فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۵ (پاییز ۱۳۹۳) صص. ۳ تا ۲۶

بازتاب‌ها، فضای بازتابی و فضای حرکت

سید قهرمان طاهریان

چکیده

بازتاب یکی از مفهوم‌های کارآمد مبانی هندسه است که در کارهای بسیاری از ریاضیدان‌ها مانند «شور[1]»، «یلمسلف[2]»، «هیلبرت[3]» و «بلاشکه[4]» قابل مشاهده است [۳، ۱۰]. در این راستا، «امیل اشپرنر[5]» در سال ۱۹۸۰ با شروع از یک زیرگروه از عضوهای خودوارون یک گروه دلخواه و چند بنداشت ساده، از جمله بنداشت سه بازتاب، قضیهٔ دزارگ را به دست آورد. طی چند سال گذشته و در ادامهٔ کارهای اشپرنر، توسط «هلموت کارتسل[6]» و نگارندهٔ این مقاله، با مطالعهٔ هندسه‌های مطلق و گروه حرکت‌های آنها ساختارهای جدیدی موسوم به «فضاهای بازتابی[7]» مطرح شده است. در این نوشتار پس از بیان تاریخچهٔ مفهوم بازتاب به معرفی این ساختارها می‌پردازیم.

۱ مقدمه و تاریخچه

یکی از هدف‌های این مقاله معرفی مفهوم «بازتاب[8]» به عنوان ابزاری کارآمد برای بنیانگذاری مبانی هندسه است. در آغاز به تاریخچهٔ این مفهوم بر اساس مرجع [۷] می‌پردازیم. در اواخر قرن نوزدهم، هیلبرت بدون استفاده از پیش‌فرض‌های پیوستگی، هندسه‌های اقلیدسی و هذلولوی مسطح را بر اساس دو سیستم جداگانهٔ بُنداشتی بنا نهاد. وی هندسهٔ اقلیدسی مسطح را بر پایهٔ بُنداشت توازی و هندسهٔ هذلولوی مسطح را به کمک بنداشت توازی هذلولوی مطرح کرد. همچنین وی از بازتاب‌های خطی برای معرفی مفهوم «نقطه‌های پایانی[9] (آرمانی)» (نقطه‌های واقع بر دایرهٔ مدل بلترامی ــ کلاین) استفاده کرد. هیلبرت ثابت کرد حاصل ضرب سه بازتاب خطی که خط‌های نظیر آنها از یک نقطهٔ پایانی w می‌گذرند، یک بازتاب خطی است که خط نظیر آن از w می‌گذرد.

1) E. Schur 2) J. Hjelmselev 3) D. Hilbert 4) W. Blaschke 5) Emil Sperner
6) Helmut Karzel 7) reflection space 8) reflection 9) Enden

به کمک آن وی حساب نقطه‌های پایانی را بنیان گذاشت و قضیهٔ رده‌بندی هندسهٔ هذلولوی مسطح را اثبات کرد. پس از آن یلمسلف در سال ۱۹۰۷ به این پرسش پرداخت که آیا می‌توان هندسهٔ مطلق مسطح را بدون «بنداشت پیوستگی» و «بنداشت‌های توازی» یعنی فقط با «بنداشت‌های وقوع، هم‌نهشتی و ترتیب» بنیان‌گذاری کرد؟ وی حدس زد که برای این منظور می‌توان حتی از بنداشت‌های ترتیب هم صرف‌نظر کرد. برای نیل به این هدف یلمسلف راهی اساساً نو در پیش گرفت. روش‌های وی مبنی بر به‌کارگیری بازتاب‌های خطی و ویژگی‌های آنهاست. ایده‌ی به کارگیری بازتاب‌های خطی به عنوان ابزاری برای اثبات گزاره‌های هندسه، پیش از یلمسلف در کارهای «وینر[1]»، شور، هیلبرت و هسنبرگ نیز قابل مشاهده است. در همهٔ این کارها قضیه‌ی معروف «سه بازتاب» به کار گرفته می‌شود. برای مثال وینر گروه حرکت‌های فضای اقلیدسی را مورد بررسی قرار داد. وی حرکت‌های به اصطلاح سره[2] را به صورت حاصل‌ضرب دو بازتاب خطی نمایش داد و قضیه‌ی سه بازتاب و وارون آن را برای بازتاب‌های نقطه‌ای و خطی ثابت کرد. شور به کمک بنداشت همنهشتی (قابلیت انطباق) «پاش[3]» ثابت کرد که قضیه‌ی سه بازتاب برای سه خط که از یک نقطه‌ی عادی صفحه‌ی آفین می‌گذرند یا سه صفحه که یک خط مشترک دارند برقرار است. وی به کمک بازتاب‌ها نشان داد که **«قضیهٔ داندلن[4]» به شکل زیر در فضا برقرار است [۸]:**

قضیه ۱. (داندلن) اگر A_0, B_0 دوخط متمایز باشند که یکدیگر را در یک نقطهٔ عادی s قطع کرده‌اند و $a_1, a_2, a_3 \in B_0 \setminus \{s\}$ و $b_1, b_2, b_3 \in A_0 \setminus \{s\}$ نقطه‌های متمایزی باشند آنگاه خطهای A_i, B_i $(i = 1, 2, 3)$ وجود دارند چنان که $a_i \in A_i$ و $b_i \in B_i$ و برای هر i, j در $\{0, 1, 2, 3\}$، خطهای A_i و B_i در یک صفحه واقعند و برای $i \neq j$، خطهای A_j, A_i و خطهای B_j, B_i متنافرند (شکل ۱).

به کمک این قضیه، شور حالت خاصی از قضیهٔ پاپوس را نتیجه گرفت. از آنجا که روش‌های یلمسلف در تکامل مبانی هندسهٔ مدرن نقش زیادی داشته‌اند، مهم‌ترین نتایج وی را بر اساس مرجع [۷] به شکل فشرده بیان می‌کنیم. در هندسه‌ی مطلق می‌توان از یک نقطه بر هر خط عمود رسم کرد و برای هر خط A بازتاب خطی یکتایی وجود دارد که فقط نقطه‌های A را ثابت نگه می‌دارد. برای سادگی این بازتاب را هم با A نمایش می‌دهیم. هر بازتاب خطی یک حرکت است، یعنی هر پاره‌خط به پاره‌خطی هم‌نهشت (قابل انطباق) با آن نگاشته می‌شود. یلمسلف برای وارد کردن نقطه‌های به اصطلاح غیرعادی[5] (ناسره) به بحث، ثابت کرد [۴]:

قضیه ۲. اگر B و A دو خط متمایز و c نقطه‌ای ناواقع بر آنها باشند (شکل ۲) آنگاه برای $b := AB(c)$ و $a := BA(c)$ داریم

۱− $[a, c] \equiv [b, c]$ ($[x, y]$ پاره‌خط مشخص شده با x و y و $\equiv$ به معنای «قابل انطباق» است).

۲− اگر $o \in A \cap B \neq \emptyset$ آنگاه $[o, a] \equiv [o, b]$.

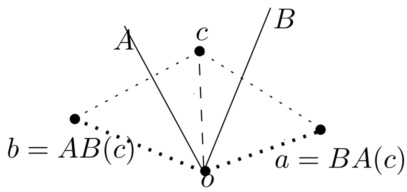
1) Winer 2) Proper 3) Pasch 4) Dandelin 5) Improper

۳− اگر $A \perp B$ آنگاه $a = b \in \overline{c,o}$ به قسمی که $o = A \cap B$.

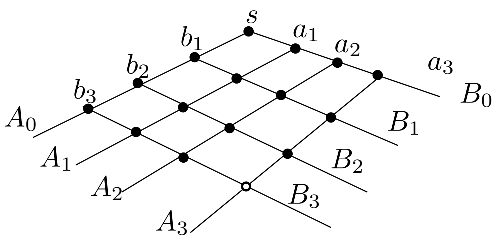
۴− دقیقاً یک خط C وجود دارد که $c \in C$ و $b = C(a)$.

۵− خط C باویژگی $c \in C$ و $ABC = CBA$ به صورت یکتا مشخص می‌شود.

۶− اگر $o \in A \cap B \neq \emptyset$ آنگاه $o \in C$.



شکل ۲. قضیهٔ یلمسلف.



شکل ۱. قضیهٔ داندلن.

به کمک این قضیه یلمسلف برای دو خط نامتقاطع A و B مفهوم «بافهٔ ناسره[1]» $\mathcal{B}_{AB}$ را تعریف کرد. خط C دربافهٔ $\mathcal{B}_{AB}$ قرار دارد اگر و تنها اگر برای یک $c \in C$ داشته باشیم $AB(c) = CBA(c)$. وی سپس نشان داد که بافهٔ $\mathcal{B}_{AB}$ شامل همهٔ خط‌های X است که $ABX = XBA$. به این ترتیب اگر مجموعهٔ خط‌ها را با $\mathfrak{G}$ نشان دهیم آنگاه $\mathcal{B}_{AB} = \{X \in \mathfrak{G} \mid ABX = XBA\}$. رابطهٔ وقوع برای یک بافه، همانند رابطهٔ وقوع نقطه‌های پایانی هیلبرت یک رابطهٔ سه‌تائی هم ارزی است. یلمسلف نشان داد برای هر دو خط متمایز $C, D \in \mathcal{B}_{AB}$ همواره $\mathcal{B}_{AB} = \mathcal{B}_{CD}$. وی همچنین نشان داد که اگر A و B یک عمود مشترک L داشته باشند آنگاه هر خط در بافهٔ $\mathcal{B}_{AB}$ بر L عمود است. به عبارت دقیق‌تر $X \in \mathcal{B}_{AB} \iff X \perp L$. وی به کمک این ویژگی ثابت کرد [۴]:

قضیه ۳. اگر در یک صفحهٔ مطلق مستطیل وجود داشته باشد آنگاه هر چهارگوش با سه زاویهٔ قائمه یک مستطیل است.

بر این اساس وی صفحه‌های مطلق را به دو دستهٔ **منفرد**[2] و **عادی**[3] رده‌بندی کرد. درصفحه‌های منفرد مستطیل وجود دارد ولی در صفحه‌های عادی مستطیل وجود ندارد. یلمسلف مجموعهٔ نقطه‌ها و مجموعهٔ بافه‌های ناسره را با هم به صورت مجموعهٔ جدید نقطه‌ها در نظر گرفت و نقطه‌های واقع بر هر خط مانند X را به گونه‌ای گسترش داد که بافه‌های سرهٔ دربرگیرندهٔ X بر آن واقع باشند. به این ترتیب خط X به $\overline{X} = X \cup \{\mathcal{B}_{AB} \mid ABX = XBA\}$ گسترش داده می‌شود.
با این قراردادها وی توانست سه ویژگی مهم را برای هندسهٔ گسترش یافته ثابت کند:

۱− بر هر دو خط متمایز خطی یکتا واقع است.

1) Improper pencil 2) singular 3) regular

۲− از هر دو نقطهٔ متمایز که دست کم یکی از آنها سره باشد خطی یکتا می‌گذرد.

۳− دو خط عمود بر یک خط، یکدیگر را در نقطه‌ای ناسره قطع می‌کنند.

