فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۴۸ (پاییز ۱۳۹۰) صص. ۸۷ تا ۹۹

دیدار با مسأله

بامداد یاحقی

دست در عمل زن تا اخلاص ظاهر شود.
دست در اخلاص زن تا نور ظاهر شود.

ابوالحسن خرقانی

در پیوند با بخش «حل مسأله» این شماره، مسألهٔ ۱ با الهام از نکتهٔ آورده شده در ابتدای فصل ۴ کتاب آنالیز حقیقی (ویرایش سوم) تألیف ه.ل. رویدن، توسط نگارنده طرح شده است. روش نخست حل مسألهٔ ۳ از نگارنده است. نگارنده، مسألهٔ ۳ را همراه با راه‌حلش برای مسابقهٔ ریاضی دانشجویی دورهٔ کارشناسی دانشگاه تورنتو در سال ۲۰۰۸ پیشنهاد کرد که قسمت دوم آن به‌عنوان یکی از سؤالات مسابقهٔ ریاضی دانشجویی دانشگاه تورنتو در بهار ۲۰۰۹ انتخاب شد. با توجه به این مطلب، روش دیگر حل مسألهٔ ۳، به‌طور دقیق‌تر ایدهٔ زیبای تحویل نابرابری (i) مسألهٔ ۳ در $\mathbb{R}^3$ به همان نابرابری در $\mathbb{R}^2$، از ادوارد باربو[1] از دانشگاه تورنتو است. مسألهٔ ۵ حالت خاص مسألهٔ ۲ از بخش «مسأله برای حل» است. برهان مسأله که آسان است، از نگارنده می‌باشد.

در پیوند با بخش «مسأله برای حل» این شماره، مسألهٔ ۱ از ریاضیدان معروف پال اردوش است. این مسأله در شمارهٔ پیشین نشر ریاضی توسط نگارنده حل شده است ولی آن را اینجا می‌آوریم تا در دسترس علاقه‌مندان بیشتری قرار گیرد.

نگارنده برهان کامل مسألهٔ ۲ از بخش «مسأله برای حل» و همچنین منبع اصلی مسأله را

1) Edward Barbeau

نمی‌داند. دوستانی که می‌دانند لطفاً اطلاع‌رسانی کنند. شایان گفتن است که بخش آخر مسألهٔ ۲ از بخش «مسأله برای حل» را به مسابقه گذاشته‌ایم. این گوی و این میدان! نگارنده سال‌ها پیش به مسألهٔ ۳، بدون راه حل آن، برخورد کرده و آن را در اردوهای نهایی المپیاد ریاضی دانش‌آموزان مطرح کرده بود. دوستانی که منبع این مسأله را می‌دانند لطفاً اطلاع‌رسانی کنند.

مسألهٔ ۴ از مسأله‌های ۶۰۸، ۶۰۹ و ۶۱۰ کتاب «مجموعهٔ مسائل و تمرینات آنالیز ریاضی» از ب. پ. دمیدویچ به ترجمهٔ احسان‌الله قوام‌زاده قوام، چاپ انتشارات میر مسکو گرفته شده است. راه حلی برای مسأله در کتاب اخیر ارائه نشده است.

مسألهٔ ۵ و همچنین مسألهٔ ۶، به‌طور طبیعی به ذهن افرادی که با نظریهٔ مثلثی‌سازی سر و کار دارند خطور می‌کند. نگارنده، سال‌ها پیش در اینترنت به مسألهٔ ۷ برخورد کرده بود.

در پایان، شایان گفتن است که تاکنون حتی یک نظر یا راه حل از خوانندگان بخش دیدار با مسأله دریافت نشده است. امیدوارم از این پس علاقه‌مندان به حل مسائل ریاضی همت گمارده، با ارائهٔ مسائل و نظراتشان، به برقرار ماندن این بخش در درازمدت کمک کنند، باشد که به غنای این بخش بیافزایند.

حل مسأله

۱. فرض کنید $a,b \in \mathbb{R}$ که $a<b$، $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ تابعی کراندار و $\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}$ تابعی صعودی باشد. تعریف استاندارد انتگرال ریمان ـ اشتیلیس روی بازهٔ $[a,b]$ به‌صورت زیر انجام می‌شود:

$$\int_a^b f d\alpha := \sup_{p\in\mathcal{P}[a,b]} L(p,f,\alpha) = \inf_{p\in\mathcal{P}[a,b]} U(p,f,\alpha),$$

که در آن $p=\{x_۰=a,x_۱,\dots,x_n=b\}$ ($n\in\mathbb{N}$ ، $x_۰=a<x_۱<\cdots<x_n=b$) یک افراز بازهٔ $[a,b]$ و $\mathcal{P}[a,b]$ مجموعهٔ همهٔ افرازهای بازهٔ $[a,b]$ و

$$\begin{aligned} L(p,f,\alpha) &= \sum_{n=۱}^{n}(\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-۱}))\inf_{x\in[x_{i-۱},x_i]} f(x),\\ U(p,f,\alpha) &= \sum_{n=۱}^{n}(\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-۱}))\sup_{x\in[x_{i-۱},x_i]} f(x). \end{aligned}$$

در تعریف بالا بسته به این‌که sup و inf را روی بازه‌های $(x_{i-۱},x_i]$، $[x_{i-۱},x_i)$، $(x_{i-۱},x_i]$، یا $(x_{i-۱},x_i)$ بگیریم، در مجموع چهار تعریف برای انتگرال ریمان ـ اشتیلیس روی بازهٔ $[a,b]$ به‌دست می‌آوریم.

