرناحیهٔ Ω از قرص یکه به‌صورت

$$a(\Omega) = \frac{1}{\pi} \int_\Omega \frac{dx\, dy}{(1 - |z|^2)^2}$$

تعریف می‌شود. برای عدد $1 > s > 0$، تعداد نقاط دنبالهٔ به‌طور یکنواخت جداشدهٔ $\Gamma = \{z_k\}$ واقع در قرص شبه‌هذلولوی $\Delta(\xi, r)$ را با نماد $n(\Gamma, \xi, s)$ نشان می‌دهیم. از این‌رو تعداد متوسط نقاط Γ در واحد سطح هذلولوی برابر است با

$$E(\Gamma, \xi, r) = \frac{\int_0^r n(\Gamma, \xi, s)\, ds}{2 \int_0^r a(\Delta(\xi, s))\, ds}.$$

سرانجام، تعریف می‌کنیم

$$D^-(\Gamma) = \liminf_{r \to 1} \inf_{\xi \in \mathbb{D}} E(\Gamma, \xi, r),$$

$$D^+(\Gamma) = \limsup_{r \to 1} \sup_{\xi \in \mathbb{D}} E(\Gamma, \xi, r).$$

$D^-(\Gamma)$ و $D^+(\Gamma)$ را به‌ترتیب چگالی یکنواخت پایینی[3] و چگالی یکنواخت بالایی[4] می‌نامند. روشن است که $0 \leq D^-(\Gamma) \leq D^+(\Gamma)$. قبل از بیان توصیف زیپ از دنباله‌های نمونه‌گیری و درونیابی برای A^p، متذکر می‌شویم که دنبالهٔ $\{z_k\}$ را یکنواخت‌گسسته[5] نامند هرگاه عدد مثبت δ موجود باشد به‌طوری که

$$\rho(z_j, z_k) \geq \delta > 0, \qquad j \neq k.$$

1) uniformly separated 2) K. Seip 3) lower uniform density 4) upper uniform density
5) uniformly discrete

قضیهٔ ۱. Γ یک دنبالهٔ درونیابی برای A^p است اگر و تنها اگر Γ یکنواخت‌گسسته باشد و $D^+(\Gamma) < \frac{1}{p}$.

قضیهٔ ۲. Γ یک دنبالهٔ نمونه‌گیری برای A^p است اگر و تنها اگر Γ اجتماعی متناهی از دنباله‌های یکنواخت‌گسسته باشد، به‌علاوه زیردنباله‌ای یکنواخت‌گسسته مانند Γ' موجود باشد که $D^-(\Gamma') > \frac{1}{p}$.

این قضیه‌ها، در حالت $p = 2$، توسط زیپ و در حالت $0 < P < \infty$، توسط شوستر[1] [۱۰] ثابت شد.

توصیف هندسی جامعی از صفردنباله‌های فضای برگمن وجود ندارد، هرچند که شرایطی وجود دارند که لازم‌اند و شرایطی نیز وجود دارند که کافی‌اند. لیکن فاصلهٔ بین لازم بودن و کافی بودن هنوز پر نشده است و یک مسألهٔ باز است.

۴. زیرفضاهای ناوردا

فرض کنیم B یک فضای باناخ متشکل از توابع تحلیلی بر قرص یکه باشد. به‌عنوان مثال، B را فضای هاردی یا فضای برگمن تصور کنید. زیرفضای بستهٔ M در B راناوردا گوییم اگر به‌ازای هر $f \in M$، $zf(z) \in M$. این، هم‌ارز است با این‌که به‌ازای هر $f \in M$ و هر چندجمله‌ای Q، $Qf \in M$. یکی از مسائل مهم در این زمینه، توصیف زیرفضای‌های ناوردا و ساختار مشبکهٔ آن‌ها تحت عمل‌های اشتراک و اجتماع است. در مورد فضای هاردی، ساختار زیرفضاهای ناوردا کاملاً معلوم و مشخص است. این توصیف، مرهون کار پیشروانهٔ آرنه برلینگ [٦] است (به قسمت اول مقاله رجوع کنید). در این بخش، به بررسی موضوع برای فضای برگمن می‌پردازیم.

فرض کنید $f \in B$ تابعی دلخواه باشد. کوچکترین زیرفضای ناوردای شامل f را با نماد $[f]$ نشان می‌دهند. در واقع، $[f]$ برابر است با بستار مجموعهٔ $\{Qf : \text{یک چندجمله‌ای است } Q\}$. $[f]$ را زیرفضای تولید شده توسط f می‌نامند. کلی‌تر، اگر $E \subseteq B$ زیرمجموعه‌ای دلخواه باشد، منظور از زیرفضای تولیدشده توسط E که با نماد $[E]$ نشان داده می‌شود، کوچکترین زیرفضای ناوردای شامل E است. زیرفضای M را دوری[2] گوییم هرگاه $M = [f]$. چنین زیرفضایی را تک‌مولد هم می‌گویند. در این حالت، f را مولد M می‌نامند. تابع $f \in B$ را دوری نامند هرگاه $[f]$ برابر B باشد. قضیهٔ برلینگ برای فضاهای هاردی بیان می‌کند که هر زیرفضای ناوردای $M \neq \{0\}$، زیرفضایی دوری است، یعنی‌تابع درونی[3] φ وجود دارد که $M = [\varphi] = \varphi.H^p$. به‌علاوه، اعضای دوری H^p دقیقاً توابع برونی[4] هستند. این وضع برای فضای برگمن متفاوت است. خواهیم دید که توابع درونی هم می‌توانند فضای برگمن را تولید کنند. برای بیان دقیق قضیهٔ مربوطه، لازم است مفهوم یک مجموعهٔ کارلسون[5] را تعریف کنیم. مرز قرص یکه را با $\mathbb{T}$ نشان دهید و فرض کنید $K \subseteq \mathbb{T}$ زیرمجموعه‌ای بسته و با اندازهٔ صفر باشد، یعنی $|K| = 0$. قرار دهید $\mathbb{T} \setminus K = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ که در آن I_nها مجموعه‌هایی باز و مجزا هستند.

1) A. Schuster 2) cyclic 3) inner function 4) outer function 5) Carleson set

K را یک مجموعهٔ کارلسون نامیم اگر

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \log |I_n| > -\infty;$$

یا معادلاً

$$\int_{\mathbb{T}} \log \ \rho_K(\xi) \ |d\xi| > -\infty$$

که در آن $\rho_K(\xi)$ فاصلهٔ ξ تا مجموعهٔ K است. درواقع، مجموعه‌های کارلسون، صفرمجموعه‌های مرزی آن دسته از توابع تحلیلی در قرص یکه هستند که در شرط لیپ‌شیتز صدق می‌کنند. حال فرض می‌کنیم μ اندازه‌ای منفرد بر $\mathbb{T}$ است و قرار می‌دهیم

$$S_\mu(z) = \exp \ \Big\{ -\int_{\mathbb{T}} \frac{\xi + z}{\xi - z} \ d\mu(\xi) \Big\}.$$

در این صورت، S_μ برای A^p دوری است اگر و تنها اگر به‌ازای هر مجموعهٔ کارلسون K، $\mu(K) = 0$. به عبارت دیگر، بعضی توابع درونی منفرد می‌توانند فضای A^p را پدید آورند. یک تفاوت اساسی دیگرِ زیرفضای‌های ناوردا در فضاهای برگمن و هاردی این است که زیرفضاهای فضای برگمن الزاماً تک‌مولد نیستند. ما این موضوع را در بخش بعدی مورد بررسی قرار خواهیم داد. بنابراین به پرسش اساسی زیر رهنمون می‌شویم: مطلوب است ارائهٔ توصیفی از توابع دوری A^p؛ یعنی تعیین آن توابعی که می‌توانند فضای برگمن را پدید آورند. توجه کنید که به‌دلیل چگال بودنِ چندجمله‌ای‌ها در A^p، ۱ تابعی دوری است. علاوه بر این، یک تابع دوری نمی‌تواند در $\mathbb{D}$ صفر شود، زیرا در این صورت، هر عضو $[f]$ نیز در آن نقطه صفر خواهد شد. نکتهٔ دیگر این است که اگر $1 \in [f]$، آن‌گاه f دوری است. در سال ۱۹۷۴، آلن شیلدز[1] حدس زد که اگر f و $\frac{1}{f}$ هر دو در A^p باشند، آن‌گاه f دوری است. بعدها معلوم شد که این گزاره می‌تواند درست باشد اگر فرض کنیم $f \in H^\infty$، زیرا در این صورت، می‌توان چندجمله‌ای‌های Q_n را طوری یافت که $\|Q_n - \frac{1}{f}\|_{A^p} \to 0$، در نتیجه $\|Q_n f - 1\|_{A^p} \to 0$، یعنی $1 \in [f]$. بنابراین f دوری است.

موضوع مهم دیگر، مبحث توابع درونی و برونی است که ارتباط نزدیکی با نظریهٔ تجزیهٔ توابع دارد. یک پرسش عمده این است که مفاهیم تابع درونی و تابع برونی را در فضای برگمن چگونه تعریف کنیم؟

می‌دانیم که هر تابع $f \in H^p$ را می‌توان به‌صورت حاصل‌ضرب $f = \varphi F$ نوشت که در آن، φ یک تابع درونی و F یک تابع برونی است. تابع $\varphi \in H^p$ رادرونی نامند هرگاه $\varphi \in H^\infty$ و تقریباً همه‌جا روی مرز قرص یکه داشته باشیم $|\varphi(e^{i\theta})| = 1$. از آنجا که توابع عضو فضای برگمن الزاماً حد شعاعی ندارند (به قسمت اول مقاله رجوع کنید)، این مفهوم قابل تعمیم به فضای برگمن نیست.

