فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۸ (پاییز ۱۳۹۰) صص. ۱ تا ۲۲

ساختار جبری جمع در نظریهٔ نسبیت

سید قهرمان طاهریان

چکیده

در سال ۱۹۸۸، آبراهام اونگار[1] ساختار جبری مجموعهٔ سرعت‌های مجاز، یعنی سرعت‌های با اندازهٔ کمتر از سرعت حرکت نور در خلاء را با عمل جمع نسبیتی مورد بررسی قرار داد ([۱۰] و [۱۱]). این ساختار برخلاف جمع برداری در صفحهٔ اقلیدسی، نه آبلی است و نه شرکت‌پذیر. پیش از وی در سال ۱۹۶۸، هلموت کارتسل[2] برای رده‌بندی گروه‌های جایگشتی اکیداً ۲ ـ انتقالی، به مطالعهٔ ساختارهای جبری غیرشرکت‌پذیر پرداخته بود [۱]. در این نوشتار، ابتدا رهیافت هندسی کارتسل در مدل بلترامی ـ کلاین برای هندسهٔ هذلولوی مورد بررسی قرار می‌گیرد. نشان می‌دهیم که بر اساس تعبیر هندسی جمع بردارها با بازتاب‌های نقطه‌ای، مستقل از مفهوم توازی، فرمول معروف جمع نسبیت خاص در مدل بلترامی ـ کلاین به‌شکل کاملاً طبیعی و ساده به‌دست می‌آید [۸]. سپس به بررسی رهیافت فیزیکی ساختار جمع نسبیتی و هم‌ارزی آن با رهیافت هندسی می‌پردازیم.

۱. مقدمه

هدف اصلی این نوشتار، آشنا کردن خواننده با رابطهٔ عمیق بین نظریهٔ نسبیت خاص و هندسهٔ هذلولوی است. طی چند دههٔ گذشته، پیشرفت‌های زیادی در مفاهیم جبری وابسته به نظریهٔ نسبیت خاص صورت گرفته است. یکی از نخستین آموزه‌های فیزیک کلاسیک، معرفی دستگاه مختصات گالیله و به‌کارگیری مفهوم بردار به‌عنوان مدل ریاضی مناسب برای سرعت یک متحرک است. قانون متوازی‌الاضلاع و بسیاری از انگاره‌های گالیله و نیوتن در مورد فضا و زمان، بیش از دو قرن برای

1) A. A. Ungar 2) Helmut Karzel

فیزیک کلاسیک قانون خدشه‌ناپذیر محسوب می‌شدند همان‌طور که انگاره‌های اقلیدس حدود بیست قرن بر مبانی هندسه حاکم بودند. از این جهت، تاریخ فیزیک و هندسه شباهت‌های زیادی با هم دارند ([۳، ۱۳]).

۲. هندسهٔ نااقلیدسی

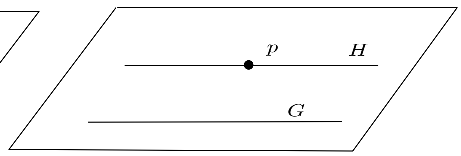
در بنای ساختارهای ریاضی همواره واقعیت‌هایی از دنیای مشاهدات ذهنی، بدیهی و مسلم پذیرفته می‌شوند تا بر اساس آن‌ها یک نظریهٔ جدید پی‌ریزی شود. پیشرفت واقعی در این علم وقتی حاصل می‌شود که این مفاهیم بنیانی و رابطهٔ آن‌ها به‌صورت دقیق بیان شوند. بدون توانایی مشاهده، پیشرفت ریاضیات به‌شکل هدفمند ممکن نبود. بی‌تردید، تعامل بین مفاهیم شهودی و مجرد نقش مهمی در گسترش و پیشرفت شاخه‌های گوناگون ریاضی داشته و دارد. اما در مشاهده، خطر دریافت‌های نادرست وجود دارد. از این‌رو بازبینی مجدد بنیان‌ها و فرمول‌بندی بهتر آن‌ها یک ضرورت اجتناب‌ناپذیر است. این واقعیت را بیش از هر جای دیگر در سیر تحول هندسه مشاهده می‌کنیم. هندسه در قرن بیستم از آن‌رو پیشرفت‌های چشم‌گیر داشت که در آغاز این قرن، با بازبینی مجدد بنیان‌ها، هندسهٔ اقلیدسی بدون نقص و شکاف، از نو پایه‌گذاری شد. پی‌ریزی دقیق هندسهٔ اقلیدسی به‌وسیلهٔ هیلبرت در سال ۱۸۹۹ برای نخستین بار در مراسم پرده‌برداری از بنای یادبود گاوس ــ وبر در گوتینگن مطرح شد. پس از آن، این شیوه به الگویی برای تمام ریاضیات تبدیل شد. اگرچه کارهای بسیار مهمی برای هدایت مسیر پیشرفت هندسهٔ جدید صورت گرفته بود، ولی هیلبرت نخستین کسی بود که این ایده‌ها را تبلور بخشید. از نوشته‌های هیلبرت کتاب مبانی هندسه شکل گرفت که تاکنون بارها به چاپ رسیده است. هیلبرت در سال ۱۹۰۳ در چاپ دوم این کتاب، مبانی هندسهٔ نااقلیدسی (هذلولوی) را ضمیمه کرد. این کتاب تأثیر زیادی بر پیشرفت‌های بعدی هندسه داشت. برای درک معنای واقعی ایده‌های هیلبرت باید ابتدا هندسهٔ اقلیدسی را دانست. بر اساس شواهد تاریخی، علم هندسه از مساحی متولد شده است و اساساً یک دانش تجربی است. هندسه نخستین علم بُنداشتی محسوب می‌شود. یعنی برخی واقعیت‌های ساده و روشن که نیازی به اثبات ندارند به‌عنوان **بُنداشت**[1] برگزیده می‌شوند و سپس گزاره‌های دیگر به‌کمک این بنداشت‌ها و بر پایهٔ قوانین منطقی استدلال، نتیجه‌گیری می‌شوند. هندسهٔ یونان باستان از حدود ۳۰۰ تا ۵۰۰ سال پیش از میلاد مسیح توسعه یافت و محتوای کلی آن در کتاب اصول اقلیدس[2] (۳۰۰ سال پیش از میلاد مسیح) به‌دست ما رسیده است. یکی از بنداشت‌های معروف کتاب اصول اقلیدس (بنداشت پنجم)، موسوم به بنداشت **توازی**[3] است:

> اگر خط راستی به‌وسیلهٔ دو خط راست دیگر به‌قسمی قطع شود که جمع زاویه‌های پدید آمده واقع در یک طرف کمتر از دو قائمه باشد، آن‌گاه امتداد این دو خط، در همان طرفی که جمع زاویه‌های پدید آمده کمتر از دو قائمه است، یکدیگر را در نقطه‌ای قطع خواهند کرد (شکل ۱).

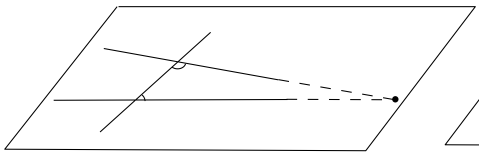
1) axiom 2) Euclid’s Elements 3) parallel axiom

این بنداشت را اقلیدس در انتهای اصول خود قرار داد. از این‌رو می‌توان حدس زد که برای خودش نیز به‌درستی روشن نبود که آیا این اصل برای بنیان‌گذاری هندسه ضروری است یا نه. به عبارت دیگر، مشخص نبود که آیا این اصل نتیجه‌ای از اصول دیگر است یا اصلی است مستقل. در هر حال، بسیاری از هندسه‌دانان این اصل را چندان شهودی و بدیهی نمی‌دانستند. امکان اثبات اصل توازی بیش از ۲۰۰۰ سال در زمرهٔ پرسش‌های اساسی ریاضی بود. این اصل به‌شکل دیگری نیز قابل بیان است (شکل ۲):

> برای هر خط دلخواه G و هر نقطهٔ دلخواه p غیر واقع بر G، یک و تنها یک خط H در صفحهٔ حاوی p و G وجود دارد که از p می‌گذرد و با G موازی است (یعنی G را قطع نمی‌کند).



شکل ۲. معادل اصل پنجم اقلیدس (اصل توازی).



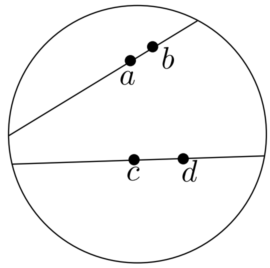
شکل ۱. اصل پنجم اقلیدس.

تلاش برای یافتن پاسخ این پرسش که آیا می‌توان اصل توازی را از اصول دیگر نتیجه گرفت، منجر به کشف هندسه‌های نااقلیدسی در قرن نوزدهم شد. پیش از آن، در قرن هیجدهم، ساکری و لامبرت با فرض گرفتن نقیض اصل توازی بی آن که خود به اهمیت کارشان پی ببرند، گزاره‌های زیادی از هندسهٔ نااقلیدسی را ثابت کرده بودند. برای مثال لامبرت ثابت کرد در چهارگوشه‌ای با سه زاویهٔ قائمه، زاویهٔ چهارم نمی‌تواند منفرجه باشد (شکل ۳). این کار به امید یافتن تناقضی بر اساس نقیض اصل توازی بود تا به‌کمک آن، اصل توازی اثبات شود. بر اساس شواهد تاریخی، نخستین ریاضیدان برجسته‌ای که قانع شد اصل توازی بر اساس اصول دیگر قابل اثبات نیست، گاوس بود [۱۵]. وی متوجه شد که با فرض گرفتن نقیض اصل توازی، یک هندسهٔ جدید و کاملاً منطقی به‌دست می‌آید. گاوس این هندسه را نااقلیدسی نامید. لباچفسکی و بولیایی نیز به این حقیقت دست یافتند و برخلاف گاوس، نتایج خود را در سال ۱۸۳۰ منتشر نمودند. این ایده‌های نو به‌دلیل تفاوت زیاد با انگاره‌های پیشین، توجه کسی را به خود جلب نکرد. تا این‌که پس از مرگ گاوس و انتشار نامه‌هایش، برخی از ریاضیدان‌های بزرگ آن زمان از جمله بلترامی، کلاین و پوانکاره هندسهٔ نااقلیدسی را جدی گرفته و به بررسی بیشتر آن پرداختند. سرانجام کلاین در سال ۱۸۷۱ یک مدل تحلیلی برای هندسهٔ نااقلیدسی بر اساس روشی موسوم به روش کیلی ــ کلاین ارائه کرد. با این مدل، تمامی تردیدها در مورد وجود هندسهٔ نااقلیدسی پایان یافت. این هندسه را **هندسهٔ هذلولوی** و این مدل را **مدل بلترامی ــ کلاین**[1] می‌نامند.