ثابت کنید اگر α پیوسته باشد[۱]، این چهار تعریف با هم معادل‌اند.

حل. حکم را برای تعریف متداول انتگرال‌های پایینی و بالایی با نشان دادن این‌که

$\sup_{p\in\mathcal{P}[a,b]} L(p,f,\alpha)=\sup\{\sum_{n=1}^{n} c_i\Delta\alpha_i : n\in\mathbb{N}, \{x_i\}_{i=1}^{n}\in\mathcal{P}[a,b], c_i\leq f|_{(x_{i-1},x_i)}\}$,

$\inf_{p\in\mathcal{P}[a,b]} U(p,f,\alpha)=\inf\{\sum_{n=1}^{n} c_i\Delta\alpha_i : n\in\mathbb{N}, \{x_i\}_{i=1}^{n}\in\mathcal{P}[a,b], c_i\geq f|_{(x_{i-1},x_i)}\}$,

که در آن $\Delta\alpha_i=\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})$ به‌ازای هر $1\leq i\leq n$، ثابت می‌کنیم. در حالت‌های مربوط به سه تعریف دیگر، برابری‌های بالا به‌طور مشابه ثابت می‌شوند. از دو برابری بالا، برابری نخست را ثابت می‌کنیم. برابری دیگر به‌طور مشابه ثابت می‌شود.

از آنجا که برای افراز داده شدهٔ $p=\{x_i\}_{i=1}^{n}\in\mathcal{P}[a,b]$، به‌ازای هر $1\leq i\leq n$ داریم

$$\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\leq f|_{(x_{i-1},x_i)},$$

نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} L(p,f,\alpha) &= \sum_{n=1}^{n}\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\Delta\alpha_i \\ &\leq \sup\{\sum_{n=1}^{n} c_i\Delta\alpha_i : n\in\mathbb{N}, \{x_i\}_{i=1}^{n}\in\mathcal{P}[a,b], c_i\leq f|_{(x_{i-1},x_i)}\}. \end{aligned}$$

این ایجاب می‌کند که

$$\sup_{p\in\mathcal{P}[a,b]} L(p,f,\alpha)\leq\sup\{\sum_{n=1}^{n} c_i\Delta\alpha_i : n\in\mathbb{N}, \{x_i\}_{i=1}^{n}\in\mathcal{P}[a,b], c_i\leq f|_{(x_{i-1},x_i)}\}.$$

برای دیدن نابرابری در جهت دیگر، فرض کنید برای افراز داده شدهٔ $p=\{x_i\}_{i=1}^{n}\in\mathcal{P}[a,b]$ به‌ازای هر $1\leq i\leq n$، داشته باشیم

$$c_i\leq f|_{(x_{i-1},x_i)},$$

که در آن $c_i\in\mathbb{R}$. فرض کنید $M>0$ یک کران بالای f بر بازهٔ $[a,b]$ باشد. چون α بر $[a,b]$ پیوسته و لذا پیوستهٔ یکنواخت است، به‌ازای $\varepsilon>0$ داده شده، عدد

$$0<\delta<\frac{1}{2}\min_{1\leq i\leq n}(x_i-x_{i-1})$$

---

۱) در شمارهٔ قبل، فرض پیوستگی α از قلم افتاده بود.

موجود است به‌طوری که $|\alpha(x)-\alpha(y)|<\frac{1}{2Mn}\varepsilon$ هرگاه $|x-y|\leq\delta$. افراز

$$y_0=x_0=a<y_1<\cdots<y_{2n}=x_n=b$$

را به‌صورت زیر تعریف کنید:

$$y_0=a, y_1=x_0+\delta, y_2=x_1-\delta, y_3=x_1+\delta,\ldots,y_{2n-1}=x_n-\delta, y_{2n}=b.$$

به‌روشنی می‌توان نوشت

$$\sum_{i=1}^{n}c_i\Delta\alpha_i\leq\sum_{j=1}^{2n}c'_j\Delta\alpha_j,$$

که در آن $\Delta\alpha_j=\alpha(y_j)-\alpha(y_{j-1})$، $c'_1=c_1$، $(1\leq i\leq n-1)$ $c'_{2i}=\max(c_i,c_{i+1})$، $(2\leq i\leq n)$ $c'_{2i-1}=c_i$ و $c'_{2n}=c_n$. ولی

$$\sum_{j=1}^{2n}c'_j\Delta\alpha_j=\sum_{j=1}^{n}c'_{2j-1}\Delta\alpha_{2j-1}+\sum_{j=1}^{n}c'_{2j}\Delta\alpha_{2j}.$$