1) Allen Shields

خوشبختانه توصیف دیگری از توابع درونی در H^p وجود دارد که می‌تواند قابل تعمیم باشد. تابع $\varphi \in H^p$ درونی است هرگاه $\|\varphi\|_{H^p} = ۱$ و

$$\int_۰^{۲\pi} |\varphi(e^{i\theta})|^p \, e^{in\theta} \, d\theta = ۰, \qquad n = ۱, ۲, ۳, \ldots .$$

از برابری بالا نتیجه می‌شود که همهٔ ضرایب فوریهٔ $|\varphi(e^{i\theta})|^p$ به‌جز ضریب نظیر $n = ۰$ برابر صفرند. لذا $|\varphi(e^{i\theta})|$ ثابت است. با الهام از این مطلب، می‌توان گفت که تابع $\varphi \in A^p$ درونی است اگر $\|\varphi\|_{A^p} = ۱$ و

$$\int_{\mathbb{D}} |\varphi(z)|^p \, z^n \, dx \, dy = ۰, \qquad n = ۱, ۲, ۳, \ldots .$$

نکتهٔ جالب این است که تابع فرینی متناظر با هر زیرفضای ناوردا، یک تابع درونی فضای برگمن است و برعکس هر تابع درونی فضای برگمن، با تقریب یک دوران، برابر تابع فرینی یک زیرفضای ناوردا است. گام بعدی، یافتن مفهوم مناسبی برای تعریف مفهوم تابع برونی بود. از نظریهٔ فضاهای هاردی می‌دانیم که $F \in H^p$ یک تابع برونی است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $g \in H^p$،

$$|g(e^{i\theta})| \leq |F(e^{i\theta})| \Rightarrow |g(۰)| \leq |F(۰)|.$$

اما این نابرابری بین توابع مرزی هم‌ارز است با این‌که به‌ازای هر چندجمله‌ای Q،

$$\|Qg\|_{H^p} \leq \|QF\|_{H^p}.$$

با الهام از این مطلب، بوریس کورنبلوم[1] [۱۹] به تعریف زیر رهنمون شد: تابع $F \in A^p$ بر تابع $g \in A^p$ غالب است (با نماد $g \prec F$) اگر به‌ازای هر چندجمله‌ای مانند Q،

$$\|Qg\|_{A^p} \leq \|QF\|_{A^p}.$$

تابع $F \in A^p$ را یک تابع برونی نامیم هرگاه به‌ازای هر $g \in A^p$،

$$g \prec F \Rightarrow |g(۰)| \leq |F(۰)|.$$

دو قضیهٔ زیر نشان می‌دهند که این تعریف‌ها، به‌واقع همان چیزهایی بودند که دنبال‌شان بودیم:

قضیهٔ ۱. یک تابع در A^p دوری است اگر و تنها اگر تابعی برونی باشد.

قضیهٔ ۲. هر تابع $f \in A^p$ دارای تجزیه‌ای به‌صورت $f = \varphi F$ است که در آن، φ تابعی درونی و F تابعی برونی است.

برای دیدن اثبات این قضیه‌ها خواننده را به منابع [۱۰] و [۱۶] ارجاع می‌دهیم.

---

1) Boris Korenblum

۵. شاخص زیرفضاهای ناوردا

فضای هیلبرت A^2 را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم M و N دو زیرفضای ناوردای A^2 باشند به‌طوری که $N \subseteq M$. مکمل‌متعامد[1] N در M عبارت است از

$$M \ominus N = M \cap N^{\perp}$$

که در آن،

$$N^{\perp} = \{g \in A^2 : \quad \langle f, g\rangle = 0, \ \forall f \in N\}$$

پوچساز[2] N است. شاخص[3] زیرفضای ناوردای M به‌صورت

$$\text{ind } (M) = \dim \ (M \ominus zM)$$

تعریف می‌شود. در حالت کلی، در فضای A^p، شاخص M عبارت است از

$$\text{ind } (M) = \dim \ (\frac{M}{zM}).$$

هر زیرفضای صفربنیاد دارای شاخص ۱ است، همین‌طور هر زیرفضای تک‌مولد شاخصی برابر ۱ دارد. این موضوع در سال ۱۹۸۶، توسط بوردون [۷] و جاناس [۱۸] مورد توجه قرار گرفته بود. چون بنابر قضیهٔ برلینگ، هر زیرفضای ناوردای H^p تک‌مولد است، پس شاخص هر زیرفضای ناوردای H^p برابر ۱ است. در تضاد آشکار با این مطلب، در فضای برگمن زیرفضاهای ناوردای با شاخص دلخواه وجود دارند. این حقیقت از مدت‌ها قبل بر اساس یافته‌های آپوستل و دیگران [۵] معلوم بود لیکن هیچ ایده‌ای که چگونه این زیرفضاها ساخته می‌شوند، وجود نداشت. اولین زیرفضای ناوردای با شاخص ۲ در سال ۱۹۹۳، توسط هدنمالم ساخته شد [۱۵]. روش معرفی شده توسط هدنمالم، برای هدنمالم، ریشتر و زیپ این امکان را فراهم آورد تا در A^p زیرفضاهای ناوردای با شاخص دلخواه بسازند ([۱۷]).

مسألهٔ وجود زیرفضاهای ناوردای با شاخص دلخواه ارتباط نزدیکی با مسألهٔ زیرفضای ناوردا[4] دارد: اگر T یک عملگر خطی کراندار روی یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر با بعد بزرگتر از ۱ باشد، آیا T یک زیرفضای ناوردای غیربدیهی دارد؟ به عبارت دیگر، یعنی زیرفضای ناوردای M، غیر از $\{0\}$ و H وجود دارد که $TM \subseteq M$. معلوم می‌شود که این پرسش هم‌ارز است با مسأله‌ای خاص در مورد مشبکهٔ زیرفضاهای ناوردای فضای برگمن A^2 تحت عملگر انتقال. به‌ویژه، اگر M و N دو زیرفضای ناوردای A^2 باشند به‌طوری که $N \subseteq M$ و $dim \ (M \ominus N) = \infty$، آیا زیرفضای ناوردای دیگری در A^2 چون L وجود دارد که $N \subseteq L \subseteq M$؟ هر پاسخ مثبت به این پرسش به معنی پاسخ مثبتی به مسألهٔ زیرفضای ناوردا است و برعکس. برای بحث بیشتر به [۱۷] رجوع کنید.

---

1) orthocomplement 2) annihilator 3) index 4) invariant subspace problem

۶. قضیهٔ برلینگ برای فضای برگمن

در بخش قبل دیدیم که ساختار زیرفضاهای ناوردا در فضاهای برگمن خیلی پیچیده است. قضیهٔ برلینگ برای فضاهای هاردی بیان می‌کند که هر زیرفضای ناوردا در H^p تک‌مولد است. به‌واقع، هر زیرفضای ناوردا به‌وسیلهٔ یک تابع درونی پدید می‌آید، یعنی $M = [\varphi]$. توجه کنید که اگر M زیرفضایی در $H^{۲}$ باشد، آن‌گاه $\varphi \in (zM)^{\perp}$ زیرا هر عضو M به‌شکل φf است که در آن، $f \in H^{۲}$. به‌علاوه، $|\varphi(e^{i\theta})| = ۱$ و لذا

$$\begin{aligned}\langle z\varphi f, \varphi\rangle &= \frac{۱}{\pi}\int_{\circ}^{۲\pi} e^{i\theta}|\varphi(e^{i\theta})|^{۲} f(e^{i\theta})\, d\theta \\ &= \frac{۱}{\pi}\int_{\circ}^{۲\pi} e^{i\theta} f(e^{i\theta})\, d\theta \\ &= \circ . f(\circ) = \circ .\end{aligned}$$

بنابراین $\varphi \in M \cap (zM)^{\perp} = M \ominus zM$. از طرف دیگر، $\text{ind }(M) = ۱$ (چون M دوری است)، پس $M = [\varphi] = [M \ominus zM]$. این مطلب را می‌توان به فضاهای برگمن تعمیم داد. با وجود این که همهٔ زیرفضاهای ناوردا دارای شاخص ۱ نیستند، همواره می‌توان مجموعه‌ای از مولدهای M را در $M \ominus zM$ جستجو کرد. به‌عبارت دیگر، M توسط $M \ominus zM$ پدید می‌آید. این مطلب توسط اَلِمان، ریشتر، و ساندبرگ مورد توجه قرار گرفت [۴]؛ قضیه‌ای خیلی مهم و با ظرافت‌های تکنیکی بسیار که در مجلهٔ وزین اکتا متمتیکا[1] چاپ شد.

قضیه ۱. هر زیرفضای ناوردای M از $A^{۲}$ دارای ویژگی $M = [M \ominus zM]$ است.

این قضیه که به یک معنی تعمیم قضیهٔ برلینگ به فضای $A^{۲}$ است، دارای نتایج بسیاری است. از جمله، اگر G تابع فرینی متناظر با زیرفضای صفربنیاد M در $A^{۲}$ باشد، آن‌گاه $M = [G]$. این حکم بدون توسل به قضیهٔ بالا و به‌طور مستقیم، توسط نویسندهٔ حاضر ثابت شده است (رجوع کنید به [۱] و [۲]). همچنین می‌توان نشان داد که هر زیرفضای با شاخص ۱ در $A^{۲}$ نیز دارای ویژگی مذکور در قضیهٔ برلینگ است. به‌ویژه، اگر M زیرفضایی دوری باشد، آن‌گاه M به‌وسیلهٔ تابع فرینی کانونی خود پدید می‌آید. این مطلب قابل تعمیم به A^p است.

مسئلهٔ باز ۳. هر زیرفضای ناوردای M از A^p $(\circ < p < \infty)$ دارای ویژگی $M = [M \ominus zM]$ است.

در همین رابطه، لازم است توجه خواننده را به مسأله‌های باز بخش ۲ جلب کنیم. در $A^{۱}$، یکتایی تابع فرینی نتیجهٔ اکیداً محدب بودن است. اگر M زیرفضایی دوری باشد، وجود و یکتایی تابع فرینی برای $\circ < p \leq ۱$ ثابت شده است. در مقالهٔ [۴] با پذیرش ضمنی وجود تابع فرینی ثابت شد که

---

1) Acta Mathematica

قضیه ۲. اگر $0 < p < \infty$ و $M = [\psi]$ یک زیرفضای دوری A^p باشد و اگر φ تابع فرینی متناظر با زیرفضای M باشد، آن‌گاه $M = [\varphi]$.

