فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۱ (زمستان ۱۳۹۱) صص. ۱۵ تا ۵۰

آشنایی با حلقه‌های توابع پیوسته

فریبرز آذرپناه، منیره پیمان، علی رضایی‌علی‌آباد، امیدعلی کرم‌زاده
رستم محمدیان و مهرداد نامداری

۱. پیش‌گفتار

بی‌شک یکی از زیباترین پیوندهای جبر و توپولوژی در ساختار $C(X)$ ظاهر می‌شود که متشکل است از تمام توابع پیوسته حقیقی ـ مقدار روی فضای توپولوژی X. این ساختار، با دو عمل معمولیِ جمع و ضرب توابع، تشکیل یک حلقه می‌دهد که به حلقهٔ توابع پیوسته معروف است. در مبحث حلقهٔ توابع پیوسته، هدف اصلی، بررسی ارتباط خواص توپولوژیکی X و خواص جبری $C(X)$ است. مطالعهٔ این حلقه، مانند آن دسته از مباحثی که در محل تلاقی دو شاخه از ریاضیات واقع هستند، زیبا و جذاب است. پرواز اندیشه در این عرصه زمانی تماشایی‌تر خواهد بود که دو بال جبر و توپولوژی، هماهنگ و موزون به‌کار گرفته شوند و هرچه این دو بال قوی‌تر و گسترده‌تر باشند، این پرواز اوج بیشتری می‌گیرد.

"X ناهمبند است اگر و تنها اگر $C(X)$ دارای یک عنصر خودتوان نابدیهی باشد."

شاید این پیوند ساده میان فضای توپولوژیک X و حلقهٔ $C(X)$، نخستین جرقه‌ای بود که برخی از ریاضی‌دانان را به سوی مطالعهٔ $C(X)$ از دیدگاه برقراری پیوندهای جبر و توپولوژی هدایت کرد. این گزارهٔ رفت و برگشتی ساده، سال‌ها به همین صورت دست‌نخورده باقی ماند و سنگِ بنایی شد تا بعدها پژوهشگران به حالت‌های دیگری از آن بپردازند. ناگفته پیداست که در این نوع رفت و برگشت‌ها بین توپولوژی و جبر، نه‌تنها کشف ارتباط مفاهیم آشنای جبری و توپولوژیکی محتمل است، بلکه امکان برخورد با مفاهیم تازهٔ جبری یا توپولوژیکی نیز وجود دارد. بسیاری از فضاهای شناخته شدهٔ توپولوژیکی، نخست با کمک ویژگی‌های جبری حلقهٔ $C(X)$ به‌دست آمده‌اند و بسیاری از مفاهیم جبری، ابتدا با کمک ویژگی‌های توپولوژیکی از $C(X)$ سرچشمه گرفته‌اند و سپس به حلقه‌های کلی‌تر نیز رخنه کرده‌اند. از این دیدگاه، $C(X)$ ابزار مؤثری برای غنابخشی

و تأثیرگذاری متقابل دو شاخهٔ جبر و توپولوژی بر یکدیگر است. خاطر نشان می‌شود که ارتباط فضای X و حلقهٔ $C(X)$ کم و بیش، شبیه ارتباط هندسهٔ جبری و حلقهٔ چندجمله‌ای‌ها است. حلقهٔ $C(X)$ از منظر تعویض‌پذیری غنی است، این حلقه پُر از مقسوم‌علیه صفر است و به همان اندازه، عناصر وارون‌پذیر دارد؛ عناصر آن را می‌شود به توان اعداد حقیقی رساند؛ طیف ایدآل‌های اول آن از طبقه‌بندی بی‌همتا و زیبایی برخوردار است؛ مجموع ایدآل‌های اول در آن، یک ایدآل اول است و ایدآل‌های ماکسیمال آن از قاعدهٔ خاصی پیروی می‌کنند. همهٔ این ویژگی‌ها و بسیاری دیگر از خواص زیبا و اعجاب‌انگیز این حلقه، هر علاقه‌مند به $C(X)$ را وسوسه می‌کند تا فقط به مطالعهٔ جنبه‌های جبری آن بپردازد. از آنجا که با کمک ویژگی‌های متفاوت X، می‌توان حلقه‌های $C(X)$ با ویژگی‌های متفاوت به‌دست آورد، مطالعهٔ $C(X)$ به‌منظور دست‌یابی به مثال‌هایی با خواص مشخص که نمونهٔ آن در دیگر حلقه‌های تعویض‌پذیر بسیار نادر است، موردِ توجه جبردانان است و از این منظر، جبردانان بیش از توپولوژی‌دانان بهره می‌برند.

ما بر این باوریم که به‌لحاظ ماهیت عناصر و غنی بودن حلقهٔ $C(X)$ که دربرگیرندهٔ هیأت اعداد حقیقی نیز می‌باشد، بسیاری از مفاهیم جبری در $C(X)$ به‌صورت بدیهی برقرارند و گاهی به‌کارگیری یک شناسه از تبار حلقه‌های تعویض‌پذیر روی حلقهٔ $C(X)$ به متناهی بودن فضای X می‌انجامد که در این صورت، حلقهٔ $C(X)$ همان حاصلضرب دکارتی تعداد متناهی نسخه از هیأت اعداد حقیقی خواهد بود. در چنین حالتی، $C(X)$ ساختاری پیدا می‌کند که چیزی برای گفتن ندارد. به بیان طنزگونه، اگرچه حلقهٔ $C(X)$ خیلی تعویض‌پذیر است، اما گاهی از حلقه‌های تعویض‌پذیر با شناسه‌های مشخص فاصله می‌گیرد و شخصیت تعویض‌پذیری آن کم‌رنگ شده و گاهی نیز شخصیت هیأت به خود می‌گیرد. جالب است بدانیم که اگر $C(X)$ با حاصلضربی از هیأت‌ها یکریخت باشد، آن‌گاه این هیأت‌ها را می‌توان با هیأت اعداد حقیقی جایگزین کرد. این واقعیت، به‌خوبی وفاداری $C(X)$ را به $\mathbb{R}$ نشان می‌دهد.

باید به‌خاطر چنین اوصافی، مفاهیمی که زادگاه آن‌ها جبر تعویض‌ناپذیر است و در جبر تعویض‌پذیر جایگاه موجهی ندارند بیشتر از مفاهیمی که اصالتاً تعویض‌پذیرند در حلقهٔ $C(X)$ قابل بررسی هستند. متقابلاً، بسیاری از مفاهیم و ویژگی‌های ذاتی $C(X)$ الهام‌بخش ایده‌های تازه در جبر تعویض‌پذیر و حتی جبر تعویض‌ناپذیر شده است. خاطرنشان می‌کنیم که بارها این اتفاق رخ داده و نتایج غریبی به‌دست آمده است.

ناگفته آشکار است که تسلط بر چند شاخه از ریاضیات و پیوند آن‌ها با یکدیگر ساده نیست و به همین سبب، همان‌گونه که سیر تکاملی $C(X)$ هم نشان خواهد داد، علاقه‌مندان به مطالعهٔ حلقه‌های توابع پیوسته بسیار اندک هستند. بسیاری از جبردانان طعم توپولوژی را نچشیده‌اند و یا موارد خاصی را در جبر دنبال می‌کنند که حلقهٔ $C(X)$ را تخریب می‌کند. همچنین اکثر توپولوژی‌دانان میانهٔ خوبی با جبر ندارند و از این‌رو، افرادی که حلقه‌های توابع پیوسته را دنبال می‌کنند، جایگاه مناسبی نزد این دو گروه ندارند. آنان که آنالیز تابعی را پی می‌گیرند، گرچه سر و کارشان با $C(X)$ است، ولی به

قلمرو آن‌ها نیز نمی‌توان نزدیک شد، چراکه به‌لحاظ شخصیت متفاوت $C(X)$ در آنالیز تابعی و حلقه‌های توابع پیوسته، نوع پرسش‌ها در این دو مبحث کاملاً متفاوت است. یک کارِ پژوهشی در حلقه‌های توابع پیوسته، برای تأمین نظر متخصصین جبر، توپولوژی و یا آنالیز تابعی، باید حاوی نتایج بسیار زیبا و عمیقی باشد تا آن‌ها بتوانند از آن بهره بگیرند؛ در غیر این صورت، خواننده‌های بسیار اندکی خواهد داشت. طبعاً این موضوع سبب می‌شود که در داوری مقاله‌های پژوهشی در زمینهٔ حلقه‌های توابع پیوسته نیز مشکل ایجاد شود، ولی با وجود همهٔ این کاستی‌ها، پژوهش در این زمینه به قوت خود باقی است و هر سال به تعداد پژوهش‌گران حلقه‌های توابع پیوسته در جهان افزوده می‌شود. در یکی دو دههٔ اخیر به نظر می‌آید که در ایران، به‌طور متمرکز در دانشگاه اهواز به تحقیق در این زمینه پرداخته شده و می‌شود. به این سبب بر خود لازم دیدیم تا به اندازهٔ توان خویش به معرفی حلقه‌های توابع پیوسته بپردازیم تا این نوشته، علاوه بر مرور جنبه‌های تاریخی این نظریه، سرآغاز مناسبی برای دیگر پژوهش‌گران علاقه‌مند و جوان در این زمینه در کشور باشد.

۲. سیر تاریخی

اکنون برای درک بهتر و آشنایی بیشتر با موضوع مقاله، به سرگذشت تاریخی $C(X)$ نظری می‌افکنیم. سرآغازِ بسیاری از موضوعات علمی را به‌لحاظ تاریخی دقیقاً نمی‌توان مشخص کرد و شاید گاه چنین نقطهٔ آغازی به‌روشنی وجود نداشته باشد. حتی قدیمی‌ترین مقالات به کار پیشینیان وابسته است و ما کمتر خبر داریم که در این راستا چه کمکی کرده‌اند. وقتی در مسیر مطالعهٔ $C(X)$، برگردیم و به دوردست‌ها گام برداریم، به نقطه‌ای می‌رسیم که قبل از آن چند ردِ پا دیده می‌شود که به این نقطه منتهی می‌شوند و در هر کدام اثر کم‌رنگی از $C(X)$ دیده می‌شود. وچتومف[۱] در [92] با استناد به [20]، اعتقاد دارد که نظریهٔ حلقه‌های توابع پیوسته ریشه در نظریهٔ فضاهای باناخ توابع دارد که باناخ نشان داده است اگر X یک فضای متری فشرده باشد، آن‌گاه $C(X)$ به‌عنوان یک فضای باناخ، فضای X را می‌شناساند؛ به این معنا که اگر X و Y دو فضای متری فشرده باشند، آن‌گاه وجود یک طولپایی میان $C(X)$ و $C(Y)$ (با متر نُرم)، همسانریختی فضاهای X و Y را به‌دست می‌دهد. مقالهٔ دیگر ([28]) از چیتندن[۲] است که در آن، اشاراتی به توابع پیوسته می‌شود. با اصطلاحات امروزی، در این مقاله نشان داده شده است که فضای X شبه‌فشرده است اگر و تنها اگر برد هر تابع پیوستهٔ حقیقی ــ مقدار روی X بسته باشد. سپس ردپای استون[۳] [79] را می‌بینیم که ضمن شناسایی ایدآل‌های آزاد و ثابت حلقهٔ توابع پیوسته و کراندار، یعنی $C^*(X)$ و معرفی فشرده‌سازی βX (همزمان با چک[۴] در [27] که بعدها به فشرده‌سازی استون ــ چک معروف شد)، قضیهٔ همسانریختی را برای فضاهای توپولوژی فشردهٔ X و Y تعمیم داد. به بیان دیگر، وی نشان داد که اگر X یک فضای هاسدورف و فشرده باشد، آن‌گاه حلقه $C(X)$ فضای X را می‌شناساند. در واقع او نشان داد که $C^*(X)$، فضای βX را معین می‌کند. این دو از رسالهٔ دکترای تیخونف[۵] که

1) Vechtomov 2) Chittenden 3) Stone 4) Čech 5) Tychonoff

ماحصل آن در [80] آمده است، الهام گرفته بودند که تحت راهنمایی آلکساندروف[1] نوشته شده بود. تیخونف در این رساله نشان می‌دهد یک فضای توپولوژیک هاسدورف X، زیرفضای یک فضای فشردهٔ Y است اگر و تنها اگر برای هر زیرمجموعهٔ بسته در X مانند K و هر $x \notin K$، نگاشت پیوسته‌ای از X به $[0,1]$ وجود داشته باشد که x را به ۰ و K را به ۱ بنگارد. تیخونف چنین فضاهایی را کاملاً منظم نامید و در این راستا، تعریف متعارف توپولوژی حاصلضرب را ارائه داد. همچنین در این مقاله، فضاهای نرمال و کاملاً نرمال معرفی شدند و با اصطلاحات امروزی نشان داده شد که هر مجموعهٔ بسته در یک فضای نرمال C^* ـ نشانده است و مجموعه‌های بسته و مجزا در یک فضای نرمال کاملاً مجزا شده هستند. برای اطلاعات تاریخی بیشتر در این زمینه، به [46] مراجعه کنید. وقتی تیخونف صحبت از فضاهای هاسدورف به میان می‌آورد، نشان می‌دهد که پیش‌تر از آن، این مفاهیم توسط یوریسون[2] مطرح شده است. تیخونف از اثبات یوریسون در[81] الهام گرفت که بیان می‌کرد هر فضای متری تفکیک‌پذیر را می‌توان در مکعب هیلبرت[3]، $[0,1]^{\aleph_0}$، نشاند (حاصلضرب دلخواهی از نسخه‌های $[0,1]$، مکعب تیخونف نامیده می‌شود). سرچشمهٔ این یافته‌ها، بدون شک به سمیناری برمی‌گردد که الکساندروف و یوریسون در سال ۱۹۲۴ در دانشگاه ایالتی مسکو به قصد یافتن متر روی یک فضای توپولوژیک برگزار کردند. مفهوم مهمی که در این سمینار ارائه شد، مفهوم مجزا شدهٔ تابعی بود با این تعریف که زیرمجموعه‌های A و B از فضای X مجزا شدهٔ تابعی نامیده می‌شوند هرگاه تابع پیوستهٔ $f : X \to [0,1]$ موجود باشد به‌گونه‌ای که $A \subseteq f^{-1}(\{0\})$ و $B \subseteq f^{-1}(\{1\})$. این مفهوم توسط یوریسون در لم ماندگارش معرفی و مورد استفاده قرار گرفت. بنابراین شاید بتوان گفت که یوریسون در سال ۱۹۲۴ در تولد $C(X)$ سهم به‌سزایی داشته است.

چک در [27] تعمیم قضیهٔ تیخونف را ثابت کرد. او قضیهٔ تیخونف را به این صورت تعمیم داد که حاصلضرب هر تعداد دلخواه از فضاهای فشرده، فشرده است و نماد βX را برای بستار نشانندهٔ X در مکعب تیخونف معرفی کرد. به‌طور دقیق‌تر، برای هر تابع پیوستهٔ $f : X \to [0,1]$ قرار می‌دهیم $I_f = [0,1]$ و $P(X)$ را حاصلضرب همهٔ I_fها با توپولوژی حاصلضربی (تیخونف) در نظر می‌گیریم. همچنین تعریف می‌کنیم $(e(x))_f = f(x)$ برای هر $x \in X$. به این ترتیب چک، بستار $e[X]$ در $P(X)$ را به‌عنوان βX معرفی کرد. مقالهٔ چک تقریباً بی‌درنگ به‌طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفت و نماد βXاش برای فشرده‌سازی جدید به‌کار رفت. بعد از آن، گلفاند[4] و کلموگروف در [37] برخی از نتایج استون، از جمله قضیهٔ همسانریختی را بدون در نظر گرفتن یک ساختار متری روی $C(X)$ و $C(Y)$ و فقط به‌عنوان حلقه، بیان و اثبات کردند و در همین راستا، ایدآل‌های ماکسیمال حلقهٔ $C(X)$ را شناسایی کردند.

---

1) Alexandrof 2) Urysohn 3) Hilbert 4) Gelfand

همهٔ این یافته‌ها، زمینه را برای مطالعهٔ $C(X)$ هموار نمود، ولی شاید بتوانیم آغاز پُررنگ پیدایش حلقه‌های توابع پیوسته را همین مقالهٔ گلفاند و کلموگروف و یا کمی پیش‌تر، تلاش استون در اواخر دههٔ سوم قرن بیستم بدانیم. پس از یک دهه توقف، هویت[۱] مقالهٔ ارزشمند خود ([51]) را با عنوان حلقه‌های توابع پیوسته حقیقی ــ مقدار منتشر کرد. این مقاله که به تعبیر هنریکسن[۲] چون یک نگین بر تارک این نظریه می‌درخشد، بر مبنای کارهای استون و چک بنا شده بود و اولین مقاله‌ای است که به‌طور کامل به این زمینه اختصاص دارد. این یادگارِ ماندگار، بحث را به مسیر درستی هدایت کرد. این مقاله در معرفت و شناخت ما از حلقه‌های توابع پیوسته سهم به‌سزایی داشته است و به راستای فکری اغلب پژوهش‌گران در مسیر اصلی مطالعهٔ حلقه‌های توابع پیوسته جهت داد و پایه‌گذار مطالعهٔ روابط متقابل میان X و $C(X)$ شد. هویت بود که مفهوم صفر ــ مجموعه، فضاهای شبه‌فشرده، فضاهای فشردهٔ حقیقی و ایدآل‌های حقیقی و ابرحقیقی را مطرح و اهمیت و تأثیر آن‌ها را در مطالعهٔ $C(X)$ به پژوهش‌گران نشان داد.

