فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۸ (پاییز ۱۳۹۰) صص. ۲۳ تا ۴۵

روابط اندازه‌پذیر و معادلات عملگری تصادفی در فضاهای باناخ

روح‌الله جهانی‌پور، نرگس تراکمه سامانی

چکیده

در این مقاله، نگاشت‌های چندمقداری یا روابط اندازه‌پذیر را معرفی و ارتباط بین تعریف‌های مختلف اندازه‌پذیری آن‌ها را مطالعه می‌کنیم. موضوع نگاشت‌های چندمقداری اندازه‌پذیر، در نظریهٔ بازی و نظریهٔ کنترل کاربرد دارد. همچنین مطالب بیان شده را برای بررسی وجود جواب معادلات عملگری تصادفی غیرخطی در فضاهای باناخ به‌کار می‌بریم.

۱. مقدمه

نگاشت چندمقداری یا رابطهٔ اندازه‌پذیر، تابع مجموعه ــ مقداری است که به هر عضو t از یک فضای اندازه‌پذیر T، زیرمجموعه‌ای از یک فضای توپولوژیک X را نسبت می‌دهد به‌طوری که در یکی از چندین تعریف اندازه‌پذیری صدق کند. این روابط به‌طور گسترده‌ای در سال‌های ۱۹۶۰ تا ۱۹۸۰ توسط محققان مشهوری چون اومان [۱]، دبریو [۱۴]، ژاکوبس [۲۸]، کوراتوفسکی و ریل ــ نارزوسکی [۳۴]، مک‌شین و وارفیلد [۳۵]، هیملبرگ [۱۹]، هیملبرگ و ون‌ولک [۲۰، ۲۱، ۲۲] و بسیاری دیگر مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. به‌ویژه هیملبرگ [۱۹، ۲۳] در یک پژوهش عالی، برای بررسی ویژگی‌های روابط اندازه‌پذیر، ابتدا ارتباط میان تعاریف مختلف اندازه‌پذیری را مورد مطالعه قرار داد و به‌کمک آن‌ها شرایط کافی برای اندازه‌پذیری اشتراک حداکثر شمارا از روابط اندازه‌پذیر را به‌دست آورد. این نتایج در تعمیم قضایای مهم و اساسی انتخاب کوراتوفسکی و ریل ــ نارزوسکی و توسیع اومان از قضیهٔ انتخاب اندازه‌پذیر نیومن، هم‌چنین در تعمیم قضیهٔ تابع

ضمنی فیلیپف [۱۶] مورد استفاده قرار گرفتند. در بسیاری از این کارها، X فضای متریک فشرده یا اقلیدسی در نظر گرفته می‌شود. هیملبرگ برای توسیع نتایج قبلی، T را فضای اندازه‌پذیر مجرد و X را فضای متریک جدایی‌پذیر فرض کرد. حقیقت این است که در کار با T، باید فشردگی را معمولاً (نه همیشه) یا برای X یا برای مقادیر نگاشت چندمقداری با مقادیر در X، در نظر بگیریم. هیملبرگ نتایج مشابهی را با این فرض که X فضای سوسلین و روی زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر T، اندازهٔ σ ـ متناهی تعریف شده باشد، به‌دست آورد.

در نظریهٔ عملگرهای تصادفی (احتمالی) سعی می‌شود با استفاده از ابزارهای نظریهٔ احتمال و آنالیز تابعی، رفتار معادلات شامل عملگرهای تصادفی از جمله وجود و یکتایی و اندازه‌پذیری جواب‌ها مورد بررسی و مطالعه قرار گیرد. نتایجی که از این مطالعات به‌دست می‌آید در شناخت معادلات دیفرانسیل تصادفی کاربرد دارد. اسپاچک[1] و هانس [۱۷] مطالعه روی معادله‌های شامل عملگرهای تصادفی را آغاز و قضایای نقطهٔ ثابت تصادفی از نوع انقباضی را اثبات کردند. این نتایج توسط هانس و بهاروچا ـ رید [۲، ۳] تعمیم داده و در مسائل مختلفی به‌کار برده شدند. ایتوه [۲۵، ۲۷] قضیهٔ اسپاچک و هانس را برای نگاشت‌های انقباضی چندمقداری تعمیم داد. به‌علاوه وی قضایای نقطهٔ ثابت تصادفی مختلفی را روی فضاهای اندازه‌پذیر کلی برای نگاشت‌های چندمقداری یا تک‌مقداری (از نوع بسط‌ناپذیر یا چگالنده) به‌دست آورد که برای اثبات آن‌ها از نظریهٔ انتخاب‌های اندازه‌پذیر برای نگاشت‌های چندمقداری، به‌طور مؤثری استفاده شده است. در ادامه، ایتوه [۲۶] از همین نظریه استفاده کرد تا بتواند جواب‌های معادلات تصادفی غیرخطی با عملگرهای یکنوای تصادفی را در فضاهای باناخ به‌دست آورد. افراد دیگری از جمله کتّان و صالحی [۲۹] معادله‌های تصادفی شامل عملگرهای یکنوا را مطالعه و وجود جواب‌های معادلات همرشتاین تصادفی را اثبات کردند. روش آن‌ها برای اثبات اندازه‌پذیری جواب‌ها، تا حد زیادی به یکتایی جواب‌ها بستگی دارد. هدف اصلی ما در این مقاله این است که از نظریهٔ انتخاب‌های اندازه‌پذیر برای نگاشت‌های چندمقداری استفاده کنیم تا وجود جواب برای معادلات تصادفی غیرخطی با عملگرهای یکنوا در فضاهای باناخ را نتیجه بگیریم ([۱۹]، [۲۳]، [۲۶]، [۳۰]).

از این‌جا به بعد، فرض می‌کنیم T یک فضای اندازه‌پذیر با σ ـ جبر A است. هم‌چنین در بیشتر مواقع X را فضای متریک‌پذیر و جدایی‌پذیر فرض می‌کنیم. در ابتدا بعضی از مفاهیم مقدماتی وابسته به نگاشت‌های چندمقداری را تعریف می‌کنیم.

---

1) Spacek

۲. روابط اندازه‌پذیر و ارتباط بین تعریف‌های مختلف اندازه‌پذیری

نگاشت چندمقداری یا رابطهٔ $F : T \to X$ که در این مقاله به منظور اختصار گاهی آن را صرفاً نگاشت می‌خوانیم، زیرمجموعه‌ای از $T \times X$ است که آن را به‌عنوان تابعی از T به مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های X، $P(X)$، در نظر می‌گیریم و تابع مجموعه ـ مقدار نیز می‌نامیم. مجموعهٔ $\{t \in T : F(t) \neq \emptyset\}$ را دامنهٔ F می‌نامیم و آن را با نماد $\mathrm{Dom}(F)$ نشان می‌دهیم. گوییم تابع مجموعه ـ مقدار $F : T \to X$ مقادیر بسته، کراندار، فشرده و محدب دارد اگر برای هر $t \in T$، $F(t) \subseteq X$ به‌ترتیب، بسته، کراندار، فشرده و محدب باشد. نمودار رابطهٔ $F : T \to X$ را با $Gr(F)$ نمایش می‌دهیم و به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$Gr(F) = \{(t, x) \in T \times X : x \in F(t)\}$$

در واقع $Gr(F)$ با خود F برابر است، به همین دلیل اغلب وقتی بخواهیم روی ویژگی‌های F به‌عنوان زیرمجموعه‌ای از $T \times X$ تأکید کنیم، ترجیح می‌دهیم این ویژگی را دربارهٔ نمودار F بیان کنیم. به منظور بیان پیوستگی و اندازه‌پذیری توابع مجموعه ـ مقدار، نوعی تصویر وارون برای آن‌ها تعریف می‌شود از این قرار که اگر $B \subseteq X$، آن‌گاه $F^{-1}(B) = \{t \in T : F(t) \cap B \neq \emptyset\}$.

اکنون چند نوع مفهوم اندازه‌پذیری برای نگاشت‌های چندمقداری تعریف می‌کنیم. ویژگی‌ها و روابط بین این تعریف‌ها، اساس بحث ما در این بخش از مقاله است.

تعریف ۱.۲ رابطهٔ $F : T \to X$ اندازه‌پذیر (ضعیف ـ اندازه‌پذیر، β ـ اندازه‌پذیر، $\mathcal{C}$ ـ اندازه‌پذیر) است اگر و تنها اگر برای هر زیرمجموعهٔ بسته (به‌ترتیب، باز، برل، فشرده) B از X، $F^{-1}(B)$ اندازه‌پذیر باشد.

اگر Y یک فضای توپولوژیک باشد و $F : Y \to X$ ($F \subseteq Y \times X$)، آن‌گاه گوییم F اندازه‌پذیر (ضعیف ـ اندازه‌پذیر و غیره) است در صورتی که Y به σ ـ جبر β از زیرمجموعه‌های برل Y مجهز شده باشد. هم‌چنین اگر $F : T \times Y \to X$ ($F \subseteq (T \times Y) \times X$)، آن‌گاه انواع اندازه‌پذیری F روی σ ـ جبر حاصلضربی $\mathcal{A} \otimes \beta$ بر $T \times Y$ تعریف می‌شود. می‌دانیم هر مجموعهٔ بسته، برل است. پس اگر $F : T \to X$ یک نگاشت چندمقداری باشد، به‌راحتی نتیجه می‌گیریم β ـ اندازه‌پذیری F، اندازه‌پذیری آن را نتیجه می‌دهد. هم‌چنین می‌دانیم هر مجموعهٔ باز در یک فضای متریک، F_σ است. پس اگر X فضای متریک باشد، اندازه‌پذیری F، ضعیف ـ اندازه‌پذیری آن را نتیجه می‌دهد. هم‌چنین اگر رابطهٔ F اندازه‌پذیر یا ضعیف ـ اندازه‌پذیر باشد، نتیجه می‌گیریم دامنهٔ F اندازه‌پذیر است، زیرا X هم باز و هم بسته است. اثبات این مطالب و آنچه در ادامه می‌آوریم در [۱۹] وجود

دارد.