در صفحهٔ اقلیدسی، یک بافهٔ ناسره، ردهٔ هم‌ارزی خط‌های موازی است. این بافه‌ها در صفحهٔ هذلولوی، نقطه‌های پایانی و دسته خط‌های عمود بر یک خط هستند. بر اساس ایدهٔ یلمسلف، در این دو حالت همهٔ نقطه‌های یک صفحهٔ تصویری به دست می‌آیند. برای آن که در حالت کلی هم یک صفحهٔ تصویری به دست آید یلمسلف باید مجموعه‌های جدیدی از نقطه‌ها را هم به عنوان خط در نظر می‌گرفت. حتی در صفحهٔ هذلولوی نیاز به خط‌های جدید زیادی داریم که در مدل بلترامی ـ کلاین به خوبی دیده می‌شود. برای مثال خط‌هایی که دایرهٔ یکه را قطع نمی‌کنند باید در نظر گرفته شوند. یلمسلف تعریف خط‌های جدید را به کمک مفهوم **نیم دوران** بیان کرد. مهم‌ترین ابزار برای این کار قضیهٔ سه بازتاب به شکل کلی بود که به وسیلهٔ وی بیان و اثبات شد [۴].

قضیه ۴. (سه بازتاب[۱]) برای سه خط A، B و C که از یک نقطهٔ سره (عادی) یا ناسره (غیرعادی) چون u می‌گذرند خطی مانند D وجود دارد که از u می‌گذرد و $ABC = D$.

حالت خاص این قضیه یعنی حالتی که u نقطه‌ای سره باشد پیش از آن توسط شور در سال ۱۸۹۹ ثابت شده بود. به کمک قضیهٔ سه بازتاب، یلمسلف قضیهٔ کاهش را ثابت کرد [۴].

قضیه ۵. (کاهش) حاصل ضرب چهار بازتاب خطی را می‌توان به صورت حاصل ضرب دو بازتاب خطی بیان کرد.

از آنجا که هر حرکت را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب حداکثر سه بازتاب بیان کرد، گروه حرکت‌ها به دو دستهٔ **حرکت‌های سره و ناسره** تجزیه می‌شود. حرکت‌هایی که به صورت حاصل‌ضرب دو بازتاب خطی بیان می‌شوند سره و حرکت‌هایی که حاصل‌ضرب سه بازتاب خطی باشند ناسره نامیده می‌شوند. یلمسلف مفهوم زاویه را هم مطرح کرد و به کار برد. زوج خطوط (A, B) زاویه نامیده می‌شود هرگاه یک نقطهٔ مشترک سره داشته باشند. دو زاویهٔ $\angle(A, B), \angle(C, D)$ هم‌نهشت نامیده می‌شوند هرگاه حرکت سرهٔ XY وجود داشته باشد که A را به C و B را به D بنگارد. به عبارت دیگر $C = XY(A) = XYAYX$ و $D = XYBYX$. یلمسلف نشان داد [۴]:

قضیه ٦. برای چهار خط A، B، C و D که از یک نقطهٔ عادی می‌گذرند، $AB = CD$ اگر و تنها اگر $\angle(A, B) \equiv \angle(C, D)$.

به کمک این قضیه وی قضیهٔ تعامد را ثابت کرد [۴]. هیلبرت از این قضیه در هندسهٔ اقلیدسی به عنوان ابزاری برای اثبات گسترش قضیهٔ پاپوس به هر صفحهٔ مطلق دلخواه بهره برده بود.

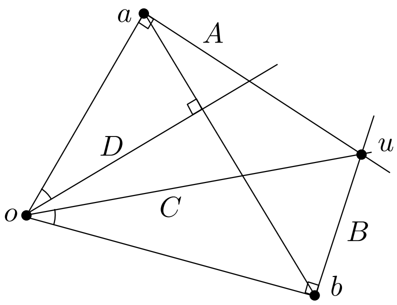
---

1) Three reflection theorem

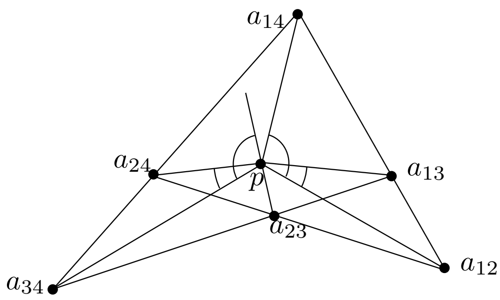
قضیه ۷. (تعامد) فرض کنیم o، b و a سه نقطهٔ متمایز، $A = \{a \perp \overline{o,a}\}$، $B = \{b \perp \overline{o,b}\}$، $D = \{o \perp \overline{a,b}\}$ و u نقطهٔ تلاقی A و B باشند (شکل ۳). در این صورت برای هر خط C که o بر آن واقع است داریم $\angle(\overline{o,a}, D) \equiv \angle(C, \overline{o,b}) \iff u \in C$.

یلمسلف قضیهٔ **زوج‌های متقابل**[1] هسنبرگ را هم به صفحه‌های مطلق گسترش داد [۴]:

قضیه ۸. (زوج‌های متقابل) فرض کنیم $A_{۱}$، $A_{۲}$، $A_{۳}$ و $A_{۴}$ چهار خط باشند که هیچ سه‌تای آنها از یک نقطه نمی‌گذرند و برای هر دو اندیس متمایز $i, j \in \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ نقطهٔ (عادی یا ناسره) a_{ij} نقطهٔ تلاقی A_j و A_i باشد. همچنین فرض کنیم p یک نقطهٔ سره باشد که با هیچ یک از a_{ij}ها برابر نیست و G_{ij} را خط واقع بر p و a_{ij} در نظر می‌گیریم. در این صورت اگر $\angle(G_{۱۲}, G_{۱۳}) \equiv \angle(G_{۲۴}, G_{۳۴})$ یعنی اگر $G_{۱۲}G_{۱۳} = G_{۲۴}G_{۳۴}$ آنگاه $\angle(G_{۳۴}, G_{۱۴}) \equiv \angle(G_{۲۳}, G_{۱۲})$ و $\angle(G_{۱۴}, G_{۲۴}) \equiv \angle(G_{۱۳}, G_{۲۳})$ (شکل ۴).

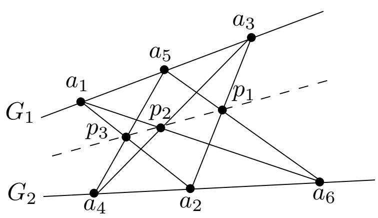


شکل ۳. قضیهٔ تعامد.

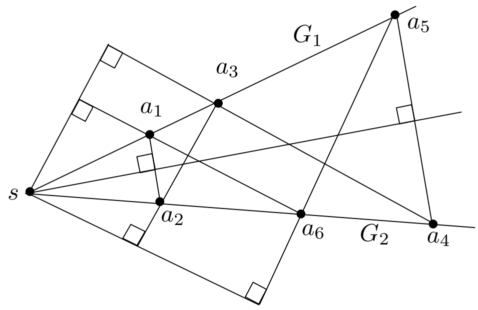


شکل ۴. قضیهٔ زوج‌های متقابل.

یلمسلف این قضیه را به کمک حساب بازتاب‌ها ثابت کرد. به کمک قضیه‌های تعامد و زوج‌های متقابل وی توانست به ترتیب اثبات‌های هیلبرت و هسنبرگ از قضیهٔ پاپوس را در حالت‌های اقلیدسی و بیضوی به کار ببرد و برای صفحهٔ مطلق دو شکل از قضیهٔ پاپوس را ثابت کند.



شکل ۵. حالتی از قضیهٔ پاپوس.



شکل ٦. حالت دیگری از قضیهٔ پاپوس.

1) Gegenpaarungssatz

قضیه ۹. (پاپوس) فرض کنیم $G_۲$ و $G_۱$ دو خط متمایز و $a_۱, a_۲, a_۳, a_۴, a_۵, a_۶$ شش نقطهٔ متمایز سره باشند به قسمی که $a_۱, a_۳, a_۵ \in G_۱ \setminus G_۲$ و $a_۲, a_۴, a_۶ \in G_۲ \setminus G_۱$. در این صورت:

۱ــ اگر s نقطه تلاقی $G_۱, G_۲$ نقطه‌ای سره باشد و عمود از s بر $\overline{a_۲, a_۳}, \overline{a_۱, a_۲}$ به ترتیب بر $\overline{a_۴, a_۵}$ و $\overline{a_۵, a_۶}$ عمود باشند آنگاه عمود بر s از $\overline{a_۳, a_۴}$ بر $\overline{a_۶, a_۱}$ نیز عمود است (شکل ۵).

۲ــ اگر نقطه‌های تلاقی $\overline{a_۱, a_۲}$ با $\overline{a_۴, a_۵}$ و $\overline{a_۲, a_۳}$ با $\overline{a_۵, a_۶}$ و $\overline{a_۳, a_۴}$ با $\overline{a_۶, a_۱}$ سره باشند آنگاه این نقطه‌ها بر یک خط واقعند.

ابزار اساسی که یلمسلف به کمک آن بستار تصویری را به دست آورد **نیم‌دوران‌ها** بودند. یک نیم‌دوران نگاشتی یک به یک از نقطه‌های صفحه به خودش است که نقطه‌های هم‌خط را به نقطه‌های هم‌خط می‌نگارد. فرض کنیم در صفحهٔ مطلق، نگاشت w یک دوران حول نقطهٔ o باشد به قسمی که $w^۲ \neq id$. در این صورت نگاشتی که به هر نقطهٔ x نقطهٔ x' وسط پاره‌خط $[x, w(x)]$ را می‌نگارد یک نیم‌دوران نامیده می‌شود (شکل ٦). یلمسلف نشان داد که می‌توان این نگاشت‌ها را به مجموعهٔ دربرگیرندهٔ نقطه‌های سره و ناسره گسترش داد. ثابت می‌شود که هر نقطهٔ ناسره اگر عمود بر خطی گذرنده از o نباشد به کمک یک نیم‌دوران مناسب به یک نقطهٔ سره نگاشته می‌شود. اکنون می‌توانیم خط‌های ناسره را توصیف کنیم: هر مجموعه از نقطه‌های ناسره که به وسیلهٔ یک نیم‌دوران حول o به نقطه‌های سره و ناسرهٔ واقع بر یک خط سره نگاشته شوند خطی ناسره نامیده می‌شود. علاوه بر این تمام بافه‌های حاصل از خط‌های عمود بر یک خط گذرنده از o تشکیل یک خط ناسره می‌دهند. به این ترتیب مجموعهٔ نقطه‌های (سره و ناسره) و خط‌های (سره و ناسره) تشکیل یک صفحهٔ تصویری می‌دهند. یلمسلف به کمک حالت‌های خاص قضیهٔ پاپوس و نیم‌دوران‌ها حالت کلی قضیهٔ پاپوس را ثابت کرد. سرانجام وی این ایده را مطرح کرد که می‌توان هندسهٔ مطلق را بدون مفهوم ترتیب و تنها به کمک بنداشت‌های وقوع $I_۱$، $I_۲$، E و چند بنداشت در مورد همنهشتی و حرکت‌ها بنیان گذاشت:

($I_۱$) بر هر دو نقطهٔ متمایز خطی یکتا می‌گذرد.

($I_۲$) بر هر خط دست کم دو نقطه واقع است.

(E) سه نقطهٔ ناهم‌خط وجود دارند.

- همنهشتی پاره‌خط‌ها ویژگی انتقالی دارد.
- برای هر پاره‌خط (c, d) و زوج خط و نقطه‌ی (a, G) که a بر G واقع است دو نقطه‌ی b و b' بر خط G وجود دارند به گونه‌ای که $(a, b) \equiv (a, b') \equiv (c, d)$.
- برای هر خط A دقیقاً یک حرکت موسوم به بازتاب خطی وجود دارد که فقط و فقط نقطه‌های A را ثابت نگه می‌دارد.

- برای هر مثلث متساوی‌الساقین حرکتی وجود دارد که رأس مثلث را ثابت نگه می‌دارد و دو ساق مساوی مثلث را به هم تبدیل می‌کند.
- هرپاره خط دقیقاً یک نقطهٔ وسط دارد.
- نقطه‌های وسط اضلاع یک مثلث بر یک خط واقع نیستند.