با اصطلاحات امروزی، فضای تیخونوف X فشردهٔ حقیقی نامیده می‌شود اگر هیچ فضای تیخونوف اکیداً بزرگ‌تر از Y موجود نباشد که X در آن چگال و هر $f \in C(X)$ دارای توسیعی به $C(Y)$ باشد (هویت اصطلاح Q ــ فضا را به‌کار برد). او در [51] نشان داد که یک فضا فشردهٔ حقیقی است اگر و تنها اگر با زیرفضای بسته‌ای از حاصلضرب نسخه‌هایی از خطِ حقیقی همسانریخت باشد. بنا به قضیهٔ استون در [79]، هر $f \in C(X)$، یک توسیع پیوسته از βX به فشرده‌سازی تک نقطه‌ای $\mathbb{R}$ دارد. در [51]، مجموعهٔ نقاطی از βX که همهٔ این توسیع‌ها در این نقاط، حقیقی ــ مقدار باشند با vX نشان داده شد و از آن به بعد، vX فشرده‌حقیقی‌سازی هویتِ X نام گرفت. همچنین خاستگاه فضاهای شبه‌فشردهٔ X که در آن‌ها داریم $vX = \beta X$، به‌طور طبیعی به [51] برمی‌گردد. هویت، سوپ ــ نُرم توپولوژی روی مجموعهٔ توابع پیوسته و کراندار را به $C(X)$ تعمیم داد و آن را به احترام مور[۳]، m ــ توپولوژی نامید. وی طبیعت میدان‌هایی را که تصویرِ همریخت $C(X)$ هستند مورد بحث قرار داد و پایگاهی تحقیقاتی برای بسیاری از پژوهش‌گران در این زمینه در ربع قرن بعد ایجاد کرد. خاطرنشان می‌شود که در این مقالهٔ برجسته، چندین اشتباه اساسی وجود داشت. این اشتباهات توسط دیودونه[۴] در [33] مطرح شده بودند. این امر چند سالی باعث دلسردی هویت از ادامهٔ کار در این زمینه شد و سبب شد تا وی مسیر خود را به‌سوی آنالیز تابعی تغییر دهد، ولی سه دههٔ بعد، با همکاری سه ریاضی‌دان دیگر در [6] مقالهٔ دیگری در خصوص حلقه‌های توابع پیوسته منتشر کرد تا سهم بیشتری در پیشبرد این شاخه از ریاضیات داشته باشد. تصحیح این اشتباهات و پیگیری ایده‌های هویت، محور این مبحث و الهام‌بخش تألیف کتابی توسط گیلمن[۵] و جریسون[۶] شد.

بی‌شک نمی‌توان از نظریهٔ حلقه‌های توابع پیوسته سخن به میان آورد اما نامی از کهلز[۷] نبرد. این بار هم یک دهه گذشت تا این پژوهش‌گر خوش‌آوازه، مقاله‌های گران‌بهای [60]، [61] و [62] را

1) Hewitt 2) Henriksen 3) Moore 4) Dieudonne 5) Gillman 6) Jerison 7) kohls

در مورد ساختار ایدآل‌های حلقه‌های توابع پیوسته انتشار دهد. او در این مقالات z ـ ایدآل‌ها را معرفی کرده و ارتباط آن‌ها را با ایدآل‌های اول حلقه‌های توابع پیوسته نشان داد. رساله‌اش دربارهٔ ایدآل‌های اول در $C(X)$ بود که اساس بسیاری از مباحث فصل چهاردهم کتاب [43] شد. پیش از آن، گیلمن، هنریکسن و جریسون نیز در [39]، [40] و [41] حلقه‌های توابع پیوسته را مورد مطالعه قرار داده و برخی از ارتباط‌های میان حلقهٔ $C(X)$ و فضای توپولوژی X را به‌دست آورده بودند که راهگشا و انگیزه‌بخشِ بسیاری از تحقیقات بعدی در این زمینه شد. سرانجام دههٔ بعد، کتاب بی‌نظیر حلقه‌های توابع پیوسته تألیفِ گیلمن و جریسون که قبلاً نیز به آن اشاره شد، منتشر شد و همهٔ پژوهش‌های انجام شده تا آن زمان را دربر داشت و تا به امروز تنها کتاب مرجع مدون در این زمینه است. این کتاب خود نیز حاصل چندین دهه کار پژوهشی تعدادی از ریاضی‌دانان بزرگ است. آغاز گردآوری مطالب این کتاب، سمیناری است که در سال‌های ۱۹۵۴ و ۱۹۵۵ در دانشگاه پوردو[1] با برنامه‌ریزی هنریکسن برگزار گردید. وظیفهٔ گردآوری مطالب به عهدهٔ چهار تن از دانش‌آموختگان آن زمان به نام‌های کیست[2]، کهلز، مانسفیلد[3] و مک داول[4] قرار داده شد که بعدها ریاضی‌دانان برجسته‌ای شدند. شایسته است اشاره کنیم که بنا بر گفتهٔ نویسندگان کتاب، تهیهٔ آن بدون همکاری‌های مستمر و ثمربخش هنریکسن و کهلز امکان‌پذیر نبوده است و بدون شک، راهنمایی‌های انگیزه‌بخش هویت نیز تأثیر عمیقی بر اعتبار کتاب گذاشته است.

انتشار این کتاب باعث شد تا از وقفه و پراکندگی در مطالعهٔ $C(X)$ کاسته شود و مطالعه در این زمینه به شکلی منسجم و پیوسته پی گرفته شود. موج جدید پژوهش در حلقه‌های توابع پیوسته و متأثر از این کتاب، بیش از یک دههٔ دیگر ادامه داشت تا کتاب دیگری، نه صرفاً در مورد حلقه‌های توابع پیوسته، بلکه در ارتباط با آن ([94]) توسط واکر[5] نیز به چاپ رسید تا به این سیر فکری غنای بیشتری بخشیده شود. این کتاب در واقع رسالهٔ دکتری واکر بود. یک دهه پس از آن و در سال ۱۹۸۸، کتاب [75] منتشر شد که نسبت به کتاب پیشین ارتباط نزدیکتری با نظریهٔ حلقه‌های توابع پیوسته داشت. در این یکی دو دهه، پژوهش در این زمینه ادامه داشت و کشور آمریکا بیشترین سهم را در پروراندن این مبحث داشته است. ولی از آن سال به بعد، به گفتهٔ هنریکسن در [47]، حجم مقالات در این زمینه در کشور آمریکا کاسته شد؛ حال آن‌که در کشورهای ایران، روسیه و اسپانیا رشد چشم‌گیری داشت. در این خصوص، عمدتاً وچتومف[6] و زاخارف[7] از روسیه در[82]—[92] و [96]—[99] به‌طور مفصل به مطالعهٔ حلقه‌های توابع پیوسته پرداخته و آثار ارزنده‌ای از خود بر جای گذاشته‌اند. آن‌ها شناسه‌های توپولوژیکی و جبری برای F ـ فضاها و معادل‌هایی برای P ـ فضاها با توجه به $C(X)$ ـ مدولِ $\mathbb{R}^X$ به‌دست آورده، به مشکلات شناسایی جبری C ـ توسیع حلقه‌های $C(X)$ پرداخته‌اند.

در ایران، نتایج بسیاری در مبحث حلقه‌های توابع پیوسته توسط نویسندگان مقاله صورت گرفته

---

1) Purdue 2) Kist 3) Mansfield 4) MacDowell 5) Walker 6) Vechtomov 7) Zakharov

که در آن‌ها، جنبه‌های جبری عمیق‌تری از $C(X)$ بررسی شده است. به شناسه‌های جبری و توپولوژیکی بسیاری از مفاهیم جبری از قبیل ساکل، ایدآل‌های اساسی، مینیمال و یکنواخت، $\aleph_0$ ــ انژکتیویتی، ue ــ حلقه‌ها، بُعد گلدی و z ــ ایدآل‌های حلقه‌های خارج‌قسمتی $C(X)$ پرداخته شده است. مرجع [58] نخستین کار تحقیقی در این زمینه بود که در ایران (اهواز) انجام شد و بعد از آن کارهای متعددی در این راستا صورت گرفت که در بخش‌های بعدی بیشتر به آن‌ها می‌پردازیم. اسپانیایی‌ها نیز مقالات ارزشمندی در زمینهٔ $C(X)$ منتشر کرده‌اند که از آن جمله می‌توان به [36]، [26] و [71] اشاره کرد. در این مقالات معادل بودنِ فضاهای شبه‌فشردهٔ X با منطبق بودن زیرحلقه‌های u ــ چگالِ (چگال با توپولوژی یکنواخت) حلقهٔ $C(X)$، بر زیرحلقه‌های m ــ چگالِ (چگال با m ــ توپولوژی) $C(X)$ نشان داده شده و همچنین کارهایی دربارهٔ $C(X)$ ــ مدول‌های تخت و پروژکتیو انجام گرفته است.

۳. دیدگاه‌های کلی

بی‌شک آن‌چه از آغاز پیدایش حلقهٔ $C(X)$ برای علاقه‌مندان این مبحث مدنظر بوده است، ساختار آن بوده که در ارتباط تنگاتنگ با عنصر جداناشدنی خود، یعنی فضای توپولوژیک X است. از دیدگاه بنیان‌گذاران این نظریه، این‌که «حلقهٔ $C(X)$ چه هنگام فضای X را شناسایی می‌کند؟» قلبِ مبحث حلقهٔ توابع پیوسته است. به بیان دیگر، می‌خواهیم بدانیم تحت چه شرایطی، یکریختی میان حلقه‌های $C(X)$ و $C(Y)$، همسانریختی میان فضاهای X و Y را به‌دست می‌دهد. باید توجه داشت که عکس این موضوع همواره درست است. در صورتی که به $C(X)$ به‌عنوان مشبکهٔ $L(X)$ و یا نیم‌گروه $S(X)$ نگاه کنیم، آن‌گاه از این منظر نیز چنین پرسشی مطرح است که چه‌وقت از یکریختی مشبکه‌های $L(X)$ و $L(Y)$، و یا یکریختی نیم‌گروه‌های $S(X)$ و $S(Y)$ می‌توان به همسانریختی فضاهای X و Y دست یافت. در ابتدای پیدایش و مطالعهٔ این مبحث، در سال‌های ۱۹۳۷ و ۱۹۳۹ به‌ترتیب در [79] و [37] نشان داده شد که وقتی فضای X هاسدورف و فشرده است، با حلقهٔ $C(X)$ می‌توان ساختار فضای X را شناخت. در سال‌های ۱۹۴۷ و ۱۹۴۹ به‌ترتیب در [57] و [70] ثابت شد که با $L(X)$ و $S(X)$ نیز می‌توان فضای X را شناسایی کرد. در سال ۱۹۴۸ در [80] ثابت شد که وقتی فضای X هاسدورف و فشردهٔ حقیقی باشد، حلقهٔ $C(X)$ ساختار فضای X را می‌شناساند. در سال ۱۹۵۲ در [78] ثابت شد که تحت همین شرایط برای فضای X، مشبکهٔ $L(X)$ و نیم‌گروه $S(X)$ هم این کار را انجام می‌دهند. در صورتی که فضای X کاملاً منظم و نقاطش G_δ ــ مجموعه باشند، آن‌گاه در سال ۱۹۵۵ در [76] و در سال ۱۹۵۵ در [5] به‌ترتیب ثابت شد که $C(X)$ و $L(X)$، فضای X را می‌شناسانند. سرانجام در سال ۱۹۵۶ در [45] نشان داده شد که برای فضاهای X و Y، یکریختی حلقه‌های $C(X)$ و $C(Y)$ معادل با یکریختی مشبکه‌های $L(X)$ و $L(Y)$ و همچنین معادل با یکریختی نیم‌گروه‌های $S(X)$ و $S(Y)$ است. به این ترتیب می‌توان همواره $C(X)$ را به‌چشم یک حلقه نگریست.

اگر دو حلقهٔ $C(X)$ و $C(Y)$ یکریخت باشند، حتی اگر X و Y همسانریخت نباشند، آن‌گاه آن دسته از خواص فضای X که تحت این یکریختی به فضای Y نیز سرایت می‌کند، خواص جبری نامیده می‌شوند. مثلاً همان‌گونه که در پیش‌گفتار گفته شد، همبندی، یک خاصیت جبری است، حال آن‌که فشردگی چنین نیست. اهمیت این نگاه در آن است که می‌توان بسیاری از ویژگی‌های فضای X را با مفاهیم موجود در حلقهٔ $C(X)$ بیان کرد. در واقع، نگاهی دیگر با اندکی ظرافت بیشتر، این است که چگونه ویژگی‌های جبری حلقهٔ $C(X)$ را در مقابل ویژگی‌های توپولوژیکی X قرار دهیم. بعد از نگاه نخست به $C(X)$، این نگاه هدف اصلی در مطالعهٔ $C(X)$ قرار گرفت. برای رسیدن به این هدف، کافی است مفاهیم و ویژگی‌های جبری $C(X)$ را با کمک ابزار توپولوژیکی X شناسایی کنیم. شاید ساده‌ترین مثال، P ــ فضاها باشند، یعنی فضاهایی که در آن‌ها هر G_δ ــ مجموعه، باز است. این فضاها ابتدا در [39] مورد مطالعه قرار گرفت و ثابت شد که X یک P ــ فضا است اگر و تنها اگر حلقهٔ $C(X)$ منظم باشد. معادل‌های جبری دیگری نیز می‌توان برای این ویژگی بیان کرد. مثلاً X یک P ــ فضا است اگر و تنها اگر هر ایدآل اول در حلقهٔ $C(X)$، ماکسیمال باشد و یا هر ایدآل متناهیاً تولید شده در $C(X)$ توسط یک خودتوان تولید شود. در [35] ثابت شده است که اگر X یک P ــ فضا باشد، آن‌گاه $C(X)$ نه‌تنها یک حلقهٔ منظم است، بلکه از ویژگی قوی‌تر $\aleph_0$ ــ انژکتیوی برخوردار است، حال آن‌که حلقه‌های تعویض‌پذیر منظم به‌طور طبیعی از این ویژگی به‌دور هستند. در [85] ثابت شده است که X یک F ــ فضا است اگر و تنها اگر حلقهٔ $C(X)$ ریکاتین ضعیف باشد، یعنی پوچساز هر عنصرش یک ایدآل محض باشد. در [73] نیز ثابت شده است که X یک F ــ فضا است اگر و تنها اگر هر ایدآل در حلقهٔ $C(X)$، تخت باشد. نتایج مشابه بسیاری از این نوع معادل‌های جبری برای P ــ فضاها و F ــ فضاها به‌دست آمده است که خواننده برای اطلاعات بیشتر می‌تواند به [43] مراجعه کند. در [74] نشان داده شده است که حلقهٔ $C(X)$ یک حلقهٔ وابسته[1] است اگر و تنها اگر فضای X ناهمبند پایه‌ای باشد؛ به عبارت دیگر، بستار متمم هر صفر ــ مجموعه، باز باشد. در این مقاله شناسهٔ دیگری برای این فضاها به‌دست آمده است: هر ایدآل متناهیاً تولید شده در حلقهٔ $C(X)$، پروژکتیو است اگر و تنها اگر فضای X ناهمبند پایه‌ای باشد. در [11] شناسه‌های دیگری برای فضاهای ناهمبند پایه‌ای و فضاهای شدیداً ناهمبند (فضاهایی که در آن‌ها، بستار هر مجموعهٔ باز، باز باشد) به‌دست آمده است. در این مرجع، ثابت شده است که فضای X شدیداً ناهمبند است اگر و تنها اگر حلقهٔ $C(X)$ بیر باشد، یعنی پوچساز هر زیرمجموعهٔ $C(X)$ با یک عنصر خودتوان تولید شود. از زاویه‌ای دیگر، اگر مجموعهٔ همهٔ توابع حقیقی ــ مقدار روی X، یعنی $\mathbb{R}^X$ را به‌عنوان $C(X)$ ــ مدول در نظر بگیریم، آن‌گاه در [82] نشان داده شده است که X یک P ــ فضا است اگر و تنها اگر $C(X)$ ــ مدولِ $\mathbb{R}^X$، مدول انژکتیو باشد؛ اگر و تنها اگر $C(X)$ ــ مدولِ $\mathbb{R}^X$، مدول تخت باشد و یا اگر و تنها اگر $C(X)$ زیرمدول سرهٔ $C(X)$ ــ مدولِ $\mathbb{R}^X$ باشد.