گزاره ۲.۲ گیریم J مجموعه‌ای متناهی‌شمارا و برای هر $n \in J$، $F_n : T \to X$ نگاشت چندمقداری باشد. در این‌صورت

الف) اگر هر F_n اندازه‌پذیر (ضعیف ــ اندازه‌پذیر، β ــ اندازه‌پذیر، $\mathcal{C}$ ــ اندازه‌پذیر) باشد، آن‌گاه نگاشت $\bigcup\limits_{n\in J} F_n : T \to X$ تعریف شده به‌صورت $(\bigcup\limits_{n\in J} F_n)(t) = \bigcup\limits_{n\in J} F_n(t)$ نیز اندازه‌پذیر (ضعیف ــ اندازه‌پذیر، β ــ اندازه‌پذیر، $\mathcal{C}$ ــ اندازه‌پذیر) است.

ب) اگر X فضای متریک جدایی‌پذیر و هر F_n ضعیف ــ اندازه‌پذیر (اندازه‌پذیر، $\mathcal{C}$ ــ اندازه‌پذیر) باشد، آن‌گاه نگاشت $\prod\limits_{n\in J} F_n : T \to X^J$ تعریف شده به‌صورت $(\prod\limits_{n\in J} F_n)(t) = \prod\limits_{n\in J} F_n(t)$ نیز ضعیف ــ اندازه‌پذیر (اندازه‌پذیر، $\mathcal{C}$ ــ اندازه‌پذیر) است.

اندازه‌پذیری اشتراک متناهی‌شمارا از روابط اندازه‌پذیر (ضعیف ــ اندازه‌پذیر و غیره) مشکل است. در این مورد در آینده‌ای نزدیک بحث خواهیم کرد. فعلاً به گزارهٔ زیر قناعت می‌کنیم.

گزاره ۳.۲ فرض کنیم $F : T \to X$ یک رابطهٔ اندازه‌پذیر (ضعیف ــ اندازه‌پذیر، β ــ اندازه‌پذیر، $\mathcal{C}$ ــ اندازه‌پذیر) و Z زیرمجموعهٔ بسته (به‌ترتیب، باز، برل، فشرده) از X باشد، آن‌گاه نگاشت $F_Z : T \to X$ تعریف شده به‌صورت $F_Z(t) = F(t) \cap Z$ نیز اندازه‌پذیر (ضعیف ــ اندازه‌پذیر، β ــ اندازه‌پذیر، $\mathcal{C}$ ــ اندازه‌پذیر) است.

اندازه‌پذیری شمول و بستار نگاشت‌های چندمقداری اندازه‌پذیر از ویژگی‌های مهم آن‌ها است که در اثبات بسیاری از قضایای مربوط به این بحث به‌کار می‌آیند. در واقع اگر X یک زیرفضای Y باشد و برای هر $t \in T$، $F(t) \subseteq X$، آن‌گاه F به‌عنوان نگاشتی از T به X، (ضعیف ــ) اندازه‌پذیر است اگر و تنها اگر F به‌عنوان نگاشتی از T به Y، (ضعیف ــ) اندازه‌پذیر باشد. یعنی اگر $i : X \hookrightarrow Y$ نگاشت شمول باشد، آن‌گاه $F : T \to X$ (ضعیف ــ) اندازه‌پذیر است اگر و تنها اگر $i \circ F : T \to Y$ (ضعیف ــ) اندازه‌پذیر باشد. هم‌چنین $F : T \to X$ ضعیف ــ اندازه‌پذیر است اگر و تنها اگر $\overline{F} : T \to X$ که برای هر $t \in T$، به‌صورت $\overline{F}(t) = \overline{F(t)}$ تعریف می‌شود، ضعیف ــ اندازه‌پذیر باشد.

هیملبرگ در شروع کار خود، ارتباط میان مفاهیم مختلف اندازه‌پذیری را، به‌ویژه در مواردی که روابط مقادیر بسته دارند، مورد بررسی قرار داد و شرایطی را فراهم آورد تا اشتراک متناهی‌شمارا از روابط اندازه‌پذیر، اندازه‌پذیر باشد. یکی از نتایج مهمی که وی به‌دست آورد، این بود که تحت

افزودن شرط فشردگی به مقادیر یک رابطه، ضعیف ــ اندازه‌پذیری با اندازه‌پذیری هم‌ارز می‌شود. این نتیجه در قضیهٔ (۳.۱) از [۱۹] آمده است.

در ادامه، دو قضیه می‌آوریم که در روند اثبات بسیاری از قضیه‌های مربوط به اندازه‌پذیری روابط، نقش به‌سزایی دارند. فرض کنیم $F \subseteq T \times X$ یک نگاشت چندمقداری باشد. تصویر مجموعهٔ F روی T را با $P_T(F)$ نشان می‌دهیم. هم‌چنین فرض می‌کنیم $(T, \mathcal{A}_\mu, \widehat{\mu})$ یک توسیع کامل برای فضای اندازهٔ $(T, \mathcal{A}, \mu)$ باشد.

قضیه ۴.۲ اگر X یک فضای متریک کامل و جدایی‌پذیر و T فضای اندازه باشد و $F \subseteq T \times X$ نسبت به σ ــ جبر حاصلضربی $\mathcal{A}_\mu \otimes \beta$ اندازه‌پذیر باشد ($F \in \mathcal{A}_\mu \otimes \beta$)، آن‌گاه $P_T(F) \in \mathcal{A}_\mu$.

یادآوری می‌کنیم که فضای توپولوژیک X را فضای لهستانی گوییم هرگاه جدایی‌پذیر و متریک‌پذیر و نسبت به متر خود کامل باشد. فضای لوزین آن است که متریک‌پذیر و تصویر پیوسته و دوسویی یک فضای لهستانی باشد و بالأخره فضای توپولوژیک X را یک فضای سوسلین گوییم هرگاه متریک‌پذیر و تصویر پیوستهٔ یک فضای لهستانی باشد.

قضیه ۵.۲ اگر T یک فضای اندازهٔ کامل، X فضای سوسلین و $F : T \to X$ یک نگاشت چندمقداری باشد به‌طوری که $F \in \mathcal{A} \otimes \beta$، آن‌گاه F، β ــ اندازه‌پذیر است.

اثبات قضیهٔ ۴.۲ در [۱۴] و قضیهٔ ۵.۲ در [۱۹] وجود دارد. این نتایج در اثبات و تعمیم قضایایی که از این پس می‌آیند، اهمیت دارند.

در بسیاری از نمونه‌ها، مفیدتر است که اندازه‌پذیری نگاشت چندمقداری $F : T \to X$ را برحسب $\mathcal{A} \otimes \beta$ ــ اندازه‌پذیری $Gr(F)$ (برای نمونه در کارهای اومان [۱] و دبریو [۱۴]) یا برحسب اندازه‌پذیری تابع $t \to d(x, F(t))$ بیان کنیم. در پایان این بخش، ارتباط میان مفاهیم مختلف اندازه‌پذیری برای نگاشت‌های با مقادیر بسته را در قضیهٔ زیر خلاصه می‌کنیم. این قضیهٔ ابزار بسیار مفیدی برای اهداف بعدی ما است. یادآوری می‌کنیم که فضای توپولوژیک X، σ ــ فشرده است اگر برابر با اجتماع تعداد منتهاشمارا از مجموعه‌های فشرده باشد.

قضیه ۶.۲ فرض کنیم X یک فضای متریک جدایی‌پذیر و $F : T \to X$ نگاشتی با مقادیر بسته باشد. احکام زیر را در نظر بگیرید:

الف) F، β ــ اندازه‌پذیر است؛

ب) F، اندازه‌پذیر است؛

پ) F، ضعیف ـ اندازه‌پذیر است؛

ت) F، $\mathcal{C}$ ـ اندازه‌پذیر است؛

ث) برای هر $x \in X$، تابع $t \to d(x, F(t))$ نسبت به t اندازه‌پذیر است؛

ج) $Gr(F)$ اندازه‌پذیر حاصلضربی است، یعنی $Gr(F) \in \mathcal{A} \otimes \mathfrak{B}(X)$.

در این صورت داریم

یک) الف $\Rightarrow$ ب $\Rightarrow$ پ $\Leftrightarrow$ ث $\Rightarrow$ ت و پ $\Rightarrow$ ج.

دو) اگر X، σ ـ فشرده نیز باشد، آن‌گاه

الف $\Rightarrow$ ب $\Leftrightarrow$ پ $\Leftrightarrow$ ت $\Leftrightarrow$ ث $\Rightarrow$ ج.

سه) اگر T فضای اندازه‌ی کامل و X فضای سوسلین باشد، آن‌گاه الف $\Leftrightarrow$ ب $\Leftrightarrow$ پ $\Leftrightarrow$ ث $\Leftrightarrow$ ج $\Rightarrow$ ت.

اگر نگاشت، مقادیر بسته نداشته باشد، قسمت (ج) در قضیهٔ فوق را با این گزاره جایگزین می‌کنیم که «$Gr(\overline{F})$، $\mathcal{A} \otimes \mathfrak{B}(X)$ ـ اندازه‌پذیر است.»

