فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۱ (زمستان ۱۳۹۱) صص. ۱ تا ۱۴

کاربردهای پایهٔ گربنر در هندسهٔ ترکیبیاتی

زینب مالکی، امیر هاشمی

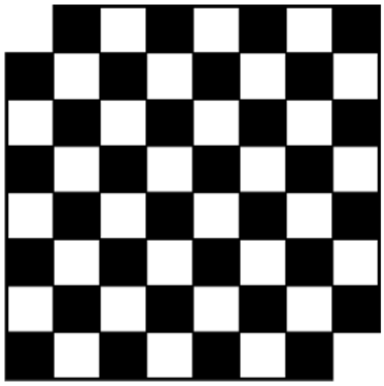
چکیده

پایه‌های گربنر یکی از مباحثی است که به‌تازگی مورد توجه پژوهشگران زیادی قرار گرفته و کاربردهای فراوانی در شاخه‌های مختلف ریاضیات و حتی سایر علوم پیدا کرده است. در این نوشتار، کاربرد پایه‌های گربنر را در هندسهٔ ترکیبیاتی (مسألهٔ جورچینی که مسأله‌ای با ماهیت ترکیبیاتی است) معرفی می‌کنیم.

۱. مقدمه

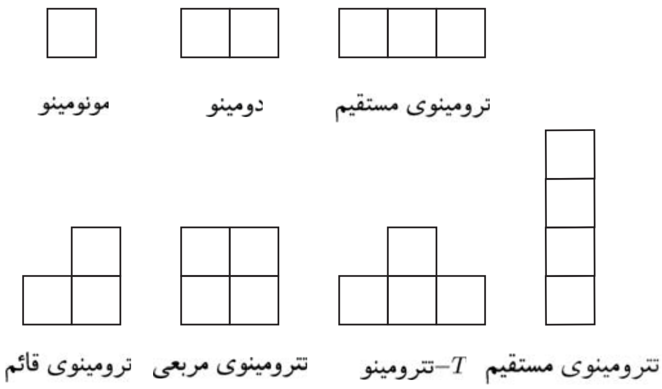
مسألهٔ جورچینی[1] یکی از مسأله‌های جذاب ترکیبیاتی است. شاید تاکنون پیش آمده که بخواهید سطحی (نه لزوماً به‌شکل مستطیل) را با موزاییک‌های غیر هم‌شکل بپوشانید. سؤال طبیعی که به ذهن می‌رسد این است که آیا این کار امکان‌پذیر است؟ به این مسألهٔ معروف توجه کنید: یک صفحهٔ ۸ × ۸ که دو مربع در گوشه‌های متقابل آن حذف شده است را در نظر می‌گیریم (شکل ۱). آیا می‌توان این صفحه را توسط دومینوهای معرفی شده در شکل ۲ پوشاند به‌طوری که هیچ مربعی خالی نماند و دومینوها نیز هم‌پوشانی نداشته باشند؟

1) tiling problem



شکل ۱

شکل ۲ تعدادی از پلیومینوهای متداول را نشان می‌دهد. در حالت کلی، پلیومینوها شکل‌هایی هستند که از اتصال تعدادی مربع هم‌اندازه تشکیل شده‌اند به‌طوری که هر مربع، حداقل به یک مربع دیگر در یک یال متصل باشد (شطرنج‌بازان به چنین شکلی همبند رخ‌گرد می‌گویند؛ بدین معنی که رخ شطرنج می‌تواند در هر پلیومینو به‌صورت افقی یا عمودی از هر مربع به هر مربع دیگر آن، در تعداد متناهی حرکت، منتقل شود).



شکل ۲

پلیومینوها اولین بار در سال ۱۹۵۳ توسط سُلمون گولوم در یک سخنرانی برای باشگاه ریاضی هاروارد، معرفی و نامگذاری شدند. یک سال پس از این سخنرانی، متن آن در ماهنامهٔ ریاضی

آمریکا [۵] منتشر شد و مورد توجه تعدادی از ریاضی‌دانان برجسته قرار گرفت. طرح‌های پلیومینو در حقیقت مثال‌هایی از هندسه ترکیبیاتی هستند. این شاخه از ریاضیات با روش‌هایی که شکل‌های هندسی می‌توانند با یکدیگر ترکیب شوند، سر و کار دارد و جنبهٔ فراموش شده‌ای از ریاضیات است، زیرا به‌نظر می‌رسد که دارای روش‌های عمومی معدودی است و قاعده‌های نظام‌مند نتوانسته‌اند جای خلاقیت موجود در حل مسأله‌های آن را بگیرند. در حقیقت، ماهیت بسیاری از مسأله‌های طراحی در مهندسیِ دارای ساختار، ترکیبیاتی است، به‌ویژه وقتی مؤلفه‌ها یا شکل‌های متداول باید به بهترین روش کنار یکدیگر قرار گیرند.

مسأله‌های جورچینی (مسأله‌های مربوط به پوشاندن یک سطح مشبک توسط پلیومینوها) در حالت کلی از نظر محاسباتی سخت هستند. برای مثال، مسألهٔ تصمیم‌گیری برای پوشاندن یک شبکهٔ نامتناهی توسط نسخه‌هایی از یک مجموعهٔ متناهی از پلیومینوها، تصمیم‌ناپذیر است. اگرچه مسألهٔ پوشاندن یک صفحهٔ مشبک متناهی توسط نسخه‌های یک مجموعهٔ متناهی از پلیومینوها، با بررسی کلیهٔ حالت‌های ممکن، تصمیم‌پذیر است، ولی NP ـ کامل است (برای اثبات، [۴] صفحهٔ ۲۵۷ را ببینید).

