فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۵ (پاییز ۱۳۹۳) صص. ۴۷ تا ۶۷

گنجایش همتافته و ارتباط آن با مدارهای بسته

محمد شفیعی

چکیده

در این مقاله پس از معرفی گنجایش همتافته و ارائهٔ چند نمونه از آن، ارتباط آن با وجود مدارهای بسته روی ابررویه‌های یک خمینه همتافته بررسی می‌شود.

واژه‌های کلیدی: خمینه همتافته، گنجایش همتافته، مدار بسته.

۱ مقدمه

یک خمینه همتافته (M,ω) عبارت است از یک خمینه هموار M همراه با ۲ ـ فرم بسته ω که به مفهوم زیر ناتبهگون نیز هست

$$\iota_X\omega = 0 \Longrightarrow X = 0, \qquad X \in TM.$$

چون ω یک ۲ ـ فرم ناتبهگون است، M از بعد زوج بوده و جهت‌پذیر است. در حقیقت اگر خمینه از بعد $2m$ باشد $\omega^m = \omega \wedge \dots \wedge \omega$ یک فرم حجم بر M است.
بارزترین نمونه از خمینه‌های همتافته، فضاهای اقلیدسی $\mathbf{R}^{2m}$ با فرم همتافته استاندارد $\omega_0 = \sum_{i=1}^{m} dx_i \wedge dy_i$ است که در آن $x_1, y_1, \dots, x_m, y_m$ مختصات $\mathbf{R}^{2m}$ را نمایش می‌دهد. اگر M یک خمینه هموار دلخواه باشد، آنگاه (T^*M,ω) یک نمونهٔ مهم دیگری از خمینه‌های همتافته است که در آن $\omega = -d\lambda$ و λ ۱ ـ فرم متعارف روی T^*M است. فضاهای افکنشی مختلط $\mathbb{C}P^m$ و به طور کلی خمینه‌های کیلر همراه با ۲ ـ فرم کیلر نیز رده مهمی از خمینه‌های همتافته را تشکیل می‌دهد.

دو قضیه مهم از داربو[1] و گروموف[2] نقش مهمی در شکل‌گیری هندسه همتافته (به عبارتی توپولوژی همتافته) داشته است. بنا بر قضیه داربو، هر دو خمینه همتافته از بعد یکسان، به طور موضعی هم ارز است. به گونه‌ای دقیق‌تر

قضیه ۱.۱. (قضیه داربو). فرض کنید (M,ω) یک خمینهٔ همتافته از بعد $2m$ باشد. برای هر $p \in M$ نقشه (U,η) حول p وجود دارد به گونه‌ای که $\omega = \eta^*\omega_0$ که در آن ω_0 فرم همتافته استاندارد روی $\mathbf{R}^{2m}$ است.

داربو این حکم مهم را در اواخر قرن نوزدهم ثابت نموده است و این در حالی است که هندسه همتافته در اواخر قرن بیستم به عنوان شاخه‌ای مهم از هندسه مورد توجه واقع شده است. شاید بتوان دلیل این تأخیر طولانی را در محتوای این قضیه جست. طبق این قضیه، خمینه‌های همتافته بر خلاف خمینه‌های ریمانی، ناورداهای موضعی ندارند. البته دلیل دیگری را نیز می‌توان به آن افزود. این که تا مدت‌ها تصور بر این بود که خمینه همتافته، همان خمینه کیلر است، تا این که نمونه‌های زیادی از خمینه‌های همتافته ارائه شد که کیلر نبود ([۱۰، ۱۱]).

در اواخر دههٔ هشتاد قرن بیستم، گروموف حکم شگفت‌انگیزی را ثابت نمود که پایه هندسه همتافته را بنا نهاد. فرض کنید

$$B^{2m}(r) = \{(x_1, y_1, ..., x_m, y_m) \in R^{2m} : \sum_{i=1}^{m} x_i^2 + y_i^2 \leq r^2\}$$

گوی به مرکز مبدأ و شعاع r و

$$Z^{2m}(R) = \{(x_1, y_1, ..., x_m, y_m) \in R^{2m} : x_1^2 + y_1^2 \leq R^2\}$$

استوانه همتافته به شعاع R باشد. این استوانه بر صفحه همتافته x_1y_1 بنا نهاده شده است. از این رو آن را استوانه همتافته می‌نامند.

