فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۱ (زمستان ۱۳۹۱) صص. ۵۹ تا ۶۸

مروری بر کتاب Self-Similar Groups *

رستیسلاو گریگورچوک

ترجمه: محمد جلوداری ممقانی

خودسانی [۱] یا فرکتالی بودن [۲]، پدیده‌ای مهم در طبیعت است که در بسیاری از وجوه تمدن جدید انعکاس یافته است. این پدیده علاوه بر هنر، در فیزیک، شیمی، علوم پزشکی و علوم کامپیوتر رخ می‌نماید. خودسانی در مباحث مختلفی از ریاضیات و مدل‌سازی ریاضی از جمله دستگاه‌های دینامیکی و آشوب، فرایندهای تصادفی و فیزیک آماری، توپولوژی و هندسهٔ فرکتالی نیز ظاهر می‌شود. این پدیده با دستگاه‌هایی سروکار دارد که به‌وسیلهٔ الگوها یا آجرهایی پوشانده می‌شوند که به‌صورت نامتناهی در اندازه‌های مختلف ظاهر می‌شوند. کاربرد خودسانی در ریاضیات معمولاً مبتنی بر اصل تجدید مقیاس یا اصل تجدید نرمال‌سازی [۳] است که معمولاً با استفاده از گروه تجدید نرم صورت می‌پذیرد. در ریاضیات و فیزیک، مفهوم ناوردایی مقیاس، مفهومی قدیمی است. مکتب‌های فیثاغورس، اقلیدس و گالیله با مباحث مربوط به مقیاس‌بندی آشنایی داشتند. گروه تجدید نرمال‌سازی (یا به‌اختصار تجدید نرم [۴]) در جاهای مختلفی ظاهر می‌شود و به مجموعه‌ای از روش‌ها و مفاهیم مربوط به تغییرات مدل فیزیکی یا ریاضی اطلاق می‌شود که به تغییرات مقیاس مشاهده وابسته‌اند.

گروه تجدید نرم به مفهوم کلاسیک، گروهی دوری یا گروهی پیوستهٔ یک پارامتری (یکریخت با گروه جمعی اعداد حقیقی) است مانند گروه تولیدشده به‌وسیلهٔ ماشین جمع [۵] (یا کیلومترشمار [۶]) یا گروهی که به‌وسیلهٔ تبدیلِ خاصی از جواب نسبی یک مسألهٔ ریاضی یا فیزیکی تولید شده باشد. در واقع، این (گروه) عملاً یک نیمگروه است (دوری یا یک پارامتری)، زیرا در بسیاری موارد،

*) Grigorchuk, R., “Self-similar groups: by Volodymyr Nekrashevych”, *Bull. Amer. math. Soc.*, **44**(2007), 505-512.

1) self-similarity 2) fractalness 3) renormalization 4) renorm 5) adding machine 6) Odometer

تبدیل‌های مذکور وارون ندارند [Wik06, Shi00]. اما در این اواخر، ساختارهای خودسان جدیدی کشف شده‌اند که گروه تبدیلات نرمال کنندهٔ آن‌ها ناآبلی است، ویژگی‌های پیچیده‌ای دارد و ویژگی‌های خودِ مدل را منعکس می‌کند. این انتقال از گروه نرمال کنندهٔ دوری به گروه نرمال کنندهٔ ناآبلی را می‌توان با انتقال از هندسهٔ کلاسیک به هندسهٔ ناجابجایی مقایسه کرد [Con94]. در هندسهٔ ناجابجایی از روش‌ها و تکنیک‌های جبرهای عملگری استفاده می‌شود. پیشرفت‌های اخیر نشان می‌دهند که نرمال‌کننده‌های غیردوری نیز شامل ملاحظاتی از جبرهای C^* هستند.

ردهٔ گروه‌های پشت صحنهٔ تجدید نرم غیردوری، ردهٔ گروه‌های خودسان (و طبعاً نیمگروه‌های خودسان) است. این، حوزه‌ای از نظریهٔ جدید گروه‌ها است که با رشدی فزاینده روبه‌رو است و با بسیاری از مباحث نظریهٔ گروه‌های هندسی، نظریهٔ مجانبی گروه‌ها و نظریهٔ گالوا ارتباط دارد و نیز رابطهٔ نزدیکی با گروه‌های اتوماتون یا گروه‌هایی که به‌وسیلهٔ اتوماتون‌ها تولید می‌شوند، دارد. در اینجا منظور از اتوماتون‌ها، ماشین‌های تورینگ یا اتوماتون‌های میلی[1] هستند و ربطی به اتوماتون‌های شناختی[2] که مثلاً در گروه‌های اتوماتیک [ECH92] مطرح می‌شوند، ندارند.