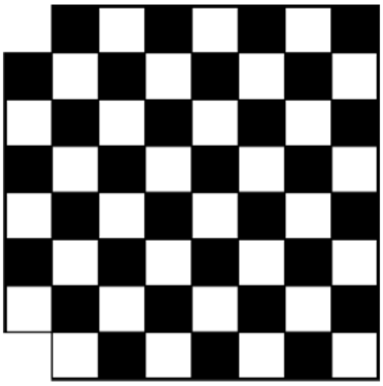
در این نوشتار، ابتدا با بیان برخی از ایده‌های ترکیبیاتی کارآمد در حل چنین مسأله‌هایی، مقدمه‌ای برای بازآفرینی جنبهٔ ریاضی پلیومینوها ارائه می‌کنیم، سپس ضمن معرفی حالت خاصی از پایه‌های گربنر از هندسهٔ جبری محاسباتی، با استفاده از این ابزار قدرتمند، روش دیگری برای حل این مسأله‌ها معرفی می‌نماییم. برای این منظور، در بخش ۲، نمونه‌هایی از راه‌حل‌های ترکیبیاتی را برای حل بعضی از مسأله‌های از این دست ارائه می‌کنیم. در بخش ۳، تعریف‌ها و پیش‌نیازهای مورد نیاز را بیان می‌نماییم. سپس در بخش ۴، قضیهٔ اصلی $\mathbb{Z}$ ـ پوشش‌پذیری (که آن را با پایه‌های گربنر مرتبط می‌سازد) بیان می‌کنیم. در بخش ۵، پایه‌های گربنر را روی $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ معرفی نموده و نمونه‌ای از کاربرد آن در مسألهٔ جورچینی را بیان می‌کنیم. در بخش آخر، یک رنگ‌آمیزی تعمیم‌یافته را که در حل مسأله‌های جورچینی کاربرد دارد، بیان می‌نماییم.

۲. پلیومینوها

در این بخش، نمونه‌هایی از راه‌حل‌های ترکیبیاتی برای برخی از مسأله‌های جورچینی از جمله مسأله‌ای که در مقدمه آمد، ارائه می‌نماییم.

ابتدا این مسأله را در نظر بگیرید: آیا می‌توان یک صفحهٔ ۸ × ۸ را که دو مربع در گوشه‌های انتهای یک یال آن حذف شده‌اند (شکل ۳)، توسط دومینوها پوشاند؟ پاسخ به این سؤال، سخت نیست، زیرا در این حالت، هر ستون تعداد زوجی مربع دارد و لذا می‌تواند با دومینوها پوشانده شود و در نتیجه، کل شکل می‌تواند توسط دومینوها پوشانده شود. اما آیا می‌توان شکل ۱ را توسط دومینوها پوشاند؟ فرض کنید این صفحه مانند صفحهٔ شطرنج شکل ۱ رنگ شده باشد. در این صورت، مشاهده می‌شود که هر دومینو دقیقاً یک خانهٔ سیاه و یک خانهٔ سفید را می‌پوشاند. پس m عدد

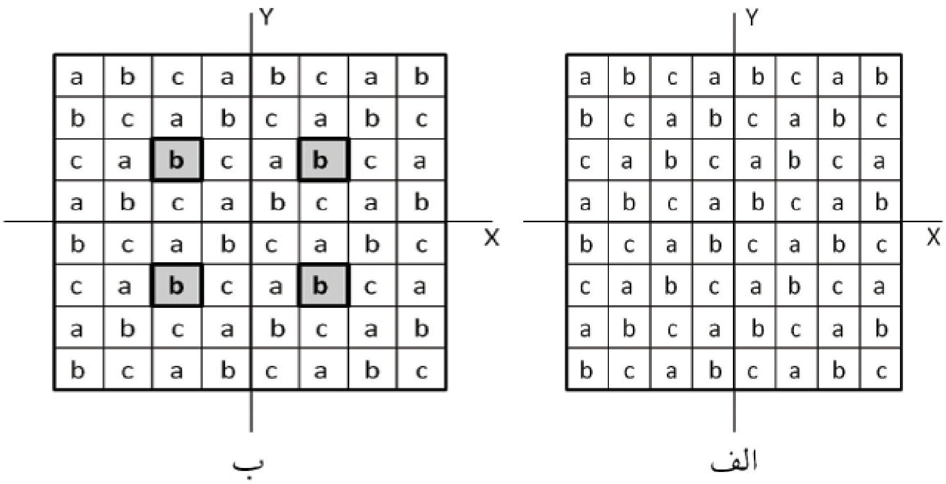
دومینو، m خانهٔ سیاه و m خانهٔ سفید را می‌پوشانند، یعنی از هر کدام به تعداد مساوی. اما تعداد خانه‌های سیاه صفحه داده شده بیشتر از تعداد خانه‌های سفید است. بنابراین نمی‌توان آن‌ها را با دومینوها پوشاند.