۳. اشتراک، متمم و مرز روابط اندازه‌پذیر، توسیع روابط اندازه‌پذیر

فرض کنیم برای هر n در یک مجموعهٔ منتهاشمارای J، $F_n : T \to X$ نگاشتی اندازه‌پذیر (یا شاید فقط ضعیف ـ اندازه‌پذیر) با مقادیر بسته باشد و $F : T \to X$ را به‌صورت $F(t) = \bigcap_{n \in J} F_n(t)$ تعریف کنیم. اگر T اندازهٔ σ ـ متناهی کامل داشته باشد و X فضای سوسلین باشد، آن‌گاه اندازه‌پذیری F را بلافاصله از بند (سه) در قضیهٔ ۶.۲ نتیجه می‌گیریم. حتی اگر اندازه روی T کامل نباشد و X فقط فضای متریک جدایی‌پذیر باشد، نتیجه می‌گیریم F نمودار اندازه‌پذیر دارد ($Gr(F) \in \mathcal{A} \otimes \beta$). برای اندازه‌پذیری F در این مورد، قضیهٔ زیر از هیملبرگ را داریم.

قضیه ۱.۳ فرض کنیم X یک فضای متریک جدایی‌پذیر و برای هر $n \in J$، $F_n : T \to X$ نگاشتی ضعیف ـ اندازه‌پذیر با مقادیر بسته باشد. اگر هم‌چنین فرض کنیم برای هر $t \in T$، $n \in J$ موجود است که $F_n(t)$ فشرده است، آن‌گاه $F = \bigcap_{n \in J} F_n$ اندازه‌پذیر است.

وقتی دربارهٔ یافتن جواب‌های معادلات تصادفی با عملگرهای یکنوا بحث می‌کنیم، قضیهٔ ۱.۳ یکی از مهم‌ترین ابزارهاست. از این قضیه نتیجه‌های مفیدی به‌دست می‌آید. اگر در قضیهٔ فوق، X را فضای متریک‌پذیر σ ـ فشرده فرض کنیم و برای هر $n \in J$، $F_n : T \to X$ نگاشتی

(ضعیف ـ) اندازه‌پذیر با مقادیر بسته باشد، آن‌گاه $\bigcap_{n\in J} F_n$ اندازه‌پذیر است و یا اگر فرض کنیم X فضای متریک‌پذیر و جدایی‌پذیر و برای هر $n \in J$، $F_n : T \to X$ نگاشتی $\mathcal{C}$ ـ اندازه‌پذیر با مقادیر بسته باشد، می‌توانیم نتیجه بگیریم $F = \bigcap_{n\in J} F_n$ نیز $\mathcal{C}$ ـ اندازه‌پذیر است.

قضیه ۲.۳ فرض کنیم X یک فضای متریک جدایی‌پذیر و $F : T \to X$ نگاشتی اندازه‌پذیر با مقادیر بسته باشد. نگاشت $G : T \to X$ که برای هر $t \in T$ به‌صورت $G(t) = X \setminus F(t)$ تعریف می‌شود، اندازه‌پذیر است.

در حقیقت به‌جای اندازه‌پذیری F، از این فرض ضعیف‌تر استفاده می‌کنیم که برای هر $x \in X$، $F^{-1}(\{x\})$ اندازه‌پذیر است و نشان می‌دهیم برای هر زیرمجموعهٔ B از X، $G^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. چنین چیزی ممکن است چون G مقادیر باز دارد. بگذارید اثبات این قضیه را به‌عنوان نمونه‌ای مفید بیان کنیم. فرض کنیم $B \subseteq X$ و A زیرمجموعهٔ چگال شمارش‌پذیر از B باشد، آن‌گاه

$$\begin{aligned} G^{-1}(B) &= \{t \in T : (X \setminus F(t)) \cap B \neq \emptyset\} \\ &= T \setminus \{t \in T : B \subseteq F(t)\} = T \setminus \{t \in T : A \subseteq F(t)\} \\ &= T \setminus \bigcap_{a\in A} \{t \in T : a \in F(t)\} = T \setminus \bigcap_{a \in A} F^{-1}(\{a\}) \end{aligned}$$

بنابراین $G^{-1}(B)$ اندازه‌پذیر است.

با استفاده از روشی که در اینجا به‌کار بردیم، می‌توانیم نتیجه بگیریم اگر X فضای متریک جدایی‌پذیر و $F, H : T \to X$ نگاشت‌های اندازه‌پذیر با مقادیر بسته باشند، آن‌گاه برای هر $t \in T$، $t \to H(t) \setminus F(t)$ نگاشتی اندازه‌پذیر تعریف می‌کند. با فرض‌های قوی‌تر، اگر T فضای اندازهٔ کامل و X فضای سوسلین باشد، با استفاده از قضیهٔ ۶.۲، به‌راحتی می‌توانیم قضیهٔ ۲.۳ و نتیجه‌ای که از آن گرفتیم را بررسی کنیم، زیرا $Gr(G) = (Gr(F))^c$ و $Gr(H \setminus F) = Gr(H) \cap (Gr(F))^c$.

فرصت خوبی است تا با استفاده از نتایجی که از اندازه‌پذیری اشتراک منتهاشمارا و متمم نگاشت‌های اندازه‌پذیر به‌دست آوردیم، دربارهٔ مرز روابط اندازه‌پذیر سخن بگوییم. فرض کنیم $(X, \mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد و $A \subset X$. مرز مجموعهٔ A که با $Bd(A)$ نشان می‌دهیم عبارت است از $Bd(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c}$.

قضیه ۳.۳ فرض کنیم $F : T \to X$ یک نگاشت چندمقداری باشد. نگاشت $BdF : T \to X$ که به‌صورت $t \to BdF(t)$ تعریف می‌شود، اندازه‌پذیر است اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

الف) X یک فضای متریک جدایی‌پذیر و F اندازه‌پذیر با مقادیر فشرده باشد؛

ب) X یک فضای متریک σ ــ فشرده و F اندازه‌پذیر با مقادیر بسته باشد؛

پ) T فضای اندازهٔ کامل، X فضای سوسلین و $Gr(F)$، $\mathcal{A} \otimes \beta$ ــ اندازه‌پذیر باشد؛

ت) T فضای اندازهٔ کامل، X فضای سوسلین و F اندازه‌پذیر با مقادیر بسته باشد.

از قضیهٔ فوق می‌توانیم نتیجه بگیریم اگر X فضای متریک جدایی‌پذیر و $F : T \to X$، $\mathcal{C}$ ــ اندازه‌پذیر با مقادیر بسته باشد، آن‌گاه نگاشت BdF، $\mathcal{C}$ ــ اندازه‌پذیر است.

هیملبرگ و ون‌ولک [۲۳] تعدادی از نتایجی را که تا این‌جا گردآوری شده است با تغییر و یا کاهش بعضی فرض‌ها، به‌ویژه حذف فرض جدایی‌پذیریِ X توسیع دادند و مثال‌های نقضی آوردند تا برجستگی بعضی نتایج و محدودیت‌های طبیعی را که در برخورد با نگاشت‌های اندازه‌پذیر و ویژگی‌هایشان وجود دارد، نشان دهند. ما مثال‌های دیگری نیز جمع‌آوری کرده‌ایم که در ادامه مشاهده خواهید کرد. قضیهٔ زیر در حالتی که X فضای متریک جدایی‌پذیر است در [۱۹] اثبات شده است.

قضیه ۴.۳ فرض کنیم X یک فضای متریک و $F : T \to X$ $(F \subseteq T \times X)$ نگاشتی با مقادیر بسته باشد. در این صورت اندازه‌پذیری $F \Leftarrow$ ضعیف ــ اندازه‌پذیری $F \Leftarrow \mathcal{C}$ ــ اندازه‌پذیری F.

قضیهٔ بعد شرایط کافی برای هم‌ارز بودن اندازه‌پذیری و ضعیف ــ اندازه‌پذیری F را مشروط بر این که T و X هر دو فضاهای برل باشند، به‌دست می‌دهد. فضای برل، زیرمجموعهٔ برل یک فضای لهستانی است. اثبات این قضیه به نتیجه‌ای از براون و پوروس [۱۱] بستگی دارد با این مضمون که اگر T و X دو فضای لهستانی و $E \subseteq T \times X$ یک مجموعهٔ برل باشد که برای هر $t \in T$، مجموعهٔ $E(t) = \{x \in X : (t,x) \in E\}$، σ ــ فشرده است، آن‌گاه تصویر E روی T یک مجموعهٔ برل است.

قضیه ۵.۳ فرض کنیم T و X فضاهای برل باشند و $F : T \to X$ $(F \subseteq T \times X)$ یک نگاشت چندمقداری باشد که برای هر $t \in T$، $F(t)$ بسته و σ ــ فشرده است. در این صورت F اندازه‌پذیر است اگر و تنها اگر ضعیف ــ اندازه‌پذیر باشد.

هم‌ارز بودنِ اندازه‌پذیری و ضعیف ــ اندازه‌پذیری $F \subseteq T \times X$، قبلاً در حالتی که T فضای اندازه‌پذیر و X فضای متریک است و F مقادیر فشرده دارد و یا در حالتی که X فضای متریک‌پذیر σ ــ فشرده است و F مقادیر بسته دارد، در قضیهٔ ۶.۲ آورده شد. داوئر و ون‌ولک [۱۳] مثالی از یک نگاشت چندمقداری F با $F(t)$ی σ ــ فشرده امّا نه بسته ارائه داده‌اند که ضعیف ــ اندازه‌پذیر

است امّا اندازه‌پذیر نیست. این مثال نشان می‌دهد که شرط بسته بودن مقادیر F برای هم‌ارز بودن اندازه‌پذیری و ضعیف ـ اندازه‌پذیری الزامی است. این مثال را شرح می‌دهیم.