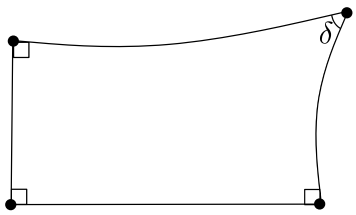
1) Beltrami - Klein model

به‌منظور معرفی مدل بلترامی ــ کلاین برای هندسهٔ هذلولوی، دایره‌ای (مثلاً دایرهٔ یکه به مرکز مبدأ مختصات) را در صفحهٔ اقلیدسی در نظر می‌گیریم. نقاط صفحهٔ هذلولوی، نقاط درونی دایره و خطوط صفحه، وترهای دایره بدون نقاط انتهایی در نظر گرفته می‌شوند (شکل ۴). از جنبهٔ تحلیلی در مدل بلترامی ــ کلاین، مجموعهٔ نقاط صفحه عبارت است از $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < ۱\}$ که در آن $\mathbb{C}$ صفحهٔ مختلط و $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ طول بردار z است. مجموعهٔ خطوط $\mathfrak{G}_h$ در این صفحه به‌شکل تحلیلی عبارت است از $\mathfrak{G}_h := \{A \cap \mathbb{D} \ : \ A \cap \mathbb{D} \neq \emptyset\}$ که در آن A یک خط در صفحهٔ اقلیدسی است. در این مدل، دو پاره‌خط (a, b) و (c, d) همنهشت (قابل انطباق) هستند اگر و تنها اگر $\rho(a, b) = \rho(c, d)$ که در آن

$$\rho(x, y) := \frac{(۱ - \langle x, y\rangle)^۲}{(۱ - x\bar{x})(۱ - y\bar{y})} \quad , \qquad \langle x, y\rangle := \frac{۱}{۲}(x\bar{y} + y\bar{x}).$$



شکل ۴. پاره‌خط‌های همنهشت در مدل کلاین.



شکل ۳. چهارگوشهٔ ابن‌هیثم ــ لامبرت.

۱.۲. تعبیر هندسی جمع

برای درک رابطهٔ بنیانی جمع در هندسه‌های اقلیدسی و هذلولوی، نخست به یادآوری چند ویژگی مهم جمع در صفحهٔ اقلیدسی می‌پردازیم. در صفحهٔ اقلیدسی $\mathcal{P}$، با انتخاب یک نقطهٔ مرجع O (مبدأ مختصات) می‌توان عمل جمع $+$ را به‌قسمی تعریف کرد که $(\mathcal{P}, +)$ یک گروه آبلی باشد. برای نقاط a و b، مجموع $a + b$، رأس چهارم متوازی‌الاضلاعی است که سه رأس دیگر آن a، b و O هستند (شکل ۷). این روش را قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع می‌نامند. یک نقص قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع، عدم کارآیی آن برای حالتی است که a، b و O واقع بر یک خط هستند. در این حالت، باید از جهت و طول بردارها هم کمک بگیریم. اشکال دیگر و اساسی این تعبیر، استفادهٔ ضمنی از اصل توازی است. این رهیافت دقیقاً به همین دلیل در صفحهٔ هذلولوی بی‌فایده است. یک تعبیر هندسی دیگر برای جمع، بر اساس مفهوم بازتاب (انعکاس) نسبت به نقطه یا خط است. ایدهٔ استفاده از بازتاب‌ها و نقش مهم آن‌ها در هندسه، تاریخچهٔ مفصلی دارد. در اینجا فقط یادآوری می‌کنیم که برای نخستین بار در سال ۱۹۳۳ تامسن[1] یک سیستم بنداشتی بر اساس بازتاب‌ها برای بنا نهادن

1) Thomsen

صفحهٔ اقلیدسی مطرح کرد. پس از وی ریاضیدان‌های دیگری همچون اشمیت[1]، اشپرنر[2] و باخمان[3] هندسهٔ مطلق را با سیستم‌های بنداشتی مبتنی بر بازتاب ارائه کردند. می‌توان تعبیرهای هندسی متفاوتی برای جمع در صفحهٔ اقلیدسی به‌کمک بازتاب‌های خطی و نقطه‌ای مطرح کرد. برای خوانندگانی که کمتر با این نظریه آشنا هستند ابتدا چند قرارداد، تعریف و قضیهٔ مقدماتی را یادآوری می‌کنیم. در مورد بنداشت‌های صفحهٔ مطلق، سلیقه‌های متفاوتی وجود دارد و امروزه تعریف یکپارچه‌ای برای صفحهٔ مطلق وجود ندارد. در هندسهٔ کلاسیک، بر اساس تعریف بولیایی، منظور از هندسهٔ مطلق یا هندسهٔ نتاری[4]، هندسه‌ای است که فقط با فرض بنداشت‌های هیلبرت در مورد وقوع، میان‌بود، قابلیت انطباق و پیوستگی به‌دست می‌آید. به این ترتیب، بنداشت توازی جزء بنداشت‌های هندسهٔ مطلق نیست. کارتسل هندسهٔ مطلق را بر مبنای بنداشت‌های دیگر و به معنای کلی‌تر تعریف می‌کند [۲]. صفحهٔ هذلولوی پیوستهٔ مورد نظر وی با مدل بلترامی ــ کلاین و در نتیجه با همهٔ مدل‌های صفحهٔ هذلولوی کلاسیک پیوسته یکریخت است. پس می‌توانیم برای منظور خود، صفحهٔ مطلق را به معنای کلاسیک در نظر بگیریم.

در مطالعهٔ ساختار صفحهٔ مطلق، پرداختن به زیرگروه‌های ویژه از گروه خودریختی‌های صفحه، کمک زیادی به درک ماهیت جبری آن می‌کند. یادآوری می‌کنیم که یک خودریختی صفحهٔ مطلق $\mathcal{P}$ نگاشتی یک‌به‌یک و پوشا از $\mathcal{P}$ به $\mathcal{P}$ است که خط را به خط تصویر می‌کند. در حالت خاص یک خودریختی φ حرکت نامیده می‌شود هرگاه طولپا باشد، یعنی برای هر دو نقطهٔ a و b، پاره‌خط (a,b) با تصویر آن به‌وسیلهٔ φ، یعنی $(\varphi(a),\varphi(b))$ قابل انطباق باشد. در این صورت می‌نویسیم $(a,b)\equiv(\varphi(a),\varphi(b))$. مجموعهٔ $\mathcal{M}$، شامل همهٔ حرکت‌های صفحهٔ مطلق با عمل ترکیب توابع، گروهی تشکیل می‌دهد که به آن گروه حرکت‌های صفحهٔ مطلق می‌گویند. مهم‌ترین حرکت‌های صفحهٔ مطلق بازتاب‌های نقطه‌ای و خطی هستند.

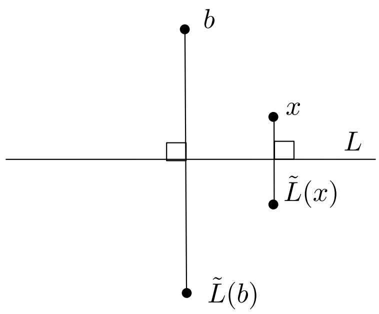
به‌طور شهودی، در صفحهٔ اقلیدسی اگر b را با پاره‌خطی به a وصل کنیم و این پاره‌خط را به اندازهٔ خودش امتداد دهیم، انعکاس b نسبت به نقطهٔ a حاصل می‌شود (شکل ۵). به زبان ریاضی، فرض کنیم a و b دو نقطهٔ متمایز در صفحه و $\overline{a,b}$ خط یکتایی باشد که a و b بر آن واقع هستند. منظور از بازتاب b نسبت به نقطهٔ a که آن را با $\tilde{a}(b)$ نشان می‌دهیم، نقطهٔ یکتای متمایز از b و واقع بر خط $\overline{a,b}$ است طوری‌که پاره‌خط (a,b) با پاره‌خط $(a,\tilde{a}(b))$ قابل انطباق باشد، یعنی $(a,b)\equiv(a,\tilde{a}(b))$. همچنین بنابر برداشت شهودی از بازتاب نقطه‌ای، $\tilde{a}(a):=a$ تعریف می‌شود. به این ترتیب برای هر نقطهٔ $a\in\mathcal{P}$، نگاشت $\tilde{a}:\mathcal{P}\longrightarrow\mathcal{P}$ که ضابطهٔ آن $x\mapsto\tilde{a}(x)$ است را بازتاب نقطه‌ای نسبت به نقطهٔ a می‌نامیم (شکل ۵).