از طرفی به‌ازای هر $1\leq j\leq n$ داریم $c'_{2j-1}\leq m_{2j-1}$ که در آن

$$m_{2j-1}=\inf_{y_{2j-1}\leq x\leq y_{2j}}f(x).$$

پس می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{2n}c'_j\Delta\alpha_j &\leq \sum_{j=1}^{n}m_{2j-1}\Delta\alpha_{2j-1}+\sum_{j=1}^{n}c'_{2j}\Delta\alpha_{2j}\\ &= \sum_{j=1}^{2n}m_j\Delta\alpha_j+\sum_{j=1}^{n}(c'_{2j}-m_{2j})\Delta\alpha_{2j}\\ &\leq \sup_{p\in\mathcal{P}[a,b]}L(p,f,\alpha)+\sum_{j=1}^{n}2M\frac{1}{2Mn}\varepsilon\\ &= \sup_{p\in\mathcal{P}[a,b]}L(p,f,\alpha)+\varepsilon.\end{aligned}$$

در نتیجه به‌ازای هر $\varepsilon>0$،

$$\sum_{i=1}^{n}c_i\Delta\alpha_i\leq\sup_{p\in\mathcal{P}[a,b]}L(p,f,\alpha)+\varepsilon,$$

که از آنجا به‌دست می‌آوریم

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \Delta\alpha_i \leq \sup_{p\in\mathcal{P}[a,b]} L(p,f,\alpha).$$

بنابراین

$$\sup\{\sum_{n=1}^{n} c_i \Delta\alpha_i : n\in\mathbb{N}, \{x_i\}_{i=1}^{n}\in\mathcal{P}[a,b], c_i\leq f|_{(x_{i-1},x_i)}\} \leq \sup_{p\in\mathcal{P}[a,b]} L(p,f,\alpha).$$

این برهان را به پایان می‌رساند. ■

۲. (i) فرض کنید تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دارای خاصیت مقدار میانی و نیز دارای این خاصیت باشد که در هر نقطهٔ $a\in\mathbb{R}$ دارای اکسترمم موضعی است. تابع f را مشخص کنید.

(ii) فرض کنید تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دارای خاصیت مقدار میانی و نیز دارای این خاصیت باشد که در هر نقطهٔ $a\in\mathbb{R}$ دارای اکسترمم موضعی است. ثابت کنید تابع f بر $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است.

(iii) فرض کنید تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ پیوسته و دارای این خاصیت باشد که در هیچ نقطهٔ $a\in\mathbb{R}$ دارای ماکسیمم موضعی نیست. ثابت کنید تابع f بر $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است یا یک $a\in\mathbb{R}$ موجود است که f بر $(-\infty,a]$ اکیداً نزولی و بر $[a,+\infty)$ اکیداً صعودی است. به‌وضوح می‌توان حکمی مشابه برای حالتی که f فاقد نقطهٔ مینیمم موضعی بر $\mathbb{R}$ است، تنظیم و ثابت کرد.

حل. (i) از آنجا که f دارای خاصیت مقدار میانی است، با نشان دادن این‌که برد f شماراست، ثابت می‌کنیم f تابع ثابت است. فرض کنید $x\in\mathbb{R}$ دلخواه باشد. چون f در نقطهٔ x دارای اکسترمم موضعی است، یک بازه با دو سر گویا حول x مانند I_x موجود است به‌طوری که $f(x)\leq f(y)$ یا $f(x)\geq f(y)$ به‌ازای هر $y\in I_x$. این امر ایجاب می‌کند که $f(x)=\inf_{y\in I_x} f(y)$ یا $f(x)=\sup_{y\in I_x} f(y)$ به‌ازای هر $x\in\mathbb{R}$. از آنجا که تعداد بازه‌های با دو سر گویا شماراست و به‌روشنی

$$f(\mathbb{R})\subseteq\{\inf_{y\in I} f(y): I=(a,b), a,b\in\mathbb{Q}\}\cup\{\sup_{y\in I} f(y): I=(a,b), a,b\in\mathbb{Q}\},$$

نتیجه می‌گیریم که برد f شماراست و این مطلب با توجه به این که f دارای خاصیت مقدار میانی است، ثابت می‌کند که f تابع ثابت است.

(ii) برای حل مسأله، نخست لم زیر را ثابت می‌کنیم.

لم. گیریم R یک مجموعهٔ تماماً مرتب با دست‌کم سه عضو و $f : R \to R$ تابعی نه اکیداً صعودی و نه اکیداً نزولی باشد. در این صورت عضوهایی مانند $x_1, x_2, x_3 \in R$ موجودند به‌طوری که $x_1 < x_2 < x_3$ و $f(x_2) \geq \max\Big(f(x_1), f(x_3)\Big)$ یا $f(x_2) \leq \min\Big(f(x_1), f(x_3)\Big)$.