1) Coherent

نگاهی دیگر به $C(X)$، توجه به حلقه‌های خارج‌قسمتی آن است. $C(X)/P$ و میدان کسرهای آن در آنالیز تابعی و به‌خصوص در جبرهای باناخ و مفاهیم پیوستگی خودکار که در [30] به‌طور مفصل مطالعه شده است، اهمیت به‌سزایی دارند. این حلقه‌ها و خواص مهم جبری آن‌ها در مقالات [35]، [11] و [12] مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. در [12] حلقه‌های خارج‌قسمتی $C(X)$ به پیمانهٔ ساکل آن، $C_F(X)$، مورد مطالعه قرار گرفته و برای این پرسش که «چه موقع رادیکال جیکوبسن $\frac{C(X)}{C_F}$ صفر است؟» معادل‌های توپولوژیکی به‌دست آمده است و نویسندگان به جواب این مسألهٔ کلاسیک که «آیا هر فضای گسسته، فشردهٔ حقیقی است؟» نزدیک شده‌اند. در واقع، نشان داده شده است که فضای گسستهٔ X فشردهٔ حقیقی است اگر و تنها اگر vX شمارای نوع اول باشد. همچنین حلقهٔ $\frac{C(X)}{C_F(X)}$ در خیلی از مراحل می‌تواند همانند $C(X)$، با خواص مهم $C(X)$ ارتباط منطقی پیدا کند. در این مرجع، ثابت شده است که فشردگی همراه با وجود حداکثر تعداد شمارا نقطهٔ نامنفرد در یک فضای توپولوژیک، یک خاصیت جبری است.

مطالعهٔ $C(X)$ صرفاً به‌عنوان یک حلقه و یا صرفاً به‌عنوان یک فضای توپولوژیک، نگاهی دیگر به حلقه‌های توابع پیوسته است. وقتی $C(X)$ را به‌عنوان حلقه بنگریم، ایدآل‌های ماکسیمال آن، رفتار ایدآل‌های اول آن و ارتباط آن‌ها با z ـ ایدآل‌ها و بسیاری دیگر از ایدآل‌های $C(X)$ و ساختارهای جبری آن‌ها مورد بررسی قرار گرفته است که به تدریج به آن‌ها خواهیم پرداخت. $C(X)$ را همراه با یک توپولوژی روی آن، بسته به قصدمان، می‌توان به‌عنوان یک فضای توپولوژیک، حلقهٔ توپولوژیک، گروه توپولوژیک، فضای برداری توپولوژیک و یا مشبکهٔ توپولوژیک در نظر گرفت. اگرچه مطالعهٔ $C(X)$ از این دیدگاه مقولهٔ دیگری است، ولی به یک حالت خاص آن که $C(X)$ مجهز به m ـ توپولوژی باشد، به‌طور مختصر خواهیم پرداخت.

۴. z ـ ایدآل‌ها در $C(X)$

هرگاه صحبت از $C(X)$، یعنی مجموعهٔ توابع پیوسته و حقیقی ـ مقدار روی فضای توپولوژی X می‌شود، بی‌شک توپولوژی روی X متأثر از این توابع و همچنین ساختار اعداد حقیقی خواهد بود. کوچکترین توپولوژی روی یک مجموعهٔ X که به‌ازای آن، دسته‌ای از توابع روی X پیوسته باشند، توپولوژی تولید شده توسط آن دسته از توابع نامیده می‌شود. زمانی که توپولوژی اولیهٔ X بر توپولوژی تولید شده توسط تمام عناصر $C(X)$ روی X منطبق شود، فضای X کاملاً منظم خواهد بود. در چنین شرایطی، مجموعه‌های باز یا بستهٔ فضای X کاملاً از طریق تصویر معکوس مجموعه‌های باز و یا بستهٔ $\mathbb{R}$ تحت عناصر $C(X)$ به‌دست می‌آیند. به عبارت دیگر، هرگاه برای هر $f \in C(X)$، $f^{-1}(\{0\})$ را صفر ـ مجموعهٔ $Z(f)$ بنامیم، آن‌گاه برای هر $f \in C(X)$ داریم $f^{-1}([a,\infty)) = (f-a-|f-a|)^{-1}(\{0\})$ و از این رو، $f^{-1}([a,\infty))$ و به‌طور مشابه $f^{-1}((-\infty,b])$ و $f^{-1}([a,b])$ نیز صفر ـ مجموعه هستند. علاوه بر این، دستهٔ $Z(X)$ متشکل از همهٔ صفر ـ مجموعه‌ها، تحت اجتماع متناهی و اشتراک شمارا بسته است. به این ترتیب، می‌توان

گفت که فضای X کاملاً منظم است اگر و تنها اگر $Z(X)$ پایه‌ای برای مجموعه‌های بستهٔ X باشد. از سوی دیگر، استون در [79] نشان داد برای هر فضای X، فضای کاملاً منظم و هاسدورف Y وجود دارد به‌گونه‌ای که حلقه‌های $C(X)$ و $C(Y)$ یکریخت هستند. از آنجا که هدف اصلی از مطالعهٔ حلقه‌های توابع پیوسته ارتباط خواص جبری حلقهٔ $C(X)$ با خواص توپولوژیکی X است و خواص جبری تحت یکریختی‌ها پایا می‌مانند، نشانه‌ها همه حاکی از آنند که برای مطالعهٔ حلقه‌های توابع پیوسته $C(X)$، کافی است فضای X را کاملاً منظم و هاسدورف اختیار کنیم.

صفر ـ مجموعه‌ها که نخستین بار در [51] مطالعه شدند، نه‌تنها به‌عنوان پایهٔ مجموعه‌های بستهٔ فضاهای کاملاً منظم مطرح بودند بلکه این ابزار توپولوژیکی مبنای پیدایش اشیاء جبری به نام z ـ ایدآل‌ها شدند که به‌تدریج نقش شگفت‌انگیزی در مطالعهٔ $C(X)$ ایفا کردند. در حقیقت اگر بخواهیم در راستای هدف اصلی در مطالعهٔ $C(X)$ گام برداریم، ناچاریم تا آنجا که امکان دارد مفاهیم جبری را با کمک ابزار توپولوژیکی و یا برخی ویژگی‌های توپولوژیکی را با کمک اشیاء جبری بیان کنیم. به‌ویژه وقتی بتوانیم نوعی از ایدآل‌ها را هم به‌صورت جبری و هم به‌صورت توپولوژیکی تعریف کنیم، پل‌های ارتباطی مستحکمی میان X و $C(X)$ بنا می‌شود. هرگاه برای یک ایدآل I در $C(X)$ قرار دهیم $Z[I] = \{Z(f) : f \in I\}$، آن‌گاه به‌طور طبیعی این پرسش پیش خواهد آمد که آیا از $Z(f) \in Z[I]$ می‌توان نتیجه گرفت $f \in I$؟ اگر چنین اتفاقی برای یک ایدآل I رخ دهد، آن‌گاه ایدآل I را z ـ ایدآل می‌گوییم. مفهوم z ـ ایدآل نخستین بار در [60] مطرح گردید. لازم است با یک مثال نشان دهیم که این امر همواره محقق نمی‌شود. در حلقهٔ $C(\mathbb{R})$، اگر تابع همانی i و ایدآل اصلی $I = (i)$ را در نظر بگیریم، آن‌گاه $Z(i^{1/3}) = \{0\} \in Z[I]$، ولی $i^{1/3} \notin I$.

به بیان دیگر، ایدآل I در $C(X)$ یک z ـ ایدآل است هرگاه از $Z(f) = Z(g)$ و $f \in I$ بتوان نتیجه گرفت که $g \in I$. این تعریف کاملاً توپولوژیکی است، ولی جالب است بدانیم تعریفی کاملاً جبری نیز برای z ـ ایدآل‌ها وجود دارد تا به این ترتیب واژهٔ z ـ ایدآل به دیگر حلقه‌ها نیز راه یابد. در صورتی که برای هر $f \in C(X)$، ایدآل M_f را اشتراک همهٔ ایدآل‌های ماکسیمال شامل f در نظر بگیریم، آن‌گاه به‌سادگی دیده می‌شود که ایدآل I در $C(X)$ یک z ـ ایدآل است اگر و تنها اگر برای هر $f \in I$، داشته باشیم $M_f \subseteq I$. برای هر $f \in C(X)$، ایدآل M_f نیز یک z ـ ایدآل است که نخستین بار این نماد در [16] مطرح و با نمایش توپولوژیکی به‌صورت $M_f = \{g \in C(X) : Z(f) \subseteq Z(g)\}$ شناسایی شد. به این ترتیب، هر M_f هم نمایش جبری دارد و هم نمایش توپولوژیکی. با استفاده از این شناسه، به‌سادگی می‌توان دید که خانوادهٔ $\{M_f : f \in C(X)\}$ تحت جمع و اشتراک متناهی، بسته است. در واقع برای هر $f, g \in C(X)$ خواهیم داشت $M_f \cap M_g = M_{fg}$ و $M_f + M_g = M_{f^2+g^2}$. مهمتر از آن، هر z ـ ایدآل I به‌صورت مجموع عناصری از این خانواده نوشته می‌شود. به‌گونه‌ای شفاف‌تر می‌توان نوشت $I = \sum_{f \in I} M_f$.

نه‌تنها این خانوادهٔ خاص از z ـ ایدآل‌ها تحت جمع و اشتراک بسته است، بلکه مجموع و

اشتراک هر تعداد z ــ ایدآل در $C(X)$ نیز یک z ــ ایدآل است. اول بار در [43] با استفاده از مفهوم فشرده‌شدهٔ استون ــ چک ثابت شد که مجموع z ــ ایدآل‌ها در $C(X)$ یک z ــ ایدآل است و سپس این موضوع با روشی ساده و ابتدایی توسط راد[1] در [77] به اثبات رسید. با استفاده از این واقعیت‌ها، به‌طور طبیعی می‌توان دید که برای هر ایدآل I در $C(X)$، ایدآل I_z، یعنی کوچکترین z ــ ایدآل شامل I و I^z که بزرگترین z ــ ایدآل مشمول در I است، وجود دارند. این نمادها نخست در [69] به‌کار گرفته شد. در حقیقت، I_z برابر با اشتراک همهٔ z ــ ایدآل‌های شامل I و I^z مجموع همه z ــ ایدآل‌های مشمول در I است.

همان‌گونه که می‌دانیم، ایدآل‌های اول در هر حلقه جایگاه ویژه‌ای دارند. از این‌رو، ارتباط تنگاتنگ z ــ ایدآل‌ها با ایدآل‌های اول $C(X)$ که بخشی از آن را عنوان خواهیم کرد، نشان از اهمیت z ــ ایدآل‌ها دارد که نخست در [60]، [61] و [62] مورد مطالعه قرار گرفت. هر z ــ ایدآل، نیم‌اول است؛ هر ایدآل اول مینیمال روی یک z ــ ایدآل در $C(X)$ خود z ــ ایدآل است و مهمتر از آن، هر z ــ ایدآل شامل یک ایدآل اول در $C(X)$، اول است. جالب‌تر از همه، با استفاده از مفاهیم کوچکترین و بزرگترین z ــ ایدآل‌ها، در [68] نشان داده شد که مجموع یک ایدآل اول و یک z ــ ایدآل در $C(X)$ که در یک زنجیر قرار نگیرند، یک z ــ ایدآل اول است. پیوند ایدآل‌های اول با z ــ ایدآل‌ها که از دو جنس متفاوت‌اند و تأثیر هر دو بر حاصلِ پیوند، حکایت از نزدیکی تنگاتنگ z ــ ایدآل‌ها با ایدآل‌های اول دارد. به این ترتیب، اگر P یک ایدآل اول در $C(X)$ باشد، آن‌گاه P_z و P^z نیز اول هستند. از این‌رو، ایدآل‌های اول مینیمال و ایدآل‌های ماکسیمال نیز z ــ ایدآل هستند. در [69] ثابت شد که ایدآل‌های اول مینیمال روی یک z ــ ایدآل در هر حلقه نیز z ــ ایدآل هستند. عکس این موضوع برای حلقهٔ $C(X)$ در [71] و [16] به دو روش مختلف به اثبات رسیده است. از این رو، به این واقعیت پی می‌بریم که ایدآل I در $C(X)$ یک z ــ ایدآل است اگر و تنها اگر $\sqrt{I}$ یک z ــ ایدآل باشد. سرانجام با استفاده از این موضوع، نتیجهٔ کلی‌تری از آنچه پیش‌تر گفته شد در [16] به اثبات رسید: مجموع یک ایدآل اولیه و یک z ــ ایدآل در $C(X)$ که در یک زنجیر نباشند یک z ــ ایدآل اول است.

عناصر خانوادهٔ $\{M_f : f \in C(X)\}$ به‌نوعی z ــ ایدآل‌های پایه‌ای محسوب می‌شوند، چراکه پیش‌تر دیدیم که هر z ــ ایدآل I در $C(X)$ برحسب مجموع عناصری از این گونه نوشته می‌شود. علاوه بر آن، برای هر ایدآل I در $C(X)$، ایدآل‌های I_z و I^z برحسب z ــ ایدآل‌های پایه‌ای در [16] به‌صورت $I_z = \sum_{f\in I} M_f$ و $I^z = \sum_{M_f \subseteq I} M_f$ شناسایی شده‌اند. با استفاده از این نمایش‌ها، شناسه‌های توپولوژیکی برای این ایدآل‌ها نیز به‌صورت زیر است:

$$I_z = \{g \in C(X) : \exists f \in I \ni Z(f) \subseteq Z(g)\} ,$$
$$I^z = \{g \in C(X) : Z(g) \subseteq Z(f) \Rightarrow f \in I\}.$$

1) Rudd

سرگذشت نوع دیگری از z ـ ایدآل‌های قوی‌تر بنام z° ـ ایدآل‌ها را در بخش‌های بعد خواهیم گفت، ولی نوع ضعیف‌تری از z ـ ایدآل‌ها به‌نام z ـ ایدآل‌های نسبی نیز اخیراً در [18] مورد مطالعه قرار گرفته است. وقتی $I \subseteq J$ دو ایدآل در $C(X)$ باشند و I در J یک z ـ ایدآل باشد به این معنی که $g \in J$، $f \in I$ و $Z(f) \subseteq Z(g)$ نتیجه بدهد $g \in I$، آن‌گاه I را z ـ ایدآل نسبی نسبت به J می‌نامیم و می‌گوییم I یک z_J ـ ایدآل است. به عبارت دیگر، ایدآل I را z ـ ایدآل نسبی گوییم هرگاه ایدآل $J \supsetneqq I$ موجود باشد که I یک z_J ـ ایدآل گردد. به‌سادگی می‌توان دید که I یک z_J ـ ایدآل است اگر و تنها اگر $I_z \cap J = I$. پیداست هر ایدآل I یک z_I ـ ایدآل است و هر z ـ ایدآل سره نیز یک z ـ ایدآل نسبی است، حال آن‌که می‌توان نشان داد که اگر J یک z ـ ایدآل نباشد، آن‌گاه ایدآل $I \subsetneqq J$ وجود دارد که z_J ـ ایدآل باشد ولی z ـ ایدآل نباشد. در حالت خاص می‌توان نشان داد که ایدآل اصلی (f) در $C(X)$ یک z ـ ایدآل نسبی است اگر و تنها اگر $\mathrm{Ann}(f) \neq (\circ)$. در مورد ارتباط ایدآل‌های اول و z ـ ایدآل‌های نسبی، ابتدا بیان این نکته ضروری است که z ـ ایدآل‌های نسبی اول و z ـ ایدآل‌های اول بر هم منطبق‌اند و سپس لازم است بدانیم که اگر I یک z_J ـ ایدآل باشد، هر ایدآل اول شامل I که z ـ ایدآل نباشد، شامل J نیز هست. این موضوع بیانگر این واقعیت است که اگر I یک z_J ـ ایدآل باشد، آن‌گاه دو ایدآل I و J بسیار به هم نزدیک‌اند. به عبارت دیگر، برای دستیابی به بزرگترین ایدآل J به‌گونه‌ای که I یک z_J ـ ایدآل باشد، نمی‌توان انتظاری فراتر از برخی از ایدآل‌های اول مینیمال روی I داشت. دوگان این موضوع نیز مطرح است: برای یک ایدآل مفروض J، یافتن بزرگترین z_J ـ ایدآل غیر از J همیشه میسر نیست. شرط وجود چنین ایدآلی آن است که مجموع z_J ـ ایدآل‌ها یک z_J ـ ایدآل باشد، ولی بر خلاف z ـ ایدآل‌ها، مجموع هر دو z_J ـ ایدآل (z ـ ایدآل نسبی) در $C(X)$ لزوماً یک z_J ـ ایدآل (z ـ ایدآل نسبی) نیست. برای فراهم نمودن شرایط مناسب، باید به فضای X نگاهی بیفکنیم تا بتوانیم بستر لازم را مهیا کنیم. در [18] ثابت شده است که برای هر ایدآل J در $C(X)$، مجموع دو z_J ـ ایدآل یک z_J ـ ایدآل است اگر و تنها اگر X یک F ـ فضا باشد (یعنی فضایی که در آن متمم هر صفر ـ مجموعه، یک C^* ـ نشانده است و یا معادل جبری آن: هر ایدآل با مولد متناهی در $C(X)$، اصلی است). همچنین ثابت شده است که مجموع دو z ـ ایدآل نسبی در $C(X)$، یک z ـ ایدآل نسبی است اگر و تنها اگر X یک P ـ فضا باشد (یعنی، فضایی که در آن هر G_δ ـ مجموعه، باز است).