از نظر شهودی اگر از b بر خط L عمود کنیم و پاره‌خط حاصل را به اندازهٔ خودش امتداد دهیم، بازتاب خطی نقطهٔ b نسبت به خط L حاصل می‌شود (شکل ٦).
یادآوری می‌کنیم که در صفحهٔ مطلق برای هر نقطهٔ $p\in\mathcal{P}$ و هر خط L، دقیقاً یک خط H گذرنده

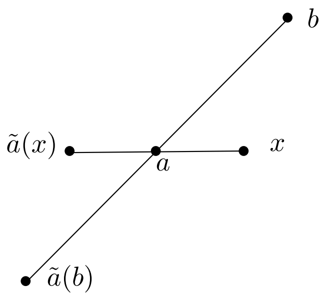
1) Schmidt 2) Sperner 3) Bachmann 4) neutral geometry

از p وجود دارد که بر L عمود است. در این حالت می‌نویسیم $H := \{p \perp L\}$. به عبارت دیگر از هر نقطهٔ صفحه می‌توان بر هر خط دلخواه صفحه، یک خط عمود یکتا رسم کرد. به زبان ریاضی، برای هر خط L، نگاشت $\widetilde{L} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$، با ضابطهٔ $x \mapsto \widetilde{x}_L(x)$ به‌قسمی که $x_L = \{x \perp L\} \cap L$، بازتاب خطی نسبت به خط L نامیده می‌شود.

در اینجا به چند واقعیت مهم دربارهٔ بازتاب‌ها اشاره می‌کنیم که اثبات آن‌ها در بیشتر کتاب‌های هندسهٔ مقدماتی موجود است.



شکل ٦. بازتاب خطی نسبت به خط L.



شکل ۵. بازتاب نقطه‌ای نسبت به نقطهٔ a.

۱. بازتاب‌های نقطه‌ای و خطی، حرکت‌های خودوارون (مرتبهٔ ۲) هستند.
۲. هر حرکت را می‌توان به‌صورت حاصل‌ضرب (ترکیب) حداکثر سه بازتاب خطی بیان کرد.
۳. حاصل‌ضرب سه بازتاب خطی برای سه خط گذرنده از نقطهٔ مشترک p، یک بازتاب خطی نسبت به یک خط گذرنده از p است.
۴. برای دو خط A و B، از $A \perp B$ و $c := A \cap B$، نتیجه می‌شود $\widetilde{c} = \widetilde{A}\widetilde{B}$.
۵. هر حرکت خودوارون با نقطهٔ ثابت یکتای a لزوماً همان بازتاب نقطه‌ای $\tilde{a}$ است و برای دو نقطهٔ متمایز a و b همواره $\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}$ یک بازتاب نقطه‌ای است.

اکنون به بررسی چند روش مستقل از اصل توازی برای تعبیر هندسی جمع در صفحهٔ مطلق می‌پردازیم.

قاعدهٔ اول: فرض کنیم a' نقطهٔ وسط a و O باشد (شکل ۷). در این صورت می‌توان نوشت

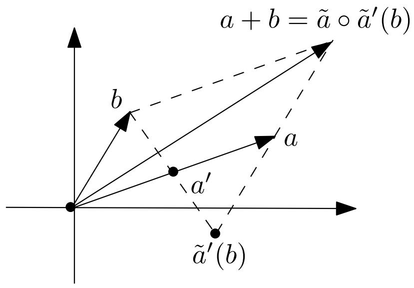
$$a + b = \tilde{a}' \circ \tilde{O}(b).$$

این قاعدهٔ ساده و اساسی را نخستین بار کارتسل در صفحهٔ مطلق به‌کار برد [۴]. برتری این تعبیر، استقلال آن از مفهوم توازی است. خواهیم دید که این قاعده در هندسهٔ هذلولوی همان جمع در نظریهٔ نسبیت خاص است.

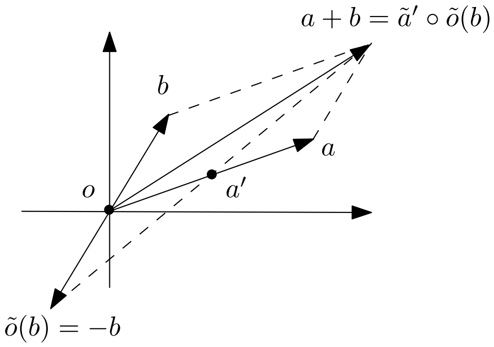
قاعدهٔ دوم: مانند قاعدهٔ اول، فرض کنیم a' نقطهٔ وسط a و O باشد (شکل ۸). در این حالت

$$a + b = \tilde{a} \circ \tilde{a}'(b).$$

برخلاف ظاهر متفاوت، این قاعده در صفحهٔ مطلق همان قاعدهٔ اول است، زیرا بنابر ویژگی ۵ انعکاس‌ها، $\tilde{a}' \circ \tilde{a} \circ \tilde{a}'$ یک بازتاب نقطه‌ای است و $\tilde{a}' \circ \tilde{a} \circ \tilde{a}'(O) = O$. در نتیجه $\tilde{a}' \circ \tilde{a} \circ \tilde{a}' = \tilde{O}$ و این یعنی $\tilde{a} \circ \tilde{a}' = \tilde{a}' \circ \tilde{O}$.



شکل ۸. یک تعبیر جمع با بازتاب نقطه‌ای.



شکل ۷. تعبیر جمع با بازتاب نقطه‌ای

قاعدهٔ سوم: این قاعده بر اساس بازتاب‌های خطی بیان می‌شود. برای $x \neq O$ فرض کنیم $\overline{O,x}$ خط یکتایی باشد که از x و O می‌گذرد. همچنین فرض کنیم $(x \perp \overline{O,x})$ خطی باشد که از x می‌گذرد و بر $\overline{O,x}$ عمود است. اگر $\hat{x}$ بازتاب خطی نسبت به خط $(x \perp \overline{O,x})$ و $\hat{O}_x$ بازتاب خطی نسبت به خط $(O \perp \overline{O,x})$ باشد (شکل ۹)، مشاهده می‌شود که

$$a + b = \hat{a}' \circ \hat{O}'_x(b)$$

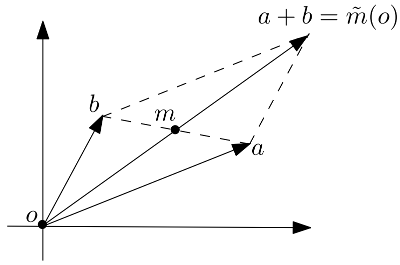
در صفحهٔ مطلق، این قاعده نیز با وجود تفاوت ظاهری، هم‌ارز قاعدهٔ اول است، زیرا بنابر ویژگی ۴ بازتاب‌ها می‌توان نوشت $\hat{a}' \circ \hat{O}'_x = (\hat{a}' \circ \widetilde{\overline{O,a'}}) \circ (\widetilde{\overline{O,a'}} \circ \hat{O}'_x) = \tilde{a}' \circ \tilde{O}$. **قاعدهٔ چهارم:** این قاعده بر اساس بازتاب نقطه‌ای نسبت به m، نقطهٔ وسط a و b به‌دست می‌آید. در این حالت (شکل ۱۰)

$$a + b = \tilde{m}(O).$$

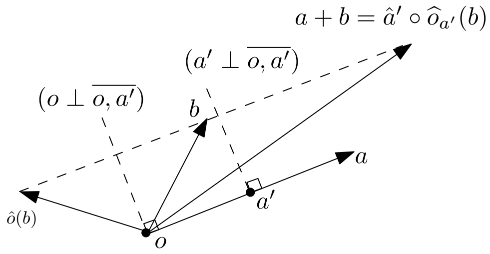
گرچه این قاعده در صفحهٔ اقلیدسی با قاعدهٔ اول هم‌ارز است ولی در صفحهٔ هذلولوی با قاعدهٔ اول هم‌ارز نیست. اونگار این جمع را مکمل جمع اینشتین[1] نامیده است [۱۳].

1) Einstein coaddition

در صفحهٔ اقلیدسی $\mathcal{P}$ فرض کنیم Δ^* مجموعهٔ انبساط‌هایی[1] از صفحه باشد که O را ثابت نگه می‌دارند. در این صورت مجموعهٔ تکریختی‌های ساختار $(\mathcal{P},+)$ زیرمجموعه‌ای از Δ^* است. ثابت می‌شود که به‌ازای $\Delta := \Delta^* \cup \{O\}$ (O نگاشت صفر است) ساختار $(\Delta,+,\circ)$ ($\circ$ عمل ترکیب نگاشت‌ها است) میدانی یکریخت با $\mathbb{R}$ و $(\mathcal{P},\Delta)$ یک فضای برداری دو بعدی روی $\mathbb{R}$ است. خواهیم دید که در صفحهٔ هذلولوی، $(\mathcal{P},+)$ یک ساختار ضعیف‌تر موسوم به K ـ لوپ[2] (K ـ دور) است.



شکل ۱۰. تعبیر قاعدهٔ چهارم



شکل ۹. تعبیر قاعدهٔ دوم

۲.۲. نمادگذاری و پیش‌نیازها

در این بخش، منظور از $\mathbb{R}$، $\mathbb{C}$، $\mathbb{H}$ و $\mathbb{O}$ به‌ترتیب مجموعهٔ اعداد حقیقی، مختلط، چهارگان‌ها (کواترنیون‌ها[3]) و هشت‌گان‌ها[4] است. اگر $\mathbb{K}$ را یکی از مجموعه‌های $\mathbb{C}$، $\mathbb{H}$ یا $\mathbb{O}$ بگیریم، $(\mathbb{K},\mathbb{R})$ یک فضای برداری است که $\dim\,(\mathbb{K},\mathbb{R})$ به‌ترتیب ۲، ۴ یا ۸ است. برای $z\in\mathbb{K}$ منظور از $\bar{z}$ مزدوج z است. یادآوری می‌کنیم که نگاشت $z\mapsto\bar{z}$ یک پادریختی[5] (در حالت $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ یکریختی) است که فقط اعداد حقیقی را ثابت نگه می‌دارد و نگاشت $z\mapsto z\bar{z}$ یک فرم مثبت معین را مشخص می‌کند. به‌علاوه، نمادهای زیر را نیز به‌کار می‌بریم:

$$|z|=\sqrt{z\bar{z}}\,,\quad \mathbb{S}:=\{z\in\mathbb{K}\,:\,|z|=1\}\,,\quad \mathbb{D}:=\{z\in\mathbb{K}\,:\,|z|<1\}\,,$$

$$||z||_h=\sqrt{1-z\bar{z}}\ (z\in\mathbb{D})$$

همان‌گونه که گفتیم تمامی صفحه‌های هذلولوی کلاسیک پیوسته، با مدل بلترامی ـ کلاین یکریخت هستند. در این مدل، مجموعهٔ نقاط صفحهٔ هذلولوی، $\mathcal{P}_h:=\mathbb{D}$ است و مجموعهٔ خطوط عبارت است از $\mathfrak{G}_h:=\{A\cap\mathbb{D}\,:\ A\cap\mathbb{D}\neq\emptyset\}$ که در آن A یک خط در صفحهٔ اقلیدسی است. به‌منظور بیان دقیق‌تر همنهشتی (قابلیت انطباق)، ابتدا این صفحه را در یک صفحهٔ تصویری می‌نشانیم. در حالت کلی صفحهٔ مطلق را می‌توان در یک صفحهٔ تصویری نشانید. دقیقاً همین ویژگی صفحهٔ