روش‌های زیادی برای تعریف گروه‌های خودسان وجود دارد. یکی از این روش‌ها همان‌طور که گفتیم، این است که آن‌ها را به‌صورت گروه‌هایی تعریف کنیم که به‌وسیلهٔ اتوماتون‌های میلی تولید شده‌اند. این تعریف، گروه‌های خودسان را برای رفع نیازهای رشتهٔ علوم کامپیوتر متناسب می‌نماید. روشی دیگر، تعریف آن‌ها با استفاده از کنش بر فضای دنباله‌ها روی یک الفبای متناهی است که آن‌ها را به مباحث مختلف سامانه‌های دینامیکی نزدیک می‌نماید. می‌دانیم که درخت‌های ریشه‌دار و دینامیک بر آن‌ها به‌صورت ماشین جمع (یا کیلومترشمار) در موقعیت‌های مختلفی از دستگاه‌های دینامیکی و آشوب رخ می‌دهند. برای نمونه، به کتاب‌های [BOERT96] و [Bue97] مراجعه کنید که توصیف کاملی از این وضعیت را ارائه می‌دهند. با این وصف، تنوع مثال‌های این پیوندها و روابط، بسیار وسیع است.

اکنون مفهوم گروه خودسان را به‌صورت گذرا معرفی می‌کنیم. به‌طور کلی، اگر گروه G بر مجموعهٔ خودسان Y کنش نماید و Z زیرمجموعه‌ای از Y و متشابه با آن باشد، انتظار می‌رود که پایاگر Z در G گروهی بر Z القا نماید که با G یکریخت (یا هندسی ـ متشابه) است. تعریف دقیق بعداً داده می شود، فعلاً به بیان نقش گروه‌های خودسان و عمل‌های خودسان در نظریهٔ گروه می‌پردازیم. برای این کار، به بیان چند کلمه در مورد کنش بر درخت‌های ریشه‌دار نیازمندیم، چرا که آن‌ها نقشی اساسی در این نظریه ایفا می‌نمایند. شایددرخت ریشه‌دار d ـ منتظم T_d خودسان ترین اشیاء باشد، زیرا به‌ازای هر رأس u از آن، زیردرخت ریشه‌دار با ریشهٔ u به‌طور کانونی با T_d یکریخت است. توجه می‌کنیم که در نظریهٔ معروف بس ـ سر ـ تیتز[3]، درخت ریشه‌دار d ـ منتظم T_d زیردرختی از $(d+۱)$ ـ درخت همگن است. یک تفاوت عمده در این است که در نظریهٔ بس ـ سر ـ تیتز، فرض رایج، کوچکی (به معناهای مختلف) پایاگرهای رأس‌ها است (نگاه کنید به

1) Mealy automata 2) recognition automata 3) Bass-Serre-Tits

[Ser80])، در حالی‌که در مورد کنش بر درخت‌های ریشه‌دار، خودِ گروه، پایاگر ریشه است.

نظریهٔ گروه‌های کنش‌کننده بر درخت‌های ریشه‌دار با نظریهٔ حاصلضرب‌های حلقوی[۱] مکرر که توسط ل. کالوژنین[۲] و پ. هال[۳] ابداع شد، رابطهٔ نزدیکی دارد. در عین حال این نظریه صورت هندسی نظریهٔ p ـ گروه‌های مانده‌ای متناهی است وقتی $d = p$ عددی اول باشد. زیباترین ردهٔ کنش‌کنندگان بر درخت‌های ریشه‌دار، ردهٔ کنش‌کننده‌های خودسان است که معمولاً مثال‌های بی‌نظیری از گروه‌ها را به‌دست می‌دهد. برخی از مثال‌های اساسی در این زمینه عبارت‌اند از: گروه‌های با رشد متوسط اولیه؛ p ـ گروه‌های تابدار متناهی مولد گوپتا ـ صدقی[۴]؛ گروه‌های پ. نویمن که ساختار شبکه‌ای زیرگروه‌های زیرنرمال نامتعارف دارند؛ مثال‌های جی. اس. ویلسون[۵] از گروه‌هایی با رشد نمایی که رشد نمایی یک‌نواخت ندارند؛ مثال‌های زوران شانیچ[۶] از گروه‌های هانوی $H^{(k)}$ که به بازی برج‌های هانوی مربوط‌اند؛ و سرانجام مثال‌های نکراشویچ از گروه‌های منودرامی[۷] مکرر که شامل گروه‌های باسیلیکا[۸] و سیرپنسکی[۹] هستند. حتی وقتی گروه‌های معروفی نظیر گروه‌های آبلی آزاد، گروه‌های غیرآبلی آزاد، گروه چشمک‌زن و بسیاری گروه‌های دیگر به‌عنوان گروه‌های خودسان شناخته شوند، چشم‌انداز نوینی در مورد برخی قضیه‌های کلاسیک (مانند نظریهٔ دستگاه‌های عددنویسی و نظریهٔ آجر فرش‌ها) ایجاد می‌شود، و گاهی راه‌حلی برای مسائل معروف مطرح می‌گردد (مانند گروه چشمک‌زن و مسألهٔ اعداد L_2 ـ بتی آتیا).

