فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۰ (پاییز ۱۳۹۱) صص. ۴۷ تا ۵۸

نظریهٔ فضاهای برگمن: گذشته، حال و آینده (قسمت اول)

علی آبکار

۱. مقدمه

موضوع جدید فضاهای برگمن عبارت است از ترکیب استادانهٔ نظریهٔ توابع تحلیلی با آنالیز تابعی و نظریهٔ عملگرها. این نظریه علاوه بر آن که دارای مفاهیم مشترک زیادی با نظریهٔ فضاهای هاردی است، دارای عناصر جدیدی مانند هندسهٔ هذلولوی، هسته‌های بازمولد[۱] و تابع‌های گرین دو ـ همساز است. در دهه‌های قبل، آن بخش‌هایی از نظریهٔ توابع و نظریهٔ عملگرها که به فضاهای هاردی مربوط می‌شد، کاملاً قابل فهم و توصیف بود؛ مفاهیمی مانند صفرمجموعه‌ها[۲]، نظریهٔ تجزیه[۳]، درونیابی، زیرفضاهای ناوردا، عملگرهای تاپلیتز و هنکل[۴] و غیره. متأسفانه اغلب روش‌هایی که در مورد فضاهای هاردی به کار می‌رفت، در مورد این خویشاوند نزدیک آن‌ها، یعنی فضاهای برگمن فاقد کارآیی لازم بودند. از این رو، بیشتر ریاضی‌دانان فکر می‌کردند که پیشرفت در نظریهٔ فضاهای برگمن غیرممکن است. خوشبختانه، در آستانهٔ قرن جدید با معرفی تابع‌های اکسترمال[۵] توسط هدنمالم[۶] بن‌بست موجود شکست و راه برای مطالعهٔ بیشتر این فضاها باز شد. متعاقباً کوشش‌های بوریچف[۷]، اَلِمان[۸]، ریشتر[۹]، ساندبرگ[۱۰]، شاپیرو[۱۱]، کاوینسون[۱۲]، دیورن[۱۳]،

---

1) Reproducing kernels 2) Zero sets 3) Factoring theory 4) Toeplitz and Hankel operators 5) Extremal functions 6) Hedenmalm, H. 7) Borichev, A. 8) Aleman, A. 9) Richter, S. 10) Sundberg, C. 11) Shapiro, H. S. 12) Khavinson, D. 13) Duren, P. L.

زیپ[1]، کورنبلوم[2]، ژو[3]، شیمورین[4] و بسیاری دیگر، منجر به پیدایش یک نظریهٔ بسیار غنی شد. در سال‌های اخیر دو کتاب درسی در مقطع دکتری در این موضوع به نگارش در آمده است ([5] و [8])، اما هنوز تعداد زیادی مسألهٔ حل‌نشده در این زمینه وجود دارد که مبارزطلبی می‌کنند.

در این مقاله، سعی خواهیم کرد محققین جوان را با مقدمات ورود به این دنیای تازه آشنا کنیم. از باب احترام به ریاضی‌دانان پیش‌کسوت، متذکر می‌شویم که اولین مقاله به زبان فارسی در این زمینه در سال ۱۳۷۳ در همین مجله به چاپ رسید ([۱۶]).

۲. فضاهای برگمن

فرض کنید Ω ناحیه‌ای کران‌دار در صفحهٔ مختلط $\mathbb{C}$ باشد و $0 < p < \infty$. فضای برگمن $A^p(\Omega)$ متشکل است از همهٔ تابع‌های تحلیلی بر Ω که $|f|^p$ نسبت به اندازهٔ مساحتی در Ω انتگرال پذیر است؛ به عبارت دیگر

$$A^p(\Omega) = \left\{ f \in Hol(\Omega): \quad \int_\Omega |f(z)|^p dxdy < +\infty \right\}.$$

نظریهٔ فضاهای برگمن با کار پیشروانهٔ استفان برگمن (۱۸۹۵ ــ ۱۹۷۷) شروع شد که اساساً به حالت خاص $p = 2$ و به دامنه‌های $\mathbb{C}^n$ به‌ازای $n > 2$ محدود می‌شد. روشن است که در این وضع، $A^2(\Omega)$ با ضرب داخلی

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f(z)\overline{g(z)} dA(z)$$

یک فضای هیلبرت است (در اینجا $dA(z)$ اندازهٔ حجمی لبگ در فضای $\mathbb{C}^n$ است). در نتیجه، دستگاه‌های یکامتعامد از تابع‌ها و هسته‌های باز مولد نقش مهمی در مطالعهٔ فضاهای برگمن ایفا می‌کردند. کتابی که خود استفان برگمن نگاشته است ([2])، مرجع خوبی در این زمینه است.