شکل ۳

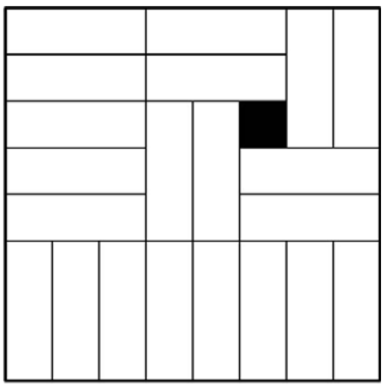
اکنون به این سؤال توجه کنید: شرط لازم و کافی برای این که صفحهٔ حاصل از یک مشبکهٔ مربعی 8×8 (مانند صفحهٔ شطرنج) که یک خانه از آن حذف شده، به‌وسیلهٔ ۲۱ عدد ترومینوی مستقیم پوشانده شود، چیست؟

برای پاسخ به این سؤال، فرض کنید می‌خواهیم صفحهٔ شطرنج را با ۲۱ عدد ترومینوی مستقیم و یک مونومینو بپوشانیم. ابتدا صفحهٔ شطرنج را با رنگ‌هایی با نام‌های a، b و c مانند شکل ۴(الف)، رنگ می‌کنیم. مشاهده می‌شود که صفحهٔ شطرنج شامل ۲۱ مربع به رنگ a، ۲۲ مربع به رنگ b و ۲۱ مربع به رنگ c است. هر ترومینوی مستقیم از هر رنگ دقیقاً یک مربع را می‌پوشاند، بنابراین مونومینو باید در یکی از خانه‌های به رنگ b باشد. از طرف دیگر، رنگ خانه‌های متقارن با این خانه نسبت به مرکز مختصات و محورها نیز باید b باشد، زیرا در غیر این صورت، با دوران صفحه (تغییر در نامگذاری رنگ‌ها) این خانه می‌تواند یکی از رنگ‌های ۲۱تایی را اختیار کند. بنابراین تنها مکان‌های ممکن برای مونومینو یکی از چهار مربع مشخص شده در شکل ۴(ب) است.



شکل ۴

در حالتی که مونومینو در یکی از خانه‌های مشخص شده در شکل ۴(ب) باشد، مشابه شکل ۵ می‌توان صفحه را پوشاند، بنابراین جواب سؤال اصلی به‌دست می‌آید.



شکل ۵

این روش را می‌توان به صفحات مشبک کلی‌تر نیز تعمیم داد. برای مطالعهٔ بیشتر در این زمینه، می‌توانید به [۶، ۸] مراجعه نمایید. همان‌طور که در این مثال‌های ساده مشاهده نمودید، با پیچیده‌شدن چنین سؤالاتی در صورت پوشش‌پذیر نبودن صفحه، برای پاسخ به سؤال، نیاز به رنگ‌آمیزی‌های هوشمندانه‌ای داریم که گاهی یافتن آن‌ها بسیار مشکل است. در ادامهٔ این نوشتار،

روش بودینی و نووِل [۲] را مطرح می‌کنیم که در بسیاری از حالات با استفاده از محاسبات رایانه‌ای در صورت پوشش‌پذیر نبودن صفحه، بتوان آن را توسط رایانه ثابت کرد. همچنین یک رنگ‌آمیزی که تعمیمی برای تمام این رنگ‌آمیزی‌ها است، ارائه می‌دهیم.

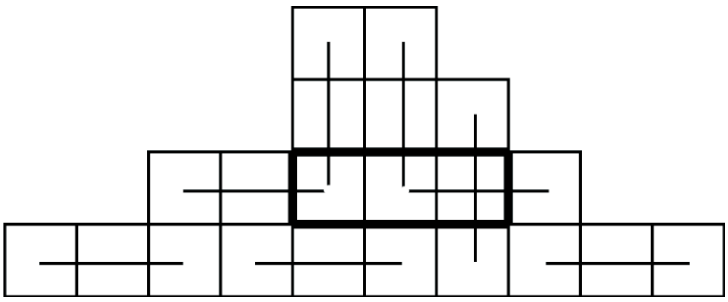
۳. تعاریف و پیش‌نیازها

برای معرفی روش ذکر شده، در این بخش تعاریف مورد نیاز را ارائه می‌نماییم.

منظور از یک سلول $c(i,j)$ در صفحهٔ مختصات، مجموعهٔ

$$\{(x,y) : i \leq x \leq i+۱, j \leq y \leq j+۱\}$$

است. اگر S را مجموعهٔ تمام سلول‌های صفحه در نظر بگیریم، مشاهده می‌شود که این مجموعه با $\mathbb{Z}^۲$ در تناظر یک‌به‌یک است. از این پس، منظور از پلیومینو اجتماع متناهی از سلول‌ها است که لزوماً همبند نیست. فرض کنید P یک پلیومینو و E مجموعه‌ای از پلیومینوها باشد. یک $\mathbb{Z}$ ـ پوشش[1] یا پوشش علامت‌دار[2] برای P توسط E شامل تعداد متناهی پلیومینوی انتقال‌یافته است (با امکان همپوشانی)، که به هر پلیومینو مقدار ۱+ و یا ۱− تخصیص داده شده، به‌طوری که برای هر سلول $c(i,j) \in P$، مجموع مقادیر پلیومینوهایی که $c(i,j)$ را می‌پوشانند، برابر ۱+ است و در غیر این صورت، مقدار آن برابر صفر است (برای مثال شکل ٦ را ببینید).