نیم‌دوران‌ها و بازتاب‌ها پس از آن بارها برای بنیان گذاشتن صفحه‌های مطلق به کار گرفته شده است. در سال ۱۹۱۱ ویلهلم بلاشکه نگاشتی را مطرح کرد که نقاط صفحهٔ اقلیدسی را در فضای وقوعی نظیر گروه دوران‌های آن می‌نشاند. به کمک این نگاشت و با استفاده از گروه دوران‌های صفحهٔ اقلیدسی یک ساختار هندسی سه‌بعدی (فضای حرکت) ساخته می‌شود که صفحهٔ اقلیدسی زیر ساختاری از آن است. در سال ۱۹۳۳ «تامسن[1]» یک دستگاه بنداشتی بر اساس بازتاب‌ها برای هندسهٔ اقلیدسی مطرح کرد. تامسن با یک گروه G شروع می‌کند که به وسیلهٔ مجموعه‌ای مانند J از عضوهای خودوارون G تولید می‌شود. وی مجموعه‌ی J را به دو مجموعهٔ P و G به نام مجموعهٔ نقطه‌ها و مجموعهٔ خط‌ها تقسیم می‌کند. وی همچنین می‌پذیرد که P دست کم دو عضو دارد و حاصل‌ضرب سه نقطه، یک نقطه است، یعنی برای هر $a, b, c \in P$ همواره $abc \in P$. افزون بر این، حاصل‌ضرب تعداد فردی از نقطه‌های P نباید عضو همانی گروه G شود و دو بنداشت «کاهش» و «وجود» پذیرفته می‌شوند. بنابر بنداشت وجود، هر دو نقطهٔ a و b و یا هر دوخط A و B را می‌توان به وسیلهٔ یک عضو خودوارون به هم تبدیل کرد یعنی عضو $\gamma \in J$ وجود دارد که $\gamma a \gamma = b$ و $\gamma A \gamma = B$. در این دستگاه بنداشتی نقطهٔ a بر خط B واقع است هرگاه $(aB)^۲ = ۱$ و تعامد دو خط A و B به وسیلهٔ رابطهٔ $(AB)^۲ = ۱$ و $A \neq B$ تعریف می‌شود. بر اساس این پیش‌فرض‌ها تامسن توانست قضیهٔ سه‌بازتاب را برای یک بافه از خط‌های موازی و یک بافه از خط‌های متقاطع و سرانجام قضیهٔ سه‌بازتاب را در حالت کلی ثابت کند. وی همچنین با تکیه بر کارهای هیلبرت قضیهٔ پاپوس را ثابت کرد. ده سال بعد صفحه‌های نااقلیدسی به کمک روش‌های نظریهٔ گروه مطرح شدند. یک دستگاه بنداشتی که همهٔ صفحه‌های مطلق را در بر می‌گیرد به‌وسیلهٔ «اشمیت» مطرح شد [۹]. برخلاف تامسن در دستگاه اشمیت زیرمجموعه‌های G و P از J لزوماً متمایز نیستند. اشمیت بنداشت‌های زیر را می‌پذیرد:

- (وجود خط رابط) برای $p, x \in P$ عنصر $A \in G$ وجود دارد که $Ap, Ax \in J$.
- (وجود عمود) برای $X \in G, p \in P$ عنصر $A \in G$ وجود دارد که $Ap, AX \in J$.
- برای $x \in P, A \in G$ به قسمی که $Ax \in J$ داریم $Ax \in G$.
- برای $A, X \in G$ به قسمی که $AX \in J$ داریم $AX \in P$.
- (یکتایی خط رابط) برای $A, B \in G$ و $p, x \in P$ به قسمی که $Ap, Ax, Bp, Bx \in J$ داریم $A = B$ یا $p = x$.

1) Tomsen

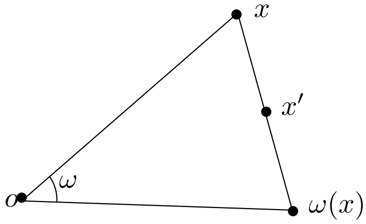
- برای $A, B, X \in G$ و $p \in P$ به قسمی که $Ap, AX, Bp, BX \in J$ داریم $A = B$ یا $p = X$.
- برای $p \in P$ و $A, B, X \in G$ به قسمی که $Ap, AX, Bp, BX \in J$ داریم $A = B$ یا $p = X$.
- (سه بازتاب برای بافه‌ی شامل یک نقطه) برای $A, B, C \in G$ و $x \in P$ به قسمی که $Ax, Bx, Cx \in J$ داریم $ABC \in G$.
- (سه بازتاب برای بافهٔ عمود بر یک خط) برای $A, B, C, X \in G$ به قسمی که $AX, BX, CX \in J$ داریم $ABC \in G$.
- (عکس سه بازتاب) برای $x \in P, A, B, C \in G$ به قسمی که $Ax, Bx \in J$ و $ABC \in G$ داریم $A = B$ یا $Cx \in J$.
- برای $A, B, C, X \in G$ به قسمی که $AX, BX \in J$ و $ABC \in G$ داریم $A = B$ یا $CX \in J$.
- برای $x \in P$ یک $A \in G$ وجود دارد که $Ax \notin J$ و $A \neq x$.
- برای $X \in G$ یک $A \in G$ وجود دارد که $AX \notin J$ و $A \neq X$.

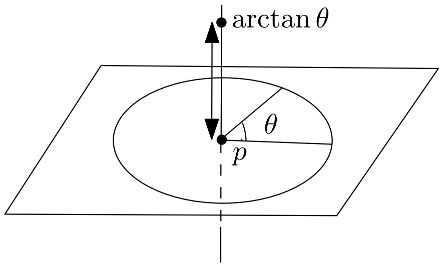
به کمک این دستگاه بنداشتی دقیقاً آن دسته از صفحه‌های بیضوی مشخص می‌شوند که به وسیلهٔ دستگاه بنداشتی «پُدل[1]» و «رایدمایستر[2]» به دست می‌آیند و بقیهٔ صفحه‌های مطلق نابیضوی که توسط دستگاه بنداشتی «باخمان[3]» مطرح می‌شوند. به این ترتیب برای نخستین بار صفحه‌های مطلق بیضوی و نابیضوی به صورت یکپارچه از یک دستگاه بنداشتی به دست آمدند. اشمیت با این دستگاه قصد داشت ویژگی همزادی رابطه‌های وقوع و تعامد را نمایش دهد. پس از آن باخمان نشان داد که اصول دستگاه بنداشتی اشمیت مستقل نیستند و تعداد آنها را کاهش داد. وی یک گروه G را در نظر گرفت که بر خلاف فرض‌های تامسن و اشمیت به وسیلهٔ یک زیر مجموعهٔ E از خودوارون‌های J تولید می‌شود و هر عضو این مجموعه را خط نامید. اعضای خودوارونی که به صورت حاصل‌ضرب دو خط قابل بیان هستند در دستگاه باخمان نقطه نامیده می‌شوند. تعامد و وقوع در دستگاه وی همانند دستگاه تامسن بیان می‌شوند. وی می‌پذیرد که مجموعهٔ نقطه‌ها و خط‌ها یک فضای وقوعی پدید می‌آورند که در آن می‌توان از هر نقطه بر هر خط دلخواه عمود رسم کرد. همچنین چند بنداشت دیگر از دستگاه اشمیت پذیرفته می‌شوند. باخمان در سال ۱۹۵۹ در [۱] دو بنداشت مربوط به عمودها را با این فرض معادل جایگزین کرد که E تحت خودریختی‌های داخلی ناوردا است، یعنی برای هر $a \in G$، $aEa^{-1} = E$. نظریهٔ بازتاب‌ها در سال ۱۹۵۹ با دستگاه بنداشتی اشپرنر پیشرفت چشم‌گیری کرد. اشپرنر به این می‌اندیشید که با چه پیش‌فرض‌های حداقلی می‌توان قضیهٔ دزارگ را به کمک نظریهٔ گروه ثابت کرد. وی با یک گروه G و یک زیرمجموعهٔ E از

1) Podehl 2) Reidmeister 3) Bachmann

خودواورون‌های G شروع می‌کند که مولد G است. تنها فرض بنیانی دیگر وی بنداشت سه بازتاب بود. (DS) (سه‌بازتاب) اگر $A, B, X, Y, Z \in E$ به قسمی باشند که $ABX, ABY, ABZ \in J$ و $A \neq B$ آنگاه $XYZ \in E$.

اشپرنر اعضای E را خط می‌نامد. وی بر اساس بنداشت سه بازتاب و تعریف یلمسلف برای بافه، خط‌ها را در بافه‌ها دسته‌بندی می‌کند و هر بافه را یک نقطه می‌نامد. به این ترتیب هر دو خط متمایز $A, B \in E$ بافهٔ $\mathcal{B}_{AB} = \{X \in E \mid ABX \in J\}$ را پدید می‌آورند. بنا بر بنداشت سه‌بازتاب برای هر دو خط $C, D \in \mathcal{B}_{AB}$ همواره $\mathcal{B}_{CD} = \mathcal{B}_{AB}$.

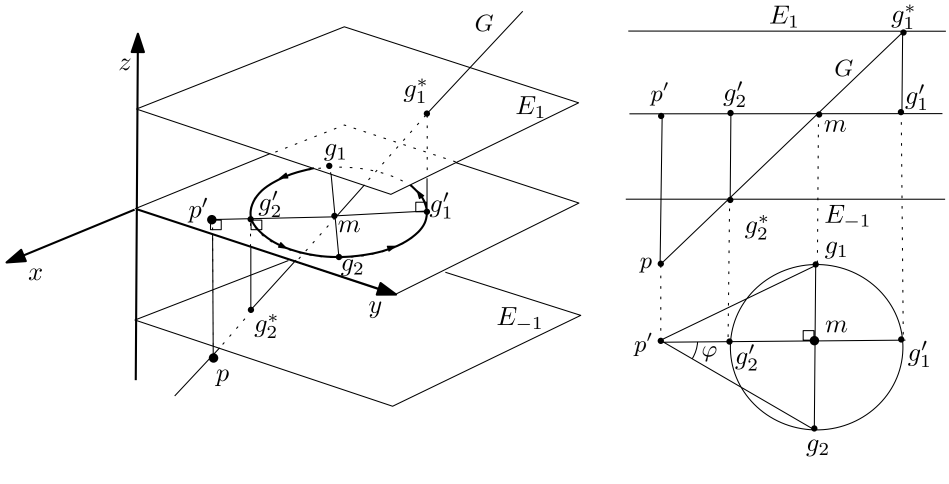




شکل ۷. تناظر بین نقاط فضا با دوران‌های صفحه و تعبیر هندسی نیم‌دوران در صفحه.