مثال ۶.۳ فرض کنیم $T = X = I = [\circ, \text{۱}]$ و $\mathcal{A}$، σ ـ جبر زیرمجموعه‌های لبگ ـ اندازه‌پذیر در I باشد. فرض کنیم Q و Q' دو زیرمجموعهٔ چگال شمارش‌پذیر و جدا از هم در I باشند. هم‌چنین فرض کنیم مجموعهٔ $S \subseteq I$ لبگ ـ اندازه‌پذیر نباشد. تابع مجموعه ـ مقدار $F : I \to I$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(t) = \begin{cases} Q & t \in S \\ Q' & t \in I \setminus S \end{cases}$$

به‌وضوح F ضعیف ـ اندازه‌پذیر است، چون برای هر زیرمجموعهٔ باز $U \subseteq X$، $F^{-\text{۱}}(U) = T$ یا $F^{-\text{۱}}(U) = \emptyset$. امّا F اندازه‌پذیر نیست، زیرا برای هر $a \in Q$، داریم $F^{-\text{۱}}(\{a\}) = S$ که طبق فرض در I اندازه‌پذیر نیست. توجه کنید که F مقادیر بسته ندارد. در بخش بعد نشان می‌دهیم نگاشت چندمقداری در این مثال، انتخاب لبگ ـ اندازه‌پذیر ندارد.

با توجه به قضیهٔ قبل، می‌توانیم گزارهٔ زیر را نتیجه بگیریم.

گزاره ۷.۳ فرض کنیم T و X فضاهای برل و $F \subseteq T \times X$ یک نگاشت چندمقداری باشد که برای هر $t \in T$، $F(t)$ مجموعه‌ای σ ـ فشرده است. اگر F یک مجموعهٔ برل در $T \times X$ باشد، آن‌گاه F نگاشت چندمقداری اندازه‌پذیر است.

باز هم مثالی از داوئر و ون‌ولک می‌آوریم که نشان می‌دهد عکس گزارهٔ فوق برقرار نیست. در واقع اگر تابع مجموعه ـ مقدار مقادیر بسته نداشته باشد، اندازه‌پذیری (به‌ویژه ضعیف ـ اندازه‌پذیری) لزوماً نمودار ـ اندازه‌پذیری تابع مجموعه ـ مقدار را نتیجه نمی‌دهد.

مثال ۸.۳ فرض کنیم $I = [\circ, \text{۱}]$ و S یک زیرمجموعهٔ اندازه‌ناپذیر I باشد. تابع مجموعه ـ مقدار $F : I \to I$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(t) = \begin{cases} I \setminus \{t\} & t \in S \\ I & t \in I \setminus S \end{cases}$$

برای این‌که نشان دهیم F اندازه‌پذیر است، کافی است نشان دهیم برای هر زیرمجموعهٔ باز A از I، مجموعهٔ $F^+(A) = \{t \in I : F(t) \subseteq A\}$ اندازه‌پذیر است، چون $F^+(A) = (F^{-\text{۱}}(A^c))^c$. اگر $I \subseteq A$، آن‌گاه $F^+(A) = I$ و اگر $I \not\subseteq A$، آن‌گاه $F^+(A) = \emptyset$ یا $F^+(A) = \{t\}$. پس F اندازه‌پذیر است. حال فرض کنیم Δ قطر $I \times I$ باشد ($\Delta = \{(t,x) \in I \times I : t = x\}$). اگر F نمودار اندازه‌پذیر داشته باشد، آن‌گاه $Gr(F) \cap \Delta$ یک زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر از $I \times I$ است. پس

$P_I(Gr(F)\cap\Delta)$ لبگ ــ اندازه‌پذیر است. امّا $P_I(Gr(F)\cap\Delta) = I\setminus S$ که طبق فرض اندازه‌پذیر نیست. بنابراین F نمودار اندازه‌پذیر ندارد.

در مثال‌هایی که در ادامه می‌آوریم، $T=[0,1)$ به σ ــ جبر برل مجهز شده و Z مجموعهٔ اعداد گنگ است. قرار می‌دهیم $X = T\times Z$ و نگاشت $P_T: X\to T$ را برای هر $(t,z)\in X$ به‌صورت $P_T(t,z)=t$ تعریف می‌کنیم (نگاشت تصویر روی T). فرض کنیم B یک زیرمجموعهٔ بسته از X باشد به‌طوری که $P_T(B)$ برل نیست و $Z\neq P_Z(B)$ (به‌یاد می‌آوریم که Z یک فضای لهستانی است). مثالی می‌آوریم از یک تابع مجموعه ــ مقدار $\mathcal{C}$ ــ اندازه‌پذیر که ضعیف ــ اندازه‌پذیر نیست. این مثال نشان می‌دهد در قضیهٔ ۶.۲ (یک) و قضیهٔ ۴.۳، عکس نتیجهٔ دوم بدون فرض‌های اضافی، برقرار نیست. در این مثال، به قضیه‌ای از کونوگوی ــ نویکوف [۲۴] نیاز داریم از این قرار که

قضیه ۹.۳ اگر T زیرمجموعهٔ برلِ بازهٔ $[0,1)$، X فضای متریک σ ــ فشرده و $F: T\to X$ نگاشت چندمقداری با مقادیر بسته باشد و $Gr(F)\in\mathfrak{B}(T\times X)$، آن‌گاه $P_T(Gr(F))\in\mathfrak{B}(T)$.

مثال ۱۰.۳ $z_0\in Z\setminus P_Z(B)$ را انتخاب می‌کنیم. نگاشت چندمقداری $F\subseteq T\times Z$ را برای هر $t\in T$، به‌صورت $F(t)=B(t)\cup\{z_0\}$ تعریف می‌کنیم. در این‌صورت F نمودار بسته دارد چون $Gr(F)=Gr(B)\cup\{z_0\}$. هم‌چنین F، $\mathcal{C}$ ــ اندازه‌پذیر است. برای اثبات این مطلب، فرض کنیم K زیرمجموعهٔ فشردهٔ Z باشد. در این صورت $F^{-1}(K)=P_T((T\times K)\cap F)$ که طبق قضیهٔ ۹.۳، یک مجموعهٔ برل است. پس $F^{-1}(K)$ اندازه‌پذیر است. امّا F ضعیف ــ اندازه‌پذیر نیست، زیرا اگر فرض کنیم G یک همسایگی $P_Z(B)$ باشد که شامل z_0 نیست، آن‌گاه $F^{-1}(G)=P_T(B)$ که طبق توضیحات قبل از مثال، برل نیست.

اکنون مثالی می‌آوریم که نشان می‌دهد برای هم‌ارز بودنِ اندازه‌پذیری و ضعیف ــ اندازه‌پذیری تابع مجموعه ــ مقدار $F: T\to X$ با مقادیر بسته، شرط σ ــ فشردگی برای X الزامی است. این مثال توسط کانیوسکی [۴۰] ارائه شده است.

مثال ۱۱.۳ بر اساس فرض‌های مثال قبل، نگاشت $F_*\subseteq T\times X$ را برای هر $t\in T$، به‌صورت $F_*(t)=P_T^{-1}(\{t\})$ تعریف می‌کنیم. به‌وضوح F ضعیف ــ اندازه‌پذیر است، چون P_T یک نگاشت باز است. امّا F_* اندازه‌پذیر نیست، چون $F_*^{-1}(B)=P_T(B)$ که یک مجموعهٔ برل نیست. در این‌جا $X=T\times Z$ یک فضای لهستانی است که σ ــ فشرده نیست.

در ادامه، مثالی می‌آوریم که نشان می‌دهد اشتراک دو تابع مجموعه ــ مقدار ضعیف ــ اندازه‌پذیر با مقادیر بسته، لزوماً ضعیف ــ اندازه‌پذیر نیست. برای توابع مجموعه ــ مقدار $\mathcal{C}$ ــ اندازه‌پذیر

وضعیت بهتر است. در این مورد، با حذف فرض جدایی‌پذیری از X در نتایج قبلی، اگر X یک فضای متریک و برای هر n در یک مجموعهٔ منتهاشمارای J، $F_n \subseteq T \times X$ نگاشتی $\mathcal{C}$ ـ اندازه‌پذیر با مقادیر بسته باشد، آن‌گاه $F = \bigcap_{n \in J} F_n$ نیز $\mathcal{C}$ ـ اندازه‌پذیر است و به‌عنوان کاربردی از آن می‌توان نشان داد مرز یک تابع مجموعه ـ مقدار $\mathcal{C}$ ـ اندازه‌پذیر، $\mathcal{C}$ ـ اندازه‌پذیر است. به عبارت دیگر، اگر X یک فضای متریک و $F \subseteq T \times X$ نگاشتی $\mathcal{C}$ ـ اندازه‌پذیر با مقادیر فشرده باشد، آن‌گاه رابطهٔ $BdF \subseteq T \times X$ نیز $\mathcal{C}$ ـ اندازه‌پذیر است. این نتایج و اثبات آن‌ها در [۲۳] وجود دارد.