از این به بعد فرض خواهیم کرد که ناحیهٔ Ω قرص یکهٔ باز $\mathbb{D} = \{z : \ |z| < 1\}$ در صفحهٔ مختلط است. اندازهٔ مساحتی لبگ نرمال شده را با $dA(z) = \frac{dxdy}{\pi}$ نشان خواهیم داد. بنابراین، $A^p(\mathbb{D}) = A^p$ متشکل است از همهٔ تابع‌های تحلیلی $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ که برای آن‌ها

$$\int_\mathbb{D} |f(z)|^p dA(z) < \infty.$$

نرم در A^p به‌صورت $\|f\|_{A^p} = \left(\int_\mathbb{D} |f(z)|^p dA(z)\right)^{\frac{1}{p}}$

1) Seip, K. 2) Korenblum, B. 3) Zhu, K. 4) Shimorin, S.

تعریف می‌شود. اگر $p \geq ۱$، عبارت بالا یک نرم واقعی و A^p به همراه این نرم، فضایی باناخ است. در حالتی که $۰ < p < ۱$، متر $d(f,g) = ||f-g||_{A^p}^p$، A^p را به یک فضای متری کامل تبدیل می‌کند. از تعریف روشن است که $A^p(\mathbb{D})$ زیرمجموعه‌ای از $L^p(\mathbb{D})$ است. از این رو، برخی مؤلفین به‌جای A^p از نماد L_a^p استفاده می‌کنند: زیرنویس a حرف اول کلمهٔ انگلیسی analytic است. لازم است متذکر شویم که در برخی نوشتجات ریاضی قدیمی‌تر، از نماد B^p برای فضاهای برگمن استفاده می‌کردند. این نماد امروزه کمتر مورد استفاده قرار می‌گیرد، زیرا از شکل‌های مختلف حرف B برای نشان دادن فضاهای بلوک[1] و فضاهای بیسف[2] نیز استفاده می‌شود.

۳. فضاهای برگمن استاندارد

فضای هیلبرت $A^۲$ به فضای برگمن استاندارد شهرت دارد. ضرب داخلی در این فضا به‌صورت

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)}dA(z)$$

تعریف می‌شود. اگر f و g به‌ترتیب دارای سری‌های تیلر $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n z^n$ و $\sum_{n=۰}^{\infty} b_n z^n$ باشند، آن‌گاه محاسبه‌ای ساده نشان می‌دهد که

$$\langle f, g\rangle = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{a_n\overline{b_n}}{n+۱}.$$

به ویژه،

$$||f||_{A^۲}^۲ = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{|a_n|^۲}{n+۱}.$$

فرض کنیم w نقطهٔ دلخواهی در قرص یکهٔ باز باشد. تابعک خطی $\varphi_w : A^۲ \longrightarrow \mathbb{C}$ با ضابطهٔ $\varphi_w(f) = f(w)$ را در نظر می‌گیریم. φ_w را تابعک خطی مقداریابی[3] در نقطهٔ w می‌نامند. با استفاده از خاصیت میانگین تابع‌های تحلیلی و نامساوی کُشی ـ شوارتس، داریم

$$\begin{aligned} |\varphi_w(f)| = |f(w)| &= \left|\frac{۱}{\pi r^۲}\int_{\mathbb{D}(w;r)} f(z)dxdy\right| \\ &\leq \frac{۱}{\pi r^۲}\int_{\mathbb{D}(w;r)} |f(z)|.۱dxdy \\ &\leq \frac{۱}{\pi r^۲}\left(\int_{\mathbb{D}(w;r)} |f(z)|^۲dxdy\right)^{\frac{۱}{۲}}\left(\int_{\mathbb{D}(w;r)} ۱^۲dxdy\right)^{\frac{۱}{۲}} \\ &\leq \frac{۱}{\sqrt{\pi}r}||f||_{A^۲}. \end{aligned}$$