با گسترش ایده‌های اشپرنر در سال ۲۰۱۱ توسط «کارتسل» و «طاهریان»، ساختارهای هندسی کلی‌تری موسوم به فضاهای بازتابی مطرح شد که در ادامهٔ این نوشتار به معرفی آن می‌پردازیم. در آغاز به یادآوری ایده‌های مشابهی از بلاشکه در این مورد می‌پردازیم.
همان‌گونه که پیش از این هم اشاره شد، بلاشکه در [۲] نگاشتی مطرح کرد که نقاط صفحهٔ اقلیدسی را در فضای پدید آمده از گروه دوران‌های آن می‌نشاند. به کمک این نگاشت و با استفاده از گروه دوران‌های صفحهٔ اقلیدسی یک ساختار هندسی سه‌بعدی (فضای حرکت) ساخته می‌شود که صفحهٔ اقلیدسی زیر ساختاری از آن است. وجود یک تناظر یک به یک بین نقاط فضا و دوران‌های صفحه را می‌توان به شکل‌های مختلفی بیان کرد. برای مثال هر دوران در صفحهٔ اقلیدسی به وسیلهٔ یک مرکز مانند p و یک زاویهٔ دوران مانند θ مشخص می‌شود. بنابراین می‌توانیم دوران حول نقطهٔ p با زاویهٔ دوران θ در صفحهٔ اقلیدسی را به نقطه‌ای در فضای سه بعدی اقلیدسی واقع بر خط عمود بر صفحه در p نظیر کنیم که فاصلهٔ آن از p برابر $\arctan\theta$ است (شکل ۷). به این ترتیب دوران‌های صفحه حول p در تناظر یک به یک با نقاط واقع بر خط عمود بر آن صفحه در p قرار می‌گیرند. برای بیان ایدهٔ بلاشکه که بر اساس آن مفهوم فضای حرکت پدید آمد تناظر بین دوران‌ها و نقاط فضای سه بعدی اقلیدسی را با استفاده از نگاشتی موسوم به **نگاشت بلاشکه** با جزییات بیشتری مطرح می‌کنیم. نگاشت بلاشکه این تناظر را به تعبیری هندسی‌تر بیان می‌کند.
فرض کنیم صفحه‌ی اقلیدسی مورد نظر، صفحهٔ xoy و جهت مثبت دوران همان جهت مثبت مثلثاتی در هندسهٔ مقدماتی باشد. به عبارت دیگر اگر ناظری در امتداد جهت مثبت محور z

بایستد، با حرکت در جهت مثبت، محور x را بر محور y قرار می‌دهد. برای سادگی صفحه‌های $z=1$ و $z=-1$ را به ترتیب با E_1 و E_{-1} نشان می‌دهیم (شکل ۸). فرض کنیم $p=(x,y,z)^t$ نقطهٔ دلخواهی در فضای سه بعدی اقلیدسی و واقع بر خطی دلخواه مانند G ناموازی با محور z باشد. اگر g_1^* و g_2^* به ترتیب نقطه‌های تلاقی G با صفحه‌های E_1 و E_{-1} باشند، تصویر قائم g_1^* و g_2^* بر صفحهٔ xoy را به ترتیب با g_1' و g_2' نشان می‌دهیم. همچنین نقطه‌ی $p'=(x,y,0)^t$ را تصویر قائم p بر صفحهٔ xoy در نظر می‌گیریم. اگر نقاط g_1' و g_2' را در جهت مثبت حول m، نقطهٔ تلاقی G با صفحهٔ xoy به اندازه‌ی زاویهٔ قائمه دوران دهیم، زوج نقطه‌ای چون (g_1,g_2) به دست می‌آید. مشاهده می‌شود که بنابر تشابه مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ $\triangle(m,g_2',g_2^*)$ و $\triangle(m,p',p)$ نتیجه می‌شود $z=\frac{|pp'|}{|g_2'g_2^*|}=\frac{|p'm|}{|mg_2'|}$. چون g_1 و g_2 به ترتیب از دوران g_1' و g_2' به اندازهٔ زاویهٔ قائمه به دست آمده‌اند، برای $\varphi:=\angle(m,p',g_2)=-\angle(m,p',g_1)$ داریم $\operatorname{cotan}\varphi=-z$. پس نقطهٔ g_2 از دوران نقطهٔ g_1 در جهت مثبت و به اندازهٔ زاویهٔ $\varphi=\operatorname{arccotan}(-z)$ به دست می‌آید. به این ترتیب نگاشتی مشخص کرده‌ایم که هر خط شامل $p=(x,y,z)^t$ را به یک زوج (g_1,g_2) نظیر می‌کند به گونه‌ای که g_2 دوران یافتهٔ g_1 در جهت مثبت به اندازهٔ زاویهٔ $\varphi=\operatorname{arccotan}(-z)$ است. با تغییر خط G زوج (g_1,g_2) تغییر می‌کند ولی زاویهٔ بین آنها همان φ است. به این ترتیب نقطهٔ p نظیر یک دوران در صفحهٔ اقلیدسی به زاویهٔ $\varphi=\operatorname{arccotan}(-z)$ است. بهتر است بگوییم به کمک این نگاشت بافهٔ خط‌هایی که p بر آنها واقع است به یک دوران (حاصل‌ضرب دو بازتاب خطی) در صفحه نظیر می‌شود.



شکل ۸. تناظر بین یک نقطه از خط با حاصل‌ضرب دو بازتاب خطی توسط نگاشت بلاشکه.

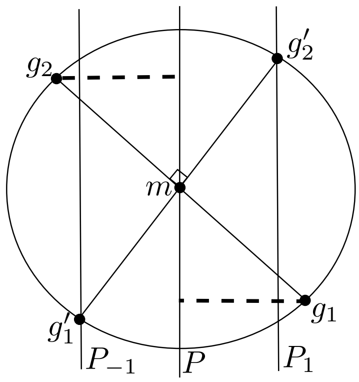
در ادامه نشان می‌دهیم که خط‌های واقع بر یک صفحهٔ π و ناموازی با صفحهٔ xoy، توسط نگاشت بلاشکه به یک حرکت نگاشته می‌شوند که حاصل ضرب سه بازتاب خطی است. صفحهٔ π

صفحه‌های E_1، xoy و E_{-1} را در خط‌های موازی قطع می‌کند که تصویر قائم آنها بر صفحهٔ xoy را به ترتیب P_1، P و P_{-1} می‌نامیم (شکل ۹). به این ترتیب بازتاب خطی نسبت به P خطوط P_1 و P_{-1} را به یکدیگر تبدیل می‌کند. برای خط دلخواه G که در π واقع است به کمک نگاشت بلاشکه ابتدا زوج نقاط (g_1^*, g_2^*) به دست می‌آیند که $g_1^* \in E_1$ و $g_2^* \in E_{-1}$. سپس تصویر این زوج نقاط بر صفحهٔ xoy یعنی (g_1', g_2') به دست می‌آیند. در گام بعد با دوران دادن این دو نقطه حول m در جهت مثبت زوج نقاط (g_1, g_2) به دست می‌آیند. رابطهٔ بین g_1 و g_2 را می‌توان به شکل دیگری هم تعبیر کرد. کافی است ابتدا بازتاب g_1 را نسبت به خط P به دست آوریم و سپس آن را به اندازهٔ فاصلهٔ دو خط P_1 و P_{-1} در راستای خط P انتقال دهیم (شکل ۹). مشاهده می‌شود که فاصلهٔ دو خط P_1 و P_{-1} برابر $2\operatorname{cotan}\phi$ است که ϕ زاویهٔ بین صفحات π و xoy است. از سوی دیگر در صفحهٔ اقلیدسی هر انتقال به صورت حاصل‌ضرب دو بازتاب خطی قابل نمایش است. به این ترتیب هر صفحهٔ π در فضای اقلیدسی سه بعدی نظیر یک حرکت است و این حرکت به صورت حاصل‌ضرب سه بازتاب خطی قابل نمایش است.

برای درک بهتر ایدهٔ بلاشکه و بیان تحلیلی مفهوم فضای حرکت، تناظر بین دوران‌های صفحه با یک خط تصویری را با رهیافت تحلیلی هم مطرح می‌کنیم.

فرض کنیم $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ یک گسترش میدان اعداد مختلط روی میدان اعداد حقیقی از مرتبهٔ دو باشد. به کمک این گسترش، گاوس بیان تحلیلی بسیار ساده‌ای برای صفحهٔ اقلیدسی به دست آورد. با این روش، مجموعهٔ نقاط صفحهٔ اقلیدسی مجموعهٔ اعداد مختلط است، مجموعهٔ خطوط عبارت است از $\mathbf{L} := \{a + b\mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{C}, b \neq 0\}$ و هم‌نهشتی (قابلیت انطباق) دو پاره‌خط (a,b) و (c,d) به وسیلهٔ رابطهٔ زیر بیان می‌شود:

$$(a,b) \equiv (c,d) \Longleftrightarrow (a-b)\overline{(a-b)} = (c-d)\overline{(c-d)}$$



شکل ۹. تناظر بین صفحه در فضا با حاصل ضرب سه بازتاب خطی توسط نگاشت بلاشکه.

در صفحهٔ اقلیدسی هر حرکت یک یکریختی طولپا است. به عبارت دیگر نگاشت یک

به یک و پوشای $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ حرکت نامیده می‌شود هرگاه $(a, b) \equiv (\varphi(a), \varphi(b))$. حرکت‌های صفحهٔ اقلیدسی با عمل ترکیب توابع تشکیل یک گروه می‌دهند که آن را با $\mathcal{M}$ نشان می‌دهیم. برای توصیف بیشتر $\mathcal{M}$ از حرکت‌های مقدماتی زیر استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $a \in \mathbb{C}$، و $b \in \mathbb{S} := \{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} = 1\}$

$$^{-} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,;\ z \mapsto \bar{z}, \qquad a^{+} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,;\ z \mapsto a + z, \qquad b^{\cdot} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,;\ z \mapsto bz$$

مجموعهٔ $\mathcal{M}^{+} := \{a^{+} \circ b^{\cdot} \mid a \in \mathbb{C},\ b \in \mathbb{S}\}$ یک زیرگروه $\mathcal{M}$ است که اعضای آن را **حرکت‌های سره**[1] می‌نامیم. مجموعهٔ $\mathcal{M}^{+}$ همان زیرگروه دوران‌ها است که هر یک از اعضای آن را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب دو بازتاب خطی بیان کرد. علاوه بر این $\mathcal{M}^{-} := \mathcal{M}^{+} \circ {}^{-}$ یک هم‌مجموعهٔ $\mathcal{M}^{+}$ است که اعضای آن را **حرکت‌های ناسره**[2] می‌نامیم. اعضای این مجموعه به صورت حاصل‌ضرب سه بازتاب خطی قابل بیان هستند و می‌توان نشان داد که $\mathcal{M} = \mathcal{M}^{+} \,\dot\cup\, \mathcal{M}^{-}$. دوران‌های صفحهٔ اقلیدسی با نقطهٔ ثابتی مانند o یک زیرگروه جابجائی $\mathcal{M}$ یکریخت با $(\mathbb{S}, \cdot)$ است. از سوی دیگر چون $\mathbb{C}$ یک فضای برداری دوبعدی روی $\mathbb{R}$ است یک خط تصویری از آن به دست می‌آید. برای $\mathbb{R}^{*} := \mathbb{R} \setminus \{0\}$، $\mathbb{C}^{*} := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ و $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{*}/\mathbb{R}^{*}\ ;\ \mathfrak{x} \mapsto \mathbb{R}^{*}\mathfrak{x}$، مجموعهٔ نقاط خط تصویری عبارت است از:

$$\overline{P} := \varphi(\mathbb{C}^{*}) = \{\mathbb{R}^{*}\mathfrak{x} \mid \mathfrak{x} \in \mathbb{C}^{*}\}$$

در واقع نقاطِ خط تصویری به جای مختصات مستوی $\mathfrak{x} = (x_1, x_2)$ دارای مختصات تصویری $\mathbb{R}^{*}\mathfrak{x} = \{(\leftarrow x_1, \leftarrow x_2) \mid \leftarrow \in \mathbb{R}^{*}\}$ هستند. در این صورت نگاشت κ با ضابطهٔ $e^{i\theta} \mapsto e^{i\frac{\theta}{2}}$ یک یکریختی بین دو گروه $(\mathbb{S}, \cdot)$ و $(\mathbb{C}^{*}/\mathbb{R}^{*}, \cdot)$ است. نگاشت κ را **نگاشت حرکت**[3] می‌نامیم. به این ترتیب برای $z = e^{i\theta} \in \mathbb{S},\ z \neq -1$، با توجه به این که $\mathbb{R}^{*} e^{i\frac{\theta}{2}} = \mathbb{R}^{*}\sqrt{z} = \mathbb{R}^{*}\frac{1+z}{(1+z)\overline{(1+z)}} = \mathbb{R}^{*}(1 + z)$، نگاشت κ نقطهٔ z را به نقطهٔ $\mathbb{R}^{*}(1 + z)$ بر خط تصویری $\mathbb{C}^{*}/\mathbb{R}^{*}$ می‌نگارد و نقطهٔ $z = -1$ به نقطهٔ دور این خط نگاشته می‌شود. این بحث برای هر میدان توسیعی جداشدنی مرتبهٔ ۲ مانند $(\mathbb{L}, \mathbb{K})$ برقرار است به شرط آن که $^{-}$ خودریختی نابدیهی با میدان ثابت $\mathbb{K}$ در نظر گرفته شود. در ادامهٔ نوشتار به یادآوری پیش‌نیازهایی می‌پردازیم که برای بیان فضای بازتابی لازم است. فرض کنیم P یک مجموعه‌ی ناتهی باشد که اعضای آن را **نقطه** می‌نامیم. مجموعهٔ ناتهی $\mathbf{L}$ را مجموعهٔ دیگری در نظر می‌گیریم که اعضای آن **خط** نامیده می‌شوند (در برخی از مراجع مانند [٦] برای سادگی $\mathbf{L}$ زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ توانی P در نظر گرفته شده است). زوج $(P, \mathbf{L})$ را یک **فضای وقوعی**[4] می‌نامیم هرگاه رابطه‌ای موسوم به **وقوع** روی $P \times \mathbf{L}$ تعریف شده باشد به قسمی که برای آن بُنداشت‌های زیر برقرار باشند.