تعریف ۲.۱. اگر (M_1,ω_1) و (M_2,ω_2)، دو خمینهٔ همتافته هم بعد باشند، نشاننده $\varphi : (M_1,\omega_1) \longrightarrow (M_2,\omega_2)$ را همتافته گوییم هرگاه $\varphi^*\omega_2 = \omega_1$. افزون بر این اگر φ وابرریختی[3] باشد، آن را یک وابرریختی همتافته می‌نامند. یک نشاننده همتافته از M_1 بتوی M_2 را با $M_1 \hookrightarrow M_2$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳.۱. (قضیه نافشردگی گروموف [۱۲]). گوی $B^{2m}(r)$ را می‌توان با یک نشاننده همتافته در استوانه همتافته $Z^{2m}(R)$ نشاند اگر و تنها اگر $r \leq R$.

این حکم به این دلیل شگفت‌انگیز است که بنا بر آن، اگر $R < r$ آنگاه استوانه همتافته $Z^{2m}(R)$ با وجود حجم نامتناهی، **گنجایش** آن را ندارد که گوی $B^{2m}(r)$ را به طور همتافته در خود جای دهد.

1) Darboux 2) Gromov 3) diffeomorphism

این قضیه سرآغاز پرسش‌های عمیق و مفاهیم جدیدی شد که امروزه هندسه همتافته بر آنها بنا شده است. یکی از این پرسش‌ها، پرسش از ماهیت و ابرریختی‌ها و نشاننده‌های همتافته است. هر وابرریختی همتافته، چون ساختار همتافته را نگه می‌دارد، پس حجم را نیز نگه می‌دارد. آیا عکس این مطلب نیز درست است؟ در بعد ۲ چون فرم همتافته، خود فرم حجم نیز هست، وابرریختی‌های حجم نگهدار، همتافته نیز خواهد بود.اما در بعدهای بالاتر، بنا بر قضیه گروموف، ممکن است یک وابرریختی حجم‌نگه‌دار، ساختار همتافته را نگه ندارد. گروموف خود این پرسش را مطرح کرد که چه وقت می‌توان یک خمینه همتافته مفروض را در یک خمینه همتافته دیگر نشاند. با توجه به این گفته‌ها، قطعاً یکی از مانع‌ها، حجم است. اما بنا به قضیه گروموف، حجم تنها مانع نیست. از این رو این قضیه، هوفر[1] و زندر[2] را بر آن داشت که مفهوم گنجایش همتافته را معرفی نمایند.

تعریف ۴.۱. فرض کنید $\mathcal{M}$ خانواده‌ای از خمینه‌های همتافته (احتمالا مرزدار) از بعد $2m$ باشد. یک گنجایش همتافته روی $\mathcal{M}$ عبارت است از یک نگاشت c که به هر خمینه همتافته $(M,\omega)\in\mathcal{M}$، یک عدد نامنفی $c(M,\omega)$ یا ∞ را وابسته می‌کند به گونه‌ای که:

الف) یکنوایی: اگر (M_i,ω_i) ، $i=1,2$، دو عضو $\mathcal{M}$ بوده و $\varphi: M_1\hookrightarrow M_2$ یک نشاننده همتافته باشد آنگاه $c(M_1,\omega_1)\leq c(M_2,\omega_2)$.