1) Block spaces 2) Besov spaces 3) Evaluation functional

بنابراین φ_w یک تابعک خطی کران‌دار است و $\|\varphi_w\| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}r}$ (r عدد مثبتی است که قرص به مرکز w و به شعاع r در داخل $\mathbb{D}$ قرار می‌گیرد). اکنون از قضیهٔ نمایش ریس برای فضاهای هیلبرت نتیجه می‌شود که تابع یکتای $K_w \in A^2$ وجود دارد که به‌ازای هر $f \in A^2$ داریم

$$\varphi_w(f) = \langle f, K_w \rangle$$

یا

$$f(w) = \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{K_w(z)}dA(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{K_w(z)}dxdy.$$

تابع $K_w(z)$ را هستهٔ برگمن[1] می‌نامند. از تساوی بالا معلوم است که هستهٔ برگمن دارای خاصیت «باز تولید کنندگی[2]» است. با تعویض نقش‌های z و w درمی‌یابیم که

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} f(w)\overline{K_z(w)}dA(w).$$

با محاسبه‌ای، البته نه‌چندان واضح!، معلوم می‌شود که هستهٔ برگمن برای قرص یکهٔ باز دارای صورت صریح زیر است (به [5] یا [8] رجوع شود):

$$K_z(w) = \frac{1}{(1 - \overline{z}w)^2}.$$

داشتن عبارتی صریح برای هستهٔ برگمن و بهره‌مندی از عبارتی برحسب ضرایب تیلر برای نرم تابع داده شدهٔ $f \in A^2$، از مزایای برخورداری A^2 از ساختار هیلبرتی است (پایهٔ یکامتعامد $\{\sqrt{n+1}z^n\}_{n=0}^{\infty}$ نقشی مهم در محاسبهٔ هستهٔ برگمن بازی می‌کند).

۴. فضاهای هاردی

چون از فضاهای L^p و A^p سخن به میان آمد، لازم است فضاهای هاردی H^p را همین‌جا معرفی کنیم. ملاحظه خواهیم کرد که $H^p \subseteq A^p \subseteq L^p$، در نتیجه مطالعهٔ A^p بدون مطالعهٔ H^p و گاه مقایسهٔ آن‌ها خالی از لطف است. لازم است متذکر شویم که این نظریه توسط اساتیدی مانند آقایان دکتر طاهر قاسمی هنری، دکتر ارسلان شادمان و مرحوم دکتر کریم صدیقی به دانشجویان آموزش داده می‌شد. مرجع اصلی تدریس معمولاً یکی از کتاب‌های دیورن، گارنت[3]، کوزیس[4] یا هافمن[5] بوده است (مشخصات کتاب‌ها در مراجع آمده است).

گوییم تابع تحلیلی $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ به فضای هاردی H^p تعلق دارد هرگاه

1) Bergman kernel 2) Reproducing property 3) Garnett, J. B. 4) Koosis, P.
5) Hofmann, K.

$$\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta < \infty.$$

نرم تابع $f \in H^p$ به صورت

$$||f||_{H^p} = \sup_{0<r<} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}}$$

تعریف می‌شود. توجه کنید که اگر به‌ازای $0 < r < 1$، تابع $f_r : \mathbb{T} = \partial\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ را با ضابطهٔ

$$f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta})$$

تعریف کنیم، آن‌گاه

$$||f||_{H^p} = \sup_{0<r<1} ||f_r||_{L^p(\mathbb{T})}.$$

در حالت خاص که $p = \infty$، H^p به فضای توابع تحلیلی کران‌دار[1] تبدیل می‌شود:

$$H^\infty = \{f \in Hol(\mathbb{D}) : \quad \sup_{|z|<1} |f(z)| < \infty\}.$$

نرم در این فضا به‌صورت

$$||f||_{H^\infty} = \sup_{|z|<1} |f(z)|$$

تعریف می‌شود. از تعریف روشن است که $H^\infty \subseteq H^p$ $(0 < p < \infty)$. مشابه آنچه در فضای A^p داشتیم، به‌ازای $p \geq 1$، H^p فضایی باناخ و به‌ازای $0 < p < 1$، یک فضای متری کامل است. در حالت $p = 2$، H^2 فضای هیلبرت است. با محاسبه‌ای ساده، معلوم می‌شود که تابع $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ به فضای H^2 تعلق دارد اگر و تنها اگر