هر یک از گروه‌های مذکور معرف مسأله‌ای معروف یا خط سیری در ریاضیات است. p ـ گروه‌های گوپتا ـ صدقی یا مثال‌های دیگر مرتبط با آن‌ها روشی زیبا (و شاید کوتاه‌ترین روش) برای حل مسألهٔ عمومی برنساید معرفی نمودند. با استفاده از گروه‌های با رشد متوسط سؤالی از میلنور حل و مسیری جدید در مطالعهٔ ویژگی‌های مجانبی گروه‌ها و خمینه‌ها باز شد. این گروه‌ها همراه با گروه باسیلیکا در مطالعهٔ گروه‌های رام (میانگین‌پذیر) نقش مهمی ایفا کردند و با استفاده از آن‌ها به سؤالی از م. دِی و مسائل وابسته پاسخ داده شد. گروه‌های هانوی بر مسألهٔ کلاسیک برج‌های هانوی که بیشتر از سه میله دارند پرتوی تازه افکندند؛ و این فهرست همچنان در حالِ بلند و بلندتر شدن است. گروه‌های خودسان، کاربردهایی در نظریهٔ گالوا دارند (مثلاً وقتی برج‌های گسترش‌های میدان‌های منسوب به ریشه‌های چندجمله‌ای‌هایی که تکرارهای یک چندجمله ای منفردند). مجموعهٔ دیگری از این کاربردها به دینامیک تحلیلی و نظریهٔ خمینه‌های پوششی تعلق دارد که در آن، گروه‌های خودسان و برخی اشیاء هندسی وابسته نظیر گراف‌های شرایر و فضاهای حدی به مجموعه‌های جولیا ربط پیدا می‌کنند.

وقت مناسبی بود که کتابی برای توصیف این مباحث و مباحث دیگری که شامل گروه‌های خودسان‌اند، منتشر شود. تنها کتابی که قبلاً مختصری به این زمینه پرداخته بود کتاب دو لَ‌آرپ [dlH00] است که فصلی از آن (فصل ۸) به بحث حاضر مربوط می‌شود.

---

1) wreath products 2) L. Kalujnin 3) P. Hall 4) Gupta-Sidki 5) J. S. Wilson
6) Sunić 7) monodromy groups 8) Basilica 9) Sierpinskii

حقیقتاً کتاب ولودیمیر نکراشویچ اولین تک‌نگاشتی است که به موضوع گروه‌های خودسان و کاربردهای آن‌ها پرداخته است. بیشتر مطالب این کتاب مبتنی بر نتایج ناب خود مؤلف است که در این زمینه سهمی اساسی دارد. کتاب با یک فصل مقدماتی آغاز می‌شود که شامل تعریف‌ها و مثال‌های اساسی و نیز بررسی سریع رئوس مطالب است. در اینجا مفاهیم و ابزارهای بنیادی نظریه ظاهر می شوند: درخت‌های ریشه‌دار و کنش بر آن‌ها، اتوماتون‌های متناهی و نمودارهای مور، کنش‌های حلقوی و گروه‌های شاخه‌ای، ماشین‌های جمع و اتوماتون‌های دوطرفه ــ معکوس‌پذیر[1]، تعریف اصلی کنش‌های خودسان و گروه‌های خودسان. مثال‌های بسیاری از جمله گروه‌های دوری که با ماشین‌های جمع نمایش داده می‌شوند، مثال‌هایی از گروه‌های تابدار با رشد متوسط، گروه‌های با رشد نمایی و با رشد نمایی غیریکنواخت، به‌علاوه نمایش‌های جذابی از گروه‌های آزاد و چند حاصلضرب آزاد به‌وسیلهٔ اتوماتون‌های دو طرفه ــ معکوس‌پذیر ارائه شده است.

چنان‌که قبلاً نیز اشاره کردیم، شاید شیئی که بهتر از هر شیء دیگر مفهوم خودسانی را منعکس می‌کند، درخت ریشه‌دار d ــ منتظم $T = T_d$ به‌ازای $d \geq ۲$ باشد. به‌ازای هر رأس u، زیردرخت ریشه‌دار T_u با ریشهٔ u با کل درخت یکریخت است. درخت $T_۲$ یک مدل درختی مجموعهٔ سه سه‌ای کانتور C است. فرض کنید $X = \{x_۱, \ldots, x_d\}$ الفبایی شامل d حرف و X^* مجموعهٔ تمام کلمه‌ها بر X باشد (که می‌توان آن را به‌عنوان مونویید آزاد تولیدشده توسط d مولد نیز در نظر گرفت). رأس‌های T_d به‌صورت دوسویی با X^* متناظرند و بنابراین مرز درخت، ∂T_d، که مشتمل است بر شعاع‌های ژئودزیک واصل بین ریشه و بینهایت، در تناظر یک‌به‌یک است با X^ω دنباله‌های نامتناهی از نمادهای الفبای X. مشاهده می‌کنیم که هر یک از مجموعه‌های T، X^*، C یا X^ω انتخابی طبیعی برای تعریف یک عمل خودسان بر آن است. در تعریف زیر کاربرد هر یک از این مجموعه‌ها، تفاوت و اهمیتی ندارد.

تعریف. کنش وفادار[2] گروه G بر X^ω را خودسان می‌نامیم اگر به‌ازای هر $g \in G$ و هر $x \in X$ اعضای $h \in G$ و $y \in X$ یافت شوند به‌طوری که $g(xw) = yh(w)$ به‌ازای هر $w \in X^\omega$.