برهان. به برهان خلف عمل کرده، فرض می‌کنیم که به‌ازای هر $x_1, x_2, x_3 \in R$ که

$$x_1 < x_2 < x_3$$

داریم $f(x_2) < \max\Big(f(x_1), f(x_3)\Big)$ و $f(x_2) > \min\Big(f(x_1), f(x_3)\Big)$. از آنجا که $\max\Big(f(x_1), f(x_3)\Big) = f(x_1)$ یا $\max\Big(f(x_1), f(x_3)\Big) = f(x_3)$، درمی‌یابیم که به‌ازای هر $x_1, x_2, x_3 \in R$ که $x_1 < x_2 < x_3$ داریم

$$f(x_1) < f(x_2) < f(x_3) \quad \vee \quad f(x_1) > f(x_2) > f(x_3). \qquad (*)$$

عضوهایی مانند $a, b, c \in R$ که $a < b < c$ اختیار کنید. در نتیجه

$$f(a) < f(b) < f(c) \quad \vee \quad f(a) > f(b) > f(c).$$

فرض کنید $f(a) < f(b) < f(c)$. نشان می‌دهیم f اکیداً صعودی است که امری ناممکن است. برای این منظور، گیریم $x, y \in R$ که $x < y$ دلخواه باشند. پنج حالت تشخیص می‌دهیم (i) $x < y < a$، (ii) $x < y = a$، (iii) $x < a < y$، (iv) $x = a < y$ و (v) $a < x < y$. در هر حالت با توجه به $(*)$ به‌آسانی نتیجه می‌گیریم که $f(x) < f(y)$ و از آنجا درمی‌یابیم که f اکیداً صعودی است که تناقض است. اگر $f(a) > f(b) > f(c)$، با روشی مشابه می‌توان دید که f اکیداً نزولی است که دوباره تناقض حاصل می‌شود. بنابراین حکم به روش برهان خلف به اثبات می‌رسد. $\square$

حال برای اثبات حکم بخش (ii)، به برهان خلف فرض کنید f بر $\mathbb{R}$ نه اکیداً صعودی و نه اکیداً نزولی باشد. از لم بالا نتیجه می‌شود که عضوهایی مانند $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ موجودند به‌طوری که $x_1 < x_2 < x_3$ و

$$f(x_2) \geq \max\Big(f(x_1), f(x_3)\Big) \quad \vee \quad f(x_2) \leq \min\Big(f(x_1), f(x_3)\Big).$$

این امر با توجه به پیوستگی f ثابت می‌کند که f بر بازهٔ $[x_1, x_3]$ و لذا بر $\mathbb{R}$، به‌ترتیب دارای ماکسیمم موضعی و مینیمم موضعی است. این تناقض، حکم را به اثبات می‌رساند.

توضیح. از آنجا که هر تابع یک‌به‌یک بر $\mathbb{R}$ فاقد اکسترمم موضعی است، بخش (ii) در واقع ثابت می‌کند که هر تابع یک‌به‌یک بر $\mathbb{R}$ اکیداً یکنواست، یعنی اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است.

(iii) فرض کنید تابع f که فاقد ماکسیمم موضعی است اکیداً یکنوا نباشد. نشان می‌دهیم یک $a \in \mathbb{R}$ موجود است که f بر $(-\infty, a]$ اکیداً نزولی و بر $[a, +\infty)$ اکیداً صعودی است. برای این منظور، با توجه به لم ارائه شده در بخش (ii)، نتیجه می‌گیریم که عضوهایی مانند $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ موجودند به‌طوری که $x_1 < x_2 < x_3$ و

$$f(x_2) \geq \max\Big(f(x_1), f(x_3)\Big) \quad \vee \quad f(x_2) \leq \min\Big(f(x_1), f(x_3)\Big).$$

از آنجا که $f(x_2) \geq \max\Big(f(x_1), f(x_3)\Big)$، از پیوستگی f که نتیجه می‌دهد f بر بازهٔ $[x_1, x_3]$ و لذا بر $\mathbb{R}$، دارای ماکسیمم موضعی است، در می‌یابیم که $f(x_2) \leq \min\Big(f(x_1), f(x_3)\Big)$. با توجه به پیوستگی f، فرض کنید که مینیمم مطلق f بر بازهٔ $[x_1, x_3]$ در نقطهٔ $a \in (x_1, x_3)$ رخ دهد. توجه کنید که $a \notin \{x_1, x_3\}$، زیرا در غیر این صورت $f(a) = f(x_2) = f(x_3)$ یا $f(a) = f(x_1) = f(x_2)$ که در هر صورت با توجه به پیوستگی f ایجاب می‌کند f بر $[x_2, x_3]$ یا $[x_1, x_2]$ دارای ماکسیمم مطلق و لذا دارای ماکسیمم موضعی بر $\mathbb{R}$ باشد، که امری ناممکن است. حال نشان می‌دهیم f بر $(-\infty, a]$ اکیداً نزولی و بر $[a, +\infty)$ اکیداً صعودی است. ثابت می‌کنیم f بر $(-\infty, a]$ اکیداً نزولی است، به‌طور مشابه ثابت می‌شود که f بر $[a, +\infty)$ اکیداً صعودی است. برای این منظور، به برهان خلف عمل کرده، فرض کنید f بر $(-\infty, a]$ اکیداً نزولی نباشد. در نتیجه اعدادی $x < y \leq a$ موجودند به‌طوری که $f(x) \leq f(y)$. دو حالت می‌توان تشخیص داد.

