فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۸ (پاییز ۱۳۹۰) صص. ۶۱ تا ۶۲

برهانی برای قضیهٔ کیلی ـ هامیلتون*

کریس برنهارت

مترجم: حمیدرضا وهابی

فرض کنید $M(n,n)$ مجموعهٔ همهٔ ماتریس‌های $n \times n$ روی یک حلقهٔ جابجایی و یکدار باشد. در این صورت قضیهٔ کیلی ـ هامیلتون بیان می‌کند که:

قضیه ۱. فرض کنید چندجمله‌ای مشخصهٔ ماتریس $A \in M(n,n)$

$$\det(tI - A) = c_0 t^n + c_1 t^{n-1} + c_2 t^{n-2} + \cdots + c_n$$

باشد. در این صورت

$$c_0 A^n + c_1 A^{n-1} + c_2 A^{n-2} + \cdots + c_n I = 0.$$

در این نوشته اثبات دیگری غیر از یک برهان استاندارد (برای مثال نگاه کنید به [۱]) برای این قضیه ارائه می‌دهیم. ایدهٔ ما برای ساده‌تر کردنِ برهان، استفاده از سری‌های توانی صوری است.

برهان. ابتدا مشاهده کنید که

$$\det(I - tA) = t^n \det(\frac{1}{t}I - A) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_n t^n.$$

*) Chris Bernhardt, "A proof of the Cayley-Hamilton Theorem", *Amer. Math. Monthly*, **116**(2009), 456-457

اکنون فرمول لاپلاس برای محاسبهٔ دترمینان، نتیجه می‌دهد

$$\det(I-tA)I=(I-tA)\operatorname{adj}(I-tA)$$

که در آن $\operatorname{adj}(A)$ ماتریس الحاقی کلاسیکِ A است.

اگر سری‌های توانی صوری برحسب t با ضرایب در $M(n,n)$ در نظر بگیریم، آن‌گاه $I-tA$ وارون‌پذیر با وارون $\sum_{۰}^{\infty} A^i t^i$ است. بنابراین

$$\left(\sum_{۰}^{\infty} A^i t^i\right)(c_{۰}+c_{۱}t+c_{۲}t^{۲}+\cdots+c_n t^n)I=\operatorname{adj}(I-tA).$$

اگر $\operatorname{adj}(I-tA)$ را به‌صورت یک سری توانی صوری برحسب t با ضرایب در $M(n,n)$ بنویسیم، نتیجه می‌گیریم

$$(c_{۰}+c_{۱}t+c_{۲}t^{۲}+\cdots+c_n t^n)\left(\sum_{۰}^{\infty} A^i t^i\right)=\sum_{۰}^{\infty} B_i t^i.$$

مشاهده کنید که درایه‌های $\operatorname{adj}(I-tA)$ چندجمله‌ای‌هایی برحسب t از درجهٔ حداکثر $n-۱$ اند. بنابراین B_i برای هر $i\geq n$ ماتریس صفر است. محاسبهٔ ضرایب t^n در دو طرف تساوی نتیجه می‌دهد که

$$c_{۰}A^n+c_{۱}A^{n-۱}+c_{۲}A^{n-۲}+\cdots+c_n I=۰.$$

مراجع

[1] G. Birkoff and S. MacLane, *A Survey of Modern Algebra*, A K Peters, Wellesley, MA, 1996.

ترجمهٔ حمیدرضا وهابی

دانشگاه آزاد اسلامی ـ واحد اسلامشهر

hrvahabi@yahoo.com