1) dilatation 2) $K-$loop 3) quaternion 4) octonion 5) antiautomorphism

مطلق، ایدهٔ بنیانی برنامهٔ معروف ارلانگن کلاین بود. در این برنامه، کلاین مدعی شد که هر هندسه را می‌توان در یک هندسهٔ تصویری نشانید. علاوه بر این، تفاوت هندسه‌ها در عناصر ناوردای زیرگروه‌های خاص گروه خودریختی‌های آن‌ها است. اگرچه این برنامه امروزه اهمیت سابق را ندارد و هندسه‌های ریمانی را در بر نمی‌گیرد ولی یکی از ایده‌های پرباری بود که منجر به نوآوری‌های زیادی در هندسه شد. یک صفحهٔ تصویری به بیان ترکیبیاتی، مجموعهٔ ناتهی $\mathcal{P}$ به‌نام مجموعهٔ نقاط و یک زیرمجموعهٔ ناتهی از مجموعهٔ توانی $\mathcal{P}$ موسوم به مجموعهٔ خطوط است. همچنین نقاط و خطوط توسط مفهوم وقوع با سه بنداشت زیر به هم مرتبط هستند:

۱. هر دو نقطهٔ متمایز بر یک خط یکتا واقع هستند.

۲. هر دو خط متمایز یک نقطهٔ مشترک یکتا دارند.

۳. دست‌کم چهار نقطهٔ متمایز وجود دارد که هیچ سه‌تای آن بر یک خط واقع نیستند.

از جنبهٔ تاریخی، صفحه‌های تصویری ابتدا به‌صورت تحلیلی مطرح شدند. بررسی این ساختارها ما را از بحث اصلی دور می‌کند. از این‌رو فقط به روش ساختن یک ردهٔ مهم از این صفحه‌ها به‌کمک فضاهای برداری سه بعدی روی میدان $\mathbb{R}$ می‌پردازیم. سپس صفحهٔ هذلولوی بلترامی ـ کلاین را در یک حالت خاص آن می‌نشانیم. فرض کنیم V یک فضای برداری سه بعدی روی $\mathbb{R}$ باشد. به‌ازای

$$\varphi : V \to V^*/\mathbb{R}^* \ ; \ \mathfrak{x} \mapsto \mathbb{R}^*\mathfrak{x} \ , \qquad \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{۰\} \ , \qquad V^* := V \setminus \{(۰,۰,۰)\}$$

مجموعهٔ نقاط صفحهٔ تصویری، $\overline{P}$ و مجموعهٔ خطوط، $\overline{\mathfrak{G}}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\overline{P} := \varphi(V^*) = \{\mathbb{R}^*\mathfrak{x} \ : \ \mathfrak{x} \in V^*\} \ , \qquad \overline{\mathfrak{G}} := \{\varphi(L \setminus \{(۰,۰,۰)\}) \ : \ L \in \mathfrak{L}_۲\}$$

که منظور از $\mathfrak{L}_۲$، مجموعهٔ فضاهای برداری دو بعدی V است. به عبارت دیگر نقاط این صفحه به‌جای مختصات آفین $\mathfrak{x} = (x_۱, x_۲, x_۳)$ دارای مختصات تصویری $\mathbb{R}^*\mathfrak{x} = \{(\lambda x_۱, \lambda x_۲, \lambda x_۳) \ : \ \lambda \in \mathbb{R}^*\}$ و خطوط صفحه، تصویر فضاهای برداری دو بعدی تحت نگاشت کانونی φ هستند.

فضای برداری $V := \mathbb{R} \bigoplus \mathbb{K}$ که $\mathbb{K}$ یکی از مجموعه‌های $\mathbb{C}$، $\mathbb{H}$ یا $\mathbb{O}$ است، یک فضای برداری ۳، ۵ یا ۹ بعدی روی $\mathbb{R}$ می‌شود. فرض کنیم تابع $f : V \times V \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ

$$(\mathfrak{x} = (x_۰, x), \mathfrak{y} = (y_۰, y)) \mapsto x_۰y_۰ - \frac{۱}{۲}(x\bar{y} + y\bar{x}) = x_۰y_۰ - \langle x, y\rangle$$

تعریف شود. در این صورت به‌ازای $V := \mathbb{R} \bigoplus \mathbb{K}$ و با نگاشت ι به‌شکل

$$\iota : \mathbb{K} \to \overline{P}; \ \ z \mapsto \mathbb{R}^*(۱, z)$$

مدل بلترامی ـ کلاین را در صفحهٔ تصویری $(\overline{P}, \overline{\mathfrak{G}})$ می‌نشانیم. با این نگاشت، نقاط هم‌خط مدل بلترامی ـ کلاین به نقاط هم‌خط در صفحهٔ تصویری $(\overline{P}, \overline{\mathfrak{G}})$ نگاشته می‌شوند. علاوه بر این،

$$\iota(\mathbb{S}) = \{\mathbb{R}^*\mathfrak{x} \in \overline{P} \ : \ f(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = ۰\}, \quad \iota(\mathbb{D}) = \{\mathbb{R}^*\mathfrak{x} \in \overline{P} \ : \ f(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) > ۰\}.$$

اکنون قرار می‌دهیم

$$\rho : \mathbb{D}\times\mathbb{D}\to\mathbb{R};\quad (\mathbb{R}^*\mathfrak{x},\mathbb{R}^*\mathfrak{y})\mapsto \frac{f(\mathfrak{x},\mathfrak{y})^{۲}}{f(\mathfrak{x},\mathfrak{x})f(\mathfrak{y},\mathfrak{y})}$$

با این نگاشت، به‌ازای $a=\mathbb{R}^*\mathfrak{a},\ b=\mathbb{R}^*\mathfrak{b},\ c=\mathbb{R}^*\mathfrak{c},\ d=\mathbb{R}^*\mathfrak{d}\in\mathbb{D}$ می‌توان نوشت

$$(a,b)\equiv_h (c,d)\Longleftrightarrow \rho(a,b)=\rho(c,d)$$

در این صورت به‌ازای $a\in\mathbb{D}$ و $\mathfrak{a}=(۱,a)\in V$ داریم $\iota(a)=\mathbb{R}^*\mathfrak{a}$ و بازتاب نسبت به نقطهٔ a توسط نگاشت متعامد زیر به‌دست می آید:

$$\widetilde{\mathfrak{a}}\ :\ V\to V\ ;\ \mathfrak{x}\mapsto -\mathfrak{x}+۲\,\frac{f(\mathfrak{x},\mathfrak{a})}{f(\mathfrak{a},\mathfrak{a})}\,\mathfrak{a}$$

در نتیجه

$$\widetilde{\mathfrak{a}}((۱,x))=-(۱,x)+\frac{۲-(a\bar{x}+x\bar{a})}{۱-a\bar{a}}(۱,a)=-(۱,x)+\frac{۲-(a\bar{x}+x\bar{a})}{\parallel a\parallel_h^{۲}}(۱,a).$$

قضیهٔ بعدی نتیجهٔ بحث فوق است.

قضیه ۱. فرض کنیم $(\mathbb{K},\mathbb{R})$ یک جبر باشد که در آن $\mathbb{K}$ یکی از مجموعه‌های $\mathbb{C}$، $\mathbb{H}$ یا $\mathbb{O}$ است. همچنین فرض کنیم $\mathbb{D}$ قرص یکهٔ باز باشد. در این صورت مدل بلترامی ــ کلاین برای هر یک از این جبرها، مجموعهٔ $\mathbb{D}$ است. ساختار متریک و در نتیجه همنهشتی در این مدل به این صورت مشخص می‌شود:

۱. برای هر $a\in\mathbb{D}$، بازتاب نسبت به نقطهٔ a توسط نگاشت متعامد زیر به‌دست می آید:

$$\widetilde{a}:\ \mathbb{D}\to\mathbb{D}\ ;\ x\mapsto\frac{(a\bar{a}-۱)x+(۲-(a\bar{x}+x\bar{a}))a}{۱+a\bar{a}-(a\bar{x}+x\bar{a})}. \qquad (۱)$$

۲. برای هر دو نقطهٔ $a,b\in\mathbb{D}$، نقطهٔ m، وسط a و b از رابطهٔ زیر به‌دست می آید:

$$\begin{aligned} m &= \frac{\sqrt{۱-b\bar{b}}}{\sqrt{۱-a\bar{a}}+\sqrt{۱-b\bar{b}}}\,a+\frac{\sqrt{۱-a\bar{a}}}{\sqrt{۱-a\bar{a}}+\sqrt{۱-b\bar{b}}}\,b \qquad (۲)\\ &= \frac{\parallel b\parallel_h}{\parallel a\parallel_h+\parallel b\parallel_h}\,a+\frac{\parallel a\parallel_h}{\parallel a\parallel_h+\parallel b\parallel_h}\,b\end{aligned}$$

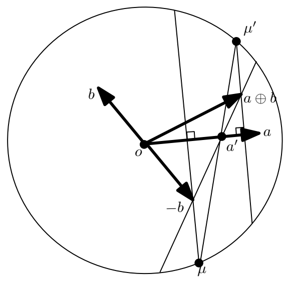
به‌ویژه در حالت خاص، نقطهٔ a'، وسط a و O از رابطهٔ

$$a'=\frac{۱}{۱+\sqrt{۱-a\bar{a}}}\,a=\frac{۱}{۱+\parallel a\parallel_h}\,a. \qquad (۳)$$

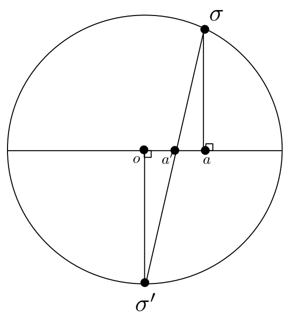
به‌دست می آید.