با استفاده از این قضیه می‌توان حکم مشابهی برای زیرفضاهای صفربنیاد در A^p ثابت کرد:

قضیه ۳. اگر G مقسوم‌علیه صفر متناظر با یک صفرمجموعه در A^p و M زیرفضای ناوردای صفربنیاد متناظر باشد، آن‌گاه $M = [G]$.

برای مشاهدهٔ اثباتی مستقیم از این حکم، نگاه کنید به مقالهٔ [۳] از نویسندهٔ حاضر.

تبصره پایانی. مباحث ارائه شده در این مقاله بخش بسیار کوچکی از نظریهٔ فضاهای برگمن با رهیافت نظریهٔ عملگرها بود. برای آشنایی با سایر موضوع‌های مرتبط، و همچنین آشنایی با رهیافت مبتنی بر نظریهٔ توابع، خواننده را به [۱۰] و [۱٦] ارجاع می‌دهیم.

مراجع

[1] Abkar, A., "Norm approximation by polynomials in some weighted Bergman spaces", *J. Funct. Anal.*, **191**(2002), 224-240.

[2] Abkar, A.,"Application of a Riesz-type formula to weighted Bergman spaces", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **131**(2003), 155-164.

[3] Abkar, A.,"A Beurling-type theorem in Bergman spaces", *Turk. J. Math.*, **35**(2011), 711-716.

[4] Aleman, A., Richter, S., Sundberg, C., "Beurling's theorem for the Bergman space", *Acta Math.*, **177**(1996), 275-310.

[5] Apostol, C., Bercovici, H., Foias, C., Pearcy, C., "Invariant subspaces, dilation theory, and the structure of the predual of dual algebras, I", *J. Funct. Anal.*, **63**(1985), 369-404.

[6] Beurling, A., "On two problems concerning linear transformations in Hilbert space", *Acta Math.*, **81**(1949), 239-255.

[7] Bourdon, P., "Cellular-indecomposable operators and Beurling's theorem", *Michigan Math. J.*, **33**(1986), 187-193.

[8] Carleson, L., "An interpolation problem for bounded analytic functions", *Amer. J. Math.*, **80**(1985), 921-930.

[9] Duren, P. L., *Theory of H^p spaces*, Academic Press, New York, 1970.

[10] Duren, P. L., Schuster, A., *Bergman spaces*, American Mathematical Society, 2004.

[11] Duren, P., Khavinson, D., Shapiro, H., Sundberg, C., "Contractive Zero- divisors in Bergman spaces", *Pacific J. Math.*, **157**(1993), 37-56.

[12] Duren, P., Khavinson, D., Shapiro, H., Sundberg, C., "Invariant subspaces in Bergman spaces and the biharmonic equation",*Michigan Math. J.*, **41**(1994), 247-259.

[13] Hedenmalm, H., "A factorization theorem for square area-integrable analytic functions", *J. Reine Angew. Math.*, **422**(1991), 45-68.

[14] Hedenmalm, H., "A factoring theorem for the Bergman space",*Bull. London Math. Soc.*, **26**(1994), 113-126.

[15] Hedenmalm, H., "An invariant subspace of the Bergman space having the codimension two property", *J. Reine Angew. Math.*, **443**(1993), 1-9.

[16] Hedenmalm, H., Korenblum, B., Zhu, K., *Theory of Bergman spaces*, Springer, New York, 2000.

[17] Hedenmalm, H., Richter, S., Seip, K., "Interpolating sequences and invariant subspaces of given index in the Bergman spaces", *J. Reine Angew. Math.*, **477**(1996), 13-30.

[18] Janas, J., "A note on invariant subspaces under multiplication by z in Bergman spaces", *Proc. Roy. Irish Acad.*, **83A**(1983), 157-164.

[19] Korenblum, B., "Outer functions and cyclic elements in Bergman spaces", *J. Funct. Anal.*, **115**(1993), 104-118.

[20] Shapiro, H. S., Shields, A. L., "On some interpolation problems for analytic functions", *Amer. J. Math.*, **83**(1961), 513-532.

[21] Seip, K., "Regular sets of sampling and interpolation for weighted Bergman spaces", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **117**(1993), 213-220.

[22] Seip, K., "Beurling type density theorems in the unit disk", *Invent. Math.*, **113**(1994), 21-39.

علی آبکار
قزوین، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)– صندوق پستی ۲۸۸
abkar@sci.ikiu.ac.ir

فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۳ (پاییز ۱۳۹۲) صص. ۵۵ تا ۷۱

درون جبری (نسبی) در فضاهای برداری

الهام کیانی و مجید سلیمانی دامنه

چکیده

در فضاهای برداری لزوماً نمی‌توان از مفهوم همسایگی صحبت کرد و لذا درون توپولوژیکی در این فضاها معنایی ندارد. به همین دلیل، در فضاهای برداری، مفاهیمی مانند درون جبری [1] و درون جبری نسبی [2] جایگزین مفهوم درون توپولوژیکی می‌شوند. در این مقاله، برخی خواص پایه‌ای این درون‌های تعمیم‌یافته را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. علاوه بر مطالعهٔ خواص این تعاریف جبری، رابطهٔ بین آن‌ها و برخی مفاهیم توپولوژیکی را بررسی می‌نماییم. با توجه به این‌که مخروط‌ها نقش مهمی در بهینه‌سازی و آنالیز محدب ایفا می‌کنند، یکی از اهداف اصلی این مقاله، مرور ویژگی‌های درون جبری (نسبی) مخروط‌هاست. همچنین مثال‌هایی برای روشن‌تر شدن مباحث این نوشتار آورده‌ایم. سرانجام، به کاربرد این مفاهیم جبری در بهینه‌سازی برداری پرداخته‌ایم.

واژه‌های کلیدی: فضاهای برداری، درون جبری (نسبی)، تحدب، بهینه‌سازی.

۱. مقدمه

اگر X یک فضای توپولوژیک باشد و $S \subseteq X$، نقطهٔ $x \in S$ را نقطهٔ درونی مجموعهٔ S می‌نامیم اگر یک همسایگی از x مشمول در S وجود داشته باشد. تاکنون قضایا و مسائل مهمی در فضاهای توپولوژیک به‌کمک مفهوم درون توپولوژیکی بیان و اثبات شده‌اند. با توجه به این که فضاهای برداری رده‌ای وسیع‌تر از فضاهای برداری توپولوژیک هستند، طبیعی است که بتوان دستهٔ وسیع‌تری

1) Algebraic interior 2) Relative algebraic interior

از مسائل را در این فضاها مورد مطالعه قرار داد. چون در این فضاها هیچ توپولوژیی در نظر گرفته نمی‌شود، باید مفهوم جدیدی جایگزین مفهوم درون توپولوژیکی گردد. درون جبری و درون جبری نسبی که به‌صورت کاملاً جبری و بدون استفاده از مفاهیم توپولوژیکی تعریف می‌شوند، می‌توانند جایگزین مناسبی برای درون توپولوژیکی در فضاهای برداری باشند.

پس از آن‌که مفهوم درون جبری معرفی گردید، برخی خواص و کاربردهای آن توسط محققین متعددی مورد مطالعه قرار گرفت. به‌عنوان مثال، در دههٔ هشتاد میلادی در شاخهٔ بهینه‌سازی به‌کمک مفهوم درون جبری مخروط‌های محدب، برخی نتایج و قضایا از فضاهای توپولوژیک به فضاهای برداری تعمیم داده شدند. مثال‌هایی وجود دارد که نشان می‌دهند ممکن است درون جبری یک مجموعهٔ محدب تهی باشد (مثال ۴ را ببینید). برای غلبه بر این مشکل، شی[۱]، هو[۲] و منگ[۳] در [۱۲] و [۱۶] مفهوم درون جبری نسبی را به‌عنوان تعمیمی از درون جبری معرفی کردند. اهمیت این تعریف از آن جهت است که درون جبری، زیرمجموعهٔ درون جبری نسبی است و در بسیاری از مواردی که درون جبری تهی است با در نظر گرفتن درون جبری نسبی می‌توان مشکل را حل نمود (مثال ۴ را ببینید).

در سال‌های اخیر، از این مفاهیم در بهینه‌سازی برداری استفاده‌های فراوانی شده است. آدان[۴] و نووو[۵] در [۲] و [۳] مفاهیم کارایی سره و کارایی ضعیف را با استفاده از مفاهیم درون جبری و درون جبری نسبی در فضاهای برداری بیان کرده‌اند. همچنین به‌کمک این مفاهیم، برخی قضایای جداسازی را در فضاهای برداری بیان و اثبات نموده‌اند. هرناندز[۶] و همکارانش در [۱۰] مفهوم نگاشت مجموعه ــ مقدار زیرشبه‌محدب را معرفی می‌کنند و به‌کمک این مفهوم و درون جبری نسبی شرایط بهینگی و قاعدهٔ ضرایب لاگرانژ را به‌دست می‌آورند.

در این مقاله، درون جبری و درون جبری نسبی را تعریف می‌کنیم و رابطهٔ بین آن‌ها و درون توپولوژیکی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. سپس برخی خواص اساسی آن‌ها را بیان و اثبات می‌نماییم. خواص بیشتر و کاربردهای این مفاهیم را می‌توان در مراجع [۲]، [۳] و [۱۷] یافت. علاوه بر این، به کاربردهای این مفاهیم جبری در بهینه‌سازی اشاره می‌کنیم. نقاط کارا، کارای ضعیف و کارای سرهٔ برداری را معرفی کرده، برخی شرایط لازم و کافی برای تشخیص نقاط کارای ضعیف و کارای سره برداری را در قالب قضایایی بیان می‌کنیم.