گروه را خودسان می‌نامیم اگر با یک کنش خودسان نمایش داده شود. این نمایش نه یکتا و نه همواره امکان‌پذیر است (از موانع عمدهٔ این کار، حل‌پذیر بودن مسالهٔ کلمه و مانده‌ای متناهی بودنِ گروه‌اند). از ویژگی‌های عمدهٔ گروه‌های اتوماتون خودسان آن است که این گروه‌ها به‌وسیلهٔ حالت‌های یک اتوماتون (غیرآغازی) تولید می‌شوند. حالتی که این اتوماتون متناهی باشد مورد توجه بسیاری است، چرا که بسیاری از گروه‌های خودسان جالب به‌وسیلهٔ اتوماتون‌های متناهی تولید شده‌اند. طبقه‌بندی این گروه‌ها را می‌توان بر طبقه‌بندی اتوماتون‌های متناهی استوار نمود. مثلاً به‌پیروی از س. صدقی می‌توان مفهوم رشد (که می‌تواند کراندار، چندجمله‌ای یا نمایی باشد) را برای اتوماتون‌های متناهی تعریف و رده‌های گروه‌های متناظر را مطالعه نمود.

---

1) bi-reversible   2) faithful action

روش دیگر مطالعهٔ رشد اتوماتون‌های متناهی، ریشه در مفهوم رشد گروه‌های متناهیاً تولید شدهٔ میلنُر دارد و به مثال‌های اتوماتون‌ها (و گروه‌ها)ی با رشد متوسط که قبلاً یاد کردیم، منجر می‌شود.

یکی از مسائل اساسی مربوط به گروه‌های خودسان تعیین گروه‌هایی است که کنش وفادار دارند و پیدا کردن تحقق‌های خودسان مناسب برای آن‌ها. مفاهیم مهم دیگری نیز در نظریهٔ گروه‌های خودسان نقش اساسی ایفا می‌کنند که برخی از آن‌ها عبارت‌اند از: کنش ترایای کروی (یا کنش ترایای سطحی)، کنش بازگشتی (نه به معنای احتمالاتی؛ شاید «خود تکرار» یا «خود بازساز» کلمات مناسبتری باشند)، کنش کراندار، گروه شاخه‌ای و کنش انقباضی. خواننده را برای مطالعهٔ این مفاهیم به کتاب ارجاع می دهیم، اما به چند نکته دربارهٔ آن‌ها اشاره می‌کنیم. ترایایی سطحی به این معنا است که کنش در تمام سطح‌های درخت به‌صورت ترایا عمل می‌کند. این مفهوم معادل است با ارگودیک بودنِ کنش القایی بر مرزِ ∂T، درخت که به‌وسیلهٔ اندازهٔ یکنواخت برنولی تأمین می‌شود. مفهوم کنش بازگشتی (خودتکرار) به این معنا است که به‌ازای هر رأس u درخت، تحدید زیرگروه پایاگر u در G به زیردرخت T_u، وقتی T_u را با T به‌طور طبیعی یکی کنیم، برابر با کل گروه باشد (به‌طور کلی، پایاگر u زیرگروهی از G است). کرانداری شرطی است بر تعداد کنش‌های نابدیهی روی زیردرختی که از یک رأس در سطحی داده شده رشد کرده است. گروه‌های شاخه‌ای (یا کلی‌تر، شاخه‌ای ضعیف) گروه‌هایی هستند که به‌صورت وفادار و ترایای سطحی بر درخت ریشه‌دار همگن کروی طوری کنش می‌کنند که ساختار زیرگروه‌های زیرنرمال آن‌ها از ساختار درخت تبعیت می‌کنند. البته این کلیتی از تعریف واقعی است (برای مشاهدهٔ جزئیات بیشتربه [BGS] مراجعه نمایید). سرانجام، گروه G را انقباضی می‌نامیم اگر متناهیاً تولید شده باشد و به‌ازای هر $g \in G$ که طول به‌قدر کافی بزرگ داشته باشد، طول افکنش‌های آن اکیداً کمتر از طول g باشد (نسبت به یک دستگاه مولد انتخابی برای گروه).

تاکنون وقت خود را صرف معرفی برخی مفاهیم گروه‌های خودسان نمودیم؛ اکنون آماده‌ایم که برخی از مهمترین مباحث کتاب را مرور کنیم. فصل اول حاوی تعریف‌ها و مثال‌های بنیادی است، نظیر: ماشین‌های جمع چند بعدی، گروه تابدار با رشد متوسط (که در اینجا با G_g نشان می‌دهیم)، p ـ گروه‌های گوپتا ـ صدقی، گروه‌های نوع پ. نویمن و گروه‌های جی. اس. ویلسون که رشدی نمایی دارند، ولی رشدشان یکنواخت نیست. همچنین در این فصل، مثال‌های معروفی در نظریهٔ گروه‌ها معرفی می‌شوند: حاصلضرب حلقوی گروه دوری نامتناهی و گروه مرتبهٔ ۲ (گروه چشمک‌زن)، گروه‌های آزاد و حاصلضرب‌های آزاد گروه‌های مرتبهٔ ۲ که به‌عنوان گروه‌های خودسان شناخته می‌شوند. به‌علاوه، در اینجا رده‌های مهم اتوماتون‌ها نظیر اتوماتون‌های کراندار و اتوماتون‌های دو طرفه ـ معکوس‌پذیر مورد بررسی قرار می‌گیرند و برای ساختن گروه‌های متناظرشان به‌کار می‌روند. تنوع مثال‌ها علاوه بر این‌که در خواننده این احساس را به‌وجود می آورد که نظریهٔ گروه‌های خودسان غنی است، ورود وی را به موضوع تسریع می‌کند.