۳.۲. جمع در هندسهٔ هذلولوی

در این بخش، قانون اول جمع در صفحهٔ مطلق، یعنی $a \oplus b := \widetilde{a'} \circ \widetilde{O}(b)$ را برای مدل بلترامی ـ کلاین به‌کار می‌بریم. در این بحث، از نماد $+$ برای نشان دادن جمع در $\mathbb{K}$ و از نماد $\oplus$ برای نشان دادن جمع نسبیتی (هذلولوی) در $\mathbb{D}$ استفاده می‌کنیم. پیش از به‌دست آوردن فرمول جمع نسبیتی، روش هندسی به‌دست آوردن نقطهٔ وسط a و O و روش هندسی محاسبهٔ $a \oplus b$ را بیان می‌کنیم که بر اساس ویژگی‌های تعامد و بازتاب در مدل بلترامی ـ کلاین است.



شکل ۱۲. جمع نسبیتی بردارهای a و b.



شکل ۱۱. نقطهٔ وسط a و o.

فرض کنیم $A := \overline{O, a}$، $\sigma \in (a \perp A) \cap \mathbb{S}$ و $\sigma' \in (O \perp A) \cap \mathbb{S}$ طوری اختیار شده باشند که σ و σ' در دو طرف A قرار بگیرند. در این صورت نقطهٔ $a' := A \cap \overline{\sigma, \sigma'}$ وجود دارد و وسط a و O است (شکل ۱۱). بازتاب نسبت به نقطهٔ O، نقطهٔ b را به $-b$ می‌نگارد. پس برای محاسبهٔ $\widetilde{a'} \circ \widetilde{O}(b) = \widetilde{a'}(-b)$ توجه کنید که اگر $b = O$ باشد، آن‌گاه $a \oplus b = a \oplus O = a$ و در غیر این صورت، به‌ازای $\mu \in \mathbb{S} \cap (-b \perp A)$ و $\mu' \in \mathbb{S} \cap \overline{\mu, a'}$ به‌قسمی که $\mu' \neq \mu$ داریم (شکل ۱۲)

$$a \oplus b = \widetilde{a'}(-b) = \overline{-b, a'} \cap (\mu' \perp A).$$

برای محاسبهٔ $a \oplus b$ به روش تحلیلی بنابر قضیهٔ ۱، داریم

$$\begin{aligned} a \oplus b &= \widetilde{a'} \circ \widetilde{O}(b) \\ &= \frac{(۱ - a'\bar{a'})b + (۲ + (a'\bar{b} + b\bar{a'}))a'}{۱ + a'\bar{a'} + (a'\bar{b} + b\bar{a'})} \\ &= \frac{a + b}{۱ + \langle a, b\rangle} + \frac{۱}{۱ + ||a||_h} \left(\frac{\langle a, b\rangle\, a - a\bar{a}\, b}{۱ + \langle a, b\rangle} \right) \end{aligned}$$

این همان فرمول معروف اینشتین دربارهٔ قانون جمع سرعت‌های مجاز است. به‌منظور دست‌یابی به نتایج دیگر، این فرمول را به روش غیرمستقیم نیز محاسبه می‌کنیم. پیش از آن، یادآوری می‌کنیم که

در یک میدان $\mathbb{K}$ برای $a, b \neq c, d$ نسبت ناهمساز[1] به‌شکل زیر تعریف می‌شود:

$$DV(a, b; c, d) := (a-c)(a-d)^{-1}(b-d)(b-c)^{-1}$$

می‌توان نشان داد که نسبت ناهمساز تحت بازتاب‌های نقطه‌ای، ناوردا است.

قضیه ۲. بازهٔ $\mathbb{I} := (-1, 1)$ را با دو عمل زیر در نظر می‌گیریم:

$\oplus \ : \ \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to \mathbb{I}\ ; \ \ (a, b) \mapsto a \oplus b := \frac{a+b}{1+a\cdot b}$

$\odot \ : \ \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to \mathbb{I}\ ; \ \ (a, b) \mapsto a \odot b := \tanh(\tanh^{-1}(a) \cdot \tanh^{-1}(b))$ در این صورت

۱− $(\mathbb{I}, \oplus)$ یک گروه یکریخت با $(\mathbb{R}, +)$ است؛

۲− برای $a, b \in \mathbb{D}$، همواره $\tanh(x+y) = \tanh x \oplus \tanh y$، یعنی $\tanh$ یکریختی بین $(\mathbb{R}, +)$ و $(\mathbb{I}, \oplus)$ است؛

۳− نگاشت $\tanh$ یکریختی بین میدان‌های $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ و $(\mathbb{I}, \oplus, \odot)$ است.

یادآوری می‌کنیم که تابع $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ مجموعهٔ $\mathbb{R}$ را یک‌به‌یک، پوشا و یکنوا به بازهٔ $\mathbb{I} := (-1, 1)$ تبدیل می‌کند و $\tanh(x+y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \cdot \tanh y}$. در ادامه، برای دست‌یابی به نتایج دیگر به محاسبهٔ فرمول اینشتین به روشی غیرمستقیم می‌پردازیم.

ابتدا فرض کنیم O، a و b هم‌خط باشند. در این صورت A یک زیرمیدان $\mathbb{K}$ است. اگر قرار دهیم $a_1 := \frac{1}{|a|}a$، آن‌گاه $A \cap \mathbb{S} = \{a_1, -a_1\}$. پس عدد

$$\begin{aligned} DV(a_1, -a_1; O, -b) &= (a_1 - O)(a_1 + O)^{-1}(-a_1 + b)(-a_1 - b)^{-1} \\ &= (a_1 - b)(a_1 + b)^{-1} \end{aligned}$$

حقیقی است. بازتاب $\widetilde{a}'$، نقاط a_1 و $-a_1$ را به هم تبدیل می‌کند. همچنین O به a و $-b$ به $a \oplus b$ تبدیل می‌شوند. در نتیجه [8]

$$DV(a_1, -a_1; O, -b) = (a + a_1)(a - a_1)^{-1}((a \oplus b) - a_1)((a \oplus b) + a_1)^{-1}$$

از این معادله نتیجه می‌شود

$$a \oplus b = \frac{1}{1 + \bar{a}b}(a + b).$$

اکنون فرض کنیم O، a و b هم‌خط نباشند. در این صورت نقطهٔ وسط a و O بر نقطهٔ وسط $a \oplus b$ و $-b$ منطبق است (شکل ۷). به این ترتیب

$$\frac{a}{1 + \|a\|_h} = \frac{1}{\|a \oplus b\|_h + \|b\|_h}(\|b\|_h \ (a \oplus b) - \|a \oplus b\|_h \ b)$$

1) cross ratio

پس برای $\lambda = \frac{\|a\oplus b\|_h}{\|b\|_h}$ داریم $a \oplus b = \lambda\, b + \frac{۱+\lambda}{۱+\|a\|_h}\, a$ و با محاسبهٔ نُرم دو طرف نتیجه می‌گیریم

$$۱ - \|b\|_h{}^{۲}\lambda^{۲} = \lambda^{۲}(۱ - \|b\|_h{}^{۲}) + \frac{(۱+\lambda)^{۲}}{(۱+\|a\|_h)^{۲}}(۱ - \|a\|_h{}^{۲}) + \frac{۲\lambda(۱+\lambda)}{۱+\|a\|_h}\langle a, b\rangle$$

لذا [۸]

$$\lambda = \frac{\|a\|_h}{۱ + \langle a, b\rangle}$$

به این ترتیب

$$\|a \oplus b\|_h = \frac{\|a\|_h\ \|b\|_h}{۱ + \langle a, b\rangle}$$

و با جایگزینی نتیجه می‌شود [۸]

$$\begin{aligned} a \oplus b &= \frac{\|a\|_h}{۱+\langle a,b\rangle}\, b + \left(۱ + \frac{\|a\|_h}{۱+\langle a,b\rangle}\right)\ \frac{a}{۱+\|a\|_h} \\ &= \frac{a+b}{۱+\langle a,b\rangle} + \frac{۱}{۱+\|a\|_h}\left(\frac{\langle a,b\rangle\, a - a\bar{a}\, b}{۱+\langle a,b\rangle}\right). \end{aligned}$$

آنچه گفته شد در قالب قضیهٔ زیر خلاصه شده است.