همان‌گونه که پیش‌تر گفتیم و اکنون نیز مشاهده کردیم، به‌لحاظ بیان دوگانهٔ جبری و توپولوژیکی z ـ ایدآل‌ها، می‌توان پل‌های ارتباطی میان X و $C(X)$ بنا کرد که همان هدف اصلی مطالعهٔ $C(X)$ است. اشاره به چند مورد دیگر از این ارتباط‌ها، اهمیت z ـ ایدآل‌ها را بیشتر نشان می‌دهد.

- هر ایدآل (اول) در $C(X)$ یک z ـ ایدآل است اگر و تنها اگر X یک P ـ فضا باشد؛ معادلاً حلقهٔ $C(X)$ منظم باشد ([43]).

- هر ایدآل اصلی در $C(X)$ یک z ـ ایدآل نسبی است اگر و تنها اگر X یک تقریباً P ـ فضا

باشد (یعنی فضایی که در آن هر G_δ ـ مجموعهٔ ناتهی دارای درون ناتهی است) ([18]).

- فضای X شبه‌فشرده است (یعنی $C(X) = C^*(X)$) اگر و تنها اگر هر ایدآل $C(X)$ در یک z ـ ایدآل قویاً تقسیم‌پذیر قرار گیرد (ایدآل I را قویاً تقسیم‌پذیر می‌نامیم هرگاه برای هر دنبالهٔ $\{a_n\} \subseteq I$، دنبالهٔ $\{b_n\} \in C(X)$ و $e \in I$ موجود باشند که $a_n = eb_n$ برای هر $n \in \mathbb{N}$) ([9]).

شناسایی z ـ ایدآل‌های شمارا تولید شده در $C(X)$ نیز از دیرباز مدنظر بوده است. z ـ ایدآل‌های O^p برای $p \in \beta X$ که به‌صورت $O^p = \{f \in C(X) : p \in \mathrm{int}_{\beta X}\mathrm{cl}_{\beta X} Z(f)\}$ تعریف می‌شوند و همچنین z ـ ایدآل‌های $O^A = \cap_{p\in A} O^p$ برای $A \subseteq \beta X$، در شناسایی z ـ ایدآل‌های $C(X)$ با مولد شمارا اهمیت دارند. در بخش بعد، به‌طور مفصل به مطالعهٔ فضای βX خواهیم پرداخت و با این نوع ایدآل‌ها بیشتر آشنا خواهیم شد. مطالعهٔ z ـ ایدآل‌های شمارا تولید شده در $C(X)$ ابتدا در [38] آغاز شد. با استفاده از نتایج به‌دست آمده در این مرجع، نخست نشان داده شد که z ـ ایدآل O^p وقتی که $p \in \beta X \setminus X$ و همهٔ ایدآل‌های شامل O^p، از جمله ایدآل‌های اول شامل O^p، برای $p \in \beta X \setminus X$، هرگز مولد شمارا ندارند. سپس ثابت شد z ـ ایدآل‌های اول غیرماکسیمال در $C(X)$ فاقد مولد شمارا هستند، حال آن‌که ایدآل‌های اول با مولد شمارا در $C(X)$ وجود دارند. بعد از آن، در [32] مطالعهٔ z ـ ایدآل‌های شمارا تولید شده در $C(X)$ دنبال شد و ثابت شد که برای مجموعهٔ بستهٔ A در βX، z ـ ایدآل O^A دارای مولد شماراست اگر و تنها اگر A یک صفر ـ مجموعه در βX باشد. از این‌رو، وقتی X فشرده باشد، z ـ ایدآل‌های شمارا تولید شده در $C(X)$ به‌صورت O^A هستند که A یک صفر ـ مجموعه در X است. سرانجام در [64] و [65] نشان داده شد که عناصر مولد یک z ـ ایدآل شمارا تولید شده در $C(X)$ از نظم خاصی برخوردارند. با استفاده از این موضوع، ثابت شد که اگر فضای X شمارای نوع اول و نرمال (یا نرمال و موضعاً فشرده) باشد، آن‌گاه z ـ ایدآل‌های شمارا تولید شده در $C(X)$ به‌صورت O^A هستند که A یک صفر ـ مجموعه در βX است.

بسیاری از ناگفته‌های دیگر مانند برابری‌های $(I \cap J)_z = I_z \cap J_z = I_z J_z = (IJ)_z$، برابری $(I + J)^z = I^z + J^z$ وقتی I و J ایدآل‌های تجزیه‌پذیر باشند، امکان شمول $P_z \subseteq Q_z$ بدون آن‌که ایدآل‌های اول P و Q در یک زنجیر باشند، و بسیاری از نتایج دیگر در مورد z ـ ایدآل‌ها که مجال بیان همگی آن‌ها در این مقاله نیست، حکایت از نقش مؤثر و سازندهٔ z ـ ایدآل‌ها در کشف حقایق جبری و توپولوژیکی دارند. در بخش‌های بعد نیز خواهیم دید که چگونه z ـ ایدآل‌ها با مباحث دیگر در $C(X)$ پیوند خورده و با این پیوندها چگونه میان X و $C(X)$ ارتباط‌های دوطرفه برقرار می‌کنیم.

۵. شناسایی ایدآل‌های ماکسیمال $C(X)$

به‌طور کلی، ایدآل‌های ماکسیمال در بحث نظریهٔ حلقه‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند. اما در

ادامه، خواهیم دید که اهمیت این ایدآل‌ها در حلقهٔ $C(X)$ دوچندان است. همان‌طور که پیش‌تر نیز گفته شد، یکی از مسائل بسیار مهم برای صاحب‌نظران در این زمینه این است که چه وقت از یکریختی میان حلقه‌های $C(X)$ و $C(Y)$ می‌توان همسانریختی فضاهای توپولوژی X و Y را نتیجه گرفت که این موضوع ارتباط تنگاتنگی با ایدآل‌های ماکسیمال دارد. برای شناختِ بهترِ ایدآل‌های ماکسیمال، ابتدا به معرفی فشرده‌شدهٔ یک فضا با در نظر گرفتن جنبه‌های تاریخی آن می‌پردازیم. ولی پیش از آن، برای روان‌تر شدن مطلب به بیان چندین تعریف می‌پردازیم و چند نماد را معرفی می‌کنیم.

$Z(X) \supseteq \mathcal{F} \neq \varnothing$ را z ـ پالایه روی X می‌گوییم هرگاه

الف) $\varnothing \notin \mathcal{F}$؛

ب) اگر $A, B \in \mathcal{F}$، آن‌گاه $A \cap B \in \mathcal{F}$؛

پ) اگر $A \in \mathcal{F}$، $B \in Z(X)$ و $A \subseteq B$، آن‌گاه $B \in \mathcal{F}$.

اگر $\mathcal{F}$ یک z ــ پالایهٔ ماکسیمال باشد، آن را z ــ فراپالایه می‌گوییم. z ــ پالایهٔ $\mathcal{F}$ را اول می‌گوییم هرگاه از $A \cup B \in \mathcal{F}$ نتیجه شود $A \in \mathcal{F}$ یا $B \in \mathcal{F}$. به‌راحتی می‌توان نشان داد که اگر $\mathcal{F}$ یک z ـ پالایه باشد، آن‌گاه $Z^{-1}[\mathcal{F}] = \{f \in C(X) : \ Z(f) \in \mathcal{F}\}$ ایدآل سره در $C(X)$ است و به‌عکس، اگر I ایدآل سره در $C(X)$ باشد، آن‌گاه $Z[I] = \{Z(f) : \ f \in I\}$ یک z ــ پالایه روی X است. اگر $\mathcal{F}$ یک z ــ فراپالایه باشد، آن‌گاه $Z^{-1}[\mathcal{F}]$ یک ایدآل ماکسیمال در $C(X)$ است و به‌عکس، اگر M ایدآل ماکسیمال در $C(X)$ باشد، آن‌گاه $Z[M] = \{Z(f) : \ f \in I\}$ یک z ـ فراپالایه روی X است. z ـ پالایهٔ $\mathcal{F}$ راثابت می‌گوییم هرگاه $\bigcap \mathcal{F} \neq \varnothing$؛ در غیر این صورت، آن را آزاد می‌نامیم. به‌علاوه، ایدآل I در $C(X)$ را ثابت می‌گوییم هرگاه $Z[I]$ چنین باشد و در غیر این صورت، آن را آزاد می‌گوییم. مطالعهٔ ارتباط z ـ پالایه‌های روی X و ایدآل‌های سرهٔ $C(X)$ اولین بار توسط هویت در [51] صورت گرفت. می‌توان ثابت کرد که هر z ــ فراپالایه روی X ثابت است اگر و تنها اگر به‌صورت $\mathcal{A}^p = \{Z \in Z(X) : \ p \in Z\}$ باشد که در آن، $p \in X$.

فرض کنیم $\mathcal{M}$، مجموعهٔ ایدآل‌های ماکسیمال $C(X)$ و $\mathcal{M}^*$، مجموعهٔ ایدآل‌های ماکسیمال $C^*(X)$ را به توپولوژی زاریسکی مجهز کرده‌ایم. به این توپولوژی، توپولوژی استون و فضاهای توپولوژیک $\mathcal{M}$ و $\mathcal{M}^*$ را به‌ترتیب، فضاهای ساختاری[1] $C(X)$ و $C^*(X)$ می‌گویند. برای هر $f \in C(X)$ ($f \in C^*(X)$) تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{M}(f) = \{M \in \mathcal{M} : \ f \in M\} \ , \ \ \mathcal{M}^*(f) = \{M^* \in \mathcal{M}^* : \ f \in M^*\}.$$

اکنون می‌خواهیم با همین زمینهٔ اندک، با شیوهٔ پیدایش فشرده‌شدهٔ استون ــ چک و تاریخچهٔ آن آشنا شویم. تیخونف در [80] نشان داد که برای هر فضای کاملاً منظم و هاسدورف X، فضای فشردهٔ T وجود دارد که $\mathrm{cl}_T X = T$. بعدها استون در [79] و مستقلاً چک در [27] فضای فشرده شدهٔ βX

1) Structure space

را ساختند که X در آن چگال و C^* ــ نشانده است. بدین سبب، βX را فشرده‌شدهٔ استون ــ چک می‌گویند. چک در روش خود فضای کاملاً منظم و هاسدورف X را در حاصلضربی از بازه‌های بستهٔ کراندار نشاند. به‌علاوه، او نشان داد که C^* ــ نشانده بودن X در βX معادل با این است که هر دو صفر ــ مجموعهٔ مجزا در X دارای بستارهای مجزا در βX باشند. همچنین دو قضیهٔ مهم زیر را اثبات کرد:

- $S \subseteq X$ یک C^* ــ نشانده در X است اگر و تنها اگر $\beta S = \mathrm{cl}_{\beta X} S$.
- فرض کنیم T فشرده‌شدهٔ X و φ یک نشاننده از X به T باشد. در این صورت، φ دارای توسیع پیوستهٔ $\bar{\varphi}$ از βX به T است (که به آن، توسیع استون نیز گفته می‌شود) و به‌علاوه، $\bar{\varphi}(\beta X \setminus X) = T \setminus \varphi(X)$.

استون نیز مستقل از «چک» و به روشی متفاوت، با ارتباط دادن ساختار جبری $C^*(X)$ با ساختار معینی از زیرمجموعه‌های X، ضمن اثبات وجود βX به‌عنوان فضای فشرده‌ای که X در آن C^* ــ نشانده و چگال است، ثابت کرد این حکم معادل است با این‌که هر تابع پیوسته از X به یک فضای فشرده و هاسدورف Y، قابل توسیع به تابعی پیوسته از βX به Y است. این توسیع به توسیع استون معروف است و اگر $Y = \mathbb{R}$، آن را با f^β نشان می‌دهند.

روشی که در [43] آمده است، ادامهٔ روش استون است که بعدها توسط ریاضی‌دانانی همچون والمن[1]، الکساندروف، گلفاند و کلموگروف قوام پیدا کرد و به‌ویژه گلفاند و کلموگروف آن را تقریباً به شکلی که در [43] آمده است، عرضه کردند. به‌علاوه، این دو در [37] با بهره‌گیری از جنبه‌های جبری اثبات استون، βX را به‌عنوان فضای ساختاری $C^*(X)$ و جالب‌تر از آن، به‌عنوان فضای ساختاری $C(X)$ گسترش دادند. آن‌ها ثابت کردند که نگاشت $p \to M^p$ ($p \to M^{*p}$) هر $\mathrm{cl}_{\beta X} Z(f)$ ($Z(f^\beta)$) را به $\mathcal{M}(f)$ ($\mathcal{M}^*(f)$) می‌نگارد و به‌عکس که در آن، $M^p = \{f \in C(X) :\ p \in \mathrm{cl}_{\beta X} Z(f)\}$ ($M^{*p} = \{f \in C^*(X) :\ f^\beta(p) = \circ\}$).

در ادامه، به تاریخچهٔ پیدایش این ایدآل‌ها اشاره می‌کنیم. از آنجا که $\{\mathrm{cl}_{\beta X} Z(f)\}_{f \in C(X)}$ و $\{Z(f^\beta)\}_{f \in C^*(X)}$، پایه‌هایی برای مجموعه‌های بستهٔ βX هستند، این نگاشت یک تناظر دوسویی بین عناصر پایه‌ای فضای توپولوژی βX و عناصر پایه‌ای فضای توپولوژی $\mathcal{M}$ و $\mathcal{M}^*$ ایجاد می‌کند. بنابراین بر اساس این روش می‌توان گفت که فضاهای ساختاری $C(X)$ و $C^*(X)$ همسانریخت هستند و می‌توان آن‌ها را به‌عنوان βX در نظر گرفت. به‌علاوه، این نگاشت، فضای X را به‌روی زیرفضای ایدآل‌های ثابت $\mathcal{M}$ و $\mathcal{M}^*$ می‌نگارد. بهتر است اضافه کنیم که در [41] ثابت شده است که بین ایدآل‌های ماکسیمال $C(X)$ و $C^*(X)$ یک تناظر دوسویی وجود دارد. البته، بنا به آنچه که در [41] آمده است، این قضیه را پیش‌تر، گلفاند و کلموگروف در [37] بدون اثبات مطرح کرده بودند. بدون شک، کارهای گلفاند و کلموگروف

1) Wallman

متکی به نتایج استون بوده است چراکه قبل از آن، استون ثابت کرده بود که ایدآل‌های ماکسیمال $C^*(X)$ دقیقاً به‌صورت $M^{*p} = \{f \in C^*(X) : \ f^\beta(p) = ۰\}$ هستند که در آن، $p \in \beta X$ و بین مجموعهٔ این ایدآل‌ها و βX یک تناظر دوسویی وجود دارد. او همچنین ثابت کرد که اگر X فشرده باشد، همهٔ ایدآل‌های $C(X)$ ثابت هستند. به علاوه، او نشان داد برای هر $p \in X$ نگاشت $M^{*p}(f) \to f(p)$ یکریختی بین C^*/M^{*p} و $\mathbb{R}$ ایجاد می‌کند و این یکریختی یکتا است.

گلفاند و کلموگروف ثابت کردند که همهٔ ایدآل‌های ماکسیمال $C(X)$ به‌صورت $M^p = \{f \in C(X) : \ p \in \mathrm{cl}_{\beta X} Z(f)\}$ هستند که در آن، $p \in \beta X$ و ایدآل‌های ماکسیمال ثابت $C(X)$ به‌صورت $M^p = \{f \in C(X) : \ p \in Z(f)\}$ هستند که $p \in X$. آن‌ها نشان دادند که نگاشت $p \to M^p$ تناظری یک‌به‌یک بین βX و $\mathcal{M}$ ایجاد می‌کند. در ضمن، این نگاشت، نقاط X را به ایدآل‌های ماکسیمال ثابت می‌نگارد.

از آنجا که نگاشت $M^p \to \mathcal{A}^p$ یک تناظر دوسویی بین $\mathcal{M}$ و مجموعهٔ z ــ فراپالایه‌های روی X ایجاد می‌کند آن‌چنان که ایدآل‌های ماکسیمال ثابت به روی z ــ فراپالایه‌های ثابت نگاشته می‌شوند، می‌توان با الهام از روش قبل، βX را به‌صورتی دیگر نیز معرفی کرد چنان‌که در [43] انجام شده است. برای آشنایی بیشتر خواننده، این روش را نیز به‌اختصار بیان می‌کنیم. خانوادهٔ همهٔ z ــ فراپالایه‌های روی X را توسط مجموعه‌ای شامل X، به‌نام βX به‌صورت $\{\mathcal{A}^p\}_{p\in\beta X}$ اندیس‌گذاری می‌کنیم. اکنون روی βX یک توپولوژی به‌شرح زیر معرفی می‌کنیم. برای هر $Z \in Z(X)$ قرار می‌دهیم $\overline{Z} = \{p \in \beta X : Z \in \mathcal{A}^p\}$. آشکارا دیده می‌شود که $\overline{\varnothing} = \varnothing$ و برای هر $Z_۱, Z_۲ \in Z(X)$ داریم $\overline{Z_۱ \cup Z_۲} = \overline{Z}_۱ \cup \overline{Z}_۲$. بنابراین خانوادهٔ $\{\overline{Z}\}_{Z\in Z(X)}$ تحت اجتماع متناهی بسته است و $\varnothing$ را نیز در خود دارد. پس این خانواده می‌تواند پایه‌ای برای مجموعه‌های بستهٔ یک توپولوژی روی βX باشد و ثابت می‌شود که βX با این توپولوژی یک فضای فشرده و هاسدورف است که X را به‌عنوان زیرفضای چگال و C^* ــ نشانده در بر دارد.