$\mathbf{I}_1$. برای هر دو نقطهٔ متمایز x و y در P، خط یکتای $L \in \mathbf{L}$ وجود دارد که x, y بر L واقعند.

$\mathbf{I}_2$. بر هر خط L حداقل دو نقطه واقع است.

1) proper motions 2) improper motions 3) kinematic map 4) incidence space

برای هر دو نقطهٔ متمایز x و y در P، خط یکتائی را که $\mathbf{I}_1$ مشخص می‌کند با $\overline{x,y}$ نشان می‌دهیم. اگر نقطهٔ x بر خط L واقع باشد می‌گوییم x نقطه‌ای از L است یا نقطهٔ x روی خط L قرار دارد.

مجموعه‌ای از نقاط مانند $M \subseteq P$ **هم‌خط**[۱] نامیده می‌شوند هر گاه بر یک خط واقع باشند.
اگر $(P,\mathbf{L})$ و $(P',\mathbf{L}')$ دو فضای وقوعی باشند، نگاشت دوسویی ϕ که $P \mapsto P'$ و $\mathbf{L} \mapsto \mathbf{L}'$، یک **یکریختی**[۲] بین $(P,\mathbf{L})$ و $(P',\mathbf{L}')$ نامیده می‌شود هرگاه وقوع را حفظ کند. یعنی x بر L واقع باشد اگر و تنها اگر $\varphi(x)$ بر $\varphi(L)$ واقع باشد. در حالتی که $(P',\mathbf{L}') = (P,\mathbf{L})$، یکریختی را **هم‌خطی**[۳] **یا خودریختی** می‌نامیم.

برای زیر مجموعه‌های $P_1 \subseteq P$ و $\mathbf{L}_1 \subseteq L$ زوج $(P_1,\mathbf{L}_1)$ را یک **زیرفضای**[۴] $(P,\mathbf{L})$ می‌نامیم هرگاه برای هر دو نقطه متمایز a و b در P_1، $\overline{a,b} \in L_1$.

از این پس برای سادگی $\mathbf{L}$ را زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ توانی P در نظر می‌گیریم.

با این قرارداد $T \subseteq P$ زیرفضای $(P,\mathbf{L})$ نامیده می‌شود هرگاه برای هر دو نقطهٔ متمایز a و b در T داشته باشیم $\overline{a,b} \subseteq T$.

فرض کنیم $\mathfrak{S}$ مجموعهٔ تمام زیرفضاهای $(P,\mathbf{L})$ باشد. در این صورت اگر U و V دو زیرفضای $(P,\mathbf{L})$ باشند آنگاه $U \cap V$ نیز زیرفضای $(P,\mathbf{L})$ خواهد بود. برای $S \in \mathfrak{S}$ قرار می‌دهیم $\mathbf{L}_S := \{L \in \mathbf{L} \mid L \subseteq S\}$. برای $S \subseteq P$ **بستار وقوعی**[۵] S، فضای وقوعی $\overline{S} := \bigcap_{S \subseteq T \in \mathfrak{S}} T$ است. همچنین **بعد**[۶] زیرفضای T عبارت است از $\dim T := \inf\{|S| \mid \overline{S} = T\} - 1$. برای مثال هر خط یک زیرفضای یک بعدی است. با این تعریف، منظور از **صفحه** یک زیرفضای دو بعدی $(P,\mathbf{L})$ است. از این پس $\mathcal{E}$ را مجموعهٔ تمام صفحه‌های $(P,\mathbf{L})$ در نظر می‌گیریم.

فرض کنیم $(G,\cdot)$ یک گروه با عضو همانی e باشد. برای مجموعهٔ ناتهی $\mathfrak{F}$ از زیرگروه‌های سرهٔ G، زوج $(G,\mathfrak{F})$ را یک **کلاف**[۷] G می‌نامیم هرگاه شرط‌های زیر برقرار باشند.

۱) $\bigcup_{F \in \mathfrak{F}} F = G$.

۲) برای هر دو عضو متمایز $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}$، $F_1 \cap F_2 = \{e\}$.

یک کلاف را **کلاف حرکت**[۸] می‌نامیم هرگاه علاوه بر شرط‌های بالا، شرط زیر هم برقرار باشد.

۳) برای هر $F \in \mathfrak{F}$ و هر $g \in G$، $gFg^{-1} \in \mathfrak{F}$.

مثلاً برای گروه جمعی $(\mathbb{C},+)$ با عضو همانی ۰ و $\mathfrak{F} = \{< \mathbf{a} > \mid \mathbf{a} \in \mathbb{C}\}$ که در آن $< \mathbf{a} > := \{\lambda\mathbf{a} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$، زوج $(\mathbb{C},\mathfrak{F})$ یک کلاف حرکت برای گروه جمعی $(\mathbb{C},+)$ است.

گزاره ۱۰. فرض کنیم $(G,\cdot)$ یک گروه با عضو همانی e و $(G,\mathfrak{F})$ یک کلاف برای آن باشد. در این صورت برای $\mathfrak{G} := \{gF \mid g \in G,\ F \in \mathfrak{F}\}$ داریم:

---
1) collinear 2) isomorphism 3) collineation 4) subspace 5) incidence closure
6) dimension 7) fibration 8) kinematic fibration

۱) $(G,\cdot,\mathfrak{G})$ یک **گروه وقوعی** است یعنی $(G,\mathfrak{G})$ یک فضای وقوعی و برای هر a در G نگاشت $a^{\cdot} : G \to G \ ; \ x \mapsto ax$ یک خودریختی $(G,\mathfrak{G})$ است.

۲) اگر $(G,\mathfrak{F})$ یک کلاف حرکت برای گروه $(G,\cdot)$ باشد آنگاه نگاشت $^{\cdot}a : G \to G \ ; \ x \mapsto xa$ نیز یک خودریختی $(G,\mathfrak{G})$ است. علاوه بر این سه تائی $(G,\cdot,\mathfrak{G})$ یک **فضای حرکت** است، یعنی برای $(G,\cdot,\mathfrak{G})$ هر دو نگاشت $a^{\cdot}$ و $^{\cdot}a$ خودریختی‌های $(G,\mathfrak{G})$ و خط‌های شامل e زیرگروه‌های $(G,\cdot)$ هستند.

اگر $(G,\mathfrak{F})$ یک کلاف حرکت باشد آنگاه $(G,\cdot,\mathfrak{G})$ را **فضای حرکت**[۵] نظیر آن می‌نامیم.

در آنچه ابتدای این بخش مطرح شد گروه G همان گروه دوران‌های صفحهٔ اقلیدسی است.

این گروه را می‌توان اجتماع زیرگروه‌های آن یعنی دوران‌های صفحه حول یک نقطهٔ ثابت در نظر گرفت. فضای حرکت به دست آمده از این گروه همان فضای سه بعدی شامل صفحهٔ اقلیدسی است. در بخش بعد به جای گروه دوران‌های صفحه، یک گروه دلخواه قرار می‌دهیم و فضای حرکت نظیر آن را بررسی می‌کنیم.

۲ فضای بازتابی

فرض کنیم Γ یک گروه باشد که عضو همانی آن را با ۱ نمایش می‌دهیم. همچنین فرض کنیم مجموعه‌ی $J := \{x \in \Gamma \mid x^{۲} = ۱,\ x \neq ۱\}$ زیرمجموعه‌ی عضوهای خودوارون Γ و P زیر مجموعه‌ای از J باشد. **فضای بازتابی** (P,Γ) به وسیله‌ی چند ویژگی زیر تعریف می‌شود:

(S1) **مجموعهٔ P گروه Γ را تولید می‌کند، یعنی** $\Gamma =< P >$.

پیش از بیان ویژگی دوم، ابتدا برای $a,b \in P$ قرار می‌دهیم:

$$\Pi(a) := \{x \in P \setminus \{a\} \mid xa = ax\}$$

$\Pi(a)$ را **قطب** نقطهٔ a می‌نامیم. همچنین فرض کنیم

$$\overline{a,b} := \begin{cases} \{x \in P \mid abx \in J\} & ab \neq ba \\ \{x \in P \setminus \Pi(a) \mid abx \in J\} \cup \{b\} & a \neq b \ , \ ab = ba \end{cases}$$

و $\mathbf{L} := \{\overline{a,b} \mid a,b \in \binom{P}{۲}\}$. بر اساس این تعریف‌ها، برای فضای بازتابی ویژگی زیر را هم می‌پذیریم:

(S2) (ضرب سه بازتاب) **برای هر L در $\mathbf{L}$ و هر سه عضو x,y,z در** L، $xyz \in P$.

از این پس عضوهای P و $\mathbf{L}$ را به ترتیب **نقطه** و **خط** می‌نامیم.

1) kinematic space

یادآوری می‌کنیم که در کارهای اشپرنر همزاد این رهیافت مطرح شده است [۱۱]. به عبارت دیگر وی عضوهای P را خط و عضوهای $\mathbf{L}$ را نقطه در نظر گرفته است. هر یک از این دو رهیافت مزیت‌ها و کاستی‌هایی دارد. با رهیافت اشپرنر مثال‌هایی از صفحهٔ مطلق مسطح و هندسه‌های **تکین**[۱] (مانند هندسهٔ اقلیدسی) یعنی فقط فضاهای مسطح به دست می‌آیند. در حالی که با رهیافت دوم محدودیت بعد وجود ندارد ولی مثالی از هندسه‌های تکین به دست نمی‌آید. به منظور ارائهٔ مثال‌های شهودی از فضای بازتابی، هندسه‌های مطلق (مانند هندسهٔ اقلیدسی یا هذلولوی) را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $\widetilde{P} := \{\widetilde{p} \mid p \in P\}$ مجموعهٔ بازتاب‌های نقطه‌ای و $\Gamma :=< \widetilde{P} >$ گروه تولید شده به وسیلهٔ $\widetilde{P}$ باشد. در این صورت $(\widetilde{P}, \Gamma)$ مثالی از یک فضای بازتابی است. در این هندسه‌ها برای هر سه نقطهٔ هم‌خط a، b و c بازتاب‌های $\widetilde{a}$، $\widetilde{b}$ و $\widetilde{c}$ در $(\widetilde{P}, \Gamma)$ هم‌خط هستند، یعنی $\widetilde{a} \circ \widetilde{b} \circ \widetilde{c} \in J$. وارون این مطلب فقط برای هندسه‌های **عادی**[۲] مثل هندسهٔ هذلولوی برقرار است ولی برای هندسه‌های تکین مانند هندسهٔ اقلیدسی برقرار نیست. برای هندسه‌های تکین همواره $\widetilde{a} \circ \widetilde{b} \circ \widetilde{c} \in J$. به عبارت دیگر تمام نقاط بر یک خط واقع هستند، یعنی $\mathbf{L} = \{\widetilde{P}\}$. برای کنار گذاشتن حالت‌های بدیهی و هندسه‌های تکین، ویژگی دیگری را به دو ویژگی قبلی اضافه می‌کنیم.