اگر $f(x) \leq f(a)$، آن‌گاه چون f در a دارای مینیمم موضعی است، با توجه به پیوستگی f نتیجه می‌گیریم که ماکسیمم مطلق f بر بازهٔ (x, a) ماکسیمم موضعی برای f در $\mathbb{R}$ می‌شود که امری ناممکن است و اگر $f(x) > f(a)$، چون $f(x) \leq f(y)$، نتیجه می‌گیریم که ماکسیمم مطلق f بر بازهٔ (x, a) ماکسیمم موضعی برای f در $\mathbb{R}$ می‌شود که دوباره امری ناممکن است. بنابراین در هر صورت به تناقض می‌رسیم. این امر، حکم را به برهان خلف ثابت می‌کند. ■

۳. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی حقیقی یا مختلط، نه لزوماً متناهی‌بعد و $\|.\|$ نشانگر نرم ناشی از ضرب داخلی روی V باشد. فرض کنید $x, y, z \in V$. ثابت کنید

(i) $\|x+y\|\|x+z\| \leq \|y\|\|z\| + \|x\|\|x+y+z\|$؛

(ii) $\|x+y\| + \|x+z\| + \|y+z\| \leq \|x\| + \|y\| + \|z\| + \|x+y+z\|$.

حل. روش نخست. نخست توجه کنید از آنجا که فضای خطی تولیدشده توسط بردارهای $x, y, z \in V$ حداکثر سه‌بعدی است، با توجه به قضیهٔ فرایند گرام ـ اشمیت، کافی است که حکم را به‌ترتیب برای فضاهای اقلیدسی و یکانی $\mathbb{R}^۳$ و $\mathbb{C}^۳$ با ضرب داخلی متداول آن‌ها ثابت کنیم. از آنجا که نابرابری‌ها در $\mathbb{C}^۳$ را دوباره می‌توان به حکمی مشابه در $\mathbb{R}^۶$ تحویل کرد و این حکم اخیر با به‌کار بردن قضیهٔ فرایند گرام ـ اشمیت به‌نوبهٔ خود به حکم مشابهی در $\mathbb{R}^۳$ تحویل می‌شود، نتیجه می‌گیریم که کافی است نابرابری‌های (i) و (ii) را در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^۳$ با ضرب داخلی متداولش ثابت کنیم.

حال با به توان رسانیدن طرفین نابرابری (ii) و دسته‌بندی مناسب جملات و با توجه به این‌که به‌آسانی ثابت می‌شود در هر فضای ضرب داخلی V

$$\|x+y\|^۲ + \|x+z\|^۲ + \|y+z\|^۲ = \|x\|^۲ + \|y\|^۲ + \|z\|^۲ + \|x+y+z\|^۲,$$

به‌ازای هر $x, y, z \in V$، درمی‌یابیم که کافی است نابرابری (i) را ثابت کنیم. برای اثبات نابرابری (i) در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^۳$ به‌روشنی کافی است آن را در $\mathbb{R}^۴$ ثابت کنیم. فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^۴$ را به‌عنوان فضای کواترنیون‌های حقیقی، یعنی $\mathbb{H}$ در نظر بگیرید. یادآوری می‌کنیم که $\|uv\| = \|u\|\|v\|$ به‌ازای هر $u, v \in \mathbb{H}$ و در نتیجه $\|u^{-۱}\| = \|u\|^{-۱}$ به‌ازای هر $۰ \neq u \in \mathbb{H}$. قرار دهید

$$\alpha = x+y, \beta = x+z, \gamma = x+y+z.$$

باید نشان دهیم

$$\|\alpha\|\|\beta\| \leq \|\gamma-\alpha\|\|\gamma-\beta\| + \|\alpha+\beta-\gamma\|\|\gamma\|,$$

که در آن $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{H}$. اگر $\|\alpha\|\|\beta\| = ۰$، چیزی برای اثبات نداریم. پس بدون آن‌که از کلیت مسأله کاسته شود، فرض کنید $\alpha, \beta \neq ۰$. حال می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \beta &= (\gamma\alpha^{-۱}\gamma - \gamma\alpha^{-۱}\beta - \gamma + \beta) - (\gamma\alpha^{-۱}\gamma - \gamma\alpha^{-۱}\beta - \gamma) \\ &= (\gamma\alpha^{-۱} - ۱)(\gamma-\beta) + \gamma(۱ + \alpha^{-۱}\beta - \alpha^{-۱}\gamma), \end{aligned}$$