$$||f||_{H^2}^2 = \sum_{n=0}^\infty |a_n|^2 < \infty.$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم که $H^2 \subseteq A^2$. در حالتی که p عدد مثبت دلخواهی باشد، از نابرابری

$$\begin{aligned} ||f||_{A^p}^p &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p r dr d\theta \\ &\leq \int_0^1 ||f||_{H^p}^p r dr = \frac{1}{2} ||f||_{H^p}^p \end{aligned}$$

درمی‌یابیم که $H^p \subseteq A^p$. در واقع H^p یک زیرفضای بستهٔ A^p است.

1) Bounded analytic functions

۵. دو رهیافت متفاوت

در مطالعهٔ هر یک از این فضاهای باناخ، دو رهیافت متفاوت وجود دارد. یکی رهیافت «نظریهٔ توابع» و دیگری رهیافت «نظریهٔ عملگرها». اگر منظور، بررسی ویژگی‌های فردی عناصر فضا باشد، کار ما در حوزهٔ نظریهٔ توابع قرار می‌گیرد. مثلاً بحث تجزیهٔ تابع‌ها در یک فضا، رفتار ضرایب تیلر عناصر یک فضا، رفتار مرزی عناصر فضا و غیره. این مطالعات را گاهی «آنالیز سفت[۱]» می‌گویند. در رهیافت دوم، عناصر فضا به‌عنوان اشیاء منفرد مورد نظر نیستند، بلکه زیرفضاها، عملگرهای تعریف شده بر آن‌ها، تفکیک‌پذیری فضا، توصیف زیرفضاها و غیره مورد بررسی قرار می‌گیرد. این نوع آنالیز را «آنالیز نرم[۲]» هم می‌نامند. دیدگاه اول خیلی قدیمی و سنتی است. مثلاً تجزیهٔ تابع‌های فضای هاردی به تابع‌های «درونی» و «برونی» کاری است که در حوزهٔ نظریهٔ توابع قرار می‌گیرد، لیکن توصیف برلینگ از زیرفضاهای ناوردای $H^۲$ کاری است که در حوزهٔ نظریهٔ عملگرها قرار می‌گیرد. لازم است متذکر شویم که فضاهای H^∞، H^p و A^p مصداق‌هایی از یک مبحث کلی‌تر به‌نام فضاهای باناخ متشکل از توابع تحلیلی یا فضاهای تمامریخت[۳] هستند. یک مصداق مهم دیگر این فضاها، فضای دیریشله[۴] است. به‌طور کلی، وقتی صحبت از یک فضا به میان می‌آید، ساختار فضای برداری توپولوژیک آن مورد نظر است. در نتیجه مطالعهٔ موضوع، بیشتر از دیدگاه دوّم صورت می‌پذیرد. عنوان توصیفی دیگری که به این مبحث اشاره می‌کند، نظریهٔ عملگرها در فضاهای توابع است. کتابی که ژو با همین عنوان نوشته است، حاوی اطلاعات جامعی در این زمینه است ([15]).

۶. مطالعهٔ فضاهای هاردی

مطالعهٔ ویژگی‌های ساختاری عناصر H^p در سال‌های بین ۱۹۱۵ تا ۱۹۳۰ انجام پذیرفت. این کار با مقاله‌ای مهم از گ. هـ. هاردی آغاز شد. هاردی نشان داد که هر تابع $f \in H^p$ تقریباً همه‌جا بر $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ دارای حد شعاعی است و به علاوه تابع مرزی

$$f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r\to ۱} f(re^{i\theta})$$

نمی‌تواند بر زیرمجموعه‌ای با اندازهٔ مثبت از $\mathbb{T}$ متحد با صفر باشد مگر این‌که $f \equiv ۰$ (مقالهٔ [7] از هاردی). البته، این کار در ادامهٔ مطلبی بود که فاتو[۵] شاگرد هـ. لبگ[۶] در سال ۱۹۰۶ انجام داده بود.