معمولاً برای مرتب کردن فضاهای برداری از مخروط‌ها استفاده می‌شود. در این مقاله، با در نظر گرفتن مخروط K از ترتیب زیر استفاده می‌کنیم:

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in K.$$

1) Shi 2) Hu 3) Meng 4) Adan 5) Novo 6) Hernandez

در سراسر این مقاله، X را یک فضای برداری حقیقی در نظر می‌گیریم. $A \subseteq X$ رامخروط غیربدیهی می‌نامیم اگر

$$\{\circ\} \neq A \neq X \quad \& \quad \alpha A \subseteq A\,, \quad \forall \alpha \geq \circ.$$

مجموعهٔ A را محدب گوییم اگر برای هر $a, b \in A$ داشته باشم $[a, b] \subseteq A$. برای $\alpha \in (\circ, ۱)$، مجموعهٔ A راα ـ محدب گوییم در صورتی که

$$a, b \in A \;\Rightarrow\; \alpha a + (۱ - \alpha) b \in A.$$

اگر $\alpha \in (\circ, ۱)$ وجود داشته باشد به‌طوری که A، α ـ محدب باشد، آن‌گاه A را تقریباً محدب[۱] گوییم.

تعریف ۱. ([۴]) مخروط تولید شده توسط مجموعهٔ A مجموعهٔ بردارهای αa است که $\alpha \geq \circ$ و $a \in A$. غلاف محدب A مجموعهٔ ترکیب‌های خطی محدب تعداد متناهی از اعضای A است. غلاف آفین A مجموعهٔ ترکیب‌های خطی تعداد متناهی از اعضای A است به‌طوری که مجموع ضرایب برابر با ۱ باشد. پوستهٔ خطی A مجموعه ترکیب‌های خطی تعداد متناهی از اعضای A است. این‌ها را به‌ترتیب با $\mathrm{cone}(A)$، $\mathrm{conv}(A)$، $\mathrm{aff}(A)$ و $\mathrm{span}(A)$ نمایش می‌دهیم. همچنین $L(A) = \mathrm{span}(A - A)$.

تعریف ۲. ([۳]) مخروط K را نوکدار گوییم هرگاه $K \cap (-K) = \{\circ\}$.

تعریف ۳. ([۳]) درون جبری و درون جبری نسبی مجموعهٔ $A \subseteq X$ به‌ترتیب، عبارت است از

$$\mathrm{cor}(A) = \{x \in A \;:\; \forall x' \in X \;,\; \exists \lambda' > \circ \;;\; \forall \lambda \in [\circ, \lambda'] \;,\; x + \lambda x' \in A\},$$
$$\mathrm{icr}(A) = \{x \in A \;:\; \forall x' \in L(A) \;,\; \exists \lambda' > \circ \;;\; \forall \lambda \in [\circ, \lambda'] \;,\; x + \lambda x' \in A\}.$$

اگر $\mathrm{cor}(A) \neq \emptyset$، A را توپر[۲] و اگر $\mathrm{icr}(A) \neq \emptyset$، A را به‌طور نسبی توپر[۳] می‌نامیم.

طبق لم ۱.۲ در [۱۷]، برای هر $x \in A$ داریم $aff(A) = x + L(A)$. لذا می‌توان درون جبری نسبی مجموعهٔ A را به‌صورت زیر نیز تعریف کرد:

$$\mathrm{icr}(A) = \{x \in A \;:\; \forall x' \in aff(A) - x \;,\; \exists \lambda' > \circ \;;\; \forall \lambda \in [\circ, \lambda'] \;,\; x + \lambda x' \in A\}.$$

اگر $\circ \in A$، آن‌گاه $L(A) = \mathrm{aff}(A)$. لذا با فرض $\circ \in A$ داریم

$$\mathrm{icr}(A) = \{x \in A \;:\; \forall x' \in \mathrm{aff}(A) \;,\; \exists \lambda' > \circ \;;\; \forall \lambda \in [\circ, \lambda'] \;,\; x + \lambda x' \in A\}.$$

در برخی از مقالاتی که به مطالعهٔ icr پرداخته‌اند، به‌جای $L(A)$ در تعریف این مفهوم، از $\mathrm{aff}(A)$ استفاده شده است. استفاده از $\mathrm{aff}(A)$ می‌تواند منجر به نتایجی متفاوت با آنچه که در این مقاله به آن‌ها پرداخته‌ایم، گردد ([۵] را ببینید).

1) Nearly convex 2) Solid 3) Relativly solid

۲. خواص درون جبری و درون جبری نسبی

به‌طور کلی برای مجموعهٔ دلخواه A، $\mathrm{cor}(A) \subseteq \mathrm{icr}(A) \subseteq A$. در مثال زیر نشان می‌دهیم که رابطهٔ $\mathrm{cor}(A) \subseteq \mathrm{icr}(A)$ می‌تواند اکید باشد. در مثال ۴، $\mathrm{ri}(A)$ درون نسبی A است. $x_\circ \in \mathrm{ri}(A)$ هرگاه یک همسایگی مبدأ مانند U وجود داشته باشد به‌طوری که $(x_\circ + U) \cap \mathrm{aff}(A) \subseteq A$.

مثال ۴. اگر A را پاره‌خط واصلِ دو نقطهٔ a و b در فضای $\mathbb{R}^۲$ در نظر بگیریم به‌طوری که $\circ \in A$، آن‌گاه $L(A) = \mathrm{aff}(A)$. از طرفی، $\mathrm{aff}(A)$ خط گذرنده از a و b است. بنابراین داریم

$$\mathrm{icr}(A) = \{\lambda a + (۱-\lambda) b \ : \ \lambda \in (\circ, ۱)\} = A \backslash \{a, b\}.$$

یعنی درون جبری نسبی مجموعهٔ A برابر است با پاره‌خط واصلِ دو نقطهٔ a و b به‌جز نقاط انتهایی. اما درون جبری مجموعهٔ A تهی است، زیرا برای هر $x' \in X \backslash \mathrm{aff}(A)$ نمی‌توان $\lambda' > \circ$ پیدا کرد که $x + \lambda x' \in A$ برای هر $\lambda \in (\circ, \lambda']$. بنابراین $\mathrm{cor}(A) = \emptyset$ و لذا $\mathrm{cor}(A) \neq \mathrm{icr}(A)$. در اینجا، از تعریف درون جبری واضح است که $\mathrm{ri}(A) = \mathrm{icr}(A)$ و لذا $\mathrm{ri}(A) \neq \mathrm{cor}(A)$. همچنین $\mathrm{int}(A) = \emptyset$. بنابراین $\mathrm{ri}(A) \neq \mathrm{int}(A)$ و $\mathrm{icr}(A) \neq \mathrm{int}(A)$.

قضایای ۵ و ٦ به ارتباط بین درون جبری (نسبی) و درون (نسبی) در فضاهای توپولوژیک می‌پردازند. این دو قضیه نشان می‌دهند که در فضاهای برداری توپولوژیک، اگر درون (نسبی) تهی باشد، ممکن است بتوان با استفاده از درون جبری (نسبی)، مشکل را برطرف نمود.

نتیجه‌ای مشابه قضیهٔ ۵ در فصل اولِ [۵] دیده می‌شود، با این تفاوت که در [۵] در تعریف icr از $\mathrm{aff}(A)$ به‌جای $L(A)$ استفاده شده است و لذا اثبات‌ها متفاوت هستند.

قضیه ۵. اگر X یک فضای برداری توپولوژیک باشد و $A \subseteq X$، آن‌گاه $\mathrm{ri}(A) \subseteq \mathrm{icr}(A)$.

برهان. فرض کنید $x_\circ \in ri(A)$. همسایگی مانند U از صفر وجود دارد که

$$(x_\circ + U) \cap \mathrm{aff}(A) \subseteq A.$$

طبق قضیهٔ ۱۴.۱ در [۱۵]، U شامل همسایگی متعادلی از صفر است. برای سادگی فرض می‌کنیم U همسایگی متعادلی از صفر باشد. باید ثابت کنیم

$$\forall x' \in L(A) = \mathrm{aff}(A) - x_\circ \ , \ \exists \lambda' > \circ \ ; \ x_\circ + \lambda x' \in A \quad \forall \lambda \in [\circ, \lambda'].$$

به این منظور، کافی است نشان دهیم $\lambda' > \circ$ وجود دارد که

$$x_\circ + \lambda x' \in (x_\circ + U) \cap \mathrm{aff}(A) \qquad \forall \lambda \in [\circ, \lambda'].$$

از قضیهٔ ۱۵.۱ در [۱۵] می‌دانیم $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nU$ و چون $x' \in X$، داریم

$$\exists n_\circ \in \mathbb{N} \ ; \ x' \in n_\circ U.$$

اگر قرار دهیم $\lambda' = \frac{1}{n_\circ}$، آن‌گاه $\lambda n_\circ \leq 1$ برای هر $\lambda \in [\circ, \lambda']$. بنابراین با توجه به متعادل بودن U داریم $\lambda x' \in \lambda n_\circ U \subseteq U$ و در نتیجه $\lambda x' \in U$. از این‌رو $x_\circ + \lambda x' \in x_\circ + U$. از طرفی، چون $x' \in \mathrm{aff}(A) - x_\circ$، بردارهای $a_i \in A$ و اعداد حقیقی λ_i، n، $i = 1, \ldots, n$ وجود دارند به‌طوری که $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ و $x' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i - x_\circ$. در نتیجه

$$x_\circ + \lambda x' = \sum_{i=1}^{n} \lambda \lambda_i a_i - \lambda x_\circ + x_\circ \in \mathrm{aff}(A),$$

زیرا $\lambda(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i - 1) + 1 = 1$ و $x_\circ, a_i \in A$ برای $i = 1, 2, \ldots, n$. پس $x_\circ + \lambda x' \in \mathrm{aff}(A)$ و لذا

$$x_\circ + \lambda x' \in (x_\circ + U) \cap \mathrm{aff}(A).$$

به این ترتیب، $x_\circ + \lambda x' \in A$ و این یعنی $x_\circ \in \mathrm{icr}(A)$. پس نشان داده‌ایم که $\mathrm{ri}(A) \subseteq \mathrm{icr}(A)$.

قضیه ٦. فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیک باشد و $A \subseteq X$. در این صورت

الف) $\mathrm{int}(A) \subseteq \mathrm{cor}(A)$؛

ب) اگر A محدب باشد و $\mathrm{int}(A) \neq \emptyset$، آن‌گاه $\mathrm{int}(A) = \mathrm{cor}(A)$.