همان‌طور که قبلاً نیز اشاره شد، یکی از موضوعاتی که در مبحث حلقهٔ توابع پیوسته همواره مورد توجه بوده و ساختار ایدآل‌های ماکسیمال در آن نقش اساسی دارد، این است که چگونه می‌توان از یکریختی حلقه‌های $C(X)$ و $C(Y)$ همسانریختی فضاهای X و Y را نتیجه گرفت. باناخ در [20] نشان داد که برای فضای متری فشردهٔ X نگاشت $p \to M^p$ یک تناظر یک‌به‌یک میان X و $\mathcal{M}$ است و همچنین برای فضاهای متری فشردهٔ X و Y، اگر بین $C(X)$ و $C(Y)$ طولپایی برقرار باشد، آن‌گاه X و Y همسانریخت هستند. بعداً استون همین قضیه را برای فضاهای توپولوژیک فشرده تعمیم داد که به همین خاطر، به قضیهٔ باناخ ــ استون معروف است. بالأخره، گلفاند و کلموگروف ثابت کردند که برای فضاهای فشردهٔ X و Y، از یکریختی حلقه‌های $C(X)$ و $C(Y)$ می‌توان همسانریختی فضاهای X و Y را نتیجه گرفت؛ به این ترتیب که اگر فرض کنیم $\mathcal{M}_X$ و $\mathcal{M}_Y$ به‌ترتیب، مجموعهٔ ایدآل‌های ماکسیمال $C(X)$ و $C(Y)$ مجهز به توپولوژیِ استون باشند، آن‌گاه با توجه به فرض، این دو فضا همسانریخت هستند و در نتیجه

$X = \beta X \simeq \mathcal{M}_X \simeq \mathcal{M}_Y \simeq \beta Y = Y$. بی‌تردید این قضیه یکی از نتایج بسیار جالب توجه و اساسی در مبحث حلقهٔ توابع پیوسته است.

مفهوم عمیق دیگری که در آن ایدآل‌های ماکسیمال نقش اساسی دارند، مفهوم‌فشردهٔ حقیقی است. این مفهوم ابتدا توسط هویت معرفی شد و مورد بررسی قرار گرفت. برای آشنایی با این مفهوم، تعاریفی را نیاز داریم که آن‌ها را در زیر به‌اختصار می‌آوریم.

هویت در [51] ثابت کرد که برای هر فضای X، یک فضای توپولوژیک یکتا (با تقریب همسانریختی) به‌نام Q وجود دارد که X در آن چگال و C ـ نشانده است و هر فضای T که X در آن چگال و C ـ نشانده باشد، (با تقریب همسانریختی) زیرفضای Q است. این فضا توسط ریاضی‌دانان بعدی نام‌ها و نمادهای مختلفی به خود گرفت، ولی اکنون تقریباً همهٔ پژوهش‌گران در این زمینه، این فضا را فشرده شدهٔ حقیقی X می‌نامند و آن را با نماد υX نمایش می‌دهند. X را فشردهٔ حقیقی می‌گوییم هرگاه $\upsilon X = X$. هویت نشان داد که این مفهوم همان ارتباطی را با $C(X)$ دارد که فشرده‌شدهٔ استون ـ چک با $C^*(X)$ داراست. وی با اثبات این‌که «فضاهای فشردهٔ حقیقی X و Y همسانریخت هستند اگر و تنها اگر حلقه‌های $C(X)$ و $C(Y)$ یکریخت باشند»، اهمیت این مفهوم را بیش از پیش نشان داد. او همچنین برخی خواص این فضاها را به‌دست آورد. لازم است بدانیم که بسیاری از احکام اساسی در مورد فضاهای فشردهٔ حقیقی را می‌توان در کارهای نچبین[1] در [72] نیز دید. این کارها، مستقل از کارهای هویت صورت گرفته و وی از منظر دیگری به این مفهوم نگریسته است.

می‌دانیم که برای هر $p \in \beta X$، $C(X)/M^p$ $(C^*(X)/M^{*p})$ یک هیأت و به‌وضوح شامل یک نسخه از هیأت اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ است. اگر این نسخه دقیقاً برابر با $C(X)/M^p$ $(C^*(X)/M^{*p})$ باشد، آن‌گاه می‌گوییم M^p (M^{*p}) ایدآل حقیقی است و در غیر این صورت، آن را ایدآل ابرحقیقی می‌نامیم. از آنجا که برای هر $p \in X$، نگاشت $M^p(f) \to f(p)$ $(M^{*p}(f) \to f(p))$ یکریختی از $C(X)/M^p$ $(C^*(X)/M^{*p})$ به‌روی هیأت اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ است، پس همهٔ ایدآل‌های ماکسیمال ثابت در $C(X)$ $(C^*(X))$، حقیقی هستند (منظور از $I(f)$ همدستهٔ $f + I$ است). بنابراین هر ایدآل ماکسیمال ابرحقیقی در $C(X)$ $(C^*(X))$ لزوماً آزاد است. ثابت می‌شود که هر ایدآل ماکسیمال در $C^*(X)$ حقیقی است، اما در $C(X)$ چنین نیست. اکنون این سؤال مطرح می‌شود که آیا فضای X وجود دارد که هر ایدآل ماکسیمال آزاد در $C(X)$ ابرحقیقی باشد؟ پاسخ مثبت است و این فضاها همان فضاهای فشردهٔ حقیقی هستند.

فرض کنیم $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ فشرده‌شدهٔ تک نقطه‌ای $\mathbb{R}$ باشد. برای هر $f \in C(X)$، می‌توان f را تابعی از X به $\mathbb{R}^*$ در نظر گرفت. از این‌رو، f دارای توسیعی از βX به $\mathbb{R}^*$ است که آن را با f^* نشان می‌دهیم. این توسیع برای اولین بار در [41] معرفی شد و مورد بررسی قرار گرفت.

1) Nachbin

قضیهٔ زیر حاصل مطالعات هویت، گیلمن، هنریکسن و جریسون است که در [43] آمده است.
قضیه. فرض کنیم $p \in \beta X$. در این صورت احکام زیر معادل‌اند:

(الف) $Z[M^p]$ تحت اشتراک شمارا بسته است؛

(ب) $Z[M^p]$ دارای خاصیت اشتراک شمارا است (یعنی اشتراک هر تعداد شمارا از اعضای $Z[M^p]$ ناتهی است)؛

(پ) M^p یک اید آل حقیقی است؛

(ت) $f^*(p) \neq \infty$ برای هر $f \in C(X)$؛

(ث) $f^*(p) = M^p(f)$ برای هر $f \in C(X)$؛

(ج) اگر $f^*(p) = ۰$، آن‌گاه $M^p(f) = ۰$ (یعنی $f \in M^p$).

ثابت می‌شود که مجموعهٔ نقاطی از βX که در یکی از شرایط معادل قضیهٔ بالا صدق می‌کنند، همان υX یعنی فشرده‌شدهٔ حقیقی X است. بدیهی است که $X \subseteq \upsilon X \subseteq \beta X$. بنابراین $\beta(\upsilon X) = \beta X$. به‌علاوه، روشن است که X فشردهٔ حقیقی است اگر و تنها اگر $X = \upsilon X$. همچنین ثابت می‌شود که υX بزرگترین زیرفضای βX است که X در آن C ــ نشانده است. از آنجا که X در υX یک C ــ نشانده و υX هم در $\upsilon(\upsilon X)$ یک C ــ نشانده است، پس X در $\upsilon(\upsilon X)$ یک C ــ نشانده خواهد بود. از این‌رو، $\upsilon(\upsilon X) \subseteq \upsilon X$. از طرفی، آشکار است که $\upsilon X \subseteq \upsilon(\upsilon X)$. بنابراین $\upsilon(\upsilon X) = \upsilon X$، یعنی υX فشردهٔ حقیقی است. اکنون اگر فرض کنیم $X \subseteq T \subseteq \beta X$، آن‌گاه می‌توان دید که T در $T \cup (\upsilon X)$ یک C ــ نشانده است. بنابراین اگر T فشردهٔ حقیقی باشد، آن‌گاه باید داشته باشیم $T = T \cup (\upsilon X)$ و در نتیجه $\upsilon X \subseteq T$. به این ترتیب υX کوچکترین مجموعهٔ فشردهٔ حقیقی بین βX و X است.

در قضیهٔ زیر، گزاره‌های «الف»، «ب» و «پ» به‌ترتیب کارهای کوبنسکی[1] در [63]، وولی[2] در [93] و شیروتا[3] در [78] هستند.
قضیه فرض کنیم X در T چگال باشد. در این صورت، احکام زیر معادل‌اند:

(الف) هر نگاشت پیوسته از X به فضای فشردهٔ حقیقی Y، دارای یک توسیع پیوسته از T به Y است؛

(ب) X در T یک C ــ نشانده است؛

(پ) اگر $\bigcap_{n=۱}^{\infty} Z_n = \varnothing$، آن‌گاه $\bigcap_{n=۱}^{\infty} \mathrm{cl}_T(Z_n) = \varnothing$.

(ت) $\mathrm{cl}_T \bigcap_{n=۱}^{\infty} (Z_n) = \bigcap_{n=۱}^{\infty} \mathrm{cl}_T(Z_n)$؛

(ث) برای هر $p \in T$، یک z ــ فراپالایهٔ حقیقی یکتا چون $\mathcal{F}$ وجود دارد که $\mathcal{F} \to p$؛

(ج) $X \subseteq T \subseteq \upsilon X$؛

---

1) Kubenskii 2) Vulih 3) Shirota

(چ) $vT = vX$.

با استفاده از قضیهٔ اخیر می‌توان نشان داد که تنها فضای فشردهٔ حقیقی که X در آن چگال و C ـ نشانده است، همان vX (با تقریب همسانریختی) است. همچنین، به‌سادگی می‌توان دید که نگاشت $f \to f^v$ که f^v توسیع f روی vX است، یکریختی از $C(X)$ به‌روی $C(vX)$ است، یعنی $C(X) \cong C(vX)$. پیداست که اگر $f \in C^*$، آن‌گاه $f^v = f^\beta|_{vX}$.

کاتتف[1] ([59]) ثابت کرد که هر مجموعهٔ بسته در یک فضای فشردهٔ حقیقی، فشردهٔ حقیقی است. شیروتا ([75]) نتایج مهمی را در این زمینه به‌دست آورد. از جمله، نشان داد که حاصلضرب فضاهای فشردهٔ حقیقی، فشردهٔ حقیقی است؛ اگر X یک فضای فشردهٔ حقیقی و هر نقطه‌اش G_δ باشد، آن‌گاه هر زیرفضای X فشردهٔ حقیقی است. ونجن[2] ([95]) ثابت کرد که اشتراک دلخواهی از زیرفضاهای فشردهٔ حقیقی، فشردهٔ حقیقی است. هنریکسن نیز در این زمینه کارهایی انجام داده است. مثلاً او نشان داد که برای هر $f \in C(X)$ فضای $v_f(X) = \{p \in \beta X : \ f^*(p) \neq \infty\}$ یک فضای موضعاً فشرده و σ ـ فشرده است.

با توجه به آنچه که گفته شد، نقش ایدآل‌های ماکسیمال در شناسایی اکثر مفاهیم مطرح شده در $C(X)$ کاملاً برجسته است. از جملهٔ این مفاهیم که پیش از این نیز از آن سخن به میان آمد، z ـ ایدآل‌ها هستند. خوانندهٔ آشنا با $C(X)$ می‌داند که تقریباً در همهٔ مقالات مربوط به $C(X)$ ردِپایی از این مفهوم وجود دارد و به همین دلیل، ماهیت جبری آن در جبر مجرد به‌ویژه حلقه‌های تعویض‌پذیر نیز مورد توجه است. یکی از خواص بسیار کمیاب $C(X)$ که به ایدآل‌های ماکسیمال ارتباط دارد این است که هر ایدآل اول آن در یک ایدآل ماکسیمال یکتا قرار می‌گیرد؛ به عبارت دقیق‌تر برای هر ایدآل اول P در $C(X)$ یک نقطهٔ یکتای $p \in \beta X$ وجود دارد که $O^p \subseteq P \subseteq M^p$. خاصیت مشمول بودنِ ایدآل‌های اول در ایدآل ماکسیمال یکتا همواره مورد توجه بوده است. چنین حلقه‌هایی را حلقه‌های گلفاند یا pm ـ حلقه می‌گویند و به‌طور جداگانه مطالعاتی روی آن‌ها صورت گرفته است. در ارتباط با ایدآل‌های ماکسیمال $C(X)$، گزاره‌های با اهمیتی وجود دارد که از آن جمله می‌توان به موارد زیر اشاره کرد.

- X یک P ـ فضا است اگر و تنها اگر هر ایدآل اول در $C(X)$ ماکسیمال باشد.
- X یک تقریباً P ـ فضا است اگر و تنها اگر عناصر هر ایدآل ماکسیمال $C(X)$ مقسوم‌علیه صفر باشند.
- X یک F ـ فضا است اگر و تنها اگر مجموعهٔ ایدآل‌های اول مشمول در یک ایدآل ماکسیمال، تشکیل یک زنجیر بدهد.

مفهوم دیگری که اخیراً در مبحث $C(X)$ مطرح و سپس به حلقه‌های دلخواه تعمیم داده شده است، رتبهٔ یک ایدآل ماکسیمال است. می‌گوییم رتبهٔ ایدآل ماکسیمال M برابر با n است هرگاه

1) Katetov 2) Wenjen

تعداد ایدآل‌های اول مینیمال مشمول در M برابر با n باشد. به نظر می‌رسد که این مفهوم اول بار در [49] معرفی و مورد بررسی قرار گرفت. مفهوم متناظر با رتبهٔ ایدآل‌های ماکسیمال در $C(X)$، مفهوم رتبهٔ نقاط βX نسبت به X است که سابقهٔ آن به کمی پیش‌تر برمی‌گردد ([1] را ببینید). از سوی دیگر، با الهام از تعاریف معادل فشرده‌سازی حقیقی، طبق معمول مفاهیم دیگری از جمله μ ـ فشرده، ψ ـ فشرده، ∞ ـ فشرده و غیره زاییده شدند که همهٔ آن‌ها در ارتباط نزدیک با ایدآل‌های ماکسیمال $C(X)$ هستند. خواننده می‌تواند مطالعهٔ این مفاهیم و ویژگی‌های آن‌ها را در [43]، [67]، [56] و [2] پی‌گیری کند.

۶. z° ـ ایدآل‌ها

در حلقه‌های کاهشی، $z^\circ-$ ایدآل‌ها دستهٔ خاصی از z ـ ایدآل‌ها هستند که در دهه‌های اخیر به‌ویژه در مبحث حلقه‌های توابع پیوسته مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. اولین ردِپای جدی این مفهوم را می‌توان در فضاهای ریس[1] (فضای برداری مشبکه) تحت عنوان d ـ ایدآل در [53]، [54] و [55] مشاهده کرد؛ هرچند که پیش‌تر از آن در [21]، [22]، [24]، [66] و [52] با عناوین دیگری مورد اشاره قرار گرفته بودند. فرض کنیم که L یک فضای ریس باشد، $S \subseteq L$ و $S^d = \{a \in L : \ |a| \wedge |s| = \circ \ \forall s \in S\}$. ایدآل I را o ـ ایدآل (ایدآل مرتب) می‌نامیم هرگاه از $|f| \leq |g|$ و $g \in I$ نتیجه شود $f \in I$. بر اساس تعریفی که در [53] آمده است، o ـ ایدآل I یک d ـ ایدآل نامیده می‌شود در صورتی که از $f \in I$، $g \in L$ و $\{g\}^{dd} = \{f\}^{dd}$ نتیجه شود $g \in I$. افزون بر این، در [53]، [54] و [55] نشان داده شده است که این تعریف معادل است با این‌که بگوییم o ـ ایدآل I در L یک d ـ ایدآل است اگر و تنها اگر از $f \in I$ نتیجه شود $\{f\}^{dd} \subseteq I$. به‌سادگی دیده می‌شود که اشتراک d ـ ایدآل‌ها یک d ـ ایدآل است، اما جمع دو d ـ ایدآل لزوماً یک d ـ ایدآل نیست. در این سه مقاله، $C(X)$ به‌عنوان فضای ریس در نظر گرفته شده و ثابت شده است که مجموع هر دو d ـ ایدآل در $C(X)$ یک d ـ ایدآل است اگر و تنها اگر X یک شبه‌F ـ فضا باشد، یعنی فضایی که در آن هر متمم ـ صفر مجموعهٔ چگال یک C^* ـ نشانده است. همچنین در این مقالات، نتایج دیگری در مورد این ایدآل‌ها وجود دارد که از آن جمله می‌توان به موارد زیر اشاره کرد.

- هر o ـ ایدآل I در $C(X)$ یک d ـ ایدآل است اگر و تنها اگر از $f \in I$، $g \in C(X)$ و $\overline{\operatorname{int}_X Z(f)} = \overline{\operatorname{int}_X Z(g)}$ نتیجه شود $g \in I$.
- $C(X)$، d ـ منظم است اگر و تنها اگر برای هر $f \in C(X)$ یک $g \in C(X)$ موجود باشد به‌طوری که $\overline{X \setminus Z(f)} = \overline{\operatorname{int}_X Z(g)}$. منظور از d ـ منظم آن است که هر d ـ ایدآل اول در $C(X)$ یک ایدآل اول مینیمال باشد. به‌عنوان مثال اگر X یک فضای متری باشد، $C(X)$

1) Riesz spaces

یک حلقهٔ d ـ منظم است.