در فصل دوم، مبانی نظریهٔ جبری گروه‌های خودسان مورد مطالعه قرار می‌گیرد. این فصل با

تعریف مفهوم دومدول جایگشتی و رابطهٔ آن با کنش خودسان آغاز می‌شود. این مفهوم قبلاً توسط مؤلف معرفی شده است و با توجه به این‌که راه توصیف بسیاری از مفاهیم و نکته‌های مربوط به گروه‌های خودسان را به زبان رسته‌ها هموار می‌نماید، به‌نظر می‌رسد کاملاً جا افتاده باشد. به‌ویژه این مفهوم در مطالعهٔ فضاهای حدی، نمایش‌ها، اربیفلدها[1]، C^* ـ جبرها و مفاهیم بسیاری در رابطه با گروه‌های خودسان، مفید است. همچنین مؤلف ضرب تانسوری دومدول‌ها را بررسی می‌کند و از آن‌ها در مطالعهٔ توان‌های تانسوری کنش‌های خودسان بهره می‌برد. ضرب‌های تانسوری در جاهای بسیاری از کتاب نقشی اساسی ایفا می‌کنند.

سری دوم موضوع‌های مورد مطالعهٔ کتاب، درونریختی‌های مجازی و مفاهیم مربوط به آن‌ها (نظیر دومدول‌های پوششی وابسته) است. درونریختی‌های مجازی قبلاً در تز م. شوب[2] معرفی شده بودند. این مفهوم به مفهوم متوافق‌ساز مجرد[3] گروه (که گروهی از خودریختی‌های مجازی است) ربط پیدا می‌کند. متوافق‌ساز مجرد در مورد بسیاری از گروه‌ها شیء بسیار جذابی است. مثلاً سی. رور[4] ثابت کرده است که متوافق‌ساز ۲ ـ گروه با رشد متوسط G_g، گروهی متناهیاً تولید شده چون S است که به‌وسیلهٔ G_g و زیرگروهی از S تولید می‌شود و با گروه معروف ر. تامپسون[5] F که قبلاً در منطق برای مطالعهٔ منطق شرکت‌پذیر تعریف شده است، یکریخت است.

فصل ۲ توصیف کاملی از کنش‌های خودسان سطح ترایای گروه‌های آبلی آزاد رتبهٔ متناهی را در بر می‌گیرد که مبتنی هستند بر نتایج مؤلف و صدقی. ثابت می‌شود که تمام این نوع کنش‌ها را می‌توان به‌صورت گروه‌های Aای که تعمیمی از ماشین جمع هستند، بیان کرد. مفهوم مهمی که در بخش ۲.۱۰ معرفی می‌شود، صلبیت[6] کنش‌های خودسان و صورت‌های مختلف آن است که مبتنی است بر کار مشترک مؤلف و ی. لاورنیوک[7]. صلبیت برای اثبات یکتایی کنش گروه‌های از نوع شاخه‌ای (با شرایطی خاص) به‌کار می‌رود. این فصل با ارائهٔ دو بخش، خاتمه می‌یابد که به مطالعهٔ کنش‌های خودسان انقباضی و مفاهیم مربوط به آنها اختصاص دارند. کنش‌های انقباضی و گروه‌های خودسان انقباضی زیرردهای از گروه‌های خودسان را تشکیل می‌دهند که در مورد آن‌ها مطالعات بیشتری نسبت به سایر زیررده‌ها صورت گرفته است و کاربردهای فراوانی در نظریهٔ گروه و سایر رشته‌های ریاضیات دارد. سرعت انقباض با ضریب انقباض مشخص می‌شود (که برای گروه‌های انقباضی کمتر از ۱ است). کنش‌های متناهی حالت خودسان گروه‌های آبلی، انقباضی هستند. نخستین نتیجهٔ انقباضی بودنِ گروه، حل‌پذیری مسألهٔ کلمهٔ آن با الگوریتمی بسیار کارامد از نوع شاخه‌ای است. نتیجهٔ دوم این است که مدارهای کنش بر مرز درخت رشدی چندجمله‌ای دارند و یا به عبارت دیگر، رشد گراف‌های شرایر، چندجمله‌ای است. در اینجا برای لحظه‌ای روی گراف‌های شرایر[8] توقف می‌کنیم، زیرا نقشی اساسی در بسیاری موارد دارند.