اثبات قضیهٔ ٦ را می‌توان در فصل اول [۵] ملاحظه نمود. به‌علاوه، اثباتی با جزئیات بیشتر در [۱۴] آورده شده است.

اگر X یک فضای متناهی ـ بعد و $A \subseteq X$ مجموعه‌ای محدب باشد، آن‌گاه $\mathrm{ri}(A) = \mathrm{icr}(A)$ و $\mathrm{int}(A) = \mathrm{cor}(A)$ ([۸]). مثال ۷ وضعیتی را نشان می‌دهد که در یک فضای نامتناهی ـ بعد هر چهار مجموعهٔ icr، ri، cor و int تهی هستند.

مثال ۷ ([۸]). فرض کنید $p \in [1, +\infty)$ دلخواه باشد. فضای باناخ $l^p = l^p(\mathbb{N})$ متشکل از دنباله‌های اعداد حقیقی $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ را که $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ با نرم $\|x\| = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ در نظر بگیرید. می‌توان نشان داد

$$\mathrm{int}(l^p_+) = \mathrm{ri}(l^p_+) = \mathrm{icr}(l^p_+) = \mathrm{cor}(l^p_+) = \emptyset$$

که در آن، l^p_+ مخروط مثبت l^p است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$l^p_+ = \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^p \ : \quad x_n > \circ \ , \ \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

مثال‌های ۸ و ۹ تفاوت بین cor و int را نشان می‌دهند و مثال ۱۰ که در یک فضای نامتناهی ـ بعد طراحی شده است، تفاوت بین ri و icr را روشن می‌سازد.

مثال ۸. اگر $X = \mathbb{R}^2$ و $A = \{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 < 1\} \backslash \{(x, y) \ : \ x > \circ \ , \ y = x^2\}$، آن‌گاه $\mathrm{cor}(A) = A$ در حالی که $\mathrm{int}(A) = A \backslash \{\circ\}$. بنابراین $\mathrm{int}(A) \neq \mathrm{cor}(A)$.

مثال ۹. فرض کنید $X=\mathbb{R}^۲$ و $A=\{(x_۱,x_۲)\ :\ x_۲\geq x_۱^۲\}\cup\{(x_۱,x_۲)\ :\ x_۲\leq ۰\}$. در این صورت، $۰\in\operatorname{cor}(A)$ اما $۰\notin\operatorname{int}(A)$. لذا $\operatorname{int}(A)\neq\operatorname{cor}(A)$.

مثال ۱۰. فرض کنید X فضای همهٔ توابع حقیقی‌مقدار مشتق‌پذیر روی $[۰,۱]$ با نرم

$$\|f\|=\sup_{x\in[۰,۱]}|f(x)|$$

باشد. تابع $T:X\to\mathbb{R}$ را به‌صورت $T(f)=f'(۰)$ تعریف می‌کنیم. T تابعی خطی است اما پیوسته نیست ([۱۴]). مجموعهٔ A را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A=\{f\in X\ :\ T(f)=f'(۰)>۰\}.$$

$f\in A$ و $f_۰\in L(A)$ را در نظر بگیرید. اگر $f_۰'(۰)\geq ۰$، آن‌گاه برای هر $\lambda\geq ۰$ داریم

$$f'(۰)+\lambda f_۰'(۰)>۰.$$

بنابراین $f+\lambda f_۰\in A$ برای هر $\lambda\geq ۰$. در حالت $f_۰'(۰)<۰$ با در نظر گرفتن $\lambda'\in(۰,\ \frac{-f'(۰)}{f_۰'(۰)})$ به‌دست می‌آوریم

$$f'(۰)+\lambda f_۰'(۰)>۰\ ,\quad \forall\lambda\in[۰,\lambda']$$

و لذا $f\in\operatorname{icr}(A)$. در نتیجه $\operatorname{icr}(A)=A$. اما اگر تابع $\overline{f}:[۰,۱]\to\mathbb{R}$ را به‌صورت $\overline{f}(x)=x$ تعریف کنیم، آن‌گاه $\overline{f}\in A$ و $\overline{f}\notin ri(A)$، زیرا در غیر این صورت، گوی $B_\varepsilon(\overline{f})$ به مرکز $\overline{f}$ و شعاع $\varepsilon>۰$ وجود دارد که

$$B_\varepsilon(\overline{f})\cap\operatorname{aff}(A)\subseteq A.$$

اکنون اگر تعریف کنیم $f_\varepsilon(x)=\frac{x}{۲}-\frac{\varepsilon}{۲}\sin(nx)+\frac{x}{۲}$ که در آن، $n>\frac{۲}{\varepsilon}$، آن‌گاه داریم

$$f_\varepsilon\in L(A)+\frac{\overline{f}}{۲}=\operatorname{aff}(A).$$

از طرفی، $\|f_\varepsilon-\overline{f}\|<\varepsilon$. بنابراین $f_\varepsilon\in B_\varepsilon(\overline{f})\cap\operatorname{aff}(A)$ در حالی که

$$f_\varepsilon'(۰)=۱-\frac{n\varepsilon}{۲}(\cos(۰))<۰$$

و این با $f_\varepsilon(x)\in A$ تناقض دارد. لذا $\overline{f}\notin\operatorname{ri}(A)$. پس $\operatorname{ri}(A)\neq A$ و از این‌رو $\operatorname{ri}(A)\neq\operatorname{icr}(A)$.

قضیهٔ زیر به برخی خواص درون جبری نسبی مخروط‌ها در فضاهای برداری می‌پردازد.

قضیه ۱۱. ([۹]) اگر K مخروطی محدب با درون جبری نسبی ناتهی ($icr(K)\neq\emptyset$) باشد، آن‌گاه $\operatorname{icr}(K)\cup\{۰\}$ نیز مخروطی محدب است و

i) $\operatorname{icr}(K)+K=\operatorname{icr}(K)$؛

ii) $\operatorname{icr}(\operatorname{icr}(K))=\operatorname{icr}(\operatorname{icr}(K)\cup\{۰\})=\operatorname{icr}(K)$.

برهان. اگر $x_\circ \in \mathrm{icr}(K)$ و $\alpha > \circ$ دلخواه باشند، برای اثبات مخروط بودنِ $\mathrm{icr}(K) \cup \{\circ\}$ کافی است ثابت کنیم که

$$\alpha x_\circ \in \mathrm{icr}(K) \cup \{\circ\}.$$

بنابر تعریفِ $\mathrm{icr}(K)$ به‌ازای هر $x' \in L(K)$ عدد $\lambda' > \circ$ وجود دارد به‌طوری که برای هر $\lambda \in [\circ, \lambda']$ داریم $x_\circ + \lambda x' \in K$. چون K مخروط است، $\alpha(x_\circ + \lambda x') \in K$. اگر قرار دهیم $\lambda'' = \alpha\lambda'$، آن‌گاه $\lambda'' > \circ$ و برای هر $\lambda \in [\circ, \lambda'']$ داریم $\frac{\lambda}{\alpha} \in [\circ, \lambda']$. لذا

$$\alpha x_\circ + \lambda x' = \alpha(x_\circ + \frac{\lambda}{\alpha} x') \in K\ ,\ \ \forall x' \in L(K)\ ,\ \ \forall \lambda \in [\circ, \lambda'']$$

و در نتیجه $\alpha x_\circ \in \mathrm{icr}(K)$. بنابراین $\mathrm{icr}(K) \cup \{\circ\}$ مخروط است. برای اثبات محدب بودن این مجموعه، بردارهای $x_۱, x_۲ \in \mathrm{icr}(K) \cup \{\circ\}$ و $\theta \in (\circ, ۱)$ را در نظر می‌گیریم. اگر $x_۱, x_۲ \in \mathrm{icr}(K)$، داریم

$$\begin{aligned}
&x_۱ \in \mathrm{icr}(K) \ \Rightarrow\ \forall x \in L(K)\ \ \exists \lambda'_۱ > \circ\ ;\ \ x_۱ + \lambda_۱ x \in K \qquad \forall \lambda_۱ \in [\circ, \lambda'_۱],\\
&x_۲ \in \mathrm{icr}(K) \ \Rightarrow\ \forall x \in L(K)\ \ \exists \lambda'_۲ > \circ\ ;\ \ x_۲ + \lambda_۲ x \in K \qquad \forall \lambda_۲ \in [\circ, \lambda'_۲].
\end{aligned}$$

با در نظر گرفتن $x \in L(K)$ و قرار دادن $\lambda'' = \min\{\lambda'_۱, \lambda'_۲\}$، چون K مخروطی محدب است، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
&\theta(x_۱ + \lambda x) + (۱ - \theta)(x_۲ + \lambda x) \in K\ ,\ \ \forall \lambda \in [\circ, \lambda'']\\
&\Rightarrow\ \forall x \in L(K)\ ,\ \ \exists \lambda'' > \circ\ ;\ \ \theta x_۱ + (۱ - \theta) x_۲ + \lambda x \in K\ ,\ \ \forall \lambda \in [\circ, \lambda'']\\
&\Rightarrow\ \theta x_۱ + (۱ - \theta) x_۲ \in \mathrm{icr}(K).
\end{aligned}$$

اگر $x_۱ = \circ$ یا $x_۲ = \circ$، آن‌گاه $\theta x_۱ + (۱ - \theta) x_۲ \in \mathrm{icr}(K) \cup \{\circ\}$، زیرا $\mathrm{icr}(K) \cup \{\circ\}$ مخروط است. بنابراین $\mathrm{icr}(K) \cup \{\circ\}$ محدب است. اکنون (i) را ثابت می‌کنیم. چون K یک مخروط است و $\circ \in K$، پس

$$\mathrm{icr}(K) = \mathrm{icr}(K) + \{\circ\} \subseteq \mathrm{icr}(K) + K.$$

بنابراین کافی است ثابت کنیم $\mathrm{icr}(K) + K \subseteq \mathrm{icr}(K)$. بدین منظور، $x \in \mathrm{icr}(K) + K$ را در نظر می‌گیریم. داریم

$$x \in \mathrm{icr}(K) + K \ \Rightarrow\ \exists (y \in \mathrm{icr}(K)\ ,\ k \in K)\ \ ;\ \ x = y + k.$$