مثال ۱۲.۳ B را زیرمجموعه‌ای بسته از X فرض می‌کنیم و $F_* \subseteq T \times X$ را همانند مثال قبل در نظر می‌گیریم. گیریم $x_\circ \in X \setminus B$ و $F, G : T \to X$ را به‌صورت $F(t) = F_*(t) \cup \{x_\circ\}$ و $G(t) = B \cup \{x_\circ\}$ برای هر $t \in T$ تعریف می‌کنیم. در این صورت F ضعیف ـ اندازه‌پذیر و G پیوسته است و $\mathrm{Dom}(F \cap G) = T$. امّا $F \cap G$ ضعیف ـ اندازه‌پذیر نیست، زیرا اگر فرض کنیم $U \subseteq X$ زیرمجموعه‌ای باز شامل B باشد که شامل $x_\circ$ نیست، آن‌گاه

$$\begin{aligned}(F \cap G)^{-1}(U) &= \{t \in T : F(t) \cap G(t) \cap U \neq \emptyset\} \\ &= \{t \in T : F_*(t) \cap B \neq \emptyset\} \\ &= F_*^{-1}(B) = P_T(B)\end{aligned}$$

که طبق فرض، مجموعهٔ برل نیست.

۴. قضایای انتخاب و تابع ضمنی

یکی از اصلی‌ترین اهداف ما در شناخت نگاشت‌های چندمقداری، بررسی وجود انتخاب‌های اندازه‌پذیر برای آن‌ها است. ابتدا قضایای اساسی انتخاب را آورده و شرط لازم و کافی برای وجود یک خانوادهٔ چگال از انتخاب‌های اندازه‌پذیر را به‌دست می‌آوریم. سپس با توجه به اندازه‌پذیری توابع با دو متغیر، با فرض اندازه‌پذیری روی مؤلفهٔ اول و شرط پیوستگی روی مؤلفهٔ دوم، نگاشت‌های اندازه‌پذیری را که از این‌گونه توابع به‌دست می‌آیند مطالعه می‌کنیم و در ادامه، قضایای تابع ضمنی از نوع اول را با استفاده از نتایج قبل به‌دست می‌آوریم. قضایای اساسی که وجود انتخاب‌های اندازه‌پذیر را نتیجه می‌دهند، قضایای انتخاب کوراتوفسکی و ریل ـ نارزوسکی و بسط اومان از قضیهٔ انتخاب اندازه‌پذیر نیومن است.

تابع تک‌مقداری $f : T \to X$ را یک‌انتخاب برای تابع مجموعه ـ مقدار $F : T \to X$ نامیم اگر برای هر $t \in T$، $f(t) \in F(t)$. توجه می‌کنیم که مفاهیم اندازه‌پذیری، ضعیف ـ اندازه‌پذیری و

β ـ اندازه‌پذیری، وقتی در مورد توابع تک‌مقداری به‌کار روند، دو به دو هم‌ارز هستند.

قضیه ۱.۴ (**کوراتوفسکی و ریل ــ نارزوسکی**) فرض کنیم $(T, \mathcal{A})$ یک فضای اندازه‌پذیر و X فضای متریک جدایی‌پذیر و کامل باشد. اگر $F : T \to X$ تابع مجموعه ــ مقدار ضعیف ــ اندازه‌پذیر با مقادیر بسته باشد، آن‌گاه F دارای انتخاب اندازه‌پذیر (معادلاً ضعیف ــ اندازه‌پذیر) است.

این قضیه با شرط قوی‌تر اندازه‌پذیری برای نگاشت چندمقداری F نیز برقرار است، زیرا هر مجموعهٔ باز G در فضای متریک X، مجموعه‌ای F_σ است، یعنی $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ که در آن برای هر $n \geq 1$، K_n بسته است. از این‌رو $F^{-1}(G) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F^{-1}(K_n)$. بلافاصله می‌توانیم نتیجهٔ زیر را به‌دست آوریم.

قضیه ۲.۴ فرض کنیم $(T, \mathcal{A})$ یک فضای اندازه‌پذیر و X فضای متریک جدایی‌پذیر باشد. اگر $F : T \to X$ یک تابع مجموعه ــ مقدار اندازه‌پذیر (ضعیف ــ اندازه‌پذیر) با مقادیر کامل باشد، آن‌گاه F انتخاب اندازه‌پذیر دارد.

قضیهٔ فوق یک تغییر جزئی از قضیهٔ انتخاب کوراتوفسکی و ریل ــ نارزوسکی است. آن‌ها فرض کردند X لهستانی و F مقادیر بسته داشته باشد. قضیهٔ ۲.۴، از قضیهٔ انتخاب کوراتوفسکی و ریل ــ نارزوسکی با نشاندن X در یک فضای کامل نتیجه می‌شود. از قضیهٔ ۲.۴، برای تعمیم نتیجه‌ای از کاستینگ[1] دربارهٔ خانوادهٔ چگال از انتخاب‌ها که در ادامه آورده می‌شود، استفاده خواهیم کرد.

قضیه ۳.۴ (**اومان**) فرض کنیم T یک فضای اندازهٔ σ ــ متناهی و X زیرمجموعهٔ برل از یک فضای لهستانی باشد. اگر $F : T \to X$ یک تابع مجموعه ــ مقدار با نمودار اندازه‌پذیر باشد، آن‌گاه تابع اندازه‌پذیر $f : T \to X$ وجود دارد به‌طوری که $f(t) \in F(t)$ برای هر $t \in T$، به جز tهایی در یک مجموعهٔ اندازه ــ صفر.

جالب است که بدانیم قضیهٔ ۳.۴ از قضیهٔ ۲.۴ نتیجه می‌شود، با این فرض که $T = [0, 1]$، $\mathcal{A}$ عبارت باشد از σ ــ جبر زیرمجموعه‌های برل T، μ اندازهٔ لبگ، X فضای متریک جدایی‌پذیر و $F : T \to X$ یک تابع مجموعه ــ مقدار با نمودار سوسلین باشد. شرح کامل‌تر این مطلب در [۱۹] یافت می‌شود. هیملبرگ قضیهٔ اومان را در حالتی که X فضای سوسلین باشد، تعمیم داد. این تعمیم و اثبات آن نیز در [۱۹] موجود است.

1) C. Castaing

حال تعمیم زیر را از قضیه‌ای از کاستینگ بیان می‌کنیم. اگر U یک خانواده از توابع از T به X باشد، آن‌گاه $U(t)$ مجموعهٔ $\{u(t) : u \in U\}$ را برای هر $t \in T$، مشخص می‌کند.

قضیه ۴.۴ فرض کنیم X فضای متریک جدایی‌پذیر و $F : T \to X$ نگاشت چندمقداری با مقادیر کامل باشد، آن‌گاه F ضعیف ـ اندازه‌پذیر است اگر و تنها اگر خانوادهٔ شمارش‌پذیر U از انتخاب‌های اندازه‌پذیر برای F وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $t \in T$، $F(t) = \overline{U(t)}$. اگر X، σ ـ فشرده نیز باشد، آن‌گاه کافی است F مقادیر بسته داشته باشد.

قضیهٔ فوق به‌طور مؤثری در اثبات وجود جواب‌های معادلات تصادفی با عملگرهای یکنوا که در بخش ٦ به ذکر آن می‌پردازیم، به‌کار می‌آید.

اکنون آماده‌ایم که قضایای تابع ضمنی نوع اول را که توسط فیلیپف اثبات شده است، بیان کنیم. مسألهٔ تابع ضمنی نوع اول به این صورت است که یک تابع $f : T \times X \to Y$، نگاشت چندمقداری $F \subseteq T \times X$ و تابع $g : T \to Y$ مفروض‌اند به‌طوری که برای هر $t \in T$، $g(t) \in f(\{t\} \times F(t))$. تحت چه شرایطی تابع اندازه‌پذیر $r : T \to X$ وجود دارد که $r(t) \in F(t)$ و $g(t) = f(t, r(t))$؟

در این‌جا چند نمونه از قضایایی را که به این سؤال پاسخ می‌دهند، می‌آوریم.

قضیه ۵.۴ فرض کنیم X و Y فضاهای متریک جدایی‌پذیرند و $f : T \times X \to Y$ تابعی است که برای هر $x \in X$، نسبت به $t \in T$ اندازه‌پذیر و برای هر $t \in T$، نسبت به $x \in X$ پیوسته است و $\Gamma : T \to X$ یک نگاشت چندمقداری اندازه‌پذیر با مقادیر فشرده و $g : T \to Y$ تابعی اندازه‌پذیر است که برای هر $t \in T$، $g(t) \in f(\{t\} \times \Gamma(t))$. در این صورت انتخاب اندازه‌پذیر $\gamma : T \to X$ برای Γ وجود دارد به‌طوری که برای هر $t \in T$، $g(t) = f(t, \gamma(t))$. اگر X، σ ـ فشرده نیز باشد، آن‌گاه فقط نیاز داریم که Γ مقادیر بسته داشته باشد.

وقتی روی وجود جواب برای معادلات تصادفی در فضای باناخ متناهی ـ بعد بحث می‌کنیم، قضیهٔ ۵.۴ نیازمان را به‌خوبی برطرف می‌کند. اگر در قضیهٔ ۵.۴، فرض‌های روی T و X را قوی‌تر کنیم، یعنی T را فضای اندازه σ ـ متناهی و X را فضای سوسلین در نظر بگیریم، آن‌گاه نیازی نیست Γ مقادیر بسته داشته باشد. در این صورت اگر فرض کنیم Γ نمودار اندازه‌پذیر دارد، حکم قضیهٔ فوق برای هر $t \in T$، به‌جز Tهایی که در یک زیرمجموعهٔ اندازه ـ صفر قرار دارند، به‌دست می‌آید. این نتیجه را می‌توانید در قضیهٔ (۷.۲) از [۱۹] مشاهده کنید.

اگر تابع f تنها به x بستگی داشته باشد، قضایای تابع ضمنی توسط مک‌شین، وارفیلد و هیملبرگ اثبات شده‌اند. در این‌جا نمونه‌ای از آن‌ها را ارائه می‌کنیم. برای مطالعهٔ بیشتر در این زمینه

می‌توانید به [۱۹] بخش ۷ و [۲۱] مراجعه کنید.