---

1) Hard analysis 2) Soft analysis 3) Holomorphic spaces 4) Dirichlet space
5) P. Fatou 6) H. Lebesgue

فاتو ثابت کرده بود که هر تابع تحلیلی کران‌دار در قرص یکه، تقریباً همه‌جا بر دایرهٔ یکه دارای حد نامماسی[1] است. با این حال، هنوز اصطلاح فضای هاردی ابداع نشده بود تا این که، فردریک ریس[2] در سال ۱۹۲۳ در مقاله‌ای این فضاها را فضاهای هاردی نامید. دلیل نام‌گذاری این بود که هاردی در مقالهٔ سال ۱۹۱۵ ثابت کرده بود که $\|f_r\|_{L^p(\mathbb{T})}$ تابعی صعودی نسبت به r است، یعنی برای هر تابع تحلیلی $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ و عددهای $0 < r_1 < r_2 < 1$ داریم

$$\int_0^{2\pi} |f(r_1 e^{i\theta})|^p d\theta \leq \int_0^{2\pi} |f(r_2 e^{i\theta})|^p d\theta.$$

این حکم، امروزه به نابرابری هاردی شهرت دارد (برای دیدن اثباتی از آن به صفحهٔ ۳۳۷ از [13] رجوع نمایید). در سال ۱۹۲۳، ریس روش خارج‌کردن صفرها یا فاکتورگیری به‌وسیلهٔ یک حاصلضرب بلاشکه[3] را معرفی کرد. این، آغازی بود برای توصیف صفرمجموعه‌های فضاهای هاردی H^p (یا فضاهای برگمن A^p): دنبالهٔ $\{z_k\}$ از نقاط قرص یکه را یک صفرمجموعه برای فضای هاردی (یا فضای برگمن) نامیم هرگاه تابعی مانند f در H^p (یا در A^p) یافت شود که دقیقاً بر $\{z_k\}$ صفر شود. در واقع، ثابت شد که $\{z_k\}$ یک صفرمجموعه در H^p است اگر و تنها اگر $\{z_k\}$ در شرط

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|) < \infty$$

موسوم به شرط بلاشکه صدق کند. نکتهٔ قابل توجه در این مورد، مستقل بودن شرط بلاشکه از p است. به عبارت دیگر، هر صفرمجموعهٔ H^p، صفرمجموعهٔ H^q هم هست.

با پیدایش آنالیز تابعی در دههٔ ۱۹۳۰، مسائل دیگری در مورد فضاهای هاردی طرح و حل شد. به‌ویژه در سال ۱۹۴۹، آرنه برلینگ[4] ریاضی‌دانی از دانشگاه اوپسالا[5] در سوئد در مقاله‌ای در مجلهٔ آکتا ماتیماتیکا[6] توانست توصیفی از ساختار زیرفضاهای ناوردا در H^2 ارائه کند. یادآوری می‌کنیم که زیرفضای بستهٔ M از H^p راناوردا نامیم هرگاه $zM \subseteq M$، یعنی M تحت ضرب در چندجمله‌ای‌ها بسته باشد. عملگر $f \longmapsto zf$ راعملگر انتقال[7] می‌نامند. ضمناً عملگری بر فضای دنباله‌ای ℓ^2 (دنباله‌هایی که مربع قدرمطلق عناصر آن‌ها جمع‌پذیر است) که بردار $(a_1, a_2, \ldots)$ را به بردار $(0, a_1, a_2, \ldots)$ می‌برد، نیز عملگر انتقال نام دارد. توجه کنید که اگر f را با دنبالهٔ ضرایب تیلر آن یکی بگیریم، آن‌گاه هر f با عضوی از ℓ^2 یکسان گرفته می‌شود. در این وضع، zf با دنبالهٔ $(0, a_1, a_2, \ldots)$ یکی است. بنابراین عملگر انتقال بر ℓ^2، همان عملگر $z \longmapsto zf$ بر H^2 است!