از این‌که $y \in icr(K)$ نتیجه می‌گیریم

$$\forall z \in L(K)\ \ ,\ \ \exists \lambda' > \circ\ \ ;\ \ y + \lambda z \in K\ \ ,\ \ \forall \lambda \in [\circ, \lambda'].$$

چون K مخروط محدب است، $y + \lambda z + k \in K$. پس $x + \lambda z \in K$ و لذا

$$\forall z \in L(K)\ ,\ \ \exists \lambda' > \circ\ ;\ \ x + \lambda z \in K\ ,\ \ \forall \lambda \in [\circ, \lambda'].$$

بنابراین $x \in \operatorname{icr}(K)$. پس $\operatorname{icr}(K) + K \subseteq \operatorname{icr}(K)$ و در نتیجه $\operatorname{icr}(K) + K = \operatorname{icr}(K)$. حال (ii) را ثابت می‌کنیم. واضح است که $\operatorname{icr}(K) \subseteq \operatorname{icr}(K) \cup \{\circ\}$ لذا

$$\operatorname{icr}(\operatorname{icr}(K)) \subseteq \operatorname{icr}(\operatorname{icr}(K) \cup \{\circ\}).$$

همچنین $\operatorname{icr}(K) \cup \{\circ\} \subseteq K$ و از این‌رو

$$\operatorname{icr}(\operatorname{icr}(K) \cup \{\circ\}) \subseteq \operatorname{icr}(K).$$

در نتیجه

$$\operatorname{icr}(\operatorname{icr}(K)) \subseteq icr(icr(K) \cup \{\circ\}) \subseteq \operatorname{icr}(K) \qquad (۱)$$

بنابراین کافی است ثابت کنیم

$$\operatorname{icr}(K) \subseteq \operatorname{icr}(\operatorname{icr}(K)).$$

بدین منظور، $x \in \operatorname{icr}(K)$ را در نظر می‌گیریم. داریم

$$\forall x' \in L(K) \quad , \quad \exists \lambda' > \circ \quad ; \quad x + \lambda x' \in K \quad , \quad \forall \lambda \in [\circ, \lambda']. \qquad (۲)$$

چون K مخروط است، برای هر $\lambda \in [\circ, \frac{\lambda'}{۲}]$ داریم $\frac{x}{۲} + \lambda x' \in K$ و در نتیجه $\frac{x}{۲} \in \operatorname{icr}(K)$. حال از قسمت (i) نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{x}{۲} + \frac{x}{۲} + \lambda x' \in \operatorname{icr}(K) + K = \operatorname{icr}(K).$$

بنابراین $x + \lambda x' \in \operatorname{icr}(K)$. از طرفی، اگر $x' \in L(\operatorname{icr}(K))$ باشد، آن‌گاه چون $\operatorname{icr}(K) \subseteq K$ پس $L(\operatorname{icr}(K)) \subseteq L(K)$ و لذا $x' \in L(K)$. بنابر (۲) $x \in \operatorname{icr}(\operatorname{icr}(K))$ و در نتیجه

$$\operatorname{icr}(K) \subseteq \operatorname{icr}(\operatorname{icr}(K)).$$

از این و (۱) نتیجه می‌شود $\operatorname{icr}(\operatorname{icr}(K)) = \operatorname{icr}(\operatorname{icr}(K) \cup \{\circ\}) = \operatorname{icr}(K)$.

به روش مشابه ثابت می‌شود که اگر K مخروطی محدب باشد و $\operatorname{cor}(K) \neq \emptyset$، آن‌گاه $\operatorname{cor}(K) \cup \{\circ\}$ نیز مخروطی محدب است و $\operatorname{cor}(\operatorname{cor}(K)) = \operatorname{cor}(K)$.

در لم زیر، درون جبری نسبی مجموع دو مخروط محدب را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

لم ۱۲. ([۱]) فرض کنید S و T مخروط‌هایی محدب در فضای برداری X باشند که درون جبری نسبی آن‌ها ناتهی است. در این صورت،

$$\operatorname{icr}(S + T) = \operatorname{icr}(S) + \operatorname{icr}(T) = \operatorname{icr}(\operatorname{icr}(S) \cup \{\circ\} + T).$$

برهان. به‌سادگی می‌توان نشان داد $\operatorname{aff}(S+T)=\operatorname{aff}(S)+\operatorname{aff}(T)$. چون

$$T\subseteq T+S\,,\quad S\subseteq S+T$$

بنابراین اگر $s\in\operatorname{icr}(S)$، $t\in\operatorname{icr}(T)$ و $v=v_1+v_2\in\operatorname{aff}(S+T)$ که در آن، $v_1\in\operatorname{aff}(S)$ و $v_2\in\operatorname{aff}(T)$، آن‌گاه با توجه به تعریف، $\lambda'_2>0$ و $\lambda'_1>0$ وجود دارند به‌طوری که

$$s+\lambda_1v_1\in S\,,\ \ t+\lambda_2v_2\in T\,,\ \ \forall\lambda_1\in[0,\lambda'_1]\,,\ \ \forall\lambda_2\in[0,\lambda'_2].$$

قرار می‌دهیم $\lambda'_3=\min\{\lambda'_1,\lambda'_2\}$. در این صورت،

$$s+t+\lambda_3(v_1+v_2)\in S+T\ \ ,\ \ \forall\lambda_3\in[0,\lambda'_3]$$

و لذا $s+t\in\operatorname{icr}(S+T)$. از اینجا به‌دست می‌آوریم $\operatorname{icr}(S)+\operatorname{icr}(T)\subseteq\operatorname{icr}(S+T)$. برعکس، $s+t\in\operatorname{icr}(S+T)$ را که در آن، $s\in S$ و $t\in T$ در نظر می‌گیریم. همچنین فرض می‌کنیم $s'\in\operatorname{icr}(S)$. چون $\operatorname{icr}(S+T)\cup\{0\}$ مخروط است، داریم $\frac{s+t}{2}\in\operatorname{icr}(S+T)$. از طرف دیگر، $-s'\in L(S+T)$. لذا $k'>0$ وجود دارد که

$$\frac{s+t}{2}+k(-s')\in S+T\ \ ,\ \ \forall k\in[0,k'].$$

بنابر قسمت (i) قضیهٔ ۱۱،

$$\frac{s+t}{2}\in S+T+\operatorname{icr}(S)\subseteq\operatorname{icr}(S)+T.$$

به‌طور مشابه می‌توان نشان داد $\frac{(s+t)}{2}\in S+\operatorname{icr}(T)$. بنابراین

$$(s+t)\in\operatorname{icr}(S)+T+S+\operatorname{icr}(T)=\operatorname{icr}(S)+\operatorname{icr}(T)$$

و لذا $\operatorname{icr}(S+T)\subseteq\operatorname{icr}(S)+\operatorname{icr}(T)$. برای اثبات رابطهٔ دوم، به‌موجب قسمت (ii) قضیهٔ ۱۱، $\operatorname{icr}(\operatorname{icr}(S)\cup\{0\})=\operatorname{icr}(S)$. بنابراین از قسمت قبل نتیجه می‌گیریم

$$\operatorname{icr}((\operatorname{icr}(S)\cup\{0\})+T)=\operatorname{icr}(\operatorname{icr}(S)\cup\{0\})+\operatorname{icr}(T)=\operatorname{icr}(S)+\operatorname{icr}(T)=\operatorname{icr}(S+T).$$

در لم زیر، درون جبری نسبی حاصل‌ضرب دو مخروط محدب را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

لم ۱۳. ([۱۶]) اگر K_1 و K_2 دو مخروط محدب غیربدیهی در فضاهای برداری X و Z باشند که $\operatorname{icr}(K_1)\neq\emptyset$ و $\operatorname{icr}(K_2)\neq\emptyset$، آن‌گاه

$$\operatorname{icr}(K_1\times K_2)=\operatorname{icr}(K_1)\times\operatorname{icr}(K_2).$$

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم $\operatorname{icr}(K_1) \times \operatorname{icr}(K_2) \subseteq \operatorname{icr}(K_1 \times K_2)$. بدین منظور،

$$(k_1, k_2) \in \operatorname{icr}(K_1) \times \operatorname{icr}(K_2)$$

را در نظر می‌گیریم. واضح است که $(k_1, k_2) \in K_1 \times K_2$. اگر $(v_1, v_2) \in \operatorname{aff}(K_1 \times K_2)$، آن‌گاه

$$(v_1, v_2) \in \operatorname{aff}(K_1) \times \operatorname{aff}(K_2).$$

از این‌که $k_1 \in \operatorname{icr}(K_1)$ و $v_1 \in \operatorname{aff}(K_1)$، به‌دست می‌آوریم

$$\exists \lambda'_1 > 0 \ ; \ k_1 + \lambda v_1 \in K_1 \ , \ \forall \lambda \in [0, \lambda'_1].$$

و به‌طور مشابه، از این‌که $k_2 \in \operatorname{icr}(K_2)$ و $v_2 \in \operatorname{aff}(K_2)$ نتیجه می‌گیریم

$$\exists \lambda'_2 > 0 \ ; \ k_2 + \lambda v_2 \in K_2 \ , \ \forall \lambda \in [0, \lambda'_2].$$

اگر $\lambda'' = \min\{\lambda'_1, \lambda'_2\}$ انتخاب کنیم، آن‌گاه

$$(k_1, k_2) + \lambda(v_1, v_2) \in K_1 \times K_2 \quad , \ \forall \lambda \in [0, \lambda''],$$

و این یعنی $(k_1, k_2) \in icr(K_1 \times K_2)$. بنابراین $\operatorname{icr}(K_1) \times \operatorname{icr}(K_2) \subseteq \operatorname{icr}(K_1 \times K_2)$. حال نشان می‌دهیم $\operatorname{icr}(K_1 \times K_2) \subseteq \operatorname{icr}(K_1) \times \operatorname{icr}(K_2)$. چون $\operatorname{icr}(K_2) \neq \emptyset$ و $\operatorname{icr}(K_1) \neq \emptyset$ لذا $\operatorname{icr}(K_1 \times K_2) \neq \emptyset$. از این‌رو

$$(k_1, k_2) \in \operatorname{icr}(K_1 \times K_2)$$

را در نظر می‌گیریم. به‌وضوح $(k_1, k_2) \in K_1 \times K_2$. اگر

$$(v_1, v_2) \in \operatorname{aff}(K_1) \times \operatorname{aff}(K_2),$$

آن‌گاه $(v_1, v_2) \in \operatorname{aff}(K_1 \times K_2)$. بنابراین $\lambda' > 0$ وجود دارد که

$$(k_1, k_2) + \lambda(v_1, v_2) \in K_1 \times K_2 \quad , \ \forall \lambda \in [0, \lambda'].$$

در نتیجه $k_2 + \lambda v_2 \in K_2$ و $k_1 + \lambda v_1 \in K_1$. پس $(k_1, k_2) \in \operatorname{icr}(K_1) \times \operatorname{icr}(K_2)$.