- X شبه F ـ فضا است اگر و تنها اگر برای هر $Z_۱, Z_۲ \in Z(X)$ که $\mathrm{int}_X Z_۱ \cap \mathrm{int}_X Z_۲ = \varnothing$، مجموعه‌های $\mathrm{int}_X Z_۱$ و $\mathrm{int}_X Z_۲$ کاملاً مجزا شده باشند.

مفهوم d ـ منظم به‌طور مستقل در [1]، [19] و [50] با عناوین دیگری مورد توجه قرار گرفت، به‌ویژه در [19] این مفهوم با نام m ـ فضا به‌تفصیل مورد بررسی قرار گرفته و نتایج دیگری به‌دست آمده است که در انتهای این بخش به آن‌ها اشاره خواهد شد.

چون در f ـ جبرهای نیم‌اول، $|a| \wedge |b| = ۰$ معادل است با $ab = ۰$ و نیز به این دلیل که $\{a\}^d = \mathrm{Ann}(a)$، می‌توان در حلقه‌های کاهشی، d ـ ایدآل I را چنین تعریف کرد که برای هر $a \in I$ داشته باشیم $\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(a)) \subseteq I$. در [69]، این تعریف مبنا قرار گرفته و معادل‌های زیر برای آن به‌دست آمده است. متذکر می‌شویم که اگر $S \subseteq R$، آن‌گاه $V(S) = \{P \in \mathrm{Spec}(R) :\ S \subseteq P\}$، $D(S) = \mathrm{Spec}(R) \setminus V(S)$، $V_۰(S) = V(S) \cap \mathrm{Min}(R)$ و $D_۰(S) = D(S) \cap \mathrm{Min}(R)$.

- در حلقهٔ کاهشی R گزاره‌های زیر معادل‌اند:

  الف) I یک d ـ ایدآل در R است؛

  ب) اگر $\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(y)) \subseteq \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(b))$ و $b \in I$، آن‌گاه $y \in I$؛

  پ) اگر $V_۰(y) = V_۰(b)$ و $b \in I$، آن‌گاه $y \in I$؛

  ت) اگر $V_۰(b) \subseteq V_۰(y)$ و $b \in I$، آن‌گاه $y \in I$.

با توجه به تعریف d ـ ایدآل، همهٔ عناصر یک d ـ ایدآل سره، لزوماً مقسوم‌علیه صفر هستند. چنین ایدآل‌هایی را غیرعادی می‌نامیم و در غیر این صورت آن را عادی می‌گوییم. در ارتباط با گزارهٔ اخیر، در [31] ثابت شده است که در حلقهٔ $C(X)$، ویژگی شبه F ـ فضا بودنِ X معادل با گزاره‌های جبری زیر است:

الف) هر ایدآل عادی و متناهی تولید شده در $C(X)$ یک ایدآل اصلی است؛

ب) اگر g مقسوم‌علیه صفر نباشد و $|g| \leq |f|$، آن‌گاه f مضربی از g است.

سپس در [69] ایدآل I در حلقهٔ تعویض‌پذیر و نیم‌اول R، ζ ـ ایدآل نام گرفت اگر از $D(\mathrm{Ann}(b_۱, \ldots, b_n)) \subseteq V(a)$ و $b_۱, \ldots, b_n \in I$ نتیجه شود $a \in I$. در این مقاله ضمن بررسی و مطالعهٔ این ایدآل‌ها، نتایج جالب توجهی به‌دست آمد که به چند مورد آن‌ها اشاره می‌کنیم.

- با این فرض که R یک حلقهٔ کاهشی باشد، گزاره‌های زیر معادل‌اند:

  الف) I یک ζ ـ ایدآل در R است؛

  ب) اگر $D_۰(\mathrm{Ann}(b_۱, \ldots, b_n)) \subseteq V_۰(a)$ و $b_۱, \ldots, b_n \in I$، آن‌گاه $a \in I$؛

  پ) اگر $V_۰(b_۱, \ldots, b_n) \subseteq V_۰(a)$ و $b_۱, \ldots, b_n \in I$، آن‌گاه $a \in I$؛

  ت) اگر $b_۱, \ldots, b_n \in I$، آن‌گاه $\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(b_۱, \ldots, b_n)) \subseteq I$.

همچنین نشان داده شد که در هر حلقهٔ کاهشی، ایدآل‌های اول مینیمال، ζ ـ ایدآل‌اند و اشتراک دلخواهی از ζ ـ ایدآل‌ها نیز یک ζ ـ ایدآل است. در این مرجع ثابت شد که در حلقه‌های کاهشی، هر ζ ـ ایدآل یک d ـ ایدآل است و در حلقهٔ $C(X)$ عکس این مطلب نیز درست است. علاوه بر آن، ایدآل‌های اول مینیمال روی یک d ـ ایدآل نیز d ـ ایدآل هستند. همچنین نشان داده شد که در حلقهٔ کاهشی R، هر d ـ ایدآل یک z ـ ایدآل است اگر و تنها اگر هر ζ ـ ایدآل، یک z ـ ایدآل باشد و هر دوی این‌ها معادل هستند با این‌که $Jac(R) = (\circ)$. در [4] تعمیمی از این حکم ارائه شده است که در انتهای این بخش به آن اشاره خواهیم کرد. به این ترتیب، در $C(X)$ هر d ـ ایدآل یک z ـ ایدآل است و در [13] ثابت شد که عکس این موضوع در $C(X)$ فقط وقتی برقرار است که فضای X تقریباً P ـ فضا باشد. می‌دانیم برای هر ایدآل I در حلقهٔ R کوچکترین z ـ ایدآل شامل I وجود دارد، اما این حکم در مورد ζ ـ ایدآل‌ها درست نیست. در همان مرجع [69] ثابت شد که برای هر ایدآل غیرعادی I در R، کوچکترین ζ ـ ایدآل شامل I وجود دارد اگر و تنها اگر حلقهٔ R دارای این ویژگی باشد که برای هر ایدآل متناهی تولید شدهٔ غیرعادی J داشته باشیم $\mathrm{Ann}(J) \neq (\circ)$.

در گروه ریاضی دانشگاه اهواز، با الهام از تعریف z ـ ایدآل، بدون آگاهی از تعریف d ـ ایدآل، مفهوم z° ـ ایدآل به این صورت بیان شد که ایدآل I در $C(X)$ را یک z° ـ ایدآل می‌گوییم هرگاه از $f \in I$ و $\mathrm{int}_X Z(f) = \mathrm{int}_X Z(g)$ بتوان نتیجه گرفت $g \in I$. سپس در [1] مفاهیمی قوی‌تر از z ـ ایدآل‌ها و z° ـ ایدآل‌ها به‌نام z ـ ایدآل‌های قوی و z° ـ ایدآل‌های قوی (sz ـ ایدآل و sz° ـ ایدآل) تعریف شد. در $C(X)$ این ایدآل‌ها به‌ترتیب بر z ـ ایدآل‌ها و z° ـ ایدآل‌ها منطبق‌اند، ولی در هر حلقه‌ای لزوماً چنین نیست. گرچه بعداً معلوم شد که مفاهیم z° ـ ایدآل و sz° ـ ایدآل به‌ترتیب همان d ـ ایدآل و ζ ـ ایدآل هستند، اما به‌دلیل ماهیت طبیعی این تعاریف در حلقهٔ $C(X)$، ما نمادهای z° ـ ایدآل و sz° ـ ایدآل را به‌جای d ـ ایدآل و ζ ـ ایدآل به‌کار برده‌ایم. پس از آن، نماد P_a که عبارت از اشتراک همهٔ ایدآل‌های اول مینیمال شامل a است، اساس تعریف z° ـ ایدآل قرار گرفت و این نوع ایدآل‌ها به‌صورت توپولوژیکی در [13] شناسایی شدند. ایدآل‌های P_a را که z° ـ ایدآل نیز هستند، z° ـ ایدآل پایه‌ای می‌نامیم و در [16] نشان داده شد که هر z° ـ ایدآل در $C(X)$ را می‌توان به‌صورت مجموعی از این z° ـ ایدآل‌های پایه‌ای نوشت که به‌زودی به آن اشاره می‌کنیم.

بخشی از مطالعات انجام شده در گروه ریاضی دانشگاه اهواز در خصوص z° ـ ایدآل‌ها در $C(X)$ و به‌طور کلی در حلقه‌های کاهشی را باید در [1]، [14]، [13]، [19]، [16] و [4] جستجو کرد. به‌عنوان نمونه، پاره‌ای از نتایج این مقالات را در زیر بیان می‌کنیم.

- در حلقهٔ $C(X)$ احکام زیر معادل‌اند:

  الف) I یک z° ـ ایدآل است؛

  ب) اگر $P_f = P_g$ و $f \in I$، آن‌گاه $g \in I$؛

پ) اگر $V_\circ(f) = V_\circ(g)$ و $f \in I$، آن‌گاه $g \in I$؛

ت) اگر $\mathrm{Ann}(f) = \mathrm{Ann}(g)$ و $f \in I$، آن‌گاه $g \in I$؛

ث) $\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(f)) \subseteq I$ برای هر $f \in I$؛

ج) $P_f \subseteq I$ برای هر $f \in I$.

- در حلقهٔ $C(X)$ احکام زیر برقرارند:

الف) اگر $I \subseteq C(X)$ غیرعادی باشد، آن‌گاه

$$\sum_{f\in I} P_f = \{g \in C(X) :\ \exists f \in I \ \ni\ g \in P_f\}$$

کوچکترین z° ـ ایدآل شامل I است؛

ب) اگر X یک شبه F ـ فضا باشد، آن‌گاه $\sum_{P_f \subseteq I} P_f = \{g \in C(X) :\ P_g \subseteq I\}$ بزرگترین z° ـ ایدآل مشمول در I است؛

پ) اگر X یک شبه F ـ فضا و P و Q دو ایدآل اول (اولیه) در $C(X)$ باشند که در یک زنجیر قرار ندارند، آن‌گاه $P + Q$ یک z° ـ ایدآل اول است؛

ت) فرض کنیم X یک شبه F ـ فضا و I و Q دو ایدآل در $C(X)$ باشند که در یک زنجیر قرار ندارند. اگر I یک z° ـ ایدآل و Q یک ایدآل اولیه باشد، آن‌گاه $I + Q$ یک z° ـ ایدآل اول است.

- در هر حلقه‌ای هر sz° ـ ایدآل یک z° ـ ایدآل است، ولی عکس آن در حالت کلی درست نیست.

- در حلقهٔ کاهشی R احکام زیر برقرارند:

الف) اگر R دارای ویژگی پوچساز قوی باشد (یعنی برای هر ایدآل متناهی تولید شدهٔ I در R یک $a \in I$ موجود باشد که $\mathrm{Ann}(I) = \mathrm{Ann}(a)$)، آن‌گاه مفاهیم z° ـ ایدآل و sz° ـ ایدآل با هم معادل‌اند؛

ب) I یک sz° ـ ایدآل در R است اگر و تنها اگر $I[x]$ یک sz° ـ ایدآل در $R[x]$ باشد؛

پ) اگر R کاهشی باشد، آن‌گاه حلقهٔ $R[x]$ دارای ویژگی پوچساز قوی است و از این‌رو، در این حلقه‌ها sz° ـ ایدآل‌ها و z° ـ ایدآل‌ها هم‌ارزند.

- در هر حلقهٔ R احکام زیر برقرارند:

الف) هر z° ـ ایدآل یک z ـ ایدآل است؛

ب) $\mathrm{Jac}(R)=\mathrm{rad}(R)$؛

پ) $M_A \subseteq P_A$ برای هر زیرمجموعهٔ متناهی A در R؛

ت) هر sz° ـ ایدآل یک sz ـ ایدآل است؛

ث) $M_a \subseteq P_a$ برای هر $a \in R$.

در این بخش چندین کاربرد از z° ـ ایدآل‌ها را که در برقراری ارتباط میان ویژگی‌های توپولوژیکی و جبری مؤثر هستند، مشاهده کردیم. در پایان، برای آن‌که اهمیت z° ـ ایدآل‌ها را به‌عنوان پل ارتباطی بیشتر دریابیم، به چند نتیجه از [19] می‌پردازیم. پیش‌تر دیدیم که ایدآل‌های اول مینیمال، z° ـ ایدآل هستند. z° ـ ایدآل‌های اول در $C(X)$ نیز وجود دارند که اول مینیمال نیستند. همچنین دیدیم که هر z° ـ ایدآل در $C(X)$ غیرعادی است ولی عکس آن حتی برای z ـ ایدآل‌های اول غیرعادی درست نیست. با توجه به این موارد، پرسش‌های زیر به‌طور طبیعی مطرح‌اند:

۱ــ چه موقع هر z° ـ ایدآل در $C(X)$، ایدآل اول مینیمال است؟

۲ــ در چه صورت z ـ ایدآل غیرعادی در $C(X)$، یک z° ـ ایدآل است؟

۳ــ برای کدام فضای X، هر z ـ ایدآل اول غیرعادی در $C(X)$، یک z° ـ ایدآل است؟

۴ــ برای کدام فضای X، هر ایدآل اول غیرعادی در $C(X)$، یک z° ـ ایدآل است؟

در [13] ثابت شده است که در حلقه‌های کاهشی با ویژگی A، هر ایدآل ماکسیمال غیرعادی یک z° ـ ایدآل است. همچنین در این مقاله نشان داده شده است که در هر حلقهٔ کاهشی، ایدآل‌های اول غیرعادی، ایدآل‌های اول مینیمال هستند اگر و تنها اگر آن حلقه دارای ویژگی A بوده و هر z° ـ ایدآل اول در آن یک ایدآل اول مینیمال باشد و این دو معادل با این است که برای هر عنصر حلقه مانند a، $\mathrm{Ann}(a)$ یک z° ـ ایدآل پایه‌ای باشد. در ارتباط با پرسش اول، در [19] دو ویژگی توپولوژیکی معادل با این‌که هر z° ـ ایدآل در $C(X)$ یک ایدآل اول مینیمال باشد ارائه شده است. این دو ویژگی عبارتند از این‌که برای هر صفر ـ مجموعهٔ Z در X، صفر ـ مجموعهٔ F در X وجود داشته باشد که $\mathrm{cl}_X\mathrm{int}_X Z = \mathrm{cl}_X(X \setminus F)$ و یا برای هر صفر ـ مجموعهٔ Z در X، صفر ـ مجموعهٔ F در X وجود داشته باشد که $Z \cup F = X$ و $\mathrm{int}_X(Z \cap F) = \varnothing$. این دو ویژگی بنا به نتیجه‌ای در [48]، معادل با این است که فضای ایدآل‌های اول مینیمال $C(X)$ با توپولوژی زاریسکی فشرده باشد و یا بنا به آن‌چه پیش‌تر گفته شد، $C(X)$، d ـ منظم باشد. در مورد سه پرسش دیگر، نتایج زیر در [19] به‌دست آمده است:

- هر z ـ ایدآل غیرعادی در $C(X)$ یک z° ـ ایدآل است اگر و تنها اگر X تقریباً P ـ فضا باشد.
- هر z ـ ایدآل اول غیرعادی در $C(X)$ یک z° ـ ایدآل است اگر و تنها اگر X تقریباً P ـ فضای ضعیف باشد، یعنی فضایی که در آن، برای هر دو صفر ـ مجموعهٔ Z و F در X با شرط $\mathrm{int}_X Z \subseteq \mathrm{int}_X F$، صفر ـ مجموعهٔ دیگری مانند E با درون تهی موجود باشد که $Z \subseteq F \cup E$. هر تقریباً P ـ فضا یک تقریباً P ـ فضای ضعیف است. فضاهای متری نیز تقریباً P ـ فضای ضعیف هستند.
- هر ایدآل اول غیرعادی در $C(X)$ یک z° ـ ایدآل است اگر و تنها اگر X یک ∂ ـ فضا باشد، یعنی فضایی که در آن مرز هر صفر ـ مجموعه، در یک صفر ـ مجموعه با درون تهی قرار می‌گیرد. فضاهای متری و کلی‌تر از آن، فضاهای کاملاً نرمال از این نوع هستند.