شکل ٦. پلیومینوی P که توسط ترومینوهای مستقیم $\mathbb{Z}$ ـ پوشش‌پذیر است. توجه کنید که تنها مقدار تخصیص داده شده به ترومینوی پررنگ، منفی است.

مشاهده می‌شود که اگر یک پلیومینو با مجموعه‌ای از پلیومینوها پوشانده شود، این پلیومینو توسط این مجموعه، $\mathbb{Z}$ ـ پوشش نیز دارد (کافی است به تمام پلیومینوها مقدار ۱+ را نسبت دهیم). بنابراین $\mathbb{Z}$ ـ پوشش‌پذیر بودن یک شرط کافی برای پوشش‌پذیر بودن است. این شرطِ کافی توسط کانوِی و نووِل در [۳] ارائه شد. آن‌ها همچنین یک شرط معادل جبری برای $\mathbb{Z}$ ـ پوشش‌پذیر بودن ارائه دادند.

---

1) $\mathbb{Z}$-tiling 2) Signed tiling

در اینجا روش بودینی و نوول [۲] را که با استفاده از پایه‌های گربنر شرط معادلی برای $\mathbb{Z}$ ـ پوشش‌پذیر بودن ارائه کرده‌اند مطرح می‌نماییم. مزیت این روش در این است که در بسیاری از موارد می‌تواند توسط رایانه بررسی شود. در این روش، با ارائهٔ یک ساختار چندجمله‌ای، مسأله $\mathbb{Z}$ ـ پوشش‌پذیری با محاسبهٔ یک پایه گربنر حل می‌شود. ابتدا تعریف دقیق مفاهیم گفته شده را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱ یک $\mathbb{Z}$ ـ پلیومینوی وزن‌دار یا به‌طور ساده، $\mathbb{Z}$ ـ پلیومینو، نگاشتی P از $S \simeq \mathbb{Z}^2$ به $\mathbb{Z}$ است که به جز تعداد متناهی از نقاط، تصویر سایر نقاط، صفر است (تکیه‌گاه[1] نگاشت P، مجموعه‌ای متناهی است). برای هر سلول c، $P(c)$ را وزن P در c می‌گوییم.

فضای شامل تمام $\mathbb{Z}$ ـ پلیومینوهای وزن‌دار را با $P_{\mathbb{Z}}$ نمایش می‌دهیم که یک $\mathbb{Z}$ ـ مدول آزاد است. در واقع، سلول‌های با وزن ۱+ پایه‌ای برای $P_{\mathbb{Z}}$ تشکیل می‌دهند.

تعریف ۲ $\mathbb{Z}$ ـ پلیومینوی P را توسط مجموعهٔ E از $\mathbb{Z}$ ـ پلیومینوهای وزن‌دار $\mathbb{Z}$ ـ پوشش‌پذیر گوییم هرگاه $P = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i P_i(. - a_i)$ که در آن $\lambda \in \mathbb{Z}$، $P_i \in E$ و $a_i \in \mathbb{Z}^2$ (توجه کنید که منظور از $P_i(. - a_i)$، انتقال‌یافتهٔ $\mathbb{Z}$ ـ پلیومینوی P_i توسط بردار a_i است).

فرض کنید X_1، X_2، Y_1 و Y_2 چهار متغیر باشند. برای هر $a \in \mathbb{Z}^2$، تعریف می‌کنیم:

$$\chi^a = X_1^{\frac{a_1+|a_1|}{2}} X_2^{\frac{a_2+|a_2|}{2}} Y_1^{\frac{|a_1|-a_1}{2}} Y_2^{\frac{|a_2|-a_2}{2}}.$$

به این ترتیب، هر مربع صفحه به‌صورتی کد می‌شود که توان منفی نداریم. بنابراین به هر پلیومینو، یک چندجمله‌ای به‌صورت زیر نسبت می‌دهیم.

تعریف ۳ P ـ چندجمله‌ای وابسته به هر $\mathbb{Z}$ ـ پلیومینوی P، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Q_P = \sum_{a \in \mathbb{Z}^2} P(c(a))\chi^a.$$

تعریف ۴ اگر E مجموعه‌ای از $\mathbb{Z}$ ـ پلیومینوها باشد، ایدال پوششی E که با $I(E)$ نمایش می‌دهیم عبارت است از

$$\langle X_1Y_1 - 1, X_2Y_2 - 1, \{Q_P : P \in E\}\rangle_{\mathbb{Z}}.$$

منظور از اندیس $\mathbb{Z}$ در اینجا این است که $I(E)$ را به‌عنوان ایدال حلقهٔ $\mathbb{Z}[X_1, X_2, Y_1, Y_2]$ در نظر می‌گیریم.

بودینی و نوول با استفاده از این چندجمله‌ها، رابطهٔ بین مسألهٔ $\mathbb{Z}$ ـ پوشش‌پذیر بودن و پایه‌های گربنر را به‌صورتی که در بخش‌های بعدی مشاهده خواهیم کرد، ارائه نمودند.

1) Support

۴. $\mathbb{Z}$ ـ پوشش برای پلیومینوها

در این بخش، قضیهٔ اصلی مسألهٔ $\mathbb{Z}$ ـ پوشش‌پذیری را (با استفاده از پایه‌های گربنر) بیان و اثبات می‌نماییم. برای این منظور، به لم زیر نیاز داریم.