ب) همدیسی: برای هر $(M,\omega)\in\mathcal{M}$ و برای هر عدد حقیقی ناصفر a داشته باشیم

$$c(M,a\omega)=|a|c(M,\omega).$$

پ) نرمال بودن:

$$c(B^{2m}(1),\omega_0)=c(Z^{2m}(1),\omega_0)=\pi$$

هوفر و زندر بر اساس ایده‌های گروموف، اولین گنجایش همتافته به نام **پهنای گروموف** را ارائه نمودند. اگر (M,ω) یک خمینه همتافته باشد پهنای گروموف آن $c_G(M,\omega)$ به صورت

$$c_G(M,\omega)=\sup\{\pi r^2: B^{2m}(r)\hookrightarrow M\}$$

تعریف می‌شود (توجه شود که بنا بر قضیه داربو، همواره می‌توان یک گوی $B^{2m}(r)$ با شعاع کوچک r را به طور همتافته در (M,ω) نشاند). با توجه به تعریف، به سادگی می‌توان دید

$$c_G(B^{2m}(r),\omega_0)=\pi r^2=c_G(Z^{2m}(r),\omega_0).$$

بنابراین می‌توان گفت برای نشاندن همتافته گوی $B^{2m}(r)$ در استوانه همتافته $Z^{2m}(R)$ تنها مانع، پهنای گروموف می‌تواند باشد. آیا می‌توان گفت حجم و پهنای گروموف، تنها مانع‌ها برای نشاندن همتافته هستند؟ پاسخ به این پرسش منفی است [۱۲]. از این رو یافتن مانع‌های جدید، یعنی گنجایش‌های همتافته، به مسأله‌ای مهم تبدیل شد. پس از معرفی پهنای گروموف، هوفر، زندر و اکلند[3] گنجایش‌های دیگری را نیز ساختند [۵، ۶، ۱۸، ۱۹]. امروزه نیز یافتن گنجایش‌های جدید

1) Hofer 2) Zehnder 3) Ekeland

و مطالعه ارتباط بین آنها در هندسه همتافته اهمیت ویژه‌ای دارد. باید توجه داشت که بنا بر تعریف، گنجایش همتافته تحت وابرریختی‌های همتافته ناوردا است. لذا اگرچه خمینه‌های همتافته ناوردای موضعی ندارند ولی ناورداهای سراسری آنها کم نیست. گنجایش‌های همتافته، نه تنها در شناخت توپولوژی خمینه‌های همتافته بلکه گاهی در اثبات وجود مدارهای متناوب در دستگاه‌های دینامیکی و روی ابررویه‌های یک خمینه همتافته نیز سودمند است. برای توضیح بیشتر این مهم، به شرح زیر عمل می‌کنیم.

فرض کنید (M,ω) یک خمینه همتافته باشد. چون ω ناتبهگون است، یک یکسانی بین دو کلاف برداری TM و T^*M القاء می‌کند. لذا، اگر $H : M \longrightarrow \mathbf{R}$ یک نگاشت هموار (همیلتونی) باشد آنگاه ω یک میدان برداری یکتای X_H به H وابسته می‌کند که $\iota_{X_H} = -dH$. میدان برداری X_H را میدان همیلتونی و شار آن φ_H^t را **شار همیلتونی** می‌گویند. فرض کنید c یک مقدار عادی H و $S = H^{-1}(c)$ یک ابررویه فشرده در M باشد. چون فضای مماس بر S در $x \in S$ همان هسته dH_x است و $dH(X_H) = -\omega(X_H, X_H) = 0$ پس X_H بر S مماس است و بنابراین یک میدان برداری تمام بر S است. قضیه‌ای مشهور از پوانکاره به نام قضیه‌ی بازگشتی، حکم می‌کند که تقریباً تمام نقطه‌های S نقطه‌های بازگشتی است؛ یعنی تقریباً برای هر $x \in S$ دنباله‌ی $t_j \uparrow \infty$ وجود دارد که

$$\lim \varphi_H^{t_j}(x) = x.$$

پس طبیعی است که از وجود مدارهای متناوب X_H روی S پرسیده شود.