قضیه ۱۴. ([۱۷]) اگر K یک مخروط نوکدار و غیربدیهی در X باشد، آن‌گاه $0 \notin \operatorname{icr}(K)$.

برهان. فرض کنیم $0 \in \operatorname{icr}(K)$. اگر $x' \in \operatorname{aff}(K)$، آن‌گاه با توجه به تعریفِ icr داریم $x' \in K$. بنابراین $\operatorname{aff}(K) \subseteq K$. از طرف دیگر، $K \subseteq \operatorname{aff}(K)$ و لذا $K = \operatorname{aff}(K)$. چون

$0 \in K$، پس $\mathrm{aff}(K) = \mathrm{span}(K)$. در واقع، از تعریفِ $\mathrm{span}(K)$ و $\mathrm{aff}(K)$ روشن است که $\mathrm{aff}(K) \subseteq \mathrm{span}(K)$. حال فرض می‌کنیم $x \in span(K)$. در این صورت

$$\exists(n \in \mathbb{N} \ , \ \ k_i \in K \ , \ \alpha_i \in \mathbb{R} \ \ i = 1, 2, ..., n) \ \ ; \ \ x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i k_i.$$

اگر قرار دهیم $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$، آن‌گاه

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i k_i + (1 - \alpha) 0$$

که در آن، $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i + (1 - \alpha) = 1$. لذا $x \in \mathrm{aff}(K)$ و بنابراین $\mathrm{span}(K) = aff(K) = K$.
همچنین چون K غیر بدیهی است، بردار ناصفرِ $k \in K$ وجود دارد. چون $\mathrm{span}(K) = K$، پس $-k \in \mathrm{span}(K) = K$ و این با نوکدار بودنِ K در تناقض است. به این ترتیب $0 \notin icr(K)$.

قضیه ۱۵. ([۴]) اگر A زیرمجموعه‌ای تقریباً محدب از X باشد، آن‌گاه $icr(A)$ محدب است.

برهان. ابتدا ثابت می‌کنیم

$$\forall(a \in \mathrm{icr}(A) \ \ , \ \ b \in A) \ \ , \ \ [a, b] \subseteq A.$$

داریم

$$a \in \mathrm{icr}(A) \subseteq A \ \ , \ \ b \in A \ \Rightarrow \ b - a \in L(A).$$

از طرفی، $a \in icr(A)$ و بنابراین

$$\exists \lambda' > 0 \ \ ; \ \ a + \lambda(b - a) \in A \ \ , \ \ \forall \lambda \in [0, \lambda'].$$

لذا

$$[a, a + \lambda'(b - a)] = [a \, , \lambda' b + (1 - \lambda')a] = [a, r] \subseteq A$$

که در آن، $r = \lambda' b + (1 - \lambda')a$. فرض می‌کنیم $0 < \lambda' < 1$ (زیرا در غیر این صورت $[a, b] \subseteq A$ و ادعا اثبات می‌شود). ثابت می‌کنیم $(r, b) \subseteq A$. بدین منظور، $m = \lambda_1 r + (1 - \lambda_1)b \in (r, b)$ را که $\lambda_1 \in (0, 1)$ در نظر می‌گیریم. داریم

$$m = \lambda_1(a + \lambda'(b - a)) + (1 - \lambda_1)b = \lambda_1(1 - \lambda')a + (1 - \lambda_1(1 - \lambda'))b.$$

چون $\lambda_2 \in (0, 1)$ وجود دارد به‌طوری که $m = \lambda_2 a + (1 - \lambda_2)b$ (در واقع، m روی پاره‌خط واصلِ a و b نیز قرار دارد)، پس

$$\lambda_1(1 - \lambda')a + (1 - \lambda_1(1 - \lambda'))b = \lambda_2 a + (1 - \lambda_2)b = m.$$

در نتیجه $\lambda_2 = \lambda_1(1-\lambda')$ و بنابراین $\lambda_1 > \lambda_2$. اگر مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی α را که A، α ـ محدب است با Θ نمایش دهیم، می‌توان نشان داد Θ در $[0,1]$ چگال است ([٦]). لذا

$$\exists \lambda_3 \in \Theta \cap [\lambda_2, \lambda_1].$$

بردار e را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$e = b + (\frac{\lambda_2}{\lambda_3})(a-b) = (\frac{\lambda_2}{\lambda_3})a + (1-(\frac{\lambda_2}{\lambda_3}))b.$$

داریم $e \in [a,r]$، زیرا $\lambda_1 \leq \lambda_3$. پس $(1-\lambda') = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \geq \frac{\lambda_2}{\lambda_3}$. لذا با توجه به تعریفِ $[a,r]$ داریم

$$e \in [a,r] \subseteq A.$$

در نتیجه از این که A، λ_3 ـ محدب است به‌دست می‌آوریم

$$m = b + \lambda_2(a-b) = b + \lambda_3(e-b) = \lambda_3 e + (1-\lambda_3)b \in A.$$

پس به‌طور خلاصه، تا اینجا ثابت کرده‌ایم

$$(a \in icr(A) \ \ , \ \ b \in A) \ \Rightarrow \ [a,b] \subseteq A.$$

حال اگر فرض کنیم $a, b \in icr(A)$ و $\lambda \in (0,1)$، آن‌گاه

$$\forall x \in L(A) \ \ , \ \ \exists \mu' > 0 \ \ ; \ \ a + \mu x \in A \ \ , \ \ \forall \mu \in [0, \mu'].$$

بنابر قسمت قبل،

$$\lambda b + (1-\lambda)(a+\mu x) \in A \ \ , \ \ \forall \mu \in [0,\mu'].$$

بنابراین $\lambda b + (1-\lambda)a + (1-\lambda)\mu x \in A$ که $\beta' = (1-\lambda)\mu' < (1-\lambda)\mu < 0$. در نتیجه

$$\lambda b + (1-\lambda)a + \beta x \in A, \forall \beta \in [0,\beta'] \Rightarrow \lambda b + (1-\lambda)a \in icr(A).$$

بنابراین $icr(A)$ محدب است.

با اثباتی مشابه اثبات لم ١٢، می‌توان نتیجه گرفت $\mathrm{icr}(K-M) = \mathrm{icr}(K) - \mathrm{icr}(M)$. به‌علاوه، می‌توان نشان داد لم‌های ١٢ و ١٣ و قضیهٔ ١۵ برای cor نیز برقرارند. خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند خواص و کاربردهای بیشتر درون جبری (نسبی) را در مراجع [١]، [٢]، [٣]، [۴] و [٩] مطالعه نماید.

٣. کاربرد در بهینه‌سازی

در ادامه، به کاربردهایی از درون جبری و درون جبری نسبی در بهینه‌سازی برداری می‌پردازیم. بدین منظور، ابتدا بستار برداری را تعریف می‌کنیم که جایگزین بستار توپولوژیکی در فضاهای توپولوژیک است.

تعریف ۱۶. ([۳]) اگر A یک زیرمجموعهٔ ناتهی از X باشد، بستار برداری[1] A را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$vcl(A) = \{b \in X \ : \ \exists x \in X \ ; \ \forall \lambda' > \circ \ , \ \exists \lambda \in \left(\circ, \lambda'\right] \ , \ b + \lambda x \in A\}.$$

A را بسته برداری می‌نامیم هرگاه $A = vcl(A)$. خواص بیشتر بستار برداری را می‌توان در [۱]، [۲]، [۳] و [۴] یافت.

تعریف ۱۷. ([۳]) دوگان جبری[2] X که با X' نشان می‌دهیم مجموعهٔ همهٔ توابع خطی از X به $\mathbb{R}$ است. برای زیرمجموعه‌ای دلخواه از X مانند A، دوگان مثبت A را با A^+ و دوگان اکیداً مثبت A را با A^{+s} نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A^+ = \{l \in X' \ : \ \langle l, a \rangle \geq \circ \ , \ \forall a \in A\},$$

$$A^{+s} = \{l \in X' \ : \ \langle l, a \rangle > \circ \ , \ \forall a \in A \backslash \{\circ\}\}$$

که در آن، $\langle l, a \rangle = l(a)$.

اکنون مسائل بهینه‌سازی برداری نامقید را معرفی و سپس تعاریف کارایی، کارایی ضعیف[3]، کارایی سره برداری هورویسز[4] ، و کارایی سره برداری بنسون[5] را بیان می‌کنیم. X و Y فضاهای برداری هستند که Y با مخروط K مرتب شده است. مسألهٔ بهینه‌سازی برداری نامقید زیر را در نظر بگیرید:

$$K - \min\{f(x) \ : x \in E\} \qquad (۳)$$

که $E \subset X$ یک زیر مجموعهٔ ناتهی است و $f : E \longrightarrow Y$.

تعریف ۱۸. [۳] نقطهٔ $x_\circ \in E$ را جواب کارا نسبت به K برای مسأله (۳) می‌نامیم اگر

$$\nexists \ x \in E \backslash \{x_\circ\} \qquad f(x_\circ) \in f(x) + K.$$

تعریف ۱۹. [۴] با فرض $icr(K) \neq \emptyset$، بردار $x_\circ \in E$ را جواب کارای ضعیف نسبت به K برای مسأله (۳) گوییم هرگاه

$$\nexists \ x \in E \backslash \{x_\circ\} \qquad f(x_\circ) \in f(x) + icr(K).$$

اکنون یک شرط لازم و کافی به منظور تشخیص نقاط کارای ضعیف بیان مینماییم. اثبات این قضیه را می‌توان در [۴] یافت.