---

1) orbifolds 2) M. Shub 3) abstract commensurator 4) C. Roever 5) R. Thompson
6) rigidity 7) Y. Lavrenyuk 8) Schreier graphs

گراف شرایر کنش گروه G که به‌وسیلهٔ دستگاه متقارن مولدهای S تولید شده است، بر مجموعهٔ Ω، گرافی چون Γ است که مجموعهٔ رأس‌های آن، $V(\Gamma) = \Omega$ و مجموعهٔ یال‌های آن، $E(\Gamma) = \{(x, sx); x \in \Omega, s \in S\}$ است. طبیعتاً این گراف وقتی که کنش ترایا است، با گراف $\Gamma_1 = \Gamma(G, H, S)$ یکریخت است که در آن، H پایاگر یک نقطهٔ Ω، $V(\Gamma_1) = \{gH : g \in G\}$ مجموعهٔ همرده‌ها است و $E(\Gamma_1) = \{(gH, sgH) : g \in G, s \in S\}$. گراف‌های شرایر تعمیم‌های گراف‌های کیلی هستند که متناظرند با کنش آزاد ترایا بر Ω که به معنی بدیهی بودن H است. تا همین اواخر، گراف‌های شرایر در ریاضیات نقش مهمی ایفا نمی‌کردند. توسعهٔ نظریهٔ گروه‌های خودسان، اهمیت اساسی آن‌ها را در مباحث مختلف آشکار ساخت و کتاب نکراشویچ این موضوع را به‌صورت کامل نشان می‌دهد.

در این بررسی، باز هم به گراف‌های شرایر خواهیم پرداخت، ولی قبل از آن، به فصل‌های ۳ و ۵ می‌پردازیم که فصل‌های اصلی کتاب محسوب می‌شوند. مؤلف در فصل ۳ نشان می‌دهد که به هر کنش انقباضی خودسان، یک دستگاه دینامیکی توپولوژیک موسوم به دستگاه دینامیکی حدی نسبت داده می‌شود. این ساخت پلی بین گروه‌های خودسان و فضاهای توپولوژیک خودسان است. ساخت برعکس، موسوم به گروه منودرامی مکرر را در فصل ۵ معرفی و مطالعه می‌نماید. با در دست داشتن گروه G که بر یک درخت ریشه‌دار کنش می‌نماید، می‌توان دنبالهٔ گراف‌های شرایر Γ_n کنشِ G بر سطح nاِم این درخت را ترسیم کرد. معمولاً این دنبالهٔ گراف‌ها به معنای طبیعی به یک شیء حدی همگرا است که شبیه یک فرکتال است. با این روش، می‌توان تور سیرپنسکی[1]، تور آپولونیوس[2] و شکل‌های بسیار پیچیدهٔ دیگری را به‌دست آورد. این یک راهنمایی برای اکتشاف مفهوم فضای حدی L_G نکراشویچ برای کنش خودسان انقباضی است. تعریفِ دقیق، مبتنی بر تجزیهٔ فضای دنباله‌های نامتناهی چپ $X^{-\omega}$ روی الفبای X به‌وسیلهٔ رابطهٔ هم‌ارزی $\sim$ است که برحسب دیاگرام مور اتوماتون متناظر بیان می‌شود. فضای حدی L_G متریک‌پذیر و بُعد توپولوژیک آن متناهی است. این فضا ساختار فضای مداری[3] دارد که ناشی از نمایش L_G به‌صورت فضای مدارهای کنش سرهٔ G روی G ــ فضای حدی X_G است . رابطهٔ هم‌ارزی مذکور تحت عمل انتقال $\cdots x_3x_2 \to \cdots x_2x_1$ روی فضای $X^{-\omega}$، ناورداست. پس این انتقال، تابعی پیوسته چون $s : L_G \to L_G$ تعریف می‌کند و دستگاه دینامیکی (L_G, s)، دستگاه دینامیکی حدی کنش خودسان نامیده می‌شود. مؤلف نظریهٔ فضاهای حدی را با تجهیز آن‌ها به ساختار فضاهای مداری و تحقق آن‌ها به‌صورت مرزهای هذلولوی گروموف یک «گراف خودسانی» غنی‌تر هم می‌سازد. اشیاء حدی مهم دیگری نظیر سولونوییدهای[4] حدی و حدهای معکوسِ خود پوشش‌ها نیز در انتهای فصل ۵ تعریف شده‌اند.

یکی از انگیزه‌های تعریف فضاهای حدی، ارتباط بین گروه‌های خودسان و دستگاه‌های عددنویسی روی $\mathbb{Z}^n$ و روی $\mathbb{R}^n$ است. به‌کمک این ارتباط، می‌توانیم برخی از نتایج کلاسیک

1) Sierpinski gasket 2) Apolonnian gasket 3) Orbispace 4) Solenoids

در مورد دستگاه‌های عددنویسی و آجرفرش‌های مربوط به آنها در $\mathbb{R}^n$ مانند «اژدهای دوقلو» را برحسب گروه‌های خودسان تعبیر کنیم. معمولاً در حالت غیرجابه‌جایی، آجرهای مربوط به فضای حدی گروه‌های خودسان، ماهیت فرکتالی پیچیده‌ای دارند. با این حال، در بسیاری موارد، ویژگی‌های زیبایی نیز دارند؛ مثلاً همبندند و به‌وسیلهٔ قانون زیرتقسیم[1] قابل نمایش‌اند. سرچشمهٔ جوشانی از گروه‌ها، فضاهای حدی و آجر فرش‌ها، به اتوماتون‌های کراندار تعلق دارد.