قضیه ۶.۴ فرض کنیم T فضای اندازهٔ σ ــ متناهی، X فضای سوسلین، Y فضای متریک جدایی‌پذیر، $f : X \to Y$ یک تابع اندازه‌پذیر، $\Gamma : T \to X$ نگاشت چندمقداری با نمودار اندازه‌پذیر و $g : T \to Y$ یک تابع اندازه‌پذیر باشد به‌طوری که برای هر $t \in T$، $g(t) \in f(\Gamma(t))$. در این صورت تابع اندازه‌پذیر $\gamma : T \to X$ وجود دارد که برای تقریباً هر $t \in T$، $\gamma(t) \in \Gamma(t)$ و $g(t) = f(\gamma(t))$.

در انتهای این بخش، مثالی می‌آوریم که نشان می‌دهد بسته بودن مقادیر نگاشت چندمقداری در قضایای انتخاب، یک شرط اساسی است و قابل حذف نیست.

مثال ۷.۴ نگاشت چندمقداری تعریف شده در مثال ۶.۳ را در نظر بگیرید. نشان می‌دهیم F انتخاب اندازه‌پذیر ندارد. تابع $h : T \to X$ را به‌صورت

$$h(t) = \begin{cases} ۱ & t \in Q \\ ۰ & t \in Q^c \\ \frac{۱}{۲} & t \in I \backslash (Q \cup Q^c) \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. در واقع، $F = h^{-۱} \circ \chi_S$ که در آن χ_S تابع نشانگر مجموعهٔ S است. اگر $f : T \to X$ یک انتخاب اندازه‌پذیر برای F باشد، آن‌گاه $h \circ f = \chi_S$. چون $Q = (\{۱\})^{-۱}h$ مجموعهٔ برل است، پس $f^{-۱}(h^{-۱}(\{۱\})) \in \mathcal{A}$. از طرفی $f^{-۱}(h^{-۱}(\{۱\})) = \chi_S^{-۱}(\{۱\}) = S \notin \mathcal{A}$ و این یک تناقض است.

۵. توسیع انتخاب‌های اندازه‌پذیر و نگاشت در فضاهای خطی

هیملبرگ [۱۹] انتخاب‌های جزئاً تعریف شدهٔ اندازه‌پذیر برای یک نگاشت چندمقداری اندازه‌پذیر را به انتخاب‌های اندازه‌پذیر تعریف شده روی تمام T توسیع داد. فرض کنیم S زیرمجموعهٔ T (T فضای اندازه‌پذیر با σ ــ جبر $\mathcal{A}$) باشد. تابع $f : S \to X$ را اندازه‌پذیر گوییم اگر f نسبت به σ ــ جبر اثر $\mathcal{A}_S = \{A \cap S : A \in \mathcal{A}\}$ روی S اندازه‌پذیر باشد. همیشه می‌توانیم چنین تابعی را به یک انتخاب اندازه‌پذیر برای یک نگاشت چندمقداری اندازه‌پذیر با مقادیر کامل $F : T \to X$ توسیع دهیم، مشروط بر این که X فضای متریک جدایی‌پذیر باشد و برای هر $t \in S$، $f(t) \in F(t)$. توجه کنید که نیازی نیست $S \in \mathcal{A}$.

قضیه ۱.۵ فرض کنیم X یک فضای متریک جدایی‌پذیر، $F : T \to X$ نگاشت چندمقداری اندازه‌پذیر با مقادیر کامل و $f : S \to X$ تابعی اندازه‌پذیر باشد به‌طوری که برای هر $t \in S$،

$f(t) \in F(t)$، آن‌گاه انتخاب اندازه‌پذیر $g : T \to X$ برای F وجود دارد که f را توسیع می‌دهد.

اگر فرض کنیم X یک فضای لوزین و F نگاشت چندمقداری β ــ اندازه‌پذیر باشد، قضیهٔ قبل برای F با مقادیر بسته نیز درست است. توضیحات بیشتر در [۲۳] یافت می‌شود. به‌عنوان کاربردی از نتایج کلی بخش‌های گذشته، نمونه‌ای دربارهٔ نگاشت‌های چندمقداری با مقادیر در فضای خطی موضعاً محدب ارائه می‌دهیم. در این زمینه به بحث کامل نمی‌پردازیم و برای مطالعهٔ بیشتر می‌توانید به [۲۴] مراجعه کنید. یادآوری می‌کنیم که فضای فرشه E عبارت است از یک فضای خطی موضعاً محدب که توپولوژی آن توسط متریک تحت انتقال پایای d تولید شده باشد به‌طوری که (E, d) کامل است.

قضیه ۲.۵ اگر X یک فضای فرشهٔ جدایی‌پذیر و $F : T \to X$ نگاشتی ضعیف ــ اندازه‌پذیر با مقادیر بسته باشد، آن‌گاه نگاشت‌های چندمقداری coF و $\overline{co}F$ تعریف شده به‌صورت $t \to coF(t)$ و $t \to \overline{co}F(t)$ نیز ضعیف ــ اندازه‌پذیر هستند (اگر فرض کنیم هر $F(t)$ کامل باشد، آن‌گاه فقط نیاز داریم که X فضای متریک جدایی‌پذیر موضعاً محدب باشد).

قضیه ۳.۵ فرض کنیم T فضای اندازه‌پذیر کامل، X فضای فرشهٔ جدایی‌پذیر و $F : T \to X$ نگاشت چندمقداری با مقادیر محدب و فشرده باشد. در این صورت احکام زیر معادل‌اند:

الف) F اندازه‌پذیر است؛

ب) برای هر تابعک خطی پیوسته z' روی X، تابع $M_{z'} : T \to \mathbb{R}$ با تعریف $M_{z'}(t) = \max\limits_{x \in F(t)} \langle z', x\rangle$ اندازه‌پذیر است.

۶. معادلات تصادفی غیرخطی با عملگرهای یکنوا در فضاهای باناخ

با استفاده از آنچه دربارهٔ نگاشت‌های چندمقداری و انتخاب‌های اندازه‌پذیر به‌دست آمد، ایتوه [۲۶] توانست به بررسی معادلات تصادفی با عملگرهای یکنوا در فضاهای باناخ بپردازد. وی در اثبات تمام قضایایی که از این پس می‌آید، از نظریهٔ انتخاب‌های اندازه‌پذیر برای نگاشت‌های چندمقداری استفاده کرد تا وجود جواب برای معادلات تصادفی با عملگرهای یکنوا را به‌دست آورد. برای بیان این نتایج، ابتدا مقدمات مورد نیازمان را فراهم می‌آوریم. در این بخش، فرض می‌کنیم $(\Omega, \mathcal{A})$ یک فضای اندازه‌پذیر و X فضای باناخ (حقیقی یا مختلط) و X^* فضای دوگان آن باشد. فرض کنیم $\langle .,. \rangle$ جفت دوگانی بین X و X^* باشد. برای هر $x \in X$ و $x^* \in X^*$ قرار می‌دهیم $(x^*, x) = \langle x^*, x\rangle$ اگر X فضای باناخ حقیقی باشد و $(x^*, x) = \Re\langle x^*, x\rangle$ اگر X مختلط

باشد که در آن $\Re z$ قسمت حقیقی عدد مختلط z است. اگر X فضای هیلبرت باشد، $\langle .,. \rangle$ همان ضرب داخلی روی X است. در این‌جا، نگاشت چندمقداری $T : \Omega \to X$ را (w) ـ اندازه‌پذیر گوییم اگر برای هر زیرمجموعهٔ (ضعیف ـ) بستهٔ $C \subseteq X$، $T^{-1}(C) = \{\omega \in \Omega : T(\omega) \cap C \neq \emptyset\} \in \mathcal{A}$. نگاشت (w) ـ اندازه‌پذیر $\xi : \Omega \to X$ یک انتخاب (w) ـ اندازه‌پذیر برای نگاشت چندمقداری (w) ـ اندازه‌پذیر T است اگر برای هر $\omega \in \Omega$، $\xi(\omega) \in T(\omega)$. مجموعهٔ نگاشت‌های اندازه‌پذیر $\xi : \Omega \to X$ را که $\sup\{\|\xi(\omega)\| : \omega \in \Omega\} < \infty$ با $B(\Omega, X)$ نشان می‌دهیم.

نگاشت $F : D \subseteq X \to X^*$ را یکنوا گوییم اگر برای هر $x, y \in D$، $(Fx - Fy, x - y) \geq 0$ و آن را کراندار گوییم اگر برای هر $B \subseteq D$ کراندار، مجموعهٔ $F(B) \subseteq X^*$ کراندار باشد. اکنون چند نوع پیوستگی برای نگاشت‌های تک‌مقداری با مقادیر در X^* تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۶ نگاشت $F : D \subseteq X \to X^*$ را نیمه‌پیوسته گوییم اگر برای هر $x \in D$ و $y \in X$ که $x + t_n y \in D$ و $t_n > 0$ $(n \geq 1)$، $F(x + t_n y) \rightharpoonup F(x)$ وقتی $t_n \to 0$.

تعریف ۲.۶ نگاشت $F : D \subseteq X \to X^*$ ضعیف‌پیوسته نامیده می‌شود اگر $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq D$ و $x_n \to x \in D$ نتیجه دهد $Fx_n \rightharpoonup Fx$ وقتی $n \to \infty$.

تعریف ۳.۶ نگاشت $F : D \subseteq X \to X^*$ را کاملاً پیوسته گوییم اگر $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq D$ و $x_n \rightharpoonup x \in D$ نتیجه دهد $Fx_n \to Fx$ وقتی $n \to \infty$.