لم ۵ فضای $P_{\mathbb{Z}}$ با فضای

$$\frac{\mathbb{Z}[X_1, X_2, Y_1, Y_2]}{\langle X_1Y_1 - 1, X_2Y_2 - 1\rangle_{\mathbb{Z}}}$$

$\mathbb{Z}$ ـ یکریخت است.

اثبات. تابع خطی $f : \mathbb{Z}[X_1, X_2, Y_1, Y_2] \to P_{\mathbb{Z}}$ را در نظر می‌گیریم که $f(X_1^{a_1}Y_1^{b_1}X_2^{a_2}Y_2^{b_2})$ را به سلول (a_1-b_1, a_2-b_2) با وزن یک می‌برد. حال اگر ثابت کنیم $ker(f) = \langle X_1Y_1-1, X_2Y_2-1\rangle$، آن‌گاه بنا بر قضایای یکریختی در جبر، نتیجه حاصل می‌شود. می‌دانیم هر پلیومینوی Q را می‌توان به‌شکل $Q = R + \sum_{i=1}^{2} Q_i(X_iY_i - 1)$ نوشت که R فقط شامل تک‌جمله‌ای‌های[1] به‌شکل χ^a $(a \in \mathbb{Z}^2)$ است. توجه می‌کنیم که منظور از پلیومینوی 0 یا پلیومینوی تهی، پلیومینوی P است که وزن آن روی هر سلول صفر است. از آنجا که f خطی است، بنا بر تعریف، داریم $f(\chi^a X_iY_i) = f(\chi^a)$ و لذا $f(Q_i(X_iY_i - 1)) = 0$. در نتیجه $f(Q) = 0$ اگر و تنها اگر $f(R) = 0$. از طرف دیگر، $\{f(\chi^a)\}$ یک پایه برای $\mathbb{Z}$ ـ مدول $P_{\mathbb{Z}}$ است. پس، از خطی بودنِ f نتیجه می‌شود که شرایط $f(R) = 0$، $R = 0$ و $Q \in \langle X_1Y_1 - 1, X_2Y_2 - 1\rangle_{\mathbb{Z}}$ معادل‌اند. بنابراین

$$ker(f) = \langle X_1Y_1 - 1, X_2Y_2 - 1\rangle_{\mathbb{Z}}.$$

قضیه ۶ فرض کنید E مجموعه‌ای از $\mathbb{Z}$ ـ پلیومینوها باشد. $\mathbb{Z}$ ـ پلیومینوی P توسط E، $\mathbb{Z}$ ـ پوشش‌پذیر است اگر و تنها اگر $Q_P \in I(E)$.

اثبات. بنا بر تعریف، $\mathbb{Z}$ ـ پلیومینوی P توسط مجموعهٔ E پوشش‌پذیر است اگر و تنها اگر $P = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i P_i(. - a_i)$ که در آن $\lambda_i \in \mathbb{Z}$، $P_i \in E$ و $a_i \in \mathbb{Z}^2$. علاوه بر این، در حلقهٔ

$$\mathbb{Z}[X_1, X_2, Y_1, Y_2]/\langle X_1Y_1 - 1, X_2Y_2 - 1\rangle_{\mathbb{Z}}$$

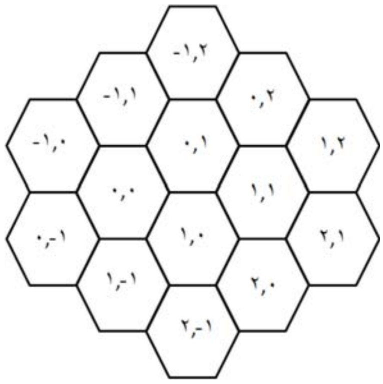
داریم $Q_{P_i(.-a_i)} = \chi^{a_i}Q_{P_i}$ (توجه کنید که در ادامهٔ اثبات، همهٔ تساوی‌ها در همین حلقه هستند). در نتیجه $Q_P = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i\chi^{a_i}Q_{P_i}$ و بنابراین $Q_P \in I(E)$. برعکس، اگر $Q_P \in I(E)$، آن‌گاه $Q_P = \sum_{P' \in E}(\sum \lambda_i\chi^{a_i})Q_{P'}$ که $Q_{P'}$ها در تک‌جمله‌ای‌هایشان هیچ X_i و Y_i متوالی ندارند. بنابراین داریم $P = \sum_{P' \in E}(\sum \lambda_i P'(. - a_i))$، یعنی $\mathbb{Z}$ ـ پلیومینوی P توسط مجموعهٔ E پوشش‌پذیر است. ■

1) Monomial

می‌توان به‌جای مشبکهٔ مربعی[1]، مشبکهٔ شش‌گوشه‌ای[2] را در نظر گرفت. در واقع، مشبکهٔ شش گوشه‌ای با کنار هم قرار دادن نسخه‌های انتقال‌یافتهٔ پوش محدب[3] نقاط $(0,0)$، $(1,0)$، $(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$، $(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$، $(0,\sqrt{3})$ و $(1,\sqrt{3})$ ساخته می‌شود. برای $(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2$ منظور از $[a_1, a_2] \in \mathbb{Z}^2$، سلول شش‌گوشه‌ای[4] است که گوشهٔ سمت چپ پایین آن $\left(\frac{3}{2}(a_1 + a_2), \frac{\sqrt{3}}{2}(-a_1 + a_2)\right)$ است (شکل ۷).