فصل ۴ به فضاهای مداری می‌پردازد و تعریف‌ها و ویژگی‌های اصلی شبه‌گروه‌های موضعی از همانریختی‌ها و گروه‌واره‌های گسسته[2] را معرفی می‌نماید. در اینجا مؤلف مطالب شناخته شده را با این هدف مورد بررسی قرار می‌دهد که آن‌ها را برای مطالعهٔ کنش‌های خودسان به‌کار ببرد.

در فصل ۵، مفهوم بسیار مجرد گروه منودرامی مکرر[3] را معرفی می‌شود. اگر $f : M_1 \to M$ پوششی d ـ تایی از فضای توپولوژیک «خوب» M به‌وسیلهٔ زیرفضای باز M_1 از M باشد، با استفاده از نقطهٔ دلخواه $t \in M$، درخت d ـ منتظم ریشه‌دار T با ریشهٔ t را چنان می‌سازیم که L_n مجموعهٔ رأس‌های سطح nاُم آن، مجموعهٔ پیش تصویرهای نقطهٔ t، یعنی $f^{-n}(t)$ باشد و رابطهٔ وقوع را به این صورت تعریف می‌کنیم که هر رأس $u \in f^{-n}$ به رأس $f(u) \in f^{-(n-1)}$ واقع در سطح بالاتر وصل شود. گروه بنیادی $\pi_1(M,t)$ به‌صورت طبیعی بر سطح‌های L_n به‌وسیلهٔ کنش منودرامی کلاسیک، کنش می‌کند. تمام این کنش‌ها، وقتی با هم در نظر گرفته شوند، کنشی از $\pi_1(M,t)$ بر T را مشخص می‌کنند که به‌صورت خودریختی کنش می‌کند و گروه منودرامی مکرر، خارج‌قسمت $\pi_1(M,t)$ بر هستهٔ این کنش است. نکتهٔ شگفت‌انگیز اینجا است که این تعریف طبیعی، چند سال پیش در مقالات مؤلف کتاب معرفی شد و نه در مقالات مربوط به اواخر قرن ۱۹ (مثلاً در کارهای پوانکاره یا ریمان). همچنین قابل توجه است که گروه منودرامی مکرر یک ساختار خودسانی طبیعی دارد. بنابراین تمام روش‌هایی را که در کتاب برای مطالعهٔ کنش‌های خودسان روی درخت‌های ریشه‌دار معرفی شده‌اند می‌توان برای مطالعهٔ دستگاه‌های دینامیکی مربوط به نگاشت‌های پوششی به‌کار بست. پیش از هر چیز، این گروه ارتباط نزدیکی با دینامیک تمامریختی[4] و اشیاء مورد مطالعهٔ آن، نظیر مجموعه‌های جولیا دارد. در اینجا سولونوییدها، برگ‌ها و آجرها به ایفای نقش خود می‌پردازند و مجموعهٔ جولیا با فضای حدی گروه منودرامی مکرر متناظر همانریخت می‌شود.

ساده‌ترین نگاشت‌هایی که قبلاً در دینامیک تمامریختی نظیر نگاشت‌هایی از صفحهٔ مختلط که به‌وسیلهٔ چندجمله‌ای‌های درجهٔ دوم $z^2 - 1$ و $z^2 + i$ و غیره تعریف می‌شوند، مورد مطالعه قرار گرفته‌اند، نشان می‌دهند که گروه‌های منودرامی متناظر می‌توانند بسیار پیچیده و نیز برای مطالعه با ابزارهای شناخته شده برای محققینی که با کنش گروه‌ها بر درخت‌های ریشه‌دار سروکار دارند، بسیار مناسب باشند.

---

1) subdivision rule 2) etale groupoids 3) iterated monodromy group 4) holomorphic dynamics

گروه‌های منودرامی مکرر ممکن است بدون تاب، دارای رشد چندجمله‌ای، نمایی، یا با رشد متوسط، «کلاسیک» مانند Z یا از نوع شاخه‌ای باشند. این‌که بسیاری از این گروه‌ها به تعبیر فون نویمان، رام[1]اند (یعنی میانگین ناوردا دارند) ولی به تعبیر م. دی[2]، رام مقدماتی نیستند، نکته بسیار جالبی است. بنابراین خانوادهٔ گروه‌های منودرامی مکرر خانوادهٔ بزرگی است که از گروه‌های بسیار جالب (همراه با اشیاء و مفاهیمی که عناوین در خور توجه دارند، نظیر گروه باسیلیکا[3]، گروه برج‌های هانوی، اتوماتون بلاترا[4] و ترفند مونشهاوزن[5] و غیره) تشکیل شده است.