(S3) **نقطه‌های** x, y, z **در** P **وجود دارند به قسمی که** $xyz \notin J$.

طبق این بنداشت سه نقطهٔ متمایز داریم که بر یک خط واقع نیستند. بنابر گزارهٔ ۲ نظیر هر فضای بازتابی یک فضای وقوعی $(P, \mathbf{L})$ وجود دارد. از بنداشت **(S3)** نتیجه می‌شود $|P| \geq ۳$ و $|\mathbf{L}| \geq ۳$. همان‌گونه که گفتیم به وسیلهٔ بنداشت **(S3)** حالت‌های بدیهی کنار گذاشته می‌شوند.

به منظور پوشاندن حالت‌هایی که $\Pi(p)$ برای نقطه‌ای چون $p \in P$ ناتهی است، شرط زیر را نیز برای یک فضای بازتابی می‌پذیریم.

(S4) **(قطب)** **برای هر** $a, b, c, d \in P$ **که** $b \neq c$، **اگر** $ab, ac, bcd \in J$ **آنگاه** $ad \in J$.

برای تعبیر هندسی این خاصیت باید یادآوری کرد که در هندسه‌هائی مانند صفحهٔ کلاسیک بیضوی که برای هر نقطه مانند a یک قطب وجود دارد، نقطه‌های قطب تنها نقطه‌هایی (غیر از a) هستند که در شرط $ab \in J$ (یا به طور معادل $ab = ba$) صدق می‌کنند. در مدل کروی صفحهٔ کلاسیک بیضوی، دایرهٔ عظیمه‌ای که بر همهٔ دایره‌های عظیمهٔ گذرنده از a عمود است قطب نقطهٔ a است. بنداشت قطب در واقع می‌گوید که اگر b و c در قطب a باشند آنگاه هر نقطهٔ d واقع بر خط $\overline{b, c}$ نیز در شرط $ad \in J$ صدق می‌کند، یعنی در قطب a قرار می‌گیرد. به بیان دقیق‌تر، از شرط قطب نتیجه می‌شود که $\Pi(a)$ یک زیرفضا است. به عبارت دیگر برای هر $a \in P$، $\Pi(a) \in \mathfrak{S}$. به این ترتیب برای $T \subseteq P$ داریم $\Pi(T) := \bigcap_{t \in T} \Pi(t) \in \mathfrak{S}$.

در بحث مربوط به فضاهای بازتابی که نقاطی از آن قطب دارند، می‌گوییم سه نقطهٔ $a, b, c \in P$ تشکیل یک **مثلث قطبی** می‌دهند هرگاه $c, a \in \Pi(b)$، $b, c \in \Pi(a)$ و $a, b \in \Pi(c)$.

1) singular 2) ordinary

۱.۲ گروه هم‌خطی‌های یک فضای بازتابی

فرض کنیم $\mathrm{Aut}\ (P,\mathbf{L})$ گروه هم‌خطی‌های فضای وقوعی $(P,\mathbf{L})$ نظیر فضای بازتابی (P,Γ) باشد. یعنی $\mathrm{Aut}\ (P,\mathbf{L})$ مجموعهٔ همهٔ نگاشت‌های یک به یک و پوشای $\sigma : P \to P$ است چنان که برای هر $L \in \mathbf{L}$ داریم $\sigma(L) \in \mathbf{L}$. از بنداشت $(\mathbf{S2})$ نتیجه می‌شود برای $p, x \in P$، $pxp \in P$. پس می‌توان نگاشت $\widetilde{p} : P \to P\ ;\ x \mapsto pxp$ را تعریف کرد که به آن **بازتاب نقطه‌ای نسبت به نقطهٔ** p می‌گوییم. بنابر $(\mathbf{S2})$ نگاشت $\widetilde{p}$ یک هم‌خطی است. همچنین بنابر $(\mathbf{S1})$، مجموعهٔ P گروه Γ را تولید می‌کند. پس هر خودریختی داخلی $\gamma_i : \Gamma \to \Gamma\ ;\ \xi \mapsto \gamma\xi\gamma^{-1}$ مجموعهٔ P را به خودش می‌نگارد و بازتاب نقطه‌ای $\gamma_i|_P$ یک هم‌خطی است. قرار می‌دهیم $\widetilde{P} := \{\widetilde{p} \mid p \in P\}$ و $\Gamma_i := \{\gamma_i \mid \gamma \in \Gamma\}$.

گزاره ۱۱.

۱) $\widetilde{P} \subseteq \Gamma_i \leq \mathrm{Aut}\ (P,\mathbf{L})$.

۲) هر بازتاب نقطه‌ای $\widetilde{p}$ فقط نقاط $\{p\} \cup \Pi(p)$ وخط‌های شامل p را ثابت نگه می‌دارد.

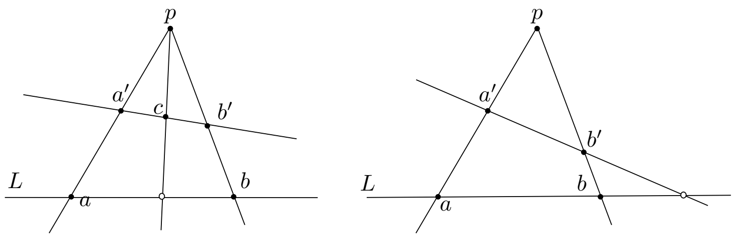
۳) $\widetilde{P}|_P \subseteq \Gamma_i|_P \leq \mathrm{Aut}\ (P,\mathbf{L})$.

۴) اگر $a, b, c \in P$ و $abc \in J$ آنگاه $\widetilde{a} \circ \widetilde{b} \circ \widetilde{c} = \widetilde{abc}$. به ویژه $\widetilde{a} \circ \widetilde{b} \circ \widetilde{a} = \widetilde{\widetilde{a}(b)} = \widetilde{aba}$.

۵) اگر $a, b, c \in P$ به گونه‌ای باشند که $a \neq b$ و $\widetilde{a}(c) = \widetilde{b}(c)$ آنگاه $c \in \overline{a, b}$ و $ab = ba$.

۶) اگر $a, b \in P$ به قسمی باشند که $\gamma := ab \in J^+ := \{ab \mid a, b \in P\}$ آنگاه γ_i یک بازتاب خطی نسبت به خط $\overline{\gamma} = \{x \in P \mid abx \in J\}$ خواهد بود.

۷) اگر $a, b, c \in P$ وجود داشته باشند به گونه‌ای که $abc \notin J$ آنگاه $(\widetilde{P}, \Gamma_i)$ یک فضای بازتابی است و نگاشت $\sim\ : P \to \widetilde{P}\ ;\ p \mapsto \widetilde{p}$ یکریختی بین فضای بازتابی (P,Γ) و فضای بازتابی $(\widetilde{P}, \Gamma_i)$ است.



شکل ۱۰. شرط‌های وبلن ــ پاش.

در ادامه به بررسی فضاهای بازتابی خاصی می‌پردازیم که برای آنها شرط‌های زیر موسوم به شرط‌های **وبلن ــ پاش** برقرار باشند. اثبات برخی از گزاره‌ها را می‌توان در مقالهٔ [۱۵] مشاهده کرد.

فرض کنیم (p,L) یک زوج نقطه و خط باشد که $p \notin L$. این زوج را یک **زوج تصویری** گوییم هرگاه شرایط زیر برقرار باشند (شکل ۱۰).

(PV1) برای نقاط $a,b \in L$، $a' \in \overline{p,a} \setminus \{p\}$ و $b' \in \overline{p,b} \setminus \{p\}$ و $c \in \overline{a',b'} \setminus \{p\}$ داریم $\overline{p,c} \cap L \neq \emptyset$.

(PV2) برای نقاط $a,b \in L$، $a' \in \overline{p,a} \setminus \{p\}$ و $b' \in \overline{p,b} \setminus \{p\}$ داریم $\overline{a',b'} \cap L \neq \emptyset$.

گزاره ۱۲. اگر (p,L) در شرط **(PV1)** صدق کند آنگاه $T := \bigcup_{x \in L} \overline{p,x} \in \mathfrak{S}$.

گزاره ۱۳. فرض کنیم (p,L) یک زوج تصویری باشد و $E := \overline{\{p\} \cup L}$. در این صورت:

۱) E یک صفحه است (یعنی $\dim E = ۲$) و $E = \bigcup_{x \in L} \overline{p,x}$.

۲) برای هر X در $\mathbf{L}_E$، $X \cap L \neq \emptyset$.

۳) اگر $q \in E \setminus L$ آنگاه (q,L) یک زوج تصویری است.

۴) برای هر سه نقطه‌ی غیر هم‌خط $a,b,c \in E$، $\overline{\{a,b,c\}} = E$.

۳ زیرمجموعه‌ها و زیرفضاهای کاهش‌پذیر

در این قسمت به مجموعه‌های خاصی از نقاط در یک فضای بازتابی موسوم به مجموعه‌های کاهش‌پذیر می‌پردازیم. در فضای بازتابی (P,Γ) زیرمجموعهٔ $S \subseteq P$ را **یک مجموعهٔ کاهش‌پذیر** می‌نامیم هرگاه برای هر $a,b,c,d \in S$، عناصر $u,v \in S$ وجود داشته باشند به قسمی که $abcd = uv$. این ویژگی در واقع برگرفته از مثال‌های خاصی مانند برخی از صفحه‌های مطلق است که در آنها حاصل ضرب چهار بازتاب خطی یا نقطه‌ای را می‌توان به شکل حاصل ضرب دو بازتاب خطی یا نقطه‌ای بیان کرد. در این بخش مجموعهٔ $\mathcal{R}$ را مجموعهٔ همهٔ زیرفضاهای کاهش‌پذیر با بعد حداقل ۲ در نظر می‌گیریم. روشن است که مجموعهٔ تهی، مجموعه‌های شامل فقط یک نقطه و خط‌ها (بنابر **(S2)**) کاهش‌پذیر هستند. در گزاره‌های بعد برای $S \subseteq P$ قرار می‌دهیم $\kappa(S) := \{ab \mid a,b \in S\}$.

گزاره ۱۴. در فضای بازتابی (P,Γ) برای هر $\alpha \in \Gamma$ و هر $R \in \mathcal{R}$، $\alpha R \alpha^{-۱} \in \mathcal{R}$.

گزاره ۱۵. فرض کنیم $S,T \subseteq P$ زیرمجموعه‌های ناتهی P باشند. در این صورت:

۱) S کاهش‌پذیر است اگر وتنها اگر $\kappa(S) \leq \Gamma$.

۲) اگر T و S کاهش‌پذیر باشند آنگاه $S \cap T$ کاهش‌پذیر است.

گزاره ۱۶. برای هر خط $L \in \mathbf{L}$، $\kappa(L)$ یک زیرگروه جابجائی Γ است و $\kappa(L) \subseteq \Gamma^+ := P \cdot P$.