که از آن به‌آسانی به‌دست می‌آوریم

$$\|\beta\| \leq \|(\gamma\alpha^{-۱} - ۱)(\gamma-\beta)\| + \|\gamma(۱ + \alpha^{-۱}\beta - \alpha^{-۱}\gamma)\|$$

$$\begin{aligned} &= \|\gamma\alpha^{-1} - 1\|\|\gamma - \beta\| + \|\gamma\|\|1 + \alpha^{-1}\beta - \alpha^{-1}\gamma\| \\ &= \|\gamma - \alpha\|\|\alpha^{-1}\|\|\gamma - \beta\| + \|\gamma\|\|\alpha^{-1}\|\|\alpha + \beta - \gamma\| \\ &= \|\alpha\|^{-1}\|\gamma - \alpha\|\|\gamma - \beta\| + \|\alpha\|^{-1}\|\gamma\|\|\alpha + \beta - \gamma\|. \end{aligned}$$

رابطهٔ اخیر به‌روشنی ایجاب می‌کند

$$\|\alpha\|\|\beta\| \quad \leq \quad \|\gamma - \alpha\|\|\gamma - \beta\| + \|\gamma\|\|\alpha + \beta - \gamma\|,$$

که همان نتیجهٔ مورد نظر ماست.

روش دیگر. همان‌گونه که در راه حل نخست استدلال کردیم، کافی است که نابرابری (i) را در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^3$ با ضرب داخلی متداولش ثابت کنیم. با قرار دادن

$$\alpha = x + y, \quad \beta = x + z, \quad \gamma = x + y + z,$$

مطابق بالا کافی است نشان دهیم

$$\|\alpha\|\|\beta\| \leq \|\gamma - \alpha\|\|\gamma - \beta\| + \|\alpha + \beta - \gamma\|\|\gamma\|.$$

برای این منظور، فرض کنید ω تصویر متعامد γ بر فضای خطی تولیدشده توسط بردارهای α و β باشد. در نتیجه می‌توان نوشت $\gamma = \omega + \delta$ که در آن بردار $\delta \in \mathbb{R}^3$ بر بردارهای α و β و در نتیجه بر بردار ω عمود است. حال می‌توان نوشت

$$\|\gamma - \alpha\|^2 = \|(\omega - \alpha) + \delta\|^2 = \|\omega - \alpha\|^2 + \|\delta\|^2 \geq \|\omega - \alpha\|^2,$$

که از آنجا به‌دست می‌آوریم $\|\gamma - \alpha\| \geq \|\omega - \alpha\|$. به‌طور مشابه داریم $\|\gamma - \beta\| \geq \|\omega - \beta\|$، $\|\alpha + \beta - \gamma\| \geq \|\alpha + \beta - \omega\|$ و $\|\gamma\| \geq \|\omega\|$. در نتیجه کافی است ثابت کنیم

$$\|\alpha\|\|\beta\| \leq \|\omega - \alpha\|\|\omega - \beta\| + \|\alpha + \beta - \omega\|\|\omega\|.$$

ولی فضای خطی تولیدشده توسط سه بردار α و β و ω حداکثر دو بعدی است. پس با توجه به قضیهٔ فرایند گرام ـ اشمیت کافی است که نابرابری اخیر را برای فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^2$ ثابت کنیم. فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^2$ را به‌عنوان صفحهٔ مختلط $\mathbb{C}^2$ در نظر می‌گیریم. پس بدون آن‌که از کلیت کاسته شود، می‌توان فرض کرد $\alpha, \beta, \omega \in \mathbb{C}$. در این صورت می‌توان نوشت

$$\alpha\beta = (\omega - \alpha)(\omega - \beta) + (\alpha + \beta - \omega)\omega.$$

با گرفتن نرم از طرفین رابطهٔ بالا و استفاده از نابرابری مثلثی و این‌که $\|uv\| = \|u\|\|v\|$ به‌ازای هر $u, v \in \mathbb{C}$، درمی‌یابیم که

$$\begin{aligned} \|\alpha\beta\| &\leq \|(\omega-\alpha)(\omega-\beta)\| + \|(\alpha+\beta-\omega)\omega\| \\ &= \|\omega-\alpha\|\|\omega-\beta\| + \|\alpha+\beta-\omega\|\|\omega\|, \end{aligned}$$

این همان نتیجهٔ مورد نظر است. ■

۴. (i) فرض کنید C خمی بسته، محدب و به‌طور قطعه‌ای هموار در صفحه باشد. در این صورت، خطی مانند ℓ موجود است به‌طوری که ℓ هم طول خم و هم مساحت محدود به خم C را نصف می‌کند.

(ii) فرض کنید Σ رویه‌ای بسته، محدب و هموار در $\mathbb{R}^۳$ باشد. در این صورت صفحه‌ای مانند p موجود است به‌طوری که p هم مساحت رویه و هم حجم محدود به رویهٔ Σ را نصف می‌کند.