1) Nontangential limit 2) Riesz, F. 3) Blaschke product 4) Arne Beurling 5) Uppsala university 6) Acta Mathematica 7) Shift operator

برلینگ در این مقاله، اصطلاحات تابع درونی[1] و تابع برونی[2] را معرفی کرد. او ثابت کرد که هر زیرفضای ناوردای فضای هاردی غیر از $\{0\}$ توسط یک تابع درونی پدید می‌آید. به عبارت دیگر، زیرفضا به‌صورت $u.H^2 = \{uf : \quad f \in H^2\}$ است. تقریباً در همان زمان، کاوینسون[3] و شاپیرو[4] به‌طور مستقل، نظریهٔ مسائل اکسترمال دوگانی[5] را در فضاهای H^p معرفی کردند. این کار سبب شد تا بسیاری از مسائل را بتوان در قالبی هماهنگ و در چارچوب آنالیز تابعی حل کرد. حدود سال ۱۹۶۰، لنارت کارلسون[6]، ریاضی‌دانی از اوپسالا ــ محل کار آرنه برلینگ ــ توانست مسألهٔ درونیابی[7] در فضای H^2 را حل کند. متعاقباً شاپیرو و شیلدز[8] همان کار را برای فضای H^p انجام دادند. یک جنبهٔ بسیار مهم این کارها، تأثیر متقابل آنالیز نرم و آنالیز سفت بود که به‌موضوع، جذابیت بیشتری می‌داد.

۷. موانع در مطالعهٔ فضاهای برگمن

فضاهای برگمن که به‌عنوان همتاهایی جدید برای فضاهای هاردی تلقی می‌شوند، دارای مسائل و مشکلات ویژهٔ خود بودند که ذیلاً به برخی از آن‌ها اشاره می‌کنیم. در سال‌های آغازی پیدایش این نظریه، معلوم شد که از جهت‌های زیادی فضاهای برگمن خیلی پیچیده‌ترند. برخی از این پیچیدگی‌ها به قرار زیر است:

(الف) تابع‌ها در فضای برگمن می‌توانند رفتار مرزی نامناسب داشته باشند؛ در مقایسه با تابع‌ها در فضای هاردی که تقریباً همه‌جا بر مرز دارای حد شعاعی هستند. مثلاً تابع

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n+1}}$$

به فضای برگمن A^2 تعلق دارد، زیرا

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} < \infty.$$

یک بحث احتمالاتی نشان می‌دهد که با تغییر دادن تصادفی علامت‌های ضرایب تیلر این تابع، قریب به یقین به تابعی می‌رسیم که به A^2 تعلق دارد، ولی تقریباً همه‌جا بر مرز فاقد حد شعاعی است (برای جزئیات بیشتر به صفحهٔ ۸۸ از [5] رجوع کنید). با کمی زحمت بیشتر، می‌توان حکم مشابهی برای فضای A^p اثبات کرد. در نتیجه برای مطالعهٔ A^p، یکی از روش‌ها که اتکا به تابع‌های مرزی است، فاقد کارایی است.

---

1) Inner function 2) Outer function 3) Khavinson, D. 4) Shapiro, H. S. 5) Dual extremal problems 6) L. Carleson 7) Interpolation 8) A. L. Shields

(ب) توصیف صفرمجموعه‌ها در فضاهای برگمن غیرعملی است؛ در مقایسه با فضاهای هاردی که صفرمجموعه‌ها در شرط سادهٔ بلاشکه (مستقل از p) صدق می‌کنند. در تلاش برای فهم صفرمجموعه‌های فضاهای برگمن، هوروویتس[1] در رسالهٔ دکتری خود در دانشگاه میشیگان که تحت راهنمایی پیتر دیورن در سال ۱۹۷۴ انجام گرفت نشان داد که:

(۱) برای $p < q$، صفرمجموعه‌هایی در A^p وجود دارند که برای A^q صفرمجموعه نیستند؛

(۲) دو صفرمجموعه در A^q یافت می‌شود که اجتماع آن‌ها یک صفرمجموعه نیست.

هر دو حکم بالا در تباین آشکار با گزاره‌های شناخته‌شده برای فضای H^p است و منجر به نتایج متفاوتی می‌شوند. مثلاً اگر A یک صفرمجموعه در $A^۲$ و

$$M = \{f \in A^۲ : \quad f(a) = ۰ \;\; \forall a \in A\}$$

زیرفضای صفربنیاد[2] متناظر با آن باشد، آن‌گاه M یک زیرفضای ناوردای غیر بدیهی است.