۷. پل‌های ارتباطی دیگر

ایدآل‌های محدب: همان‌گونه که پیش‌تر نیز دیدیم ایدآل‌ها مناسب‌ترین ابزارِ برقراری ارتباط میان ویژگی‌های توپولوژیکی فضای X و خواص جبری حلقهٔ $C(X)$ هستند. از این‌رو، طبیعی است تا به ایدآل‌های دیگری که در حلقه‌ها مورد توجه‌اند نگاهی بیندازیم و به بررسی رفتار و شخصیت آن‌ها در $C(X)$ بپردازیم. ایدآل‌های محدب و مطلقاً محدب از دیرباز در حلقه‌های مشبکه‌ای مطرح هستند. جالب است بدانیم این نوع ایدآل‌ها معرف نوع خاصی از فضاهای توپولوژیک به‌نام F–فضاها هستند که اندکی پیش‌تر به آن‌ها پرداختیم. در یک حلقهٔ جزئاً مرتب R، ایدآل I را محدب گوییم هرگاه برای هر $a, b \in R$، شرایط $0 \leq a \leq b$ و $b \in I$ نتیجه دهد $a \in I$. در صورتی که حلقهٔ جزئاً مرتب R یک مشبکهٔ مرتب نیز باشد، آن‌گاه ایدآل I در R را مطلقاً محدب (که همان o ــ ایدآل در بخش ٦ است) می‌نامیم هرگاه $|a| \leq |b|$ و $b \in I$، نتیجه دهند $a \in I$. آشکارا هر ایدآل مطلقاً محدب، یک ایدآل محدب است و به‌سادگی دیده می‌شود که ایدآل‌های اول و z ــ ایدآل‌ها در $C(X)$ مطلقاً محدب هستند. در [44] ثابت شده است که مجموع دو ایدآل مطلقاً محدب در هر حلقهٔ مشبکه‌ای مرتب، یک ایدآل مطلقاً محدب است، ولی مجموع دو ایدآل محدب و حتی مجموع یک z ــ ایدآل و یک ایدآل محدب لزوماً محدب نیست. در همین مرجع همچنین نشان داده شده است که در $C(X)$ ایدآل‌های محدب شامل یک ایدآل اول تشکیل زنجیر می‌دهند. F ــ فضاها در [43] به‌طور مفصل مورد مطالعه قرار گرفته و شرایط جبری معادل با این فضاها به‌دست آمده است؛ از آن جمله می‌توان گفت که X یک F ــ فضا است وقتی هر ایدآل $C(X)$ مطلقاً محدب باشد یا وقتی ایدآل‌های اول $C(X)$ مشمول در یک ایدآل ماکسیمال تشکیل زنجیر دهند و یا زمانی که هر ایدآل با مولد متناهی در $C(X)$، اصلی باشد. ویژگی جبری دیگری که معادل با F ــ فضاها است، حسابی بودنِ حلقهٔ $C(X)$ است. یک حلقه را حسابی می‌نامیم هرگاه ایدآل‌های آن نسبت به «جمع» و «اشتراک» توزیع‌پذیر باشند، یعنی اگر I، J و K سه ایدآل باشند، آن‌گاه $I \cap (J+K) = I \cap J + I \cap K$. جالب است بدانیم که خانوادهٔ ایدآل‌های مطلقاً محدب، این خاصیت را دارد؛ این موضوع در [23] برای مشبکه‌ها ثابت شده است. اکنون اگر X یک F ــ فضا باشد، آن‌گاه هر ایدآل $C(X)$ مطلقاً محدب است و از این‌رو، $C(X)$ حسابی است. عکس این موضوع نیز درست است: اگر $C(X)$ حسابی باشد، آن‌گاه X یک F ــ فضا است. این واقعیت در [29] و [3] به اثبات رسیده است.

ایدآل‌های اساسی: وقتی در حلقه‌های تعویض‌ناپذیر، بُعد گلدی مورد مطالعه قرار می‌گیرد، پای ایدآل‌هایی مانند ایدآل‌های یکنواخت، اساسی و ساکلِ حلقه به بحث باز می‌شود. ایدآل E را در حلقهٔ R اساسی می‌نامیم اگر هر ایدآل ناصفر دیگر را به‌طور غیربدیهی قطع کند و ایدآل U در R را یکنواخت می‌گوییم اگر هر دو زیرایدآل ناصفرِ U به‌طور غیربدیهی یکدیگر را قطع کنند. ساکلِ حلقه عبارت است از اشتراک ایدآل‌های اساسی و یا مجموع ایدآل‌های یکنواختِ حلقه. این ایدآل‌ها در $C(X)$ نمایش‌های زیبایی در [7]، [8] و [58] پیدا کرده‌اند، به‌گونه‌ای که از طریق آن‌ها ارتباط‌های

مهمی به‌دست آمده است. در [58]، ساکل و ایدآل‌های مینیمال $C(X)$ بررسی و نشان داده شد که موجوداتی کاملاً توپولوژیکی هستند. در واقع، ایدآل‌های مینیمال $C(X)$ و ساکل آن به‌ترتیب به‌صورت زیر شناسایی شدند:

$$m_x = \{f \in C(X) : X \setminus Z(f) = \{x\}\} ,$$

$$C_F(X) = \{f \in C(X) : \text{متناهی است } X \setminus Z(f)\}.$$

در [7] نشان داده شده است که ایدآل‌های یکنواخت $C(X)$، همان ایدآل‌های مینیمال $C(X)$ هستند و ایدآل‌های اساسی $C(X)$ شامل بخشی از ایدآل‌های ثابت و همهٔ ایدآل‌های آزاد $C(X)$ است که به بیانی طنزآمیز می‌توان گفت ایدآل‌های اساسی آن طور که باید آزاد نیستند. در حقیقت، ایدآل E در $C(X)$ اساسی است اگر و تنها اگر $\cap Z[E] = \cap_{f\in E} Z(f)$ نه لزوماً تهی بلکه درونِ تهی داشته باشد. از این‌رو، این ایدآل‌ها برخلاف ایدآل‌های ثابت $C(X)$، دارای دو شخصیت جبری و توپولوژیکی‌اند و به همین دلیل، با استفاده از آن‌ها می‌توان پل‌های ارتباطی برقرار کرد. به‌کمک این نتیجه، به بسیاری از ایدآل‌های اساسی در $C(X)$ دسترسی خواهیم داشت. با توجه به این شناسه، ایدآل اصلی (f) در $C(X)$ وقتی و فقط وقتی اساسی است که $\operatorname{int}_X Z(f) = \varnothing$ و از این‌رو، تمام ایدآل‌های اصلی $C(X)$ غیراساسی هستند اگر و تنها اگر X تقریباً P ـ فضا باشد. همهٔ ایدآل‌های اول غیرماکسیمال در $C(X)$ به‌جز آن‌هایی که با یک خودتوان تولید می‌شوند و همچنین همهٔ ایدآل‌های آزاد $C(X)$ اساسی‌اند و به همین ترتیب، به‌سادگی می‌توان ایدآل‌های اساسی و غیراساسی $C(X)$ را از یکدیگر باز شناخت. از آنجا که $\bigcap Z[C_F(X)] = \bigcap_{f\in C_F(X)} Z(f)$ عبارت است از مجموعهٔ همهٔ نقاط نامنفرد X، به‌سادگی دیده می‌شود که ساکل $C(X)$ اساسی است اگر و تنها اگر مجموعهٔ نقاط منفرد X در X چگال باشد. این گزاره، فضاهای توپولوژی از این دست را به‌طور جبری شناسایی می‌کند. با توجه به شناسهٔ این ایدآل‌ها، بُعد گلدی حلقه $C(X)$ در [7] نیز بررسی شده است. وقتی بُعد گلدی $C(X)$ متناهی باشد، معادل با متناهی بودن فضای X است، در غیر این صورت برابر با عدد سوسلین فضای توپولوژیک X است. عدد سوسلین یا عدد حجره‌ای[1] فضای X عبارت از کوچکترین کاردینال α است به‌گونه‌ای که هر خانواده از زیرمجموعه‌های باز و مجزای X دارای کاردینالی کوچکتر یا مساوی α باشد. بحث ترکیب ایدآل‌ها که پیش‌تر نیز مورد بررسی قرار گرفته است، در مورد این ایدآل‌ها نیز مطرح است. آشکار است که مجموع ایدآل‌های اساسی در هر حلقه، اساسی است، ولی اشتراک ایدآل‌های اساسی لزوماً اساسی نیست مگر آن‌که اشتراک تعداد متناهی مدِ نظر باشد. در [8] ثابت شده است که اشتراک هر تعداد ایدآل اساسی در $C(X)$ اساسی است اگر و تنها اگر $C_F(X)$ اساسی باشد؛ اگر و تنها اگر مجموعهٔ نقاط منفرد X در X چگال باشد ([58]).

1) Cellularity

ولی وقتی که با اشتراک شمارایی از ایدآل‌های اساسی سروکار داشته باشیم، وضع به‌گونه‌ای دیگر است و از این طریق می‌توان نوع دیگری از فضاها را شناسایی کرد: فضاهایی که در آن‌ها هر زیرمجموعه از نوع اول[1]، هیچ‌جا چگال است. مجموعهٔ A را از نوع اول گوییم اگر $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ که در آن، هر A_n هیچ‌جا چگال است. در [8] ثابت شده است که اشتراک هر تعداد شمارا از ایدآل‌های اساسی یک ایدآل اساسی است اگر و تنها اگر هر زیرمجموعه از نوع اول در X، هیچ‌جا چگال باشد.

چند ایدآل خاص: اشتراک ایدآل‌های ماکسیمال آزاد و یا اشتراک همهٔ ایدآل‌های آزاد $C(X)$ نیز اشتراکی از ایدآل‌های اساسی $C(X)$ است و از این‌رو، ایدآل‌های $C_K(X)$ و $C_\infty(X)$ نیز اشتراک‌هایی از این دست هستند. این ایدآل‌ها ابتدا در [60] و [61] معرفی شدند. $C_K(X)$ عبارت است از اشتراک همهٔ ایدآل‌های آزاد $C(X)$ و همین طور اشتراک همهٔ ایدآل‌های آزاد $C^*(X)$ و $C_\infty(X)$ برابر با اشتراک همهٔ ایدآل‌های ماکسیمال در $C^*(X)$ است. در این مراجع، این دو ایدآل به‌طور توپولوژیکی به‌صورت زیر شناسایی شده‌اند:

$$C_K(X) = \{f \in C(X) : \text{فشرده است } cl_X(X \setminus Z(f))\},$$

$$C_\infty(X) = \{f \in C(X) : \text{فشرده است } \text{برای هر } n \in \mathbb{N} \; \{x \in X : |f(x)| \geq \tfrac{1}{n}\}\}.$$

از تعریف‌ها چنین برمی‌آید که $C_K(X) \subseteq C_\infty(X)$ و $C_K(X)$ هم ایدآلی در $C(X)$ و هم ایدآلی در $C^*(X)$ است، حال آن‌که $C_\infty(X)$ ایدآلی در $C^*(X)$ است و لزوماً ایدآل $C(X)$ نیست. این‌که چه موقع $C_\infty(X)$ ایدآلی در $C(X)$ هم هست، در [17] مورد بررسی قرار گرفته است. در واقع، $C_\infty(X)$ یک ایدآل $C(X)$ است اگر و تنها اگر هر زیرمجموعهٔ موضعاً فشردهٔ X کراندار باشد، به این معنا که هر $f \in C(X)$ روی آن مجموعه کراندار باشد. در حالت خاص وقتی فضای X گسسته است، $C_K(X)$ برابر با اشتراک ایدآل‌های ماکسیمال آزاد $C(X)$ است. این موضوع در [60] و [61] نشان داده شده و این پرسش را در پی داشته است که آیا این برابری در حالت کلی نیز برقرار است؟ در [43] ثابت شده است که این برابری به‌ازای فضاهای فشرده حقیقی درست است و با یک مثال دیده می‌شود که در حالت کلی درست نیست.

زمانی که به این ایدآل‌ها از دیدگاه اشتراک ایدآل‌های اساسی بنگریم، پرسش‌های دیگری نیز مطرح می‌شود. مثلاً چه موقع ایدآل‌های $C_K(X)$ و $C_\infty(X)$ به‌ترتیب در $C(X)$ و $C^*(X)$ اساسی هستند؟ در [8] ثابت شده است که اساسی بودن هر کدام از این ایدآل‌ها معادل است با این‌که فضای X تقریباً فشرده باشد، یعنی فضای هاسدورفی که هر زیرمجموعهٔ ناتهی و بازِ آن شامل یک مجموعهٔ باز ناتهی با بستار فشرده است. در همین مرجع، برابری‌های $C_K(X) = C_F(X)$ و $C_\infty(X) = C_F(X)$ نیز منجر به پیدایش فضاهای جدیدی می‌شود، فضاهایی که آن‌ها را شبه‌گسسته می‌گوییم، یعنی کاملاً منظم هاسدورف که در آن هر زیرمجموعهٔ فشرده دارای درون تهی

1) First cathegory

است. در حقیقت، ثابت می‌شود که $C_K(X) = C_F(X)$ اگر و تنها اگر X شبه‌فشرده باشد و $C_\infty(X) = C_F(X)$ اگر و تنها اگر X شبه‌گسسته بوده و مجموعهٔ نقاط منفرد X متناهی باشد. اگر $C_\psi(X)$ را مجموعهٔ توابع $f \in C(X)$ در نظر بگیریم که $\mathrm{cl}_X(X \setminus Z(f))$ شبه‌فشرده است و $I(X)$ را اشتراک ایدآل‌های ماکسیمال آزاد $C(X)$ قرار دهیم، آن‌گاه همان‌گونه که در [67] و [56] آمده است، $C_\psi(X)$ یک ایدآل $C(X)$ و تساوی‌های $C_K(X) = I(X)$، $C_\psi(X) = I(X)$ و $C_K(X) = C_\psi(X)$ ساختارهای مشخصی از X را ارائه خواهند داد. در شرایطی که این برابری‌ها رخ دهد فضای X را به‌ترتیب، μ ــ فشرده، η ــ فشرده و ψ ــ فشرده می‌گوییم. در [56] نشان داده می‌شود که $C_\psi(X) = M^{\beta X \setminus \nu X}$ و $I(X) = C_\psi(X) \cap C_\infty(X)$ و فشرده‌سازی‌هایی از این نوع را برای هر فضای X می‌توان بنا کرد که همگی زیرفضاهای βX هستند. در [15] ایدآل $C_\psi(X)$ شخصیت جدید و مهم‌تری از خود بروز می‌دهد. در آنجا ثابت شده است که $C_\psi(X)$ مؤلفهٔ همبندی تابع صفر در فضای $C_m(X)$ (یعنی $C(X)$ با m ــ توپولوژی) است. فشردگی در $C_m(X)$ نیز بررسی و نشان داده شده است که موضعاً فشردگی و σ ــ فشردگیِ $C_m(X)$ معادل با متناهی بودن فضای X است. در [2] فضای X، ∞ ــ فشرده خوانده می‌شود اگر $C_K(X) = C_\infty(X)$. پیش‌تر دیدیم که $C_\infty(X)$ لزوماً یک ایدآل در $C(X)$ نیست، ولی خود می‌تواند یک حلقه باشد. در همین مرجع نشان داده می‌شود که برای هر فضای کاملاً منظم و هاسدورف X، یک فضای موضعاً فشرده Y وجود دارد به‌طوری که $C_\infty(X) \cong C_\infty(Y)$. در صورتی که X و Y هر دو موضعاً فشرده باشند، $X \cong Y$ اگر و تنها اگر $C_\infty(X) \cong C_\infty(Y)$. به این ترتیب، برای مطالعهٔ حلقهٔ $C_\infty(X)$، کافی است فضای X را موضعاً فشرده اختیار کنیم. در این شرایط، X یک فضای ∞ ــ فشرده است اگر و تنها اگر هر ایدآل اول $C_\infty(X)$ ثابت باشد. کوچکترین ∞ ــ فشردهٔ شامل X را ∞ ــ فشرده‌سازی X گوییم و آن را با ∞X نشان می‌دهیم. ثابت می‌شود که $\infty X \subseteq \beta X$. میان فضای X و حلقهٔ $C_\infty(X)$ نیز می‌توان ارتباط برقرار کرد. در [2] ثابت می‌شود که $C_\infty(X)$ حلقهٔ منظم است اگر و تنها اگر فضای تیخونف X، ∞ ــ فشرده و P_∞ ــ فضا باشد، یعنی فضایی مانند X که $Z(f)$ برای هر $f \in C_\infty(X)$ باز باشد. همچنین ثابت می‌شود که حلقهٔ $C_\infty(X)$ دارای بُعد گلدی متناهی است اگر و فقط اگر تنها زیرمجموعه‌های موضعاً فشرده در فضای تیخونف X، مجموعه‌های متناهی باشند.