یادآوری می‌کنیم که در فضای متریک X، مجموعهٔ $A \subseteq X$ فشردهٔ نسبی است اگر $\overline{A}$ فشرده باشد. معادلاً هر دنباله از اعضای A دارای زیردنبالهٔ همگرا باشد.

تعریف ۴.۶ نگاشت $F : D \subseteq X \to X^*$ را فشرده گوییم اگر مجموعه‌های کراندار را به‌توی مجموعه‌های فشرده نسبی بنشاند و پیوسته باشد.

تعریف ۵.۶ نگاشت $F : D \subseteq X \to X^*$ را موضعاً کراندار در $x \in D$ گوییم اگر $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq D$ و $x_n \to x \in D$ نتیجه دهد دنبالهٔ $\{Fx_n\}_{n=1}^{\infty}$ کراندار است.

به‌راحتی می‌توان بررسی کرد که یک تابع ضعیف‌پیوسته، نیمه‌پیوسته و موضعاً کراندار است. کاتو [۳۱] با قرار دادن فرض‌های اضافی روی دامنهٔ تابع، نشان داد ضعیف‌پیوستگی با نیمه‌پیوستگی و موضعاً کرانداری هم‌ارز می‌شود. هم‌چنین وی با فرض متناهی ـ بعد بودن X نشان داد می‌توان شرط موضعاً کرانداری را حذف کرد، یعنی در این صورت، تابع پیوسته است اگر و تنها اگر نیمه‌پیوسته باشد. نتایجی که کاتو به‌دست آورده در بسیاری از قضایای این بخش، در مسیر یافتن جواب‌ها

کارگشاست. حال مهم‌ترین ابزارهای ادامهٔ کار یعنی عملگر تصادفی و از پایین کرانداری یک عملگر را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۶.۶ نگاشت $F : \Omega \times D \to X^*$ را عملگر تصادفی گوییم هرگاه برای هر $x \in D$، تابع $F(.)x = F(\,.\,, x) : \Omega \to X^*$ اندازه‌پذیر باشد.

تعریف ۷.۶ عملگر تصادفی $F : \Omega \times D \to X^*$ را از پایین کراندار گوییم اگر تابع $c : (\circ, \infty) \to \mathbb{R}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $\omega \in \Omega$ و $x \in D$، $(F(\omega)x, x) \geq c(\|x\|)\|x\|$ و $c(r) \to \infty$ وقتی $r \to \infty$.

تعریف ۸.۶ عملگر تصادفی $F : \Omega \times D \to X^*$ را پیوسته (نیمه‌پیوسته، یکنوا و غیره) گوییم هرگاه برای هر $\omega \in \Omega$، تابع $F(\omega)(.) = F(\omega\,, .) : D \to X^*$ پیوسته (نیمه‌پیوسته، یکنوا و غیره) باشد.

با فراهم آمدن مقدمات لازم، وجود جواب برای معادلات تصادفی با عملگرهای تصادفی (شبه) یکنوا را در فضای باناخ حقیقی بررسی می‌کنیم. برای شروع، روی یک معادلهٔ تصادفی در فضای باناخ متناهی ـ بعد بحث می‌کنیم. در اثبات گزارهٔ زیر، به‌طور مؤثری از قضیهٔ ۵.۴ استفاده می‌شود. اثبات آن‌ها در [۲۶] وجود دارد.

گزاره ۹.۶ فرض کنیم X یک فضای باناخ متناهی ــ بعد و $F : \Omega \times X \to X^*$ عملگر تصادفی پیوسته و از پایین کراندار و η عضوی از $B(\Omega, X^*)$ باشد. آن‌گاه $\xi \in B(\Omega, X)$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $\omega \in \Omega$، $F(\omega)\xi(\omega) = \eta(\omega)$.

به‌طور خلاصه، روند اثبات گزارهٔ فوق به این شکل است که ابتدا با توجه به از پایین کراندار بودن F، جواب تعیّنی برای معادله در یک مجموعهٔ فشرده می‌یابیم. سپس با تعریف یک نگاشت چندمقداری با مقادیر فشرده و استفاده از قضیهٔ ۵.۴ به جواب مطلوب برای معادله دست می‌یابیم. از لم زیر در اثبات قضایای مربوط به وجود جواب برای معادلات عملگری در فضاهای باناخ، مکرر استفاده می‌شود. این لم، جدای از کاربردهای آن، قضیهٔ وجودی جالبی به‌شمار می‌آید [۶].

لم ۱۰.۶ فرض کنیم X یک فضای باناخ و F نگاشت نیمه‌پیوسته از زیرمجموعهٔ خطی چگال D از X به‌توی X^* باشد. اگر $x_\circ \in D$ و $y_\circ \in X^*$ داده شده باشند و برای هر $x \in D$، داشته باشیم $(Fx - y_\circ, x - x_\circ) \geq \circ$، آن‌گاه $Fx_\circ = y_\circ$.

تعریف ۱۱.۶ فرض کنیم X یک فضای باناخ و F یک نگاشت از X به‌توی X^* باشد. گوییم F شبه‌یکنوا است هرگاه برای هر $x \in X$، $Fx = S(x, x)$ که $S : X \times X \to X^*$ تابعی با ویژگی‌های

زیر است:

الف) برای هر $y \in X$، $S(.,y)$ نیمه‌پیوسته و یکنواست؛

ب) برای هر $x \in X$، $S(x,.)$ کاملاً پیوسته است.

نتیجهٔ زیر توسیع تصادفی قضیه‌ای است که برودر [۶] در حالت تعیّنی آن را اثبات کرده است.

قضیه ۱۲.۶ فرض کنیم X یک فضای باناخ بازتابی و جدایی‌پذیر و $F : \Omega \times X \to X^*$ یک عملگر تصادفی شبه‌یکنوا و از پایین کراندار باشد. اگر η عضوی از $B(\Omega, X^*)$ باشد، آن‌گاه $\xi \in B(\Omega, X)$ وجود دارد به‌طوری که برای هر $\omega \in \Omega$، $F(\omega)\xi(\omega) = \eta(\omega)$.

ایتوه در اثبات قضیهٔ ۱۲.۶، از قضیهٔ انتخاب کوراتوفسکی و ریل ـ نارزوسکی، قضیه‌های ۱.۳ و ۴.۴ استفاده می‌کند تا بتواند وجود جواب برای این معادله را نشان دهد. اثبات آن در [۲۶] یافت می‌شود.

نتیجه ۱۳.۶ اگر X یک فضای باناخ بازتابی و جدایی‌پذیر و $F : \Omega \times X \to X^*$ یک عملگر تصادفی یکنوا، از پایین کراندار و نیمه‌پیوسته باشد، آن‌گاه برای هر $\eta \in B(\Omega, X^*)$، $\xi \in B(\Omega, X)$ وجود دارد به‌طوری که برای هر $\omega \in \Omega$، $F(\omega)\xi(\omega) = \eta(\omega)$.

اکنون توجه‌مان را به معادلاتی برمی‌گردانیم که شامل اختلال‌های فشرده از عملگرهای توصیف شده در این بخش هستند. در استدلال قضایای مربوط به عملگرهای با اختلال فشرده، از خواص اساسی نگاشت دوگانی و برخی قضایای نقطهٔ ثابت تصادفی استفاده می‌شود.

قضیه ۱۴.۶ فرض کنیم X یک فضای باناخ بازتابی و جدایی‌پذیر، $F : \Omega \times X \to X^*$ عملگر تصادفی شبه‌یکنوا و $C : \Omega \times X \to X^*$ یک عملگر تصادفی فشرده باشد با ویژگی‌های زیر:

الف) برای هر $x, y \in X$، $S(., x, y)$ اندازه‌پذیر است و

$$a(y) = \sup\{\|S(\omega, \circ, y)\| : \omega \in \Omega\} < \infty$$

که S در تعریف ۱۱.۶ صدق می‌کند؛

ب) برای هر $x \in X$، $b(x) = \sup\{\|C(\omega)x\| : \omega \in \Omega\} < \infty$؛

پ) اگر $x_n \rightharpoonup x_\circ$ و $(S(\omega, x_n, x_n) - S(\omega, x_\circ, x_n), x_n - x_\circ) \to \circ$، آن‌گاه

$$C(\omega)x_n \rightharpoonup C(\omega)x_\circ.$$

اگر $T=F+C$ و T از پایین کراندار باشد، آن‌گاه برای هر $\eta\in B(\Omega,X^*)$، $\xi\in B(\Omega,X)$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $\omega\in\Omega$، $T(\omega)\xi(\omega)=\eta(\omega)$.

قضیه ۱۵.۶ گیریم X فضای باناخ بازتابی و جدایی‌پذیر است و نگاشت $S:\Omega\times X\times X\to X^*$ در شرایط زیر صدق می‌کند:

الف) برای هر $\omega\in\Omega$ و $y\in X$، $S(\omega,.,y)$ نیم‌پیوسته و یکنوا است؛

ب) نگاشت $T:\Omega\times X\to X^*$ تعریف شده به‌صورت $T(\omega)x=S(\omega,x,x)$ عملگر تصادفی از پایین کراندار است؛

پ) اگر برای هر $\omega\in\Omega$، $y_n\rightharpoonup y$ و $(S(\omega,y_n,y_n)-S(\omega,y,y_n),y_n-y)\to 0$ وقتی $n\to\infty$، آن‌گاه برای هر $x\in X$، $S(\omega,x,y_n)\rightharpoonup S(\omega,x,y)$؛

ت) اگر برای هر $\omega\in\Omega$، $y_n\rightharpoonup y$ و $S(\omega,x,y_n)\rightharpoonup x_0$، آن‌گاه $(S(\omega,x,y_n),y_n)\to(x_0,y)$ وقتی $n\to\infty$.