حل. (i) فرض کنید L و A به‌ترتیب نشانگر طول خم C و مساحت ناحیهٔ محدود به خم C باشند. فرض کنید $x_۰ \in C$ یک نقطهٔ هموار خم C و $\alpha : [۰, L] \to \mathbb{R}^۲$ نشانگر پرمایش خم C نسبت به طول قوس باشد که با افزایش طول قوس در جهت مثلثاتی روی خم حرکت کنیم. تابع $a : [۰, \frac{L}{۲}] \to \mathbb{R}$ توسط $a(s) = A(D_۱(s)) - A(D_۲(s))$، که در آن $D_۱(s)$ و $D_۲(s)$ نشانگر ناحیه‌های محدود به پاره‌خط $\alpha(s)\alpha(s+\frac{L}{۲})$ و به‌ترتیب بخشی از خم C هستند که در جهت مثلثاتی از $\alpha(s)$ به $\alpha(s+\frac{L}{۲})$ و از $\alpha(s+\frac{L}{۲})$ به $\alpha(s)$ پیموده می‌شوند و $A(D_i(s))$ نشانگر مساحت ناحیهٔ $D_i(s)$ $(i = ۱, ۲)$ است. توجه کنید که $D_۲(s) = D \setminus D_۱(s)$ که در آن D نشانگر ناحیهٔ محدود به خم C است. به‌طور دقیق‌تر

$$A(D_۱(s)) = \frac{۱}{۲}\int_{t=۰}^{\frac{L}{۲}} r^۲(s,t)d\theta(s,t), A(D_۲(s)) = A - A(D_۱(s)),$$

که در آن $r(s,t) = \|\alpha(s+t) - \alpha(s)\|$ و $\theta(s,t)$ زاویهٔ بین مماس راست بر خم C در نقطهٔ $\alpha(s) \in C$ و پاره‌خط $\alpha(s)\alpha(s+t)$. بنابراین

$$a(s) = ۲A(D_۱(s)) - A = \int_{t=۰}^{\frac{L}{۲}} r^۲(s,t)d\theta(s,t) - A.$$

در زیر نشان می‌دهیم که تابع a بر $[۰, \frac{L}{۲}]$ پیوسته و در واقع لیپ‌شیتز است. برای این منظور، قرار دهید

$$d = \mathrm{diam}\ (D) = \sup\{\|x_۱ - x_۲\| : x_۱, x_۲ \in D\} = \mathrm{diam}\ (C).$$

به‌روشنی (چرا؟)

$$|a(s_1) - a(s_2)| \leq 2\frac{\pi d^2}{2}|s_1 - s_2| = \pi d^2|s_1 - s_2|.$$

چون $a(\frac{L}{2}) = -a(0)$، درمی‌یابیم که $a(\frac{L}{2})a(0) < 0$. در نتیجه بنابر قضیهٔ مقدار میانی، نقطهٔ $s_0 \in [0, \frac{L}{2}]$ موجود است به‌طوری که $a(s_0) = 0$. به عبارت دیگر،

$$A(D_1(s_0)) = A(D_2(s_0)).$$

یعنی پاره‌خط $\alpha(s_0)\alpha(s_0 + \frac{L}{2})$ هم طول و هم مساحت خم C را نصف می‌کند.

(ii) فرض کنید D، A، و V به‌ترتیب نشانگر ناحیهٔ محدود به رویهٔ Σ، مساحت رویهٔ Σ و حجم ناحیهٔ محدود به رویهٔ Σ باشند. فرض کنید S^2 نشانگر کرهٔ واحد در $\mathbb{R}^3$ باشد. به‌روشنی به‌ازای هر $x \in S^2$ یک صفحهٔ یگانهٔ P_x در $\mathbb{R}^3$ موجود است که دارای بردار نرمال x است و مساحت Σ نصف می‌کند. حال تابع $v : S^2 \to \mathbb{R}$ را توسط

$$v(x) = V(D_1(x)) - V(D_2(x)) = 2V(D_1(x)) - V$$

تعریف کنید که در آن $D_1(x)$ ناحیهٔ محدود به رویهٔ Σ و صفحهٔ P_x است به‌طوری که بردار نرمال x به درون $D_1(x)$ اشاره می‌کند، $D_2(x) = D \setminus D_1(x)$ و $V(D_i(x))$ $(i = 1, 2)$ نشانگر حجم ناحیهٔ $D_i(x)$ است. با ایده‌ای مشابه با ایدهٔ ارائه شده در (i) می‌توان نشان داد که v روی S^2 پیوسته و در واقع لیپ‌شیتز است. (چگونه؟) از آنجا که $v(-x) = -v(x)$ به‌ازای هر $x \in S^2$، نتیجه می‌گیریم $v(x_0)x(-x_0) \leq 0$ که در آن $x_0 = (0, 0, 1) \in S^2$. فرض کنید C کمانی واقع بر S^2 باشد که نقاط $x_0, -x_0 \in S^2$ را به هم می‌پیوندد و $\alpha : [0, 1] \to S^2$ پرمایشی از کمان C باشد که $\alpha(0) = x_0 = -\alpha(1)$. به‌روشنی تابع $w := v \circ \alpha : [0, 1] \to \mathbb{R}$ پیوسته است و به‌علاوه $w(0) = -w(1)$. در نتیجه $w(0)w(1) \leq 0$ و لذا عددی مانند $0 \leq t_0 \leq 1$ وجود دارد به‌طوری که $w(t_0) = 0$؛ یعنی $V(D_1(\alpha(t_0)) = V(D_2(\alpha(t))$. بنابراین صفحهٔ $P_{\alpha(t_0)}$ مساحت رویهٔ Σ و حجم محدود به رویهٔ Σ را نصف می‌کند. ■

توضیح. با الهام از مسألهٔ بالا، حل تمرین زیر را به خواننده واگذار می‌کنیم.
فرض کنید E_1 و E_2 دو ناحیهٔ از هم جدا و کراندار در صفحه باشند که به‌ترتیب دارای مساحت‌های A_1 و A_2 هستند. ثابت کنید خطی در صفحه وجود دارد که مساحت هر دو ناحیه را نصف می‌کند.