---

1) Vector closure 2) Algebraic dual 3) Weak efficiency 4) Hurwicz vectorial proper efficiency 5) Benson vectorial proper efficiency

قضیه ۲۰. فرض کنید $\operatorname{icr}(K) \neq \emptyset$، $L(K) \neq K$ و $x_\circ \in E$.

(i) فرض کنید $\operatorname{vcl}(\operatorname{cone}(A)+K)$ محدب باشد و $\operatorname{icr}(\operatorname{vcl}(K)) \neq \emptyset$. مجموعهٔ

$$A = cone(f(E) - f(x_\circ)) + icr(K)$$

را در نظر بگیرید. اگر $L(A) \subseteq L(K)$ یا $\operatorname{vcl}(A) = A$ و $x_\circ$ جواب کارای ضعیف برای مسأله (۳) باشد، آن‌گاه $l \in K^+ \backslash \{\circ\}$ وجود دارد که روی $icr(K) \cup (f(E) - f(x_\circ))$ صفر نیست و $x_\circ$ جواب بهینه مسأله اسکالر $\min\{\langle lof, x\rangle \,:\, x \in E\}$ است.

(ii) اگر $l \in K^+ \backslash \{\circ\}$ وجود داشته باشد که روی $\operatorname{icr}(K)$ صفر نباشد و $x_\circ$ یک جواب بهینه برای مسألهٔ اسکالر $\min\{\langle lof, x\rangle \,:\, x \in E\}$ باشد، آن‌گاه $x_\circ$ جواب کارای ضعیف مسأله (۳) است.

تعریف ۲۱. ([۳]) $x_\circ \in E$ را جواب کارای سره برداری هورویسز (HuV) نسبت به K برای مسأله (۳) گوییم هرگاه

$$vcl(conv(cone((f(\Omega) - f(x_\circ)) \cup K))) \cap (-K) = \{\circ\}.$$

$x_\circ \in E$ را جواب کارای سره برداری بنسون (BeV) نامیم هرگاه

$$vcl(conv(cone(f(\Omega) - f(x_\circ) + K))) \cap (-K) = \{\circ\}$$

در ادامه، نقاط کارای سره برداری را به‌کمک اسکالرسازی مشخص می‌کنیم. معمولاً برای اثبات شرایط لازم، از محدب بودن تابع هدف استفاده می‌شود. در اینجا، از مفهوم شبه‌محدب برداری تعمیم‌یافته استفاده خواهیم کرد.

تعریف ۲۲. ([۳]) نگاشت $f : E \to Y$ در E نسبت به K، شبه‌محدب برداری تعمیم‌یافته (Gvcl)[1] است هرگاه $vcl(cone(f(E)) + K)$ محدب باشد.

تعریف ۲۳. ([۳]) اگر $icr(K) \neq \emptyset$ و یک تابعک خطی $l \in K^{+s}$ وجود داشته باشد به‌طوری که $x_\circ \in E$ جواب بهینه مسألهٔ اسکالر $\min\{\langle lof, x\rangle \,:\, x \in E\}$ باشد، آن‌گاه $x_\circ$، HuV است.

برهان. با استفاده از فرض بهینگی $x_\circ$ و با توجه به این که $l \in K^{+s}$، داریم

$$\langle l, b\rangle \geq \circ \quad , \quad \forall b \in (f(E) - f(x_\circ)) \cup K.$$

بردارهای $b_\backslash, b_\Upsilon \in (f(E) - f(x_\circ)) \cup K$ و اعداد $\alpha \geq \circ$ و $\lambda \in [\circ, \backslash]$ را در نظر می‌گیریم. داریم

$$\alpha(\lambda b_\backslash + (\backslash - \lambda) b_\Upsilon) \in cone(conv((f(E) - f(x_\circ)) \cup K)).$$

---

1) Generalized vector convexlike

از این‌رو

$$\langle l, \alpha(\lambda b_۱ + (۱-\lambda)b_۲)\rangle = \alpha\lambda\langle l, b_۱\rangle + \alpha(۱-\lambda)\langle l, b_۲\rangle \geq ۰.$$

بنابراین $l \in (cone(conv((f(E)-f(x_۰))\cup K)))^+$. با استفاده از گزاره ۲.۲ در [۳]،

$$l \in (vcl(cone(conv((f(E)-f(x_۰))\cup K))))^+.$$

به‌علاوه با توجه به این‌که $l \in K^{+s}$ داریم

$$\langle l, -k\rangle < ۰, \quad \forall k \in K\backslash\{۰\}.$$

همچنین $۰ \in vcl(cone(conv((f(E)-f(x_۰))\cup K)))$. بنابراین

$$vcl(cone(conv((f(E)-f(x_۰))\cup K)))\cap(-K) = \{۰\}.$$

در نتیجه $x_۰$، HuV است.

قضیه ۲۴. ([۳]) فرض کنید K غیر بدیهی، نوکدار و بستهٔ برداری باشد و $cor(K^+) \neq \emptyset$. به‌علاوه، $x_۰ \in \Omega$ و نگاشت $f(.) - f(x_۰)$ در E نسبت به K، $Gvcl$ است. اگر $x_۰$، HuV باشد، آن‌گاه تابعک خطی $l \in K^{+s}$ وجود دارد به‌طوری که $x_۰$ جواب بهینه مسألهٔ اسکالر $\min\{\langle lof, x\rangle : x \in E\}$ است.

برهان. با توجه به گزاره ۱.۳ در [۳]، $x_۰$، BeV است. بنابراین

$$vcl(cone(f(E)-f(x_۰)+K))\cap(-K) = \{۰\}.$$

در نتیجه

$$vcl(cone(f(E)-f(x_۰))+K)\cap(-K) = \{۰\}.$$

چون تابع $f(.) - f(x_۰)$ نسبت به K، Gvcl است، لذا $vcl(cone(f(E)-f(x_۰))+K)$ محدب و بستهٔ برداری است. اکنون با استفاده از قضیهٔ ۲.۲ در [۳] داریم

$$\exists l \in X' \;\; ; \;\; \langle l, f(x)-f(x_۰)+k\rangle \geq ۰ \;\; , \quad \forall(x \in E\,,\, k \in K)$$

و

$$\langle l, k\rangle > ۰ \;\; , \quad \forall k \in K\backslash\{۰\}.$$

پس $l \in K^{+s}$. اگر $k = ۰$، آن‌گاه

$$\langle lof, x\rangle \geq \langle lof, x_۰\rangle \;\; , \;\; \forall x \in E.$$

پس $x_۰$ جواب بهینه مسألهٔ اسکالر است.

مراجع

[1] M. Adan, V. Novo, "Efficient and weak efficient points in vector optimization with generalized cone convexity", *Applied Mathematics Letters*, **16** (2003), 221-225.

[2] M. Adan, V. Novo, "Partial and generalized subconvexity in vector optimization problems", *Journal of Convex Analysis*, **8** (2001), 583-594.

[3] M. Adan, V. Novo, "Proper efficiency in vector optimization on real linear spaces", *Journal of Optimization Theory and Applications*, **121** (2004), 515-540.

[4] M. Adan, V. Novo, "Weak efficiency in vector optimization using a closure of algebraic type under cone- convexlikeness", *European Journal of Operational Research*, **149** (2003), 641-653.

[5] V. Barbu, Th. Precupanu, *Convexity and optimization in Banach spaces*, Springer-Verlag, 1975.

[6] M. S. Bazaraa, C. M. Shetty, *Foundations of optimization*, Lectures Notes in Economic and Mathematical systems, Springer-verlag, Germany, 1976.

[7] M. S. Bazaraa, H. D. Sherali, C. M. Shetty, *Nonlinear programming: theory and algorithms*, John Wiley and Sons, New York, 1993.

[8] E. R. Cstnek, *Overcoming the failure of the classical generalized interior-point regularity conditions in convex optimization*, PhD thesis, Technischen Universitat Chemnitz, 2009.

[9] J. Jahn, *Vector optimization: theory, applications, and extensions*, Second edition, Springer-Verlag, 2011.

[10] E. Hernandez, B. Jimenez, V. Novo, "Weak and proper efficiency in set-valued optimization on real linear spaces", *Jornal of Convex Analysis*, **14** (2007), 275-296.

[11] R. B. Holmes, *Geometric functional analysis and its applications*, Springer-Varlag, New York, 1975.

[12] Y. D. Hu, Z. Q. Meng, *Convex analysis and nonsmooth analysis*, Shanghai sciencetical and technical press, Shanghai, 2000.

[13] S. Khoshkhabar-amiranloo, *On the functions with pseudoconvex sublevel sets and nonsmooth optimization*, Master dissertation in Applied Mathematics, University of Tehran, October 2010 (In persian).

[14] E. Kiyani, *Cones and efficiency in vector optimization*, Master dissertation in Applied Mathematics, University of Tehran, October 2011 (In persian).

[15] W. Rudin, *Functional analysis*, Second edition, McGraw-Hill, New York, 1991.

[16] S. Z. Shi, *Convex analysis*, Shanghai sciencetical and technical press, Shanghai, 1990.

[17] Z. A. Zhou, X. M. Yang, J. W. Peng, *Optimization conditions of set-valued optimization problems involving relative algebraic interior in ordered linear spaces*, `www.optimization-online.org`.

الهام کیانی kiyani-e@ut.ac.ir

مجید سلیمانی دامنه soleimani@khayam.ut.ac.ir

دانشگاه تهران ، پردیس علوم، دانشکده ریاضی آمار و علوم کامپیوتر

FARHANG va ANDISHE-ye RIYĀZI

An Expository Journal of the

Iranian Mathematical Society

ISSN 1022-6443

Vol. 32, No. 2, Fall 2013

P. O. Box 13145-418
Tehran - Iran

Tel: 88808855, 88807795, 88807775

e-mail: iranmath@ims.ir
web: mct.iranjournals.ir
http://www.ims.ir