هم‌چنین فرض کنیم برای هر $\omega\in\Omega$ و $x\in X$، $T(\omega)$ و $S(\omega,x,.)$ کراندار باشند و برای هر زیرفضای متناهی ـ بعد F از X، $T(\omega)$ از F به‌توی X^* ضعیف‌پیوسته باشد. اگر $\eta\in B(\Omega,X^*)$، آن‌گاه $\xi\in B(\Omega,X)$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $\omega\in\Omega$، $T(\omega)\xi(\omega)=\eta(\omega)$.

تا این‌جا شرط از پایین کراندار بودن عملگرهای تصادفی به ما امکان استفاده از قضایای وجودی و یافتن جواب برای معادله‌های تصادفی را می‌داد. حال گیریم عملگر تصادفی از پایین کراندار نباشد. قضیهٔ زیر توسیع تصادفی از قضیه‌ای است که برودر [۷، ۸] آن را در حالت تعیّنی اثبات کرده است.

قضیه ۱۶.۶ فرض کنیم X یک فضای باناخ بازتابی و جدایی‌پذیر و $F:\Omega\times X\to X^*$ عملگر تصادفی یکنوا و نیم‌پیوسته باشد که $\sup\{\|F(\omega)0\|:\omega\in\Omega\}=r<\infty$. فرض کنیم برای هر زیرمجموعهٔ کراندار B از X^*، زیرمجموعهٔ کراندار U از X وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $\omega\in\Omega$، $F(\omega)^{-1}(B)\subseteq U$. اگر $\eta\in B(\Omega,X^*)$، آن‌گاه $\xi\in B(\Omega,X)$ وجود دارد به‌طوری که برای هر $\omega\in\Omega$، $F(\omega)\xi(\omega)=\eta(\omega)$.

معادلات همرشتاین[1] تصادفی، معادلاتی با عملگر تصادفی غیرخطی هستند به‌صورت $u+KNu=a$، که در آن N عملگر تصادفی نمیتسکی[2]، K عملگر تصادفی خطی و a یک تابع

1) Hammerstein 2) Nemytskii

معلوم است. هدف‌مان در این‌جا، قراردادن فرض‌هایی روی K و N است تا به جواب اندازه‌پذیر برای این نوع معادلات دست پیدا کنیم. گوییم فضای باناخ X دارای ویژگی (π) است اگر بازتابی باشد و عملگر یکنوا و نیمه‌پیوستهٔ $A : X^* \to X$ وجود داشته باشد که $A\circ = \circ$، A در صفر پیوسته است و برای یک $c > \circ$ و $\alpha > ۱$، $(Au, u) \geq c\|u\|^\alpha$ برای هر $u \in X^*$.

قضیه ۱۷.۶ گیریم X یک فضای باناخ جدایی‌پذیر با ویژگی (π) باشد. فرض کنیم $F : \Omega \times X \to X^*$ عملگر تصادفی یکنوا، کراندار و نیمه‌پیوسته و $K : \Omega \times X^* \to X$ یک عملگر تصادفی خطی، یکنوا و پیوسته باشد. اگر $M > \circ$ وجود داشته باشد که $(F(\omega)x, x) \geq \circ$ هرگاه $\omega \in \Omega$ و $\|x\| > M$، $\sup\{\|F(\omega)\circ\| : \omega \in \Omega\} < \infty$ و $\sup\{\|K(\omega)\| : \omega \in \Omega\} < \infty$، آن‌گاه $\xi \in B(\Omega, X)$ وجود دارد که برای هر $\omega \in \Omega$، $\xi(\omega) + K(\omega)F(\omega)\xi(\omega) = \circ$.

چون یک فضای هیلبرت H ویژگی (π) را به‌ازای $A = I$ (عملگر همانی) داراست، قضیهٔ اخیر در مورد فضاهای هیلبرت با $H^* = H$ برقرار است.

مراجع

[1] R. J. Aumann, "Integrals of set-valued functions ", *J. Math. Anal. Appl.*, **12**(1965), 1-12.

[2] A. T. Bharucha- Reid, *Random integral equations*, New York, London: Academic Press, 1972.

[3] A. T. Bharucha- Reid, "Fixed point theorems in probabilistic analysis", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **82**(1976), 641-657.

[4] N. Bourbaki, *General topology*, Part 2, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1966.

[5] F. E. Browder, "Nonlinear elliptic boundary value problems", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **69**(1963), 862-874.

[6] F. E. Browder, "Non-linear equations of evolution", *Ann. Math.*, **80**(1964), 485-523.

[7] F. E. Browder, "Remarks on nonlinear functional equations" I, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.*, **51**(1964), 985-989.

[8] F. E. Browder, "Remarks on nonlinear functional equations" II, *Illinoise J. Math.*, **9**(1965), 608-616.

[9] F. E. Browder, "Mapping theorems for noncompact nonlinear operators in Banach spaces", *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.*, **54**(1965), 337-342.

[10] F. E. Browder, *Problemes non lineaires.*, Montreal: Les Presses de L'Universite de Montreal, 1966.

[11] L. D. Brown and R. Purves, "Measurable selections of extrema", *Ann. Math. Statist.*, **1**(1973), 902-912.

[12] J. Conway, *A course in functional analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[13] J. Dauer and F. Van Vleck, "Measurable selectors of multifunctions and applications", *Math. Systems Theory.*, **7**(1974), 367-376.

[14] G. Debreu, "Integration of correspondences", *Proc. Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability.*, **2**, Part 1(1966), University of California press, Berkeley, 351-372.

[15] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear operators*, Vol 1, General theory. New York: Interscience, 1958.

[16] A. F. Filippov, "On certain questions in the theory of optimal control ", *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Math. Meh.*, **2**(1959), 25-32. English translation in *J. Soc. Indust. Appl. Math. Ser. A.*, **1**(1962), pp. 76-84.

[17] O. Hans, "Random operator equations", In: Proc 4th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and probability, Vol 2, Part 1, pp. 185-202. Berkeley: University of California Press (1961).

[18] E. Hille and R. S. Phillips, *Functional analysis and semigroups*, Providence: Amer. Math. Soc., 1957.

[19] C. J. Himmelberg, "Measurable relations", *Funda. Math.*, 53-72(1975).

[20] C. J. Himmelberg and F. S. Van Vleck, "Extreme points of multifunctions ", *Indiana Univ. Math. J.*, **22**(1973), 719-729.

[21] C. J. Himmelberg and F. S. Van Vleck, "Some selection theorems for measurable functions", *Can. J. Math.*, **21**(1969), 394-399.

[22] C. J. Himmelberg and F. S. Van Vleck, "Selection and implicit function theorems for multifunctions with Souslin graph", *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, **19**(1971), 911-916.

[23] C. J. Himmelberg, T. Parthasarathy and F. S. Van Vleck, "On measurable relations", *Funda. Math.*, **111**(1981), 161-167.

[24] S. Hu and N. Papageorgiou, *Handbook of multivalued analysis*, vol I, Kluwer Academic Publishers, 1997.

[25] S. Itoh, "A random fixed point theorem for a multivalued contraction mapping ", *Pacific J. Math.*, **68**(1977), 85-90.

[26] S. Itoh, "Nonlinear random equations with monotone operators in Banach spaces", *Math. Ann.*, **236**(1978), 133-146.

[27] S. Itoh, "Random fixed point theorems with an application to random differential equations in Banach spaces", *J. Math. Anal. Appl.*, **67**(1979), 261-273.

[28] M. Q. Jacobs, "Measurable multivalued mappings and Lusin's theorem", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **134**(1968), 471-481.

[29] R. Kannan and H. Salehi, "Random nonlinear equations and monotonic nonlinearities" , *J. Math. Anal. Appl.*, **57**(1977), 234-256.

[30] T. Kato, "Demicontinuity, hemicontinuity, and monotonicity" I, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **70**(1964), 548-550.

[31] T. Kato, "Demicontinuity, hemicontinuity, and monotonicity" II, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**(1967), 886-889.

[32] K. Kuratowski, *Topology*, Vol I, New York- London- Warszawa, 1966.

[33] K. Kuratowski, *Topology*, Vol II, New York- London- Warszawa, 1966.

[34] K. Kuratowski and C. Ryll- Nardzewski, “A general theorem on selectors ”, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom Phys.*, **13**(1965), 397-403.

[35] E. J. McShane and R. B. Warfield, “On Filippov’s implicit functions lemma”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **18**(1967), 41-47.

[36] E. Michael, “Topologies on spaces of subsets”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **71**(1951), 152-182.

[37] G. J. Minty, “On a monotonicity method for the solution of nonlinear equations in Banach spaces”, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.*, **50**(1963), 1038-1041.

[38] A. M. Vainberg, “Nonlinear equations with monotone operators”, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR 188= Soviet Math. Dokl.*, **10**(1969), 1136-1138.

[39] M. M. Vainberg, “*Variational method and method of monotone operators in the theory of nonlinear equations*”, New York, Toronto, Wiley, 1973.

[40] D. Wagner, “Survey of measurable selection theorems”, *SIAM J. Control and Optimization.*, **15**(1977), 859-903.

[41] J. R. L. Webb, “Mapping and fixed-point theorems for nonlinear operators in Banach spaces”, *Proc. London Math. Soc.*, **20**(1970), 451-468.

روح‌الله جهانی پور jahanipu@kashanu.ac.ir
نرگس تراکمه سامانی
بخش ریاضی، دانشکدهٔ علوم، دانشگاه کاشان