تعریف ۷ P ـ چندجمله‌ای هر $\mathbb{Z}$ ـ شش‌گون[5] P، را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Q_P = \sum_{(a_1,a_2)\in\mathbb{Z}^2} P([a_1, a_2])X^{(a_1,a_2)}.$$



شکل ۷

مشابه آنچه در مورد مشبکهٔ مربعی داشتیم، در رابطه با مشبکهٔ شش‌گوشه‌ای نیز قضیهٔ زیر را داریم.

قضیه ۸ فرض کنید E مجموعه‌ای از $\mathbb{Z}$ ـ شش‌گون‌ها باشد. $\mathbb{Z}$ ـ پلیومینوی شش‌گون P توسط E، $\mathbb{Z}$ ـ پوشش‌پذیر است اگر و تنها اگر

$$Q_P \in \langle Q_{P'} \ with\ P' \in E, X_1Y_1 - 1, X_2Y_2 - 1\rangle_{\mathbb{Z}}.$$

لازم به ذکر است که برای بررسی تعلق یک چندجمله‌ای به یک ایدال از $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ که $\mathbb{K}$ میدان است، فرم متعارف چندجمله‌ای را نسبت به پایهٔ گربنر ایده‌ال محاسبه می‌کنیم. اگر این مقدار برابر صفر شد، چندجمله‌ای متعلق به ایده‌ال است. در بخش بعد، تعریف و نحوهٔ محاسبهٔ پایهٔ گربنر یک ایده‌ال با ضرایب در اعداد صحیح را معرفی خواهیم کرد.

1) Square lattice 2) Hexagonal lattice 3) Convex hull 4) Hexagonal cell 5) $\mathbb{Z}$-polyhexe

۵. پایه گربنر روی $\mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_n]$

در این بخش، به معرفی ابزاری می‌پردازیم که با استفاده از آن بتوانیم مسألهٔ تعلق داشتن یک چندجمله‌ای به یک ایدآل در $\mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_n]$ را حل کنیم. پایه‌های گربنر یکی از مباحث پژوهشی است که مورد اقبال ریاضیدانان قرار گرفته و کاربردهای فراوانی پیدا کرده است ([۷] مرجع خوبی برای آشنایی مقدماتی با این مفهوم است). اگر به‌جای $\mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_n]$، $\mathbb{K}[X_1,\ldots,X_n]$ را در نظر بگیریم که $\mathbb{K}$ یک میدان است، پایهٔ گربنر و الگوریتم بوخبرگر، مسأله را حل می‌کند. می‌توان حالت تعمیم‌یافته‌ای از پایهٔ گربنر و الگوریتم بوخبرگر را برای $\mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_n]$ ارائه نمود. ثابت می‌شود که یک عضو به ایدآلی از $\mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_n]$ تعلق دارد اگر و تنها اگر باقیماندهٔ تقسیم آن به پایه، صفر باشد (برای توضیحات بیشتر، [۱] فصل ۱۰ را ببینید). در اینجا ضمن بیان مقدمات، تعریف پایهٔ گربنر روی $\mathbb{Z}$ را ارائه می‌نماییم. فرض کنید $R = \mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_n]$ حلقهٔ چندجمله‌ای‌های n متغیره با ضرایب در $\mathbb{Z}$ باشد. یک عضو $x_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n}$ از R را تک‌جمله‌ای و یک عضو $cx_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n}$ از R که $c \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ را یک جمله[1] می‌گوییم. $\mathcal{M}$ را مجموعهٔ تمام تک‌جمله‌ای‌های R در نظر بگیرید. یک ترتیب تک‌جمله‌ای[2] روی R، ترتیبی کلی $\prec$ روی $\mathcal{M}$ است که در شرط‌های زیر صدق کند:

الف) برای هر m_1، m_2 و m_3 در $\mathcal{M}$ که $m_1 \prec m_2$، نتیجه شود $m_1m_3 \prec m_2m_3$؛

ب) به‌ازای هر m در $\mathcal{M}$، $1 \prec m$.

مثال مهمی از ترتیب تک‌جمله‌ای، ترتیب لغت‌نامه‌ای[3] $\prec_{\text{lex}}$ است. فرض کنید $m_1 = x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}$ و $m_2 = x_1^{\beta_1}\ldots x_n^{\beta_n}$، گوییم $m_1 \prec_{\text{lex}} m_2$ هرگاه اولین مؤلفهٔ ناصفر $(\beta_1-\alpha_1,\ldots,\beta_n-\alpha_n)$، مثبت باشد. در هر چندجمله‌ای مانند f، بزرگترین تک‌جمله‌ای نسبت به ترتیب $\prec$ را تک‌جمله‌ای پیشرو[4]، جملهٔ مربوط به آن را جمله پیشرو[5] و ضریب آن را ضریب پیشرو[6] نامیده و به‌ترتیب با نمادهای $\mathrm{LM}(f)$، $\mathrm{LT}(f)$ و $\mathrm{LC}(f)$ نمایش می‌دهیم. ایدآل جملهٔ پیشروی I را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

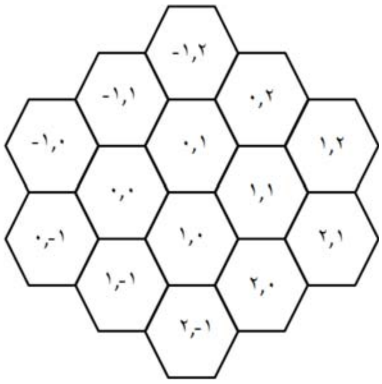
$$LT(I) = \langle LT(f) \mid f \in I\rangle.$$