گزاره ۱۷. برای هر زیرفضای $T \in \mathfrak{S}$ با $|T| > ۱$، گزاره‌های زیر معادلند.

۱) $\kappa(T)$ مجموعه‌ای است که برای هر a و b در آن $ab = ba$.

۲) $\kappa(T)$ یک گروه جابجائی است.

۳) $T \in \mathbf{L}$، یعنی T یک خط است.

گزاره ۱۸. اگر (p, L) یک زوج تصویری باشد آنگاه صفحهٔ $E := \overline{\{p\} \cup L}$ کاهش‌پذیر است.

۴ فضای حرکت نظیر فضاهای کاهش‌پذیر

در این بخش فرض می‌کنیم فضای بازتابی (P, Γ) یک فضای کاهش‌پذیر باشد. در نتیجه بنابر گزاره‌ی ۲، $\Gamma^+ := P \cdot P \leq \Gamma$ و $\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$ که در آن $\Gamma^- := P \cdot P \cdot P$. به این ترتیب دو دسته فضای بازتابی وجود دارد. برای یک دسته $\Gamma^+ \cap \Gamma^- = \emptyset$ و برای دسته‌ی دیگر $\Gamma^+ \cap \Gamma^- \neq \emptyset$. در حالت دوم $\Gamma^+ = \Gamma^- = \Gamma$, $P \subseteq \Gamma^+$ و در نتیجه مثلث قطبی (a, b, c) وجود داد که $c = ab$.

در این بخش مانند قبل فرض می‌کنیم $\mathfrak{G}$ مجموعهٔ همهٔ زیرفضاهای (P, Γ) باشد. برای $\alpha = ab \in \Gamma^+ \setminus \{۱\}$ قرار می‌دهیم:

$$[\alpha] = a \cdot \overline{a, b} := \{ax \mid x \in \overline{a, b}\}$$

در این‌صورت $[\alpha]$ یک زیرمجموعه و حتی یک زیرگروه از مرکزساز α در Γ^+ است و اگر $c, d \in \overline{a, b}$ به گونه‌ای باشند که $c \neq d$، آنگاه $[\alpha] = a \cdot \overline{c, d} = c \cdot \overline{c, d}$. قرار می‌دهیم:

$$\mathfrak{F} := \{[\alpha] \mid \alpha \in \Gamma^+ \setminus \{۱\}\}.$$

همچنین برای $\varepsilon \in \Gamma^-$ فرض کنیم:

$$\langle\!\langle \varepsilon \rangle\!\rangle := \{\xi \in \Gamma^+ \mid \varepsilon\xi \in J\} \quad \text{و} \quad \mathfrak{E} := \{\langle\!\langle \varepsilon \rangle\!\rangle \mid \varepsilon \in \Gamma^-\}.$$

همچنین برای $\alpha, \beta \in \Gamma^+$ قرار می‌دهیم:

$$\ll\alpha, \beta\gg := \{\langle\!\langle \varepsilon \rangle\!\rangle \in \mathfrak{E} \mid \alpha, \beta \in \langle\!\langle \varepsilon \rangle\!\rangle\}.$$

با توجه به این‌که فضای بازتابی (P, Γ) یک فضای کاهش‌پذیر است و این‌که $\varepsilon \in \Gamma^-,\ \xi \in \Gamma^+$، داریم

$$\varepsilon\xi \in J \Longleftrightarrow \varepsilon\xi \in P.$$

بنابر این (مقایسه کنید با گزارهٔ ۱۰):

قضیه ۱۹. ساختار $(\Gamma^+, \mathfrak{F})$ یک کلاف حرکت است و اگر $(\Gamma^+, \cdot, \mathfrak{G})$ فضای حرکت نظیر آن باشد آنگاه:

۱) $\mathfrak{F}$ شامل زیرگروه‌های جابجائی Γ^+ است.

۲) برای $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma^+$ و $\alpha \neq \beta$ نقاط $c, d, x, y \in P$ وجود دارند که $\alpha^{-1}\gamma = xy$، $\alpha^{-1}\beta = cd$ و خط شامل α, β عبارت است از:

$$[\alpha, \beta] := \alpha[\alpha^{-1}\beta] = \alpha c\ \overline{c, d}.$$

و هم‌خطی α, β, γ در $(\Gamma^+, \cdot, \mathfrak{G})$ با $dxy \in P$ هم‌ارز است.

۳) برای $\varepsilon \in \Gamma^-$، $\langle\varepsilon\rangle = \varepsilon^{-1} \cdot P$ یک زیرفضای $(\Gamma^+, \mathfrak{G})$ است و $1 \in \langle\varepsilon\rangle$ اگر و تنها اگر $\varepsilon \in P$. در ادامه قرار می‌دهیم $\mathfrak{G}_\varepsilon := \{A \in \mathfrak{G} \mid A \subseteq \langle\varepsilon\rangle\}$.

۴) برای $\alpha \in \Gamma^+$ و $\varepsilon \in \Gamma^-$، نگاشت انتقال چپ

$$\alpha^{\cdot} : \Gamma^+ \to \Gamma^+; \quad \xi \mapsto \alpha\xi$$

زیرفضای $\langle\varepsilon\rangle$ را به زیرفضای $\langle\varepsilon\alpha^{-1}\rangle$ تبدیل می‌کند. بنابر این:

$$\alpha^{\cdot}(\langle\varepsilon\rangle) = \langle\varepsilon\alpha^{-1}\rangle$$

و در نتیجه همهٔ زیرفضاهای $\mathfrak{E}$ یکریختند.

۵) برای هر $a \in P$، نگاشت $a^{\cdot} : P \to \Gamma^+;\ x \mapsto ax$ یک هم‌خطی از فضای وقوعی $(P, \mathbf{L})$ به فضای وقوعی $(\Gamma^+, \mathfrak{G})$ است که $(P, \mathbf{L})$ را به $(\langle a\rangle, \mathfrak{G}_a)$ می‌نگارد و $\mathfrak{G}_a = \{aL \mid L \in \mathbf{L}\}$.

٦) $\mathfrak{E} = \{abcP \mid a, b, c \in P\}$ ، $\mathfrak{G} = \{abcL \mid a, b, c \in P, L \in L\}$ ، $\mathfrak{F} = \{aL \mid L \in L,\ a \in L\}$.

۷) نگاشت $\nu : \Gamma^+ \to \Gamma^+\ ;\ \xi \mapsto \xi^{-1}$ یک پادریختی است که ۱ و خودوارون‌های Γ^+ را ثابت نگه می‌دارد.

زیرمجموعهٔ $\Sigma \subseteq \Gamma^+$ را یک زیرفضای $(\Gamma^+, \mathfrak{G})$ می‌نامیم هرگاه:

$$\forall \alpha, \beta \in \Sigma \quad , \alpha \neq \beta \qquad [\alpha, \beta] \subseteq \Sigma.$$

اگر Σ مجموعهٔ همهٔ زیرفضاهای $(\Gamma^+, \mathfrak{G})$ باشد آنگاه کلاف حرکت $\mathfrak{F}$ را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\mathfrak{F} = \{[1, \alpha] \mid \alpha \in \Gamma^+ \setminus \{1\}\}.$$

فرض کنیم:

$$\kappa : 2^P \to 2^{\Gamma^+}; X \mapsto X \cdot X := \{xy \mid x, y \in X\}$$

در این صورت تصویر $\mathfrak{S}$ با نگاشت κ را **نشاندن در فضای حرکت** می‌نامیم.

قضیه ۲۰. فرض کنیم $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma^+$ و $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \Gamma^-$. در این صورت:

۱) $\langle\varepsilon_1\rangle = \langle\varepsilon_2\rangle \iff \varepsilon_1 = \varepsilon_2$

۲) اگر $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ آنگاه $u, v \in P$ وجود دارند به قسمی که $\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1} = uv \neq 1$ و

$$\langle\varepsilon_1\rangle \cap \langle\varepsilon_2\rangle = \varepsilon_1^{-1}\ \overline{u,v} = \varepsilon_2^{-1}\ \overline{u,v} \subseteq \Gamma^+$$

به ویژه اگر $a, b \in P, a \neq b$ آنگاه مجموعهٔ

$$\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = a\ \overline{a,b} = b\ \overline{a,b} = \kappa(\overline{a,b})$$

یک خط از فضای حرکت و ۱ بر آن واقع است.

۳) $\ll \gamma\alpha, \gamma\beta \gg = \ll \alpha, \beta \gg \gamma^{-1}$.

و اگر $a, b \in P$ وجود داشته باشند به قسمی که $\alpha^{-1}\beta = ab \neq 1$ آنگاه

$$\ll 1, ab \gg = \{\langle x\rangle \mid x \in \overline{a,b}\} \quad , \quad \ll \alpha, \beta \gg = \{\langle x\alpha^{-1}\rangle \mid x \in \overline{a,b}\}.$$

۴) برای $G \in \mathfrak{G}$ و $\mathfrak{E}(G) := \{\langle\varepsilon\rangle \mid G \subseteq \langle\varepsilon\rangle\}$ اگر $A, B \in \mathbf{L}$ آنگاه:

$$|A \cap B| = |\mathfrak{E}(\kappa(A)) \cap \mathfrak{E}(\kappa(A))|.$$

۵) اگر $a, b \in P, a \neq b$ آنگاه $\kappa(\overline{a,b}) = [1, ab]$.

٦) $\dim\, \kappa(P) \geq \dim\, P + 1$.

۵ ساختارهای حرکت وابسته به فضاهای بازتابی

در این بخش به بررسی فضاهای بازتابی (P, Γ) می‌پردازیم که لزوماً کاهش‌پذیر نیستند. همانند بخش قبل فرض کنیم $\Gamma^+ := P \cdot P = \{ab \mid a, b \in P\}$ و برای $\alpha = ab \in \Gamma^+ \setminus \{1\}$ قرار می‌دهیم:

$$[\alpha] := a\ \overline{a,b} = a\ \overline{\alpha} \quad , \quad a \in \overline{\alpha}.$$

در حالت کلی Γ^+ یک زیرمجموعه از Γ و $[\alpha]$ یک زیرگروه از مرکزساز α در Γ^+ است. قرار می‌دهیم:

$$\mathfrak{F} := \{[\alpha] \mid \alpha \in \Gamma^+ \setminus \{1\}\}.$$

همچنین برای $\varepsilon \in \Gamma^-$ فرض کنیم $\langle\!\langle \varepsilon \rangle\!\rangle := \{\xi \in \Gamma^+ \mid \varepsilon\xi \in P\}$. اکنون برای فضاهای بازتابی (P,Γ) که لزوماً کاهش‌پذیر نیست، مفهوم **ساختار حرکت** را روی Γ^+ مطرح می‌کنیم.