قضیهٔ ۳. فرض کنیم U یک خط در صفحهٔ هذلولوی باشد که $O \in U$. در این صورت

۱− برای هر $a, b \in U$، $a \oplus b = \frac{۱}{۱+\bar{a}b}(a+b)$؛

۲− مجموعهٔ U یک گروه آبلی یکریخت با $(\mathbb{I}, \oplus)$ و در نتیجه یکریخت با $(\mathbb{R}, +)$ است؛

۳− برای $a, b \in \mathbb{D}$،

$$a \oplus b = \frac{a+b}{۱+\langle a,b\rangle} + \frac{۱}{۱+\|a\|_h}\left(\frac{\langle a,b\rangle\, a - |a|^{۲}\, b}{۱+\langle a,b\rangle}\right) \qquad (۴)$$

و

$$(۱ + \langle a, b\rangle)\ \|a \oplus b\|_h = \|a\|_h\ \|b\|_h. \qquad (۵)$$

۳. ساختار جبری مجموعهٔ سرعت‌های مجاز با عمل جمع نسبیتی

در این بخش، ساختار جبری $(\mathbb{D}, \oplus)$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. همان‌گونه که اشاره کردیم، برخی از ریاضیدان‌ها و فیزیکدان‌ها متوجه رابطهٔ بین جمع نسبیتی با هندسهٔ هذلولوی شده بودند ولی به‌دلیل پیچیدگی این ساختارها، تا سال ۱۹۸۸ پیشرفت چندانی در این زمینه صورت نپذیرفت. در سال ۱۹۸۹ آبراهام اونگار رهیافت جدیدی برای توسعهٔ نسبیت خاص و هندسهٔ هذلولوی بنیان گذاشت [۱۱، ۱۴]. وی همراه با همکاران و شاگردانش، ساختار جبری جمع نسبیتی را در

قالبی کلی‌تر مطرح کرد که امروزه آن را گروه ژیرو[1] می‌نامند. پیش از وی در سال ۱۹۶۴ هلموت کارتسل برای رده‌بندی گروه‌های جایگشتی اکیداً ۲ ـ انتقالی، وجود این‌گونه ساختارهای جبری غیرشرکت‌پذیر را پیش‌بینی کرده بود. با یادآوری این که بنابر قضیهٔ کیلی، هر گروه را می‌توان در یک گروه جایگشتی نشانید، به اهمیت رده‌بندی این گروه‌ها بیشتر پی می‌بریم.

فرض کنیم گروه $(\Gamma,\cdot)$ در گروه متقارن S_E، متشکل از تمام نگاشت‌های یک‌به‌یک و پوشای $\sigma : E \to E$ با عمل ترکیب توابع نشانیده شده باشد که اصطلاحاً می‌گوییم Γ روی E عمل می‌کند. هرگاه هستهٔ همریختی نشاننده، بدیهی باشد عمل را باوفا[2] می‌نامیم. اگر برای هر n زوج متمایز (x_1, y_1)، $\ldots$ ، (x_n, y_n) که در آن $x_i, y_i \in E$، عضو $\gamma \in \Gamma$ وجود داشته باشد که $\gamma(x_i) = y_i$ برای هر $i = 1, \ldots, n$، گوییم Γ به‌صورت n ـ انتقالی روی E عمل می‌کند. اگر γ یکتا باشد، گوییم Γ اکیداً n ـ انتقالی روی E عمل می‌کند. در سال ۱۸۷۲، جردن همهٔ گروه‌های جایگشتی اکیداً k ـ انتقالی متناهی را برای $k \geq 4$ مشخص نمود. این گروه‌ها S_k، S_{k+1}، A_{k+2} و در حالت‌های خاص $k = 4$ و $k = 5$، به‌ترتیب گروه‌های ماتیو M_{11} و M_{12} هستند که آن‌ها را ماتیو در سال ۱۸۶۱ کشف کرد. در سال ۱۹۰۷، وبلن[3] و ودربورن[4] از شبه‌میدان‌های متناهی برای ساختن صفحه‌های تصویری غیردزارگی متناهی استفاده کردند. شبه‌میدان[5] یکی از مفاهیم جبری مهم است که مانند میدان، رابطهٔ عمیقی با ساختارهای هندسی دارد. شبه‌میدان مجموعه‌ای چون F مجهز به دو عمل $+$ و ضرب $\cdot$ با ویژگی‌های زیر است [۱]:

۱ــ $(F, +)$ یک گروه با عضو خنثای 0 است؛

۲ــ $(F^* = F \setminus \{0\}, .)$ یک گروه با عضو خنثای ۱ است؛

۳ــ برای هر $a, b, c \in F$، $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$؛

۴ــ برای هر $a \in F$، $0 \cdot a = 0$.

نخستین مثال‌ها برای شبه‌میدان‌های متناهی به‌وسیلهٔ دیکسون[6] در سال ۱۹۰۵ مطرح شدند. مثال از شبه‌میدان‌های نامتناهی در سال ۱۹۳۰ به‌وسیلهٔ رایدمایستر[7] و شرایر[8] مطرح شد. در سال ۱۹۳۱، کارمایکل[9] نشان داد که گروه‌های جایگشتی اکیداً ۲ ـ انتقالی متناهی دقیقاً گروه‌های یکریخت با $T_2(F)$ هستند که $T_2(F)$ عبارت است از مجموعهٔ تبدیل‌های آفین $x \mapsto a + bx$ به‌ازای $(b \neq 0)$ روی یک شبه‌میدان متناهی.

در سال ۱۹۳۴، زاسنهاوس نشان داد که گروه‌های جایگشتی اکیداً ۳ ـ انتقالی متناهی دقیقاً گروه‌های یکریخت با $T_3(F)$ هستند که $T_3(F)$ عبارت است از مجموعهٔ تبدیل‌های خطی کسری $x \mapsto \frac{a+bx}{c+dx}$ به‌ازای $(ad - bc \neq 0)$ روی یک شبه‌میدان متناهی. زاسنهاوس در ادامهٔ مطالعاتش شبه‌میدان‌های متناهی را رده‌بندی نمود و به این ترتیب در این حالت نیز مسالهٔ رده‌بندی حل شد.

1) gyrogroup 2) faithfull 3) Weblen 4) Wedderburn 5) nearfield 6) Dickson
7) Reidemeister 8) Schreier 9) Carmichael

در سال ۱۹۴۳، هال توانست نتیجهٔ کارمایکل را به‌ازای ۲ $= k$ با یک شرط اضافی برای شبه‌میدان‌های نامتناهی تعمیم دهد. در سال ۱۹۵۴، تیتس[1] و هال ثابت کردند به ازای ۴ $\geq k$ گروه جایگشتی اکیداً k ــ انتقالی نامتناهی وجود ندارد. این رده‌بندی برای حالت‌های ۲ $= k$ و ۳ $= k$ سال‌ها همچنان ناقص باقی ماند.
برای حذف شرط اضافی هال، تیتس، گراتزه[2] و کارتسل نشان دادند که باید مفهوم شبه‌میدان با مفهوم کلی‌تری جایگزین شود. مفهوم شبه‌حوزه[3] که به‌وسیلهٔ کارتسل در سال ۱۹۶۴ مطرح شد، مزایای بیشتری دارد. با این تعریف، گروه‌های جایگشتی یکریخت منجر به شبه‌حوزه‌های یکریخت می‌شوند. کارتسل نشان داد که هر شبه‌حوزهٔ متناهی یک شبه‌میدان است ولی تاکنون هیچ مثالی از شبه‌حوزهٔ سره (که شبه‌میدان نباشد) یافت نشده است.

بنابر تعریف کارتسل، مجموعهٔ F همراه با دو عمل «$+$» و «$\cdot$» شبه‌حوزه نامیده می‌شود هرگاه

۱ــ $(F,+)$ یک لوپ (دور) باشد، یعنی برای هر $a,b\in F$، معادله‌های $a+x=b$ و $y+a=b$ جواب‌های منحصر به فرد x و y در F داشته باشند و $(F,+)$ دارای عنصر خنثی باشد که معمولاً با $\circ$ نمایش داده می‌شود. به عبارت دیگر برای هر $a\in F$، $a+\circ=\circ+a=a$؛

۲ــ $(F^*=F\setminus\{\circ\},\cdot)$ گروه باشد به‌قسمی که برای هر $x\in F$، $\circ\cdot x=\circ$؛

۳ــ برای هر $a,b,c\in F$، داشته باشیم $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$؛

۴ــ برای هر $a,b,c\in F$ دقیقاً یک $d_{a,b}\in F^*$ وجود داشته باشد که

$$a+(b+c)=(a+b)+d_{a,b}\cdot c.$$

بر اساس ایده‌های هال و کارتسل قضیهٔ بعد در مورد رده‌بندی گروه‌های اکیداً ۲ ــ انتقالی ثابت می‌شود [۲].

قضیه ۴. فرض کنیم $(F,+,\cdot)$ یک شبه‌حوزه باشد. در این صورت:
الف) ساختار $(F,+)$ یک K ــ لوپ است؛
ب) اگر $a^+:F\to F$ تابعی باشد که x را به $a+x$ تبدیل می‌کند و $a^{\cdot}:F\to F$ تابعی باشد که x را به $a\cdot x$ می‌نگارد، آن‌گاه

$$A(F):=\{a^+\circ b^{\cdot}\mid a\in F,\quad b\in F^*\}$$

یک گروه است که روی F اکیداً ۲ ــ انتقالی عمل می‌کند.
به‌عکس برای هر گروه Γ که روی مجموعه‌ای مانند F اکیداً دوانتقالی عمل می‌کند، عمل‌های $+$ و $\cdot$ وجود دارند به‌قسمی که $(F,+,\cdot)$ یک شبه‌حوزه است و $\Gamma=A(F)$.
کارتسل مثالی از شبه‌حوزهٔ سره ارائه نکرد و هنوز هم وجود شبه‌حوزهٔ سره مسأله‌ای باز است. با وجود این، وفلشاید[4] و کربی[5] به مطالعهٔ ساختار خاصی پرداختند که با عمل «$+$» در یک شبه‌حوزه

1) Tits 2) Gratze 3) neardomain 4) Wefelscheid 5) Kerby

مشخص می‌شود. آن‌ها خواص زیادی از این ساختار را اثبات کردند ولی چون موفق به ارائهٔ مثالی در این مورد نشدند، از چاپ آن خودداری کردند. تا این‌که در سال ۱۹۸۸ اونگار مقالهٔ خود را در مورد ساختار جبری جمع نسبیتی به مجلهٔ .Resultate Math فرستاد. وفلشاید، سردبیر این مجله، ساختار مورد نظر اونگار را بدون آن‌که مثالی برایش بشناسد از پیش به‌خوبی می‌شناخت و به همین دلیل اهمیت آن را در رابطه با گروه‌های جایگشتی اکیداً ۲ ــ انتقالی به آگاهی وی رسانید. اونگار نیز به همین دلیل، لوپ وابسته به جمع نسبیتی را به افتخار کارتسل K ــ لوپ (K ــ دور) نامید. پیش از آن، در مورد لوپ (دور) و اهمیت هندسی آن مطالعات زیادی صورت پذیرفته بود. یک لوپ درحالت کلی ویژگی‌های تعویض‌پذیری و شرکت‌پذیری ندارد.