ثابت می‌شود که اگر I ایده‌الی از R باشد، آن‌گاه مولدی متناهی برای I مانند $\{g_1,\ldots,g_m\}$ وجود دارد که $\mathrm{LT}(I) = \langle \mathrm{LT}(g_1),\ldots,\mathrm{LT}(g_m)\rangle$. چنین مولدی را پایهٔ گربنر نسبت به ترتیب $\prec$ برای I گویند. در [۱] فصل ۱۰، الگوریتمی برای محاسبهٔ چنین پایه‌ای ارائه شده است. این بخش را با ارائه کاربردی از مطالب گفته شده ادامه می‌دهیم و قضایای کلاسیکی که کانوِی و همکارش ثابت کردند را به‌کمک پایهٔ گربنر ثابت می‌نماییم.

---

1) term 2) monomial ordering 3) lexicographic order 4) leading monomial
5) leading term 6) leading coefficient

فرض کنید T_N مثلثی از سلول‌های شش‌گون باشد که $N(N+1)/2$ سلول دارد (شکل ۸).



شکل ۸

قضیه ۹ الف) ناحیهٔ مثلثی T_N در مشبکهٔ شش‌گون، یک $\mathbb{Z}$ ـ پوشش با نسخه‌های همنهشت (نسخه‌های حاصل از انتقال و دوران) T_2 دارد اگر و تنها اگر N به‌پیمانهٔ ۳ همنهشت با ۰ یا ۲ باشد.
ب) ناحیهٔ مثلثی T_N در مشبکهٔ شش‌گون، یک $\mathbb{Z}$ ـ پوشش با نسخه‌های همنهشتِ شش‌گون شامل سه خانهٔ مجاور روی یک خط دارد اگر و تنها اگر N به‌پیمانهٔ ۹ همنهشت با ۰ یا ۸ باشد.

اثبات. الف) رابطهٔ ترتیب تک‌جمله‌ای $X_2 \prec_{\text{lex}} X_1 \prec_{\text{lex}} Y_2 \prec_{\text{lex}} Y_1$ را در نظر بگیرید. ایدآل پوششی T_2 به‌شکل زیر است:

$$I(E) = \langle X_1Y_1 - 1, X_2Y_2 - 1, X_1 + X_2 + 1, X_1X_2 + X_1 + X_2 \rangle_{\mathbb{Z}}.$$

با استفاده از حالت تعمیم‌یافتهٔ الگوریتم بوخبرگر در میپل برای محاسبهٔ پایه‌های گربنر با ضرایب در $\mathbb{Z}$، پایه‌ای برای $I(E)$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$B = \{X_1 + X_2 + 1, X_2^2 + X_2 + 1, Y_2 + X_2 + 1, Y_1 - X_2\}.$$

همچنین از آنجا که

$$Q_{T_N} = \sum_{i=0}^{N-1} X_2^i \Big(\sum_{j=0}^{N-i-1} X_1^j \Big),$$

می‌توان باقیماندهٔ Q_{T_N} را بر $(X_1 + X_2 + 1, X_2^2 + X_2 + 1, Y_2 + X_2 + 1, Y_1 - X_2)$ محاسبه کرد. به‌وضوح این باقیمانده برابر است با

$$\begin{cases} 0, & N \overset{3}{\equiv} 0 \text{ یا } 2 \\ 1, & N \overset{3}{\equiv} 1. \end{cases}$$

اثبات قسمت (ب) مشابه است.

۶. رنگ‌آمیزی تعمیم یافته

در این بخش، یک رنگ‌آمیزی تعمیم‌یافته تعریف می‌کنیم که تعمیم رنگ‌آمیزی‌های تعریف شده توسط کانوِی و همکارش است. در ادامه، باقیماندهٔ چندجمله‌ای P بر $(P_1, \dots, P_s)$ را با $\bar{P}^{(P_1,\dots,P_s)}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۰ فرض کنید E مجموعه‌ای از $\mathbb{Z}$ ــ پلیومینوها و B یک پایهٔ گربنر $I(E)$ باشد. رنگ‌آمیزی تعمیم‌یافته χ_E نگاشتی از $\mathbb{Z}[X_1, X_2, Y_1, Y_2]$ به $\mathbb{Z}[X_1, X_2, Y_1, Y_2]$ است به‌طوری که $\chi_E(Q) = \bar{Q}^B$.

با توجه به مطالب گفته شده، قضیهٔ زیر را به‌سادگی می‌توان ثابت کرد.

قضیه ۱۱ یک $\mathbb{Z}$ ـ پلیومینوی P، توسط مجموعهٔ E از $\mathbb{Z}$ ـ پلیومینوها، $\mathbb{Z}$ ـ پوشش‌پذیر است اگر و تنها اگر $\chi_E(P) = 0$.