برای $\alpha, \beta \in \Gamma^+$ فرض کنیم $\alpha \smile \beta \Longleftrightarrow \alpha\beta^{-۱} \in \Gamma^+$ و اگر $\alpha^{-۱}\beta = cd$ و $\alpha \neq \beta$ قرار می‌دهیم:

$$[\alpha, \beta] := \alpha c\, \overline{c, d} = \alpha c\, \overline{\alpha^{-۱}\beta}.$$

اگر $u \in \overline{\alpha} \cap \overline{\alpha^{-۱}\beta}$ وجود داشته باشد و قرار دهیم $v := \alpha u$ آنگاه $[\alpha, \beta] = v \cdot \overline{\alpha^{-۱}\beta} \subseteq \Gamma^+$. در این صورت α و β را **قابل اتصال** می‌نامیم. اگر $\beta \neq ۱$ و $\overline{\alpha} \cap \overline{\beta} \neq \emptyset$ آنگاه $\alpha \cdot [\beta] \subseteq \Gamma^+$. قرار می‌دهیم:

$$\mathfrak{G} := \{\alpha F \mid \alpha \in \Gamma^+,\ F \in \mathfrak{F}\ ,\ \alpha F \subseteq \Gamma^+\}.$$

زیرگروه $V \leq \Gamma^+$ را یک v−زیرگروه می‌نامیم هرگاه برای هر $\alpha \in V \setminus \{۱\}$ داشته باشیم $[\alpha] \subseteq V$. فرض کنیم $\mathcal{K}$ مجموعهٔ همهٔ v−زیرگروه‌هائی باشد که در $\mathfrak{F}$ نیستند. برای $V \in \mathcal{K}$ داریم:

$$\mathfrak{F}_V := \{[\alpha] \mid \alpha \in V \setminus \{۱\}\} = \{F \in \mathfrak{F} \mid F \subseteq V\}.$$

فرض کنیم

$$\mathfrak{G}_V := \{\alpha F \mid \alpha \in V,\ F \in \mathfrak{F}_V\}.$$

نگاشت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\kappa : ۲^P \to ۲^{\Gamma^+}; X \mapsto X \cdot X := \{xy \mid x, y \in X\},$$

$$\kappa' : ۲^{\Gamma^+} \to ۲^P; A \mapsto \kappa'(A) := \{x \in P \mid x \cdot A \subseteq P\} = \bigcap\{\overline{\alpha} \mid \alpha \in A^* = A \setminus \{۱\}\}.$$

یادآوری می‌کنیم که $\mathcal{R}$ مجموعهٔ زیرفضاهای کاهش‌پذیر با بعد بزرگتر از ۱ است.

گزاره ۲۱

۱) اگر برای $\alpha, \beta \in \Gamma^+$ با شرط $\alpha \neq \beta$، نقطهٔ $c \in P$ وجود داشته باشد که $a := c\alpha \in P$ و $b := c\beta \in P$ آنگاه $[\alpha, \beta] = c\, \overline{a, b} \subseteq \Gamma^+$.

۲) اگر $L = \overline{a, b} \in \mathbf{L}, a \neq b$ آنگاه $\kappa(L) = a \cdot \overline{a, b} \leq \Gamma^+$.

قضیه ۲۲ فرض کنیم $J^+ := \Gamma^+ \cap J$ و برای $\alpha \in J^+$ فرض کنیم $\overline{\alpha} := \{x \in P \mid \alpha x \in J\}$. در این صورت

۱) اگر $\alpha \in J^+$ آنگاه نگاشت $\alpha_i|_P : P \to P\ ;\ x \mapsto \alpha x \alpha$ یک بازتاب نسبت به خط $\overline{\alpha}$ است.

۲) اگر برای خط $L \in \mathbf{L}$ نقطه‌ی $a \in L$ وجود داشته باشد که $L \cap \Pi(a) \neq \emptyset$ و $b \in L \cap \Pi(a)$ آنگاه $\alpha := ab \in J^+$، $L = \overline{\alpha}$ و $\alpha_i|_P$ بازتابی نسبت به خط L است. علاوه بر این $\alpha_i|_P = \widetilde{a} \circ \widetilde{b}$.

قضیه ۲۳.

۱) فرض کنیم $A \subseteq P$ یک زیرمجموعهٔ کاهش‌پذیر باشد. در این صورت $\kappa(A) \leq \Gamma^+$ و $\kappa' \circ \kappa(A) \subseteq \overline{A}$. افزون بر این اگر A شامل سه نقطهٔ ناهم‌خط باشت آنگاه $\kappa' \circ \kappa(A) = \emptyset$ و اگر نقاط A هم‌خط باشند آنگاه $\kappa' \circ \kappa(A) = \overline{A}$.

۲) نگاشت κ خط‌های $\mathbf{L}$ را به شکل دوسوئی به کلاف‌های $\mathfrak{F}$ و نگاشت κ' کلاف‌های $\mathfrak{F}$ را به شکل دوسوئی به خط‌های $\mathbf{L}$ می‌نگارند (در نتیجه $\kappa \circ \kappa'|_{\mathfrak{F}} = id|_{\mathfrak{F}}$ و $\kappa' \circ \kappa|_{\mathbf{L}} = id|_{\mathbf{L}}$).

۳) برای هر $R \in \mathcal{R}$، $\kappa(R) \in \mathcal{K}$.

۴) برای هر $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ داریم $K_1 \cap K_2 = \{1\}$ یا $K_1 \cap K_2 \in \mathfrak{F}$ و یا $K_1 \cap K_2 \in \mathcal{K}$.

قضیه ۲۴. برای هر $U \in \mathcal{K}$، $(U, \mathfrak{F}_U)$ گروهی با یک کلاف حرکت است (قضیهٔ ۲). بنابر این $(U, \cdot, \mathfrak{G}_U)$ یک فضای حرکت است که $\mathfrak{G}_U \subseteq \mathfrak{G}$.

هر $K \in \mathcal{K}$ را یک **فضای حرکت** در Γ^+ می‌نامیم.

اکنون به مطالعهٔ هندسهٔ $(\mathbf{L}, \mathcal{R})$ شامل خط‌ها و زیرمجموعه‌های سرهٔ (P, Γ) و هندسهٔ $(\mathfrak{F}, \mathcal{K})$ شامل بافه‌های $\mathfrak{F}$ و فضای حرکت $\mathcal{K}$ روی Γ^+ می‌پردازیم.

قضیه ۲۵.

۱) برای $E, E' \in \mathcal{R}$ و $D := E \cap E'$ داریم:

a) اگر $|D| \leq 1$، یعنی $D = \emptyset$ یا D شامل فقط یک نقطه باشد آنگاه $\kappa(E) \cap \kappa(E') = \{1\}$.

b) اگر $|D| \geq 2$ آنگاه $\kappa(E) \cap \kappa(E') = \kappa(D)$.

۲) اگر در (P, Γ) صفحه‌ها تعویض‌پذیر باشند[۱] آنگاه

D یک صفحه در (P, Γ) است $\iff$ $\kappa(E) = \kappa(E')$.

۳) اگر $E \neq E'$ آنگاه $\kappa(E) \neq \kappa(E')$.

۶ مثال‌های دیگر برای فضاهای بازتابی

به جز مثال‌هائی که از گروه بازتاب‌های هندسه‌های مطلق به دست می‌آید مثال جالب دیگری

---

۱) در فضای وقوعی $(P, \mathbf{L})$، زیرفضای T را تعویض‌پذیر می‌نامند هرگاه برای زیرمجموعهٔ $S \subseteq T$، از $x, y \in T$ به ازای $x \in \overline{S \cup \{y\}} \setminus \overline{S}$ نتیجه شود $y \in \overline{S \cup \{x\}}$ [۶]

برای فضای بازتابی قابل بیان است. فرض کنیم $(P, \mathfrak{G}, \equiv)$ یک فضای بیضوی به معنای مراجع [۱۲] و [۱۳] باشد. سورنسن[1] نشان داد که $(P, \mathfrak{G})$ یک فضای تصویری پاپوسی است که بنداشت فانو در آن برقرار است. همچنین به کمک هم‌نهشتی $\equiv$ می‌توان یک نگاشت (قطبی) π تعریف کرد. در این فضای تصویری، بازتاب نقطه‌ای یک نگاشت خودوارون است که نقطه‌های ثابت آن p و نقطه‌های واقع بر $\pi(p)$ هستند و

a, b, c هم خط هستند $\iff \widetilde{a} \circ \widetilde{b} \circ \widetilde{c} \in J \iff \widetilde{a} \circ \widetilde{b} \circ \widetilde{c} \in \widetilde{P}$.

همچنین $(P, \mathbf{L})$ یک فضای تصویری است و اگر E صفحه‌ای (تصویری) در این فضا باشد و خط‌های این صفحه را با $\mathbf{L}_E$ نمایش دهیم و قرار دهیم $\mathfrak{F}_E := \{\kappa(L) \mid L \in \mathbf{L}_E\}$ و $\mathfrak{G}_E := \{aF \mid a \in \kappa(E),\ F \in \mathfrak{F}_E\}$ آنگاه برای $K := \kappa(E)$ زوج $(K, \mathfrak{F}_E)$ یک گروه با کلاف حرکت، $(K, \cdot, \mathfrak{G}_E)$ یک فضای حرکت و $(K, \mathfrak{G}_E)$ یک فضای تصویری سه بعدی خواهد بود [۱۶]. ثابت می‌شود که نگاشت κ در این حالت مجموعهٔ صفحات فضا، یعنی $\mathcal{E}$ را، به صورت یک به یک و پوشا به مجموعهٔ همه v ـ زیرگروه‌ها تصویر می‌کند، $\bigcup \mathcal{K} = \Gamma^+$ و اگر $K_۱, K_۲ \in \mathcal{K}$ و $D = K_۱ \cap K_۲$ آنگاه یا $D = \{۱\}$ یا $D \in \mathfrak{F}$ و یا $D = K_۱ = K_۲$. به ویژه اگر $\dim\ (P, \mathbf{L}) = ۳$ آنگاه هر دو فضای حرکت در $\mathcal{K}$ با یکدیگر یک کلاف $D \in \mathfrak{F}$ مشترک دارند [۱۶].

مراجع

[1] BACHMANN F., *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*, Berlin, Heidelberg, New York. 2. Auflage 1973

[2] BLASCHKE W., *Euklidische Kinematik und nichteuklidische Geometrie. I, II* Zeitschr. f. Math. u. Phys. **60** (1911), 61-92.

[3] HJELMSELEV J., *Geometrie des droites dans l'espace non euclidian* Verk. Dän. Akad. Kopenhagen **51** (1900), 305-330.

[4] HJELMSELEV J., *Neue Begründungder ebebnen Geometrie* , Math. Ann. **64** (1907), 449-474.

[5] H. KARZEL, G. GRAUMANN: *Gruppentheoretische Begründung metrischer Geometrien.* Ausarbeitung der von Prof. H. Karzel in WS 1962/63 an der Uni. Hamburg gehaltenen Vorlesung, 1963.

[6] KARZEL H., SÖRENSEN K., WINDELBERG D., *Einführung in die Geometrie*, Vandenhoeck, Göttingen, 1973.

1) Sörensen

[7] KARZEL H. AND KROLL H. J., *Geschichte der Geometrie seit Hilbert*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1988.

[8] PASH M., *Vorlessungen über neuere Geometrie*, Leipzig, 1882(third edition 1929).

[9] SCHMIDT H. A., *Die Dualität von Inzidenz und Senkrechtstehen in der absoluten geometrie* Math. Ann. **118** (1941/1943), 609-625.

[10] SCHUR F., *Über die Fundamentalsatz der projektiven Geometrie.* Math. Ann. **51** (1899), 401-409.

[11] SPERNER E., *Ein gruppentheoretischer Beweis des Satzes von Desargues in der absoluten Axiomatik.* Archiv der Mathematik **5** (1954) 458-468.

[12] K. SÖRENSEN, *Elliptische Ebenen.* Mitt. Math. Ges. Hamburg. **10** (1976) 277-296.

[13] K. SÖRENSEN, *Elliptische Räume.* Mitt. Math. Ges. Hamburg. **18** (1999) 159-167.

[14] H. KARZEL AND S.-GH TAHERIAN, *Reflection Spaces, Partial K-loops and K-loops.* Results Math. **59** (2011), 213-218.

[15] H. KARZEL AND S.-GH TAHERIAN, *Reflection spaces and corresponding kinematic structures.* Results Math. **63** (2013), 597-610.

[16] H. KARZEL AND S.-GH TAHERIAN, *Elliptic reflection spaces.* accepted paper to appear in Results Math.

سید قهرمان طاهریان
دانشکدهٔ علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان
taherian@cc.iut.ac.ir