۵. فرض کنید $A \subseteq \mathbb{R}$ دارای این خاصیت باشد که به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}$ یک عضو یگانهٔ $f(x) \in A$ موجود است به‌طوری که $|x - f(x)| = \sup\{|x-a| : a \in A\}$. ثابت کنید A مجموعهٔ تک‌عضوی است.

حل. به برهان خلف عمل کنید: یک $a \in A$ اختیار کنید. قرار دهید $a_۱ = f(a)$ و $a_۲ = f(a_۱)$. در این صورت به‌روشنی $a_۱, a_۲ \in A$ دو نقطهٔ متمایز هستند و A زیرمجموعهٔ بازهٔ بسته با دو سر $a_۱$ و $a_۲$ است. به‌ازای $m = \frac{a_۱ + a_۲}{۲}$، هر دو نقطهٔ $a_۱$ و $a_۲$ دورترین نقاط A از m خواهند بود که به‌وضوح یک تناقض است. این حکم را ثابت می‌کند. ■

۲ مسأله برای حل

۱. فرض کنید مربعی با طول ضلع a شامل دو مربع با درون‌های مجزا با طول ضلع‌های به‌ترتیب $a_۱$ و $a_۲$ باشد. ثابت کنید $a_۱ + a_۲ \leq a$.

۲. فرض کنید $F = \mathbb{R}$ یا $F = \mathbb{C}$ و مجموعهٔ بستهٔ $A \subseteq \mathbb{F}^n$ دارای این خاصیت باشد که به‌ازای هر $x \in \mathbb{F}^n$، عضو یگانهٔ $a_x \in A$ موجود است به‌طوری که

$$\|x - a_x\| = \sup\{\|x - a\| : a \in A\},$$

که در آن $\|\,.\,\|$ نشانگر نرمی دلخواه بر $\mathbb{F}^n$ است. ثابت کنید A یک مجموعهٔ تک‌عضوی است. آیا حکم را بدون فرض بسته بودن مجموعهٔ A می‌توانید ثابت کنید؟

توضیح. مسألهٔ بالا را در حالت کلی، بدونِ فرض بسته بودنِ مجموعهٔ A به مسابقه می‌گذاریم. به سه راه‌حل درست مسأله، به رسم یادگار از سوی فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی جایزه‌ای تقدیم خواهد شد.

۳. فرض کنید $S \subseteq \mathbb{R}^۳$ دارای این خاصیت باشد که هر صفحه در $\mathbb{R}^۳$ مجموعهٔ S را در یک دایره یا در یک نقطه قطع می‌کند یا اصلاً قطع نمی‌کند. ثابت کنید S یک کره یا یک مجموعهٔ تک‌عضوی است.

۴. فرض کنید $a \in \mathbb{R}$ و $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ تابعی باشد که به‌ازای هر $b > a$ بر بازهٔ (a, b) کراندار است. در این صورت

(i) $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \Big(f(x+۱) - f(x)\Big)$؛

(ii) اگر $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x+۱)-f(x)}{x^n}\right)=\ell\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$، آنگاه

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{n+۱}}=\frac{\ell}{n+۱}.$$

۵. فرض کنید $\mathbb{H}$ نشانگر حلقهٔ تقسیم کواترنیون‌ها باشد. ثابت کنید هر ماتریس مربعی روی $\mathbb{H}$ مثلثی‌پذیر است. به عبارت دیگر اگر $n\in\mathbb{N}$ و $A\in M_n(\mathbb{H})$، آن‌گاه یک ماتریس وارون‌پذیر $P\in M_n(\mathbb{H})$ موجود است به‌طوری که $P^{-۱}AP$ ماتریسی بالامثلثی است.

۶. فرض کنید F یک میدان باشد. ماتریس $A\in M_n(F)$ که در آن $n>۱$ را تحویل‌ناپذیر گوییم هرگاه $A:F^n\to F^n$ به‌عنوان تبدیلی خطی دارای زیرفضای پایای غیربدیهی نباشد. ثابت کنید ماتریس A تحویل‌ناپذیر است اگر و تنها اگر چندجمله‌ای ویژهٔ آن، به‌عنوان یک چندجمله‌ای با ضرایب از F، روی F تحویل‌ناپذیر باشد.

۷. ثابت کنید

$$(xyz)^۲+(xyz)+۱\leq ۳(x^۲-x+۱)(y^۲-y+۱)(z^۲-z+۱),$$

به‌ازای هر $x,y,z\in\mathbb{R}$.

بامداد یاحقی

دانشگاه گلستان، گروه ریاضی

bamdad@bamdadyahaghi.com