توانایی ساختاریِ نظریهٔ گروه‌های مونودرامی مکرر به این دلیل مورد توجه است که برخی از مسائل مشکل (مانند «مسألهٔ خرگوش تاب خورده[6]» هوبارد[7] که به‌وسیلهٔ بارتولدی و نکراشویچ حل شد) با استفاده از این نظریه حل شده‌اند. فصل پایانی کتاب چند مثال از کاربردهای گروه‌های منودرامی مکرر در دینامیک چندجمله‌ای‌ها و توابع پیش ـ بحرانی متناهی[8] دارد. این فصل همچنین بحث‌ها و پیوندهای جالبی در مورد هم‌ارزی ترکیبیاتی خودپوشش‌های[9] کرهٔ ریمان و قضیهٔ ترستن[10] متناظر با آن، دارد. نکراشویچ، ناورداهای کینیدینگ[11] دستگاه‌های دینامیکی را به اتوماتون‌های کینیدینگ تعمیم داده است. چندجمله‌ای‌های بیلی[12] به‌طور طبیعی در میان این مثال‌ها قرار دارند.

گروه‌های خودسان نخستین بار به‌صورت یک رده، ۲۵ (سال چاپ این مقاله ۲۰۰۷ است ـ مترجم.) سال پیش در کارهای این مؤلف و نیز در مقالات ن. گوپتا، س. صدقی، پ. نویمن، ا. مکی[13]، و. شوشانسکی[14]، جی. س. ویلسون، پ. دِلَ‌آرپ[15]، ل. بارتولدی[16] و ریاضیدانان دیگر، مورد بررسی قرار گرفتند. این رشته نخستین مراحل پیشرفت خود را هم در توانایی حل مسائل نظریهٔ گروه و هم در کاربردهای گستردهٔ آن، با موفقیت پیموده است. علاوه بر کاربردهایی که قبلاً اشاره شد، خاطرنشان می‌کنیم که مسألهٔ زلمانف[17] در گروه‌های با پهنای متناهی[18] و مسألهٔ رزنبلات[19] در گروه‌های ابررام[20] نیز به‌وسیلهٔ گروه‌های خودسان حل شدند. علاقهٔ به این رده از گروه‌ها نه تنها در میان متخصصین نظریهٔ گروه بلکه در میان متخصصین دستگاه‌های دینامیکی، جبرهای عملگری، قدم‌زدن تصادفی، هندسه (به‌ویژه هندسهٔ فرکتالی)، علوم کامپیوتر، نظریهٔ گالوا و غیره در حال گسترش است. کنفرانس‌های اخیر در اوبرولفاخ (دربارهٔ نظریهٔ گالوا)، در پالوالتو (در باب گروه‌های خودسان) و در برکلی (در P vs. NP) و انتشار مجلهٔ جدید Groups, Geometry and Dynamics (که ناشر آن انجمن ریاضی اروپا است) و در آن، رشتهٔ گروه‌های خودسان از رشته‌های بارز خواهد بود، همگی از نشانه‌های علاقهٔ روزافزون به گروهای خودسان‌اند.

---

1) amenable 2) M. Day 3) basilica 4) Bellaterra automaton 5) Munchhausen trick 6) Twisted rabbit problem 7) Hubbard 8) post-critically finite 9) self-coverings 10) Thurston 11) Kneading invariants 12) Belyi 13) A. Machi 14) V. Sushchansky 15) P. dela Harpe 16) L. Bartholdi 17) Zelmanov 18) finite width 19) Rosenblatt 20) superamenable

این کتاب خوب نوشته شده است، ساختاری عالی دارد و به‌آسانی به‌وسیلهٔ مبتدیان قابل مطالعه است. مطالعهٔ این کتاب را بدون هیچ تردیدی به علاقه‌مندان گروه‌های خودسان توصیه می‌کنم.

مراجع

[BGS03] Laurent Bartholdi, Rostislav I. Grigorchuk, and Zoran Sunik, *Branch group*, Handbook of algebra, Vol. 3, North-Holland, Amsterdam, 2003, pp. 989-1112.

[BOERT96] Hayman Bass, Maria Victoria Otero-Espinar, Daniel Rockmore, and Charles Tresser, "Cyclic renormalization and automorphism groups of rooted trees", *Lecture Notes in Mathematics*, vol. **1621**, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[BUe97] Jorge Buescu, *Exotic attractors: From Liapunov stability to rriddled basins*, Progress in Mathematics, vol. **153**, Birkhäuser-Verlag, Basel, 1997.

[Con94] Alain Connes, *noncommunicative geometry*, Academic Press Inc, San Diego, CA, 1994.

[dlH00] P. de la Harpe, *Topics in geometric group theory*, Chacago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, 2000.

[ECH92] David B. A. Epstein, James W. Cannon, Derek F. Holt, Silvio V. F. Levy, Michael S. Paterson, and William P. Thurston, *Word processing in groups*, Jones and Bartlett Publishers, Boston, MA, 1992.

[Ser80] Jean-Poerre Serre, *Trees*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[Shi00] D. V. Shirkov, "The evolution of Bogolyubov's renormalization group", *Ukraïn. Fiz. ZH.*, **45**(2000), no. 4-5, 409-424; Problems of theoretical and mathematical physics, Kyiv, 1999.

[Wik06] Wikipedia, *Renormalization group-Wikipedia, the free encyclopedia*, 2006 (Online; accessed 13-September-2006).

محمد جلوداری ممقانی
دانشگاه علامه طباطبایی، دانشکدهٔ اقتصاد، گروه ریاضی، آمار و کامپیوتر
imamaghan@yahoo.com