مفهوم K ــ لوپ به روش‌های مختلف قابل تعریف است که همگی هم‌ارز هستند. لوپ K یک K ــ لوپ است هرگاه رابطهٔ

$$a+(b+(a+c))=(a+(b+a))+c \tag{۶}$$

و ویژگی معکوس خودریخت

$$-(a+b)=(-a)+(-b) \tag{۷}$$

در آن برقرار باشند (منظور از $-a$ معکوس راست است که از رابطهٔ $a+(-a)=\circ$ به‌دست می‌آید). اگر $(K,+)$ یک لوپ باشد، برای هر $a,b,x\in K$، رابطهٔ $a+(b+x)=(a+b)+\delta_{a,\,b}(x)$ یک نگاشت دوسویی $\delta_{a,\,b}:K\longrightarrow K$ تعریف می‌کند که آن را نگاشت دقت[۳] می‌نامند. نگاشت‌های دقت در یک K ــ لوپ، خودریختی‌های آن هستند. در پی کشف اونگار، کارتسل و شاگردانش مثال‌های متعددی از K ــ لوپ کشف کردند ([۶، ۷]).

در ادامهٔ این بخش نشان می‌دهیم که $(\mathbb{D},\oplus)$ یک K ـ لوپ است. بنا بر تعریف، O عضو خنثای عمل $\oplus$ است و $a\oplus(-a)=(-a)\oplus a=O$. فرض کنیم $a^+:=\tilde{a}'\circ\tilde{O}$ و $\mathcal{M}:=\{a^+:a\in\mathbb{D}\}$.

در این صورت $\mathcal{M}$ زیرگروهی از گروه حرکت‌های صفحهٔ هذلولوی است. اگر x' نقطهٔ وسط $\tilde{O}(a)$ و b باشد، آن‌گاه $x=\widetilde{x'}(O)$ جواب منحصر به فرد معادلهٔ $x+a=b$ خواهد بود. به همین ترتیب $x=\tilde{O}\circ\tilde{a'}(O)$ جواب منحصر به فرد معادلهٔ $a+x=b$ است. بنابراین $(\mathbb{D},\oplus)$ یک لوپ است و $\tilde{O}\in\mathrm{Aut}(\mathbb{D},\oplus)$ [۸]، یعنی

$$-(a\oplus b)=(-a)\oplus(-b)$$

علاوه بر این،

$$(a+(b+a))^+(O) \quad = \quad a^+\circ b^+\circ a^+(O).$$

1) precision map

از سوی دیگر برای هر $\widetilde{x} \in \widetilde{\mathbb{D}}$، داریم $\widetilde{\mathbb{D}} = \tilde{x} \circ \widetilde{\mathbb{D}} \circ \tilde{x}$. پس یک $c' \in \mathbb{D}$ وجود دارد که $\widetilde{c'} = \tilde{a}' \circ \tilde{O} \circ \tilde{b}' \circ \tilde{O} \circ \tilde{a}'$ و در نتیجه $a^+ \circ b^+ \circ a^+ = \widetilde{c'} \circ \widetilde{O} = c^+ = (a + (b + a))^+$. نکتهٔ مهم دیگر این‌که $(\mathbb{D}, \oplus)$ نه تعویض‌پذیر است و نه شرکت‌پذیر. در واقع اگر قرار دهیم $\delta = \delta_{a,b} = (a^+(b)^+)^{-1} \circ a^+ \circ b^+$، آن‌گاه طبق تعریف،

$$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus \delta(c)$$

و $\delta(O) = O$ [۴]. به این ترتیب برای هر $x, y \in \mathbb{D}$ داریم

$$\delta \circ\ x^+ \circ \delta^{-1}(o) = \delta \circ\ x^+(O) = \delta(x) = (\delta(x))^+(O)$$

چون $\mathbb{D}^+$ روی $\mathbb{D}$ اکیداً ۲ ـ انتقالی عمل می‌کند، $\delta \circ\ x^+ \circ \delta^{-1} = (\delta(x))^+$ و در نتیجه

$$\delta(x) \oplus \delta(y) \quad = \quad \delta(x \oplus y)$$

یعنی δ یک خودریختی $(\mathbb{D}, \oplus)$ است [۴]. در واقع δ که پیش از این نگاشت دقت نامیده شد، یک دوران حول O است که دوران توماس[1] هم نامیده می‌شود [۱۲]. زاویهٔ دوران توماس برابر کاستی مثلث $\triangle(O, a, -b)$ است [۵].

۴. نظریهٔ نسبیت خاص

در این بخش به رهیافت فیزیکی ساختار $(\mathbb{D}, \oplus)$ می‌پردازیم. در بیشتر کتاب‌های آموزشی فیزیک دربارهٔ نسبیت خاص، به‌ندرت جمع سرعت‌ها در حالت کلی بیان می‌شود. رهیافتی که در کتاب‌های پیشرفته‌تر مطرح می‌شود بر اساس شکل کلی تبدیل‌های لورنتس است. پیش از ارائهٔ ساختار جبری جمع نسبیتی به‌وسیلهٔ اونگار، فیزیکدان‌ها در تفسیر تبدیل‌های مختصات مختلف ابهام‌های زیادی داشتند. این مشکلات زمانی برطرف شدند که ساختار جبری جمع نسبیتی مشخص شد. در واقع تبدیل‌های بین دو دستگاه مختصات تنها با سرعت نسبی آن‌ها قابل تعیین نیست. باید یکریختی‌های خاصی نیز دخالت داده شوند. این یکریختی‌ها، دوران‌هایی در فضای برداری $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ هستند. برای نخستین بار، توماس در مدل بور برای اتم هیدروژن، دوران دستگاه مختصات چسبیده به الکترون را مورد توجه قرار داد تا بتواند با تکیه بر نظریهٔ نسبیت، رفتار اتم هیدروژن را از نظر محاسباتی تحلیل کند. تاریخچهٔ این مطلب حاوی نکات آموزنده‌ای از تاریخ فیزیک است. نخستین بار، کرونیگ[1] در سال ۱۹۲۵ متوجه شد که تکانه زاویه‌ای کل الکترون در اتم هیدروژن از تکانه اربیتالی آن بزرگتر است. تنها ایدهٔ معقولی که به ذهن می‌رسید این بود که برای خود الکترون هم یک حرکت چرخشی به دور محورش در نظر بگیریم. وی متوجه شد که با وجود این فرض، همچنان یک مشکل باقی می‌ماند؛ این‌که نتیجهٔ محاسبات نظری دو برابر مقدار حاصل از ملاحظات

1) Thomas rotation   2) Kronig

تجربی بود! وی ایدهٔ اسپین الکترون را با فیزیکدان‌های برجسته‌ای چون پاولی و هایزنبرگ مطرح کرد ولی نتوانست آنان را قانع کند و در نتیجه از چاپ ایده‌هایش خودداری کرد. اواخر همان سال در نامهٔ کوتاهی به مجلهٔ Naturwissenschaften گودشمیت[۲] و اُلن بک[۳] مدعی شدند که باید برای الکترون یک تکانهٔ زاویه‌ای در نظر گرفت. ایشان به بور هم نامه‌ای نوشتند و این ایده را پی‌گیری کردند. اما بور مشکل ضریب ۲، یعنی ناسازگاری نظریه و تجربه را می‌دانست و نسبت به درستی این فرضیه شک داشت. توماس که به نظریهٔ نسبیت تسلط داشت و در آن زمان مأمور به خدمت در آزمایشگاه بور بود، توانست بر اساس نسبیت خاص این ضریب را توجیه کند [۹]. چون سرعت الکترون نزدیک به سرعت نور است، مکانیک کلاسیک قادر به توجیه این پدیده نیست. این کشف حتی برای خود اینشتین هم شگفت‌آور بود. به این ترتیب، جمع نسبیتی در مکانیک کوانتومی یک کاربرد مهم دیگر به‌دست آورد. یکی از بحث‌های عمدهٔ نسبیت خاص، بررسی سرعت‌های نسبی یک متحرک نسبت به دستگاه‌های مرجع مختلف است. در فیزیک کلاسیک رابطهٔ بین سرعت نسبی یک متحرک نسبت به دستگاه‌های مختلف به‌وسیلهٔ تبدیلات گالیله تعیین می‌شود. برای توضیح نقش تبدیلات گالیله در مکانیک کلاسیک و تفاوت آن با تبدیلات لورنتس که در نظریهٔ نسبیت مطرح می‌شوند، ابتدا به یادآوری چند نکته می‌پردازیم.

دستگاه‌های مختصات K و K' را به‌ترتیب با محورهای $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$ و $x'_۱$، $x'_۲$، $x'_۳$ در نظر می‌گیریم. فرض کنیم K' نسبت به K با سرعت $v = (v_۱, v_۲, v_۳)$ در حال حرکت است. زمان را در K با t و در K' با t' نشان می‌دهیم. رخداد A در K به‌وسیلهٔ سه مختص مکانی $(x_۱, x_۲, x_۳)$ و یک مختص زمانی t_A مشخص می‌شود که برداری از فضا ــ زمان $(\mathbb{R}^۴, \mathbb{R})$ تشکیل می‌دهند. برای این دو دستگاه منظور از تبدیل گالیله، تبدیل

$$\gamma(A) = (x'_۱, x'_۲, x'_۳, ct_A) = (x_۱ + v_۱t, x_۲ + v_۲t, x_۳ + v_۳t, ct_A)$$

است که در آن t_A در c، سرعت نور ضرب شده است. با تبدیل گالیله، اگر یک شئ نسبت به K دارای سرعت w باشد، نسبت به K' دارای سرعت $w + v$ است. آزمایش‌های مایکلسون در سال ۱۸۸۱ نشان داد که این مطلب برای سرعت نور نادرست است. نظریه‌پردازی بر اساس فرضیهٔ اتر (محیط حامل امواج نور) برای توجیه این آزمایش، با رهیافت کاملاً جدید اینشتین پایان یافت. فرضیهٔ اینشتین بر دو بنداشت استوار است:

۱) سرعت نور نسبت به همهٔ دستگاه‌های مختصات یکسان است؛

۲) تبدیل λ از K به K' و معکوس آن $\lambda^{-۱}$ از K' به K متقارن هستند.