ایدآل‌های پاک: در انتهای این بخش، به حلقه‌های پاک[1] می‌پردازیم. عنصری از یک حلقه را پاک می‌نامیم اگر به‌صورت مجموع یک خودتوان و یک یکان[2] باشد. یک حلقه و یا زیرمجموعه‌ای از آن را پاک می‌نامیم اگر همهٔ عناصر آن پاک باشند. در [10] عناصر پاک حلقهٔ $C(X)$ به‌طور توپولوژیکی شناسایی شدند و ثابت شد که عنصر $f \in C(X)$ پاک است اگر و تنها اگر مجموعهٔ باز و بستهٔ U در X یافت شود که $Z(۱ - f) \subseteq U \subseteq X \setminus Z(f)$. با توجه به این شناسه، دیده می‌شود که $C(X)$ پُر از عناصر پاک است. علاوه بر خودتوان‌ها و یکان‌های $C(X)$، همهٔ توابعی که در شرط $f^{-۱}(\{-۱\}) = \varnothing$ و یا $|f| < ۱$ صدق کنند نیز پاک‌اند. به این ترتیب، برای هر تابع غیریکان و

---

1) Clean 2) Unit

غیرپوشای f، اگر مثلاً $f^{-1}(\{r\}) = \varnothing$، آن‌گاه $\frac{1}{r}f$ پاک است و نه‌تنها با کمک توابع غیرپوشا، بلکه برای هر تابع $f \in C(X)$، می‌توان عنصر پاک $\frac{f^2}{1+f^2}$ را ساخت. این شناسه همچنین نشان می‌دهد که حاصلضرب یک خودتوان و یک عنصر پاک و نیز مجموع یک خودتوان و یک عنصر پاک نامنفی در $C(X)$، همواره پاک است. در این مرجع ثابت شده است که پاک بودن حلقهٔ $C(X)$ معرف یک فضای شناخته شده در توپولوژی به‌نام فضای قویاً صفر بُعدی[1] است و آن، فضایی کاملاً منظم و هاسدورف است که برای هر دو زیرمجموعهٔ کاملاً مجزای A و B در آن، مجموعهٔ باز و بستهٔ U موجود باشد که $A \subseteq U \subseteq X \setminus B$. پاک بودنِ $C(X)$ و یا $C^*(X)$، وجود یک ایدآل اول پاک در $C(X)$، پاک بودن همهٔ عناصر مقسوم‌علیه‌های $C(X)$، و سرانجام اگر مجموعهٔ عناصر پاک در $C(X)$، زیرحلقهٔ $C(X)$ باشد، همه معادل با این است که فضای X قویاً صفر بُعدی است. پاک بودنِ $C_K(X)$ و $C_\infty(X)$ نیز در این مرجع مورد مطالعه قرار گرفته و ثابت شده است که پاک بودن هر کدام از این ایدآل‌ها معادل است با این‌که هر همسایگی فشرده از یک نقطهٔ $x \in X$، شامل مجموعهٔ باز و بستهٔ U باشد که $x \in U$. از این‌رو، در صورتی که X موضعاً فشرده باشد، این موضوع نشان می‌دهد $C_K(X)$ پاک است اگر و تنها اگر فضای X صفر بُعدی باشد؛ به عبارت دیگر، X دارای پایه‌ای متشکل از مجموعه‌های باز بسته باشد. در پایان، باید متذکر شویم که گرچه در حلقهٔ $C(X)$ عناصر ناپاک هم وجود دارد ولی تعداد آن‌ها نسبتاً اندک است و این حلقه در مجموع برای ما همواره پاک و منزه است.

مراجع

[1] A. R. Aliabad, *z°-ideals in $C(X)$*, Shahid Chamran university of Ahvaz, Ph.D. thesis, 1996.

[2] A. R. Aliabad, F. Azarpanah and M. Namdari, "Rings of continuous functions vanishing at infinity", *Comment. Math. Univ. Carolinae*, **45**(3)(2004), 519-533.

[3] A. R. Aliabad, F. Azarpanah and A. Taheri, "Relative z-ideals in commutative rings", submitted.

[4] A. R. Aliabad and R. Mohamadian, "On sz°-Ideals in Polynomial Rings", *Communications in Albebra*, **3**(2)(2011), 701-717.

[5] F. W. Anderson, 11A lattice characterization of completely regular G_δ-spaces", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **6**(1955), 757-765.

1) Strongly zero-dimensional

[6] M. Y. Antonovskij, D. V. Chudnovsky, G. V. Chudnovsky and E. Hewitt, "Rings of real-valued continuous functions II", *Math. Zeit.*, **176**(1981), 151-186.

[7] F. Azarpanah, "Essential ideals in $C(X)$", *Period. Math. Hungar.*, **31**(2)(1995), 105-112.

[8] F. Azarpanah, "Intersection of essential ideals in $C(X)$", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **125**(1997), 2149-2154.

[9] F. Azarpanah, "Algebraic properties of some compact spaces", *Real Anal. Exch.*, **25**(2000), 317-328.

[10] F. Azarpanah, "When is $C(X)$ a clean ring?", *Acta Math. Hungar.*, **94**(1-2)(2002), 53-58.

[11] F. Azarpanah and O. A. S. Karamzadeh, "Algebraic charactrizations of some disconnected spaces", *Italian J. pure & App. Math.*, **10**(2001), 9-20.

[12] F. Azarpanah, O. A. S. Karamzadeh and S. Rahmati, "$C(X)$ vs. $C(X)$ modulo its socle", *Colloquim Math.*, **111**(2008), 315-336.

[13] F. Azarpanah, O.A.S. Karamzadeh and A. Rezaei Aliabad, "On $z^o - ideals$ in $C(X)$", *Fundamenta Mathematicae*, **160**(1999), 15-25.

[14] F. Azarpanah, O.A.S. Karamzadeh and A. Rezaei Aliabad, "On ideals consisting entirely of zero divisors", *Communications in Algera*, **28**(2)(2000), 1061-1073.

[15] F. Azarpanah, F. Manshoor and R. Mohamadian, "Connectedness and compactness in $C_m(X)$", submitted.

[16] F. Azarpanah and R. Mohamadian, "$\sqrt{z}$-ideals and $\sqrt{z^\circ}$-ideals in $C(X)$", *Acta Math. Sin.*, **23**(6)(2007), 989-996.

[17] F. Azarpanah and T. Soundararajan, "When the family of functions vanishing at infinity is an ideal of $C(X)$", *Rocky. Mount. J. Math.*, **31**(4)(2001), 1133-1140.

[18] F. Azarpanah and A. Taheri, "Relative z-ideals in $C(X)$", *Topology Appl.*, **156**(2009), 1711-1717.

[19] F. Azarpanah and M. Karavan, "On nonregular ideals and z°-ideals in $C(X)$", *Cech. Math. J.*, **55**(130)(2005), 397-407.

[20] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Warsaw, 1932.

[21] S. J. Bernau, "Topologies on structure spaces of latico groups", *Pac. J. Math.*, **42**(1972), 557-568.

[22] A. Bigard, K. Keimel and S. Wolfenstein, *Groups et Anneaux Réticulés*, Lecture Notes in Mathematics **608**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1997.

[23] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, **25** (rev. ed.), 1948.

[24] A. S. Bondarev, "The presence of projections in quotient lineals of vector lattices", *Dokl. Akad. Nauk. UzSSR*, **8**(1974), 5-7.

[25] J. G. Brookshear, "On projective prime ideals in $C(X)$", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **69**(1978), 203-204.

[26] J. Bustamante and F. Montalvo, "Stone-Weierstrass theorems in $C^*(X)$", *J. Approx. Theory*, **107**(2000), 143-159.

[27] E. Cech, "On bicompact spaces", *Ann. of Math.*, **38**(1937), 823-844.

[28] E. W. Chittenden, "On general topology and the relation of the properties of the class of all continuous functions to the properties of space", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **31**(1929), 290-321.

[29] W. H. Cornish, *Abelian Ricart-semirings*, Thesis, 1970, Flinder University, South Australia.

[30] H. G. Dales and W. H. Woodin, *Super-Real Field: Totally Ordered Field with Additional Structure*, London Mthematical Society Monographs, 1996.

[31] F. Dashiell, A. Hager and M. Henriksen, "Order-Cauchy completions of rings and vector lattices of continuous functions", *Can. J. Math.*, **XXXII**, no. 3(1980), 657-685.

[32] G. De Marco, "On countably generated z-ideals of $C(X)$", ibid. **31**(1972), 574-576.

[33] J. Dieudonne, "Review of rings of real-valued continuous functions I", *Mathematical Reviews*, **10**(1949), 126-127.

[34] R. Engelking, *General topology*, PWN-Polish Scientific Publishing, 1977.

[35] A. A. Estaji and O. A. S. Karamzadeh, "On $C(X)$ modulo its socle", *Comm. Algebra*, **31**(4)(2003), 1561-1571.

[36] I. Garrido and F. Montalvo, "Algebraic properties of the uniform closure of spaces of continuous functions", Papers on general topology an applications (Amsterdam, 1994), 101-107, *Ann. New York Acad. Sci.*, **788**, New york Acad. Sci., New York, 1996.

[37] I. Gelfand and A. Kolmogoroff, "On rings of continuous functions on topological spaces", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **22**(1939), 11-15.

[38] L. Gillman, "Countably generated ideals in rings of continuous functions", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **11**(1961), 660-666.

[39] L. Gillman and M. Henriksen, "Concerning rings of continuous functions", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **77**(1954), 340-362.

[40] L. Gillman and M. Henriksen, "rings of continuous functions in which every finitely generated ideal is principal", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **82**(1956), 366-391.

[41] L. Gillman, M. Henriksen and M. Jerison, "On a theorem of Gelfand and Kolmogoroff conerning maximal ideals in rings of continuous functions", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **5**(1954), 447-455.

[42] L. Gillman and M. Jerison, "Stone-Cech compactification of a product", *Arch. Math.*, **10**(1959), 443-446.

[43] L. Gillman and M. Jerison, '*Rings of continuous functions*, Van. Nostrand Reinhold, New York, 1960.

[44] L. Gillman and C. W. Kohls, "Convex and pseudoprime ideals in rings of continuous functions", *Math. Z.*, **72**(1960), 399-409.

[45] M. Henriksen, "On the equivalence of the rings, lattices and semigroup of continuous functions", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **7**(6)(1956), 959-960.

[46] M. Henriksen, "Rings of continuous functions in 1950_s", C. E. Aull and R. Lowen (eds.), *Handbook of the history of general topology*, **1**(1997), 243-253.

[47] M. Henriksen, "Topology related to rings of real-valued continuous functions. Where it has been and where it might be going", *Recent progress in general topology*, **II**(2002), 553-556.

[48] M. Henriksen and M. Jerison, "The space of minimal prime ideals of a commutative ring", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **115**(1965), 110-130.

[49] M. Henriksen, S. Larson, J. Martinez and R. G. Woods, "Lattice-Ordered algebras that are subdirect products of valuation dopmains", *Tran. Amer. Math. Soc.*, **345**(1)(1994), 195-221.

[50] M. Henriksen and R. G. Woods, "Cozero complement spaces; when the space of minimal prime ideals of a $C(X)$ is compact", *Topology and its Applications*, **141**(2004), 147-170.

[51] E. Hewitt, "Rings of real-valued continuous functions I", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **64**(1948), 54-99.

[52] M. Hochster, "Rings of continuous functions and totally integrally closed rings", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **25**(2)(1970), 439-442.

[53] C. B. Huijsmans and B. de Pagter, "On z-ideals and d-ideals in Riesz spaces I", *Indag Math.*, **42**(1980), Proc. Netherl. Acad. Sc. A83, 183-195.

[54] C. B. Huijsmans and B. de Pagter, "On z-ideals and d-ideals in Riesz spaces II", *Indag Math.*, **42**(1980), Proc. Netherl. Acad. Sc. A83, 391-408.

[55] C. B. Huijsmans and B. de Pagter, "On z-ideals and d-ideals in Riesz spaces III", *Indag Math.*, **42**(1980), Proc. Netherl. Acad. Sc. A84, 401-422.

[56] D. G. Johnson and M. Mandelker, "Functions with pseudocompact support", *General Topology Appl.*, **3**(1973), 331-338.

[57] I. Kaplansky, "Lattices of continuous functions", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **53**(1974), 616-623.

[58] O. A. S. Karamzadeh and M. Rostami, "On the intrinsic topology and some related ideals of $C(X)$", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **93**(1985), 179-184.

[59] M. Katetov, "Measures in fully normal spaces", *Fund. Math.*, **38**(1951), 73-84.

[60] C. W. Kohls, "Ideals in rings of continuous functions", *Fund. Math.*, **45**(1957), 28-50.

[61] C. W. Kohls, "Prime ideals in rings of continuous functions I", *Illinois J. Math.*, **2**(1958), 505-536.

[62] C. W. Kohls, "Prime ideals in rings of continuous functions II", *Duke. Math. J.*, **25**(1958), 447-458.

[63] A. A. Kubenskii, "On functionally-closed spaces", *Uspehi Math. Nauk.* **6**(1951), 202. (Russian).

[64] A. Le Donne, "On a question concerning countably generated z-ideals of $C(X)$", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **80**(3)(1980), 505-510.

[65] A. Le Donne, *On countably generated z-ideals of $C(X)$ for first countable spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 82(2)(1981), 280-282.

[66] W. A. J. Luxemburg, "Extensions of prime ideals and the existence of projections in Riesz spaces", *Indag. Math.*, **35**(1973), Proc. Netherl. Acad. Sc. A76, 263-270.

[67] M. Mandelker, "Support of continuous functions", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **156**(1971), 73-84.

[68] G. Mason, "z-ideals and prime ideals", *J. Algebra*, **26**(1973), 280-291.

[69] G. Mason, "Prime z-ideals of $C(X)$ and related rings", *Canad. Math. Bull.*, **23**(4)(1980), 437-443.

[70] A. N. Milgram, "Multiplicative semigroups of continiuous functions", *Duke Math. J.*, **16**(1949), 377-383.

[71] M. A. Mulero, "Algebraic properties of rings of continuous functions", *Fund. Math.*, **160**(1999), 15-25.

[72] L. Nachbin, "Topological vector spaces of continuous", *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **40**(1954), 471-474.

[73] C. W. Neville, "Flat $C(X)$-modules and F-spaces", *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **106** (1989), 237-244.

[74] C. W. Neville, "When is $C(X)$ a coherent rings?", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **110**(2)(1990), 505-508.

[75] J. R. Porter and R. G. Woods, *Extensions and Absolutes of Hausdorff Spaces*, Springer-verlag, 1989.

[76] L. E. Pursell, "An Algebraic characterization of fixed ideals in certain function rings", *Pacific Journal of Mathematics*, **5**(1955), 963-999.

[77] D. Rudd, "On two sum theorems for ideals of $C(X)$", *Michigan Math. J.*, **17**(1970), 139-141.

[78] T. Shirota, "A class of topological spaces", *Osaka Math. J.*, **4**(1952), 23-40.

[79] M. H. Stone, "Applications of the theory of Boolean rings to general topology", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **41**(1937), 375-481.

[80] A. Thychonoff, "Uber die topologische Erweiterung von Raumen", *Math. Ann.* **102**(1929), 544-561.

[81] P. Urysohn, "Uber die Machtigkeit der zusammenhangenden Mengen", *Math. Ann.*, **94**(1925), 262-295.

[82] E. M. Vechtomov, "On the module of all functions over a rings of continuous functions", *Mat. Zametki,* **28**(4)(1980), 481-490.

[83] E. M. Vechtomov, "On ideals of rings of continuous functions", *Izv. Vuzov Mat.*, **1**(1981), 3-10.

[84] E. M. Vechtomov, "On modules of functions with bicompact support over rings of continuous functions", *Upe. Mat. Nauk,* **37**(4)(1982), 151-152.

[85] E. M. Vechtomov, "Distributive of continuous functions and F-spaces", *Mat. Zametki*, **34**(3)(1983), 321-332.

[86] E. M. Vechtomov, "Toward a theory of rings of continuous functions I", *Rept. No. 4868-85, Dep. in VINITI july 5*, 1985.

[87] E. M. Vechtomov, "Toward a theory of rings of continuous functions II", *Rept. No. 7551-V85, Dep. in VINITI October 29*, 1985.

[88] E. M. Vechtomov, "On rings of functions with values in locally bicompact fields", *Abel. Gruppi i Moduli*, **4**(1986), 20-35.

[89] E. M. Vechtomov, "Specifiability oe E-compact spaces by partially ordered sets of ideals of rings of continuous functions", *Abel. Gruppy i Moduli*, **7**(1988), 20-30.

[90] E. M. Vechtomov, "Rings of continuous functions and rings of global selections", *Abstract sixth symposium on the theory of rings*, Algebra and modules [in Russia], L'vov (1990), p. 32.

[91] E. M. Vechtomov, "Rings and modules of functions", *Abstract conf. on theory and applied Math. [in Russia]*, Tartu (1990), 108-111.

[92] E. M. Vechtomov, "Rings of continuous functions, Algebraic aspects", *J. Math. Sci.*, **71**(2)(1994), 2364-2408.

[93] B. Z. Vulih, "On the extension of continuous functions in topological spaces", *Mat. Sb.*, **30**(1952), 167-170. (Russian)

[94] R. C. Walker, *The Stone-Cech compactification*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1974.

[95] C. Wenjen, "A characterization of Hewitt's Q-spaces", *Notices Amer. Math. Soc.*, **5**(1958), 300-301.

[96] V. K. Zakharov, "Functional characterization of absolute vector lattices of functions with the Baire property andquasinormal functions and modules of partial continuous functions", *Tr. Mosk. Mat. Ob.*, **45**(1982), 68-104.

[97] V. K. Zakharov, "On the classical extension of vector lattices of continuous functions", *Funkts. Analiz i Ego Prilozh.*, **18**(2)(1984), 92-93.

[98] V. K. Zakharov, "Extensions of some lattices of continuous functions", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **228**(6)(1986), 1297-1301.

[99] V. K. Zakharov, "Cr-spans of rings of continuous functions", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **294**(3)(1987), 531-534.

فریبرز آذرپناه azarpanah@ipm.ir

منیره پیمان paimann_m@ipm.ir

علی رضایی‌علی‌آباد aliabadi_r@scu.ac.ir

امیدعلی کرم‌زاده karamzadeh@ipm.ir

رستم محمدیان mohamadian_r@scu.ac.ir

مهرداد نامداری namdari@ipm.ir

دانشگاه شهید چمران اهواز، دانشکده علوم ریاضی