برای مثال، اگر ایدال متناظر با مجموعهٔ E شامل تمام T ــ تترامینوها (شکل ۹) را در نظر بگیریم، داریم

$$\begin{aligned} I(E) = \quad & \langle X_1^2 + X_1X_2 + X_1 + 1, X_1^2X_2 + X_1X_2 + X_1 + X_2, \\ & X_1X_2 + X_2^2 + X_2 + 1, X_1X_2^2 + X_1X_2 + X_1 + X_2, \\ & X_1Y_1 - 1, X_2Y_2 - 1\rangle. \end{aligned}$$

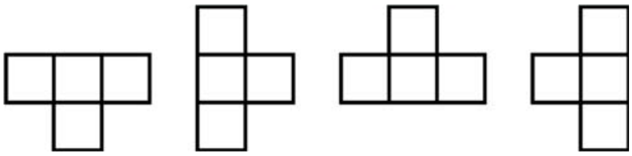
با محاسبهٔ پایه گربنر تعمیم‌یافته برای $I(E)$ با ترتیب $X_2 \prec_{\text{lex}} X_1 \prec_{\text{lex}} Y_2 \prec_{\text{lex}} Y_1$، به‌دست می‌آوریم

$$B = \{X_1 + 3, X_2 + 3, 8, Y_1 + 3, Y_2 + 3\}.$$

علاوه بر این، رابطهٔ زیر همواره برقرار است:

$$\chi_E(Q_P) = \chi\left(\sum_{c(i,j)\in P} Q_{c(i,j)}\right) = \chi_E\left(\sum_{c(i,j)\in P} \chi_E(Q_{c(i,j)})\right).$$

حال از آنجا که $A := \chi_E(Q_{c(i,j)})$ یک عدد صحیح است و $8 \in B$، نتیجه می‌شود که $\chi_E(A)$ برابر با باقیماندهٔ A در تقسیم بر ۸ است. بنابراین، قضیهٔ زیر را داریم.

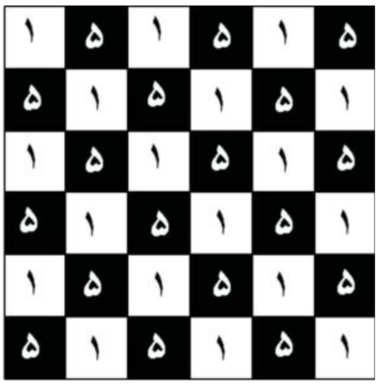


شکل ۹

قضیه ۱۲ فرض کنید خانه‌های صفحه، مشابه صفحهٔ شطرنج رنگ شده‌اند (شکل ۱۰). به خانه‌های سفید عدد ۵ و به خانه‌های سیاه عدد ۱ را نسبت می‌دهیم. یک پلیومینو P، توسط T ـ ترامینوها $\mathbb{Z}$ ـ پوشش‌پذیر است اگر و تنها اگر مجموع مقادیر سطحی که می‌خواهیم بپوشانیم، مضربی از ۸ باشد.

نتیجه ۱۳ مربع $n \times n$ توسط T ـ ترامینوها پوشش‌پذیر است اگر و تنها اگر n بر ۴ بخش‌پذیر باشد.

اثبات. اگر n فرد باشد، مجموع مذکور در قضیهٔ قبل فرد است و لذا مربع $n \times n$، $\mathbb{Z}$ ـ پوشش‌پذیر نیست و در نتیجه پوشش‌پذیر هم نمی‌باشد. اگر n زوج باشد، مشاهده می‌شود که مجموع متناظر، برابر با $3n^2$ بوده و لذا $\chi_E(Q_{n\times n})$ برابر است با $3n^2$ به‌پیمانهٔ ۸. بنابراین مربع $n \times n$ با T ـ ترامینوها $\mathbb{Z}$ ـ پوشش‌پذیر است اگر و تنها اگر n بر ۴ بخش‌پذیر باشد. همچنین مشاهده می‌شود که مربع 4×4 پوشش‌پذیر است، بنابراین اگر n بر ۴ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه مربع $n \times n$ نیز پوشش‌پذیر خواهد بود. ■



شکل ۱۰

مراجع

[1] T. Becker, V. Weispfenning, *Grobner bases: A computational approach to commutative algebra*, Springer-Verlag, 1993.

[2] O. Bodini, B. Nouvel, *$\mathbb{Z}$-tilings of polyominoes and standard basis*, IWCIA, 2004.

[3] J. H Conway, J. C. Lagarias, "Tiling with polyominoes and combinatorial group theory", *J. C. T. Series A*, **53**(1990), 183-208.

[4] M. Gary and D.S. Johnson, *Computers and intractability: a guid to the theory of NP-completeness*, Freeman, San Fransisco, 1979.

[5] S. W. Golomb, "Checker boards and polyominoes", *Amer. Math. Monthly*, **61**(1954), 675-682.

[6] S. W. Golomb, "Tiling with polyominoes", *J. C. T. Series A*, **1**(1966), 280-296.

[۷] رشید زارع نهندی، «بوخبرگر و پایه‌های گربنر»، فرهنگ و اندیشه ریاضی، شمارهٔ ۴۴ (بهار ۱۳۸۹)، ۸۰ − ۵۵.

[۸] سلمون گولوم، پلیومینو، ترجمهٔ سپیده چمن‌آرا و مانی رضایی، مؤسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ۱۳۸۱.

امیر هاشمی amir.hashemi@cc.aut.ac.ir

زینب مالکی zmaleki@math.aut.ac.ir

اصفهان، دانشگاه صنعتی اصفهان، دانشکده علوم ریاضی، کد پستی ۸۴۱۵۶−۸۳۱۱۱