بر اساس دو اصل فوق، فاصلهٔ لورنتس ــ مینکوفسکی، یعنی

$$(x_۱ - y_۱)^۲ + (x_۲ - y_۲)^۲ + (x_۳ - y_۳)^۲ - c^۲(t_A - t_B)^۲$$

1) Goudsmit 2) Uhlenbeck

بین دو نقطهٔ A به مختصات $(x_۱, x_۲, x_۳, ct_A)$ و B به مختصات $(y_۱, y_۲, y_۳, ct_B)$ به‌جای فاصلهٔ اقلیدسی قرار می‌گیرد. فاصلهٔ لورنتس ــ مینکوفسکی یک فرم دوخطی نامعین است که با ماتریس زیر مشخص می‌شود:

$$M = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱ \end{pmatrix}$$

در حالی که فاصلهٔ اقلیدسی یک فرم مثبت معین است که با ماتریس همانی $I_{۴\times۴}$ مشخص می‌شود. به این ترتیب با متر لورنتس ــ مینکوفسکی، فاصلهٔ دو رویداد A و B که آن را با $d(A,B)$ نمایش می‌دهیم عبارت است از $d(A,B) = (A-B)M(A-B)^t$. در فیزیک نظری $(\mathbb{R}^۴, \mathbb{R}, d)$ را فضا ــ زمان مینکوفسکی می‌نامند. در حالت کلی ماتریس $L = (l_{ij})_{۴\times۴}$ که $LML^t = M$، ماتریس لورنتس و نگاشت $\lambda : \mathbb{R}^۴ \to \mathbb{R}^۴ \quad ; \quad A \mapsto AL$ تبدیل لورنتس نامیده می‌شود. ردهٔ خاصی از تبدیل‌های لورنتس، بوست‌های لورنتس[1] هستند. یک مثال ساده از بوست لورنتس در حالتی به‌دست می‌آید که دستگاه مختصات K' نسبت به دستگاه K حرکت یک بعدی با سرعت $v = (v_x, ۰, ۰)$ در راستای محور x دارد. در این حالت ماتریس نظیر یک بوست لورنتس عبارت است از

$$B(v) = \begin{pmatrix} \gamma & ۰ & ۰ & \gamma\frac{v_x}{c} \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ \gamma\frac{v_x}{c} & ۰ & ۰ & \gamma \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma = \sqrt{\frac{۱}{۱ - \frac{v_x^۲}{c^۲}}}.$$

اگر مختصات رخدادی در دستگاه K برابر $(x_۱, y_۱, z_۱, t)$ باشد، در دستگاه K' دارای مختصات زیر است:

$$x'_۱ = \gamma(x_۱ + v_x t), \quad x'_۲ = x_۲, \quad x'_۳ = x_۳, \quad t' = \gamma(\frac{v_x}{c^۲}x_۱ + t)$$

در سال ۱۹۱۱، بریل[2] قضیهٔ مهمی در مورد بوست‌های لورنتس ثابت کرد.

قضیه ۵. برای هر ماتریس لورنتس L یک بوست لورنتس منحصر به فرد $B(v)$ با سرعت وابستهٔ v و یک ماتریس متعامد ۳×۳ مانند D وجود دارد که

$$L = B(v)\,\tilde{D} \quad , \quad \tilde{D} = \begin{pmatrix} & D & & ۰ \\ & & & ۰ \\ & & & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}.$$

علاوه بر قضیهٔ فوق یک نکتهٔ مهم در مورد بوست‌های لورنتس این است که حاصل ضرب دو بوست لورنتس $B(v)$ و $B(u)$ یک بوست لورنتس است هرگاه v و u مستقل خطی باشند. قضیهٔ ٦ رابطهٔ بین دو بوست لورنتس را در حالت کلی به‌دست می‌دهد.

1) Lorenz boost 2) Brill

قضیه ۶. برای دو بوست $B(v)$ و $B(u)$ با سرعت‌های وابستهٔ v و u، بوست منحصر به فردی مانند $B(w)$ با سرعت وابستهٔ w و یک ماتریس متعامد ۳ × ۳ مانند $D(u,v)$ وجود دارد که

$$B(u)B(v) = B(w)\tilde{D}(u,v).$$

در حالت کلی اگر ماتریس D متعامد باشد، آن‌گاه ماتریس $D^{-1} = D^t$ نیز متعامد است و یک دوران را مشخص می‌کند. به این ترتیب اگر برای دو بوست $B(v)$ و $B(u)$ فرض کنیم $D(u,v)$ ماتریسی باشد که به‌وسیلهٔ قضیهٔ ۵ مشخص می‌شود، آن‌گاه نگاشت $\delta_{u,v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad ; \quad A \mapsto A\ D^t(u,v)$ همان دوران توماس است. در بخش قبل نیز به این دوران اشاره شد.

برای سرعت‌های v و u در مجموعهٔ سرعت‌های مجاز $\mathbb{R}^3_c$ (سرعت‌های کمتر از سرعت نور در خلأ)، جمع نسبیتی $u \oplus v$ بر اساس تبدیلات لورنتس به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\oplus : \mathbb{R}^3_c \times \mathbb{R}^3_c \to \mathbb{R}^3_c \quad ; \quad u \oplus v = \frac{u+v}{1+\frac{\langle u,v\rangle}{c^2}} + \frac{1}{c^2}\,\frac{\gamma_v}{\gamma_v+1}\,\frac{\langle u,v\rangle u - u^2 v}{1+\frac{\langle u,v\rangle}{c^2}}$$

در اینجا $\langle u,v\rangle := u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$ و $u^2 := u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$. اگر سرعت نور را برابر ۱ در نظر بگیریم، جمع نسبیتی همان فرمول ۴ در قضیهٔ ۳ است که در مدل بلترامی ـ کلاین به‌دست آمد. در قضیهٔ بعد یک ویژگی K ـ لوپ برای جمع نسبیتی روی مجموعهٔ سرعت‌های مجاز اثبات شده است. اثبات بقیهٔ ویژگی‌ها به‌طور مشابه انجام می‌شود [۶].

قضیهٔ ۷. برای $u,v,w \in \mathbb{R}^3$ و دوران توماس $\delta_{u,v}$ داریم $u \oplus (v \oplus w) = (u \oplus v) \oplus \delta_{u,v}(w)$.

۵. نتیجه

در پایان بحث، دو رهیافت هندسی و فیزیکی برای بررسی ساختار جبری جمع نسبیتی روی مجموعهٔ سرعت‌های مجاز را به‌طور خلاصه بیان می‌کنیم.

- بر اساس رهیافت هندسی، به‌کمک ویژگی‌های ابتدایی بازتاب‌ها و تعبیری مستقل از توازی برای جمع بردارها در مدل بلترامی ـ کلاین، فرمول جمع نسبیتی و ساختار جبری آن به‌دست می‌آید.
- بر اساس رهیافت فیزیکی، به‌کمک دو اصل فیزیکی نظریهٔ نسبیت خاص که مبنای تجربی دارند، متر مناسب و سپس تبدیلات مناسب بین دستگاه‌های مختصات به‌دست می‌آید. سپس به‌کمک خواص این تبدیل‌ها فرمول جمع نسبیتی و ساختار جبری آن به‌دست می‌آید.

مراجع

[1] Karzel H., "Zusammenhänge zwischen Fastbereichen, scharf zweifach transitiven Permutationsgruppen und 2-strukturen mit Rechtecksaxiom", *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **32** (1968), 191-205.

[2] Karzel H., Sörensen K., Windelberg D., *Einführung in die Geometrie*, Vandenhoeck, Göttingen, 1973.

[3] Karzel H. & Kroll H. J., *Geschichte der Geometrie seit Hilbert*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1988.

[4] Karzel H., "Recent developments on absolute geometries and algebraization by K-loops",*Discrete Math.* **208/209** (1999), 387-409.

[5] Karzel H. and Marchi, M., "Relation between the K-loop and the defect of an absolute plane", *Results. Math.*, **47** (2005), 305-326.

[6] Kiechle H., *Theory of K-Loops*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[7] Kreuzer A., "Beispiele endlicher und unendlicher K - Loops", *Resultate Math.*, **23** (1993), 355 - 362.

[8] Taherian S. gh., "On algebraic structures related to Beltrami-Klein model of hyperbolic geometry". *Results. Math.*, **57**(2010), 205-219.

[9] Thomas H. L., "The motion of the spinning electron". *Nature* (1926), 117-514.

[10] Ungar A. A., "Thomas rotation and the parametrization of the Lorentz transformation group", *Found. Phys. Lett.*, **1** (1988), 57-89.

[11] Ungar A. A., "The relativistic noncommutative nonassociative group of velocities and the Thomas rotation". *Resultate Math.*, **16** (1989), 168-179.

[12] Ungar A. A., "Thomas precession and its associated grouplike structure", *Amer. J. Phys.*, **59** (1991), 824-834.

[13] Ungar A. A., *Beyond the Einstein addition law and its gyroscopic Thomas Precession.* Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 2001.

[14] Ungar A. A., *Analytic Hyperbolic Geomtry and Albert Einstein special theory of relativity*, World scientific, 2008.

[۱۵] ماروین جی گرینبرگ، هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی، ترجمهٔ م. ه. شفیعیها، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۱.

سید قهرمان طاهریان
دانشکدهٔ علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان
taherian@cc.iut.ac.ir