فرض کنیم B یک صفرمجموعه در $A^۲$ باشد که $A \cup B$ یک صفرمجموعه نیست. اگر N زیرفضای صفربنیاد متناظر با B باشد، آن‌گاه M و N غیربدیهی‌اند، ولی $M \cap N$ زیرفضایی بدیهی است. این وضع در فضای هاردی $H^۲$ اتفاق نمی‌افتد، زیرا طبق قضیهٔ برلینگ، هر زیرفضای ناوردای غیربدیهی توسط یک تابع درونی (در این مورد خاص، توسط یک حاصلضرب بلاشکه) پدید می‌آید. متذکر می‌شویم که وقتی توصیف جامعی از صفرمجموعه‌ها وجود نداشته باشد، امید به داشتن یک نظریهٔ تجزیهٔ ایده‌آل، واهی است. در همین راستا، هوروویتس تلاش کرد تا جایگزینی برای حاصلضرب بلاشکه بیابد: گیریم $\{z_k\}$ زیردنباله‌ای از صفرمجموعهٔ متناظر با تابع $f \in A^p$ باشد. به‌ازای هر $k \geq ۱$ قرار می‌دهیم

$$b_k(z) = \frac{|z_k|}{z_k} . \frac{z_k - z}{۱ - \overline{z_k} z} \qquad z_k \neq ۰$$

و

$$h(z) = \prod_k b_k(z)(۲ - b_k(z)).$$

هوروویتس نشان داد که حاصلضرب بالا، یعنی h همگراست و $\frac{f}{h} \in A^p$. بنابراین اگر $g = \frac{f}{h}$، آن‌گاه $f = hg$. این تجزیه‌ای مشابه تجزیهٔ یک تابع در H^p به یک حاصلضرب بلاشکه در تابعی از H^p است ($f = Bg$). امّا عیب بزرگ کار در این بود که تابع مقسوم‌علیه، یعنی h به A^p تعلق نداشت! مقالهٔ هوروویتس ([10]) در جای بسیار معتبری چاپ شد و در زمان خود پیشرفت خوبی به‌حساب می‌آمد، لیکن بخت و اقبال با نویسنده یار نبود و تجزیهٔ وی مزیت تابع بلاشکه را نداشت.

1) Horowitz 2) Zero-based

(پ) زیرفضاهای ناوردا در فضای برگمن لزوماً توسط یک تابع پدید نمی‌آیند. این نیز در تباین آشکار با دانش قبلی ما از ساختار زیرفضاهای ناوردا در H^p است. گوییم زیرفضای M از H^p یا A^p توسط تابع f تولید می‌شود هرگاه

$$M = [f] = cl\{p(z)f(z) : \quad f \in H^p(or\ A^p)\}.$$

چنین زیرفضای ناوردایی را تک‌مولد[1] می‌نامند.

طبق قضیهٔ مشهور برلینگ، هر زیرفضای ناوردای H^p توسط یک تابع درونی پدید می‌آید. از طرف دیگر، به متمم‌بعد zM در M، یعنی به $\dim \frac{M}{zM}$ شاخص[2] زیرفضای M می‌گویند. ضمناً طبق قضیه‌ای از ریشتر [12]، هر زیرفضای تک‌مولد دارای شاخص ۱ است. بنابراین در فضاهای هاردی، همهٔ زیرفضاها، غیر از $\{0\}$، دارای شاخص ۱ می‌باشند. در تباین آشکار با این موضوع، در سال ۱۹۸۵ آپوستل[3]، برکوویچی[4]، فویاش[5] و پیرسی[6] نشان دادند که فضای برگمن A^2 دارای زیرفضایی با شاخص دلخواه $1 \leq n \leq \aleph_0$ است! به عبارت دیگر، مشبکهٔ[7] زیرفضاهای ناوردای A^2 دارای زیرمشبکه‌ای است که با مشبکهٔ همهٔ زیرفضاهای ناوردای یک فضای هیلبرت با بعد $\aleph_0$ یکریخت است. به قول دانالد ساراسون[8] در [14]، «به نظر می‌رسد که این مشبکه به نحو قابل ملاحظه‌ای وحشی‌تر است».

تصور می‌کنم که خوانندهٔ سخت‌گیر نیز متقاعد شده باشد که فضای برگمن، فضایی متفاوت است. در مقام مقایسه، اگر L^p را به اقیانوسی بزرگ تشبیه کنیم، فضای برگمن دریایی طوفانی و فضای هاردی رودخانه‌ای آرام است. اغلب مسائل جدی در فضای هاردی حل و بایگانی شده‌اند، لیکن در فضای برگمن هنوز مسائل پرچالش وجود دارند. پیتر دیورن در مقدمهٔ کتاب [5] می‌نویسد: «تلاش در جهت ایجاد یک نظریهٔ متناظر با نظریهٔ مسائل اکسترمال دوگانی به‌دلیل عدم وجود توصیفی از پوچساز[9] A^p در L^p، با شکست مواجه شده بود و آن دسته از روش‌های آنالیز تابعی که در بحث درونیابی در فضاهای هاردی توفیق کسب کرده بودند، در فضاهای برگمن ثمربخش نبودند. به‌طور خلاصه، با وجود این که در فضاهای هاردی تا دههٔ ۱۹۷۰، مسائل زیادی به‌خوبی تجزیه و تحلیل شده بودند، همتاهای آنان در فضاهای برگمن عموماً غیرقابل حل تلقی می‌شدند. به غیر از برخی پیشرفت‌های پراکنده، انتظارات پایین و جو حاکم پر از یأس و بدبینی بود.» در قسمت دوّم این مقاله خواننده را با پیشرفت‌های اساسی صورت پذیرفته در دههٔ ۹۰ میلادی و بعد از آن، آشنا خواهیم کرد. همچنین به طرح برخی مسائل باز و مبارزطلب مبادرت خواهیم کرد.

---

1) Singly generated 2) index 3) C. Apostol 4) Bercovici 5) Foias 6) Pearcy
7) lattice 8) Sarason, D. 9) annihilator

مراجع

[1] Apostol, C., Bercovici, H., Foias, C., Pearcy, C., "Invariant subspaces, dilation theory, and the structure of the Predual of a dual algebra, I", *J. Functional Anal.*, **63**: 3(1985), 369-404.

[2] Bergman, S., *The kernel function and conformal mapping*, revised ed., Mathematical Surveys 5, American Mathematical Society, Providence, 1970.

[3] Beurling, A., "On two problems concering linear transformations in Hilbert spaces", *Acta Math.*, **81**(1949), 239-255.

[4] Duren, P. L., *Theory of H^p spaces*, Academic Press, 1970.

[5] Duren, P. L., Schuster, A., *Theory of Bergman spaces*, American Mathematical Society, Mathematical Sueveys and Monographs, Volume 100, Providence, RI, 2004.

[6] Garnett, J. B., *Bounded analytic functions*, Academic Press, 1981.

[7] Hardy, G. H., "On the mean value of the modulus of an analytic function", *Proc. London Math. Sco.*, **14**(1915), 269-277.

[8] Hedenmalm, H., Korenblum, B., Zhu, K., *Theory of Bergman spaces*, Springer-Verpag, 2000.

[9] Hoffman, K., *Banach spaces of analytic functions*, Prentice Hall, 1902.

[10] Horowitz, Ch., "Zeros of functions in the Bergman spaces", *Duke Math. J.*, **41**(1974), 643-710.

[11] Koosis, P., *Lectures on H^p spaces*, Cambridge University Press, 1980.

[12] Richter, S., "Invariant subspaces in Banach spaces of analytic functions", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **304**(1987), 585-616.

[13] Rudin, W., "*Real and complex analysis*", Mc Graw Hill, 1987.

[14] Sarason, D., "*Holomorphic spaces: a brief and selective survey*", MSRI, 1998.

[15] Zhu, K., *Operator theory in function spaces*, Marcel-Dekker, New York, 2007.

[۱۶] صدیقی، کریم و خانی رباطی، بهمن، «فضاهای برگمن»، فرهنگ و اندیشه ریاضی، جلد ۱۳، بهار ۱۳۷۳، ۳۲–۱۳

علی آبکار
قزوین، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)– صندوق پستی ۲۸۸
abkar@ikiu.ac.ir