پرسش ۱. آیا ابررویه فشرده $S = H^{-1}(c)$ در (M,ω) حامل یک مدار متناوب از میدان همیلتونی X_H است؟

این پرسش عمیق، حتی برای حالتی که S در $(\mathbf{R}^{2m}, \omega_0)$ است، هنوز به طور کامل پاسخ داده نشده است. باید توجه داشت که وجود مدار متناوب روی S مستقل از انتخاب همیلتونی H برای نمایش S است. در حقیقت، اگر

$$\{x \in M : H(x) = c_0\} = S = \{x \in M : F(x) = c_1\},$$

به سادگی می‌توان دید که X_H مضربی از X_F بوده و بنابراین شار آن نیز بازپرمایشی از شار X_F است. بنابراین مدارهای متناوب آنها یکسان هستند.

ابررویه S و فرم همتافته ω یک کلاف خطی L_S بر S القاء می‌کند که به کمک آن می‌توان **پرسش ۱** را به گونه‌ای کلی‌تر و مجردتر بیان نمود. چون S نقص بعد ۱ دارد پس برای هر $x \in S$ ، T_xS زیرفضایی از T_xM با نقص بعد ۱ است. پس بعد آن فرد بوده و تحدید ω_x به T_xS نمی‌تواند ناتبهگون باشد. در حقیقت هسته این تهدید یک بعدی است. بنابراین می‌توان کلاف خطی L_S، موسوم به **کلاف هادی** S را به صورت

$$L_S = \{(x,\xi) \in T_xS : \omega_x(\xi,\zeta) = 0, \forall \zeta \in T_xS\}$$

تعریف کرد. اگر $S = H^{-1}(c)$ و $x \in S$ ، به سادگی می‌توان دید $X_H(x) \in L_S(x)$.

تعریف ۵.۱. یک **مدار بسته** (مدار همیلتونی) بر S عبارت است از یک دایره نشانده شده P در S به گونه‌ای که

$$TP = L_S|P.$$

مجموعه همه مدارهای بسته بر S را با $\mathcal{P}(S)$ و مجموعه همه مدارهای بسته بر S که در S انقباض پذیر است را با $\mathcal{P}^\circ(S)$ نمایش می‌دهیم. بنا بر آنچه گفته شد، هر مدار متناوب از X_H یک مدار بسته بر S است. لذا می‌توان پرسش ۱ را چنین مطرح کرد.

پرسش ۲. آیا ابررویه فشرده S در (M,ω) حامل مدار متناوب است؟

این پرسش نیز در حالت کلی بدون پاسخ مانده است و فقط در برخی موارد خاص به آن پاسخ داده شده است [۲، ۱۷، ۱۹، ۸، ۹] در همین ارتباط، در سال ۱۹۷۹ [۳۲] واینشتاین [1] حدس زد که با اعمال شرط‌های بیشتر بر S، پرسش بالا همواره پاسخ مثبت دارد. برای بیان حدس واینشتاین به تعریف زیر نیاز است:

تعریف ۶.۱. ابررویه فشرده و جهتپذیر S در خمینه همتافته (M,ω) را **سایاگونه** [2] نامند هرگاه

۱ ـ فرم α بر S وجود داشته باشد که ویژگی‌های زیر درست باشد:

الف) $d\alpha = j^*\omega$ که در آن $j : S \longrightarrow M$ نگاشت شمول است.

ب) اگر $0 \neq \xi \in L_S$ آنگاه $\alpha(\xi) \neq 0$.

گزاره ۷.۱. [۱۹، ۲۴] ابررویه S در (M,ω) سایاگونه است اگر و تنها اگر میدان برداری X در همسایگی U از S وجود داشته باشد که

الف) بر U، X یک میدان لیوویل باشد یعنی $L_X\omega = \omega$

ب) اگر $x \in S$ آنگاه $T_xM = T_xS \bigoplus < X(x) >$ که در آن $< X(x) >$ زیرفضای تولیدشده توسط $X(x)$ است.

ابررویه S را **سایاگونه کاهش یافته** [3] نامند هرگاه میدان لیوویل X بر M وجود داشته باشد که در شرط «ب» گزاره ۷.۱ نیز صدق کند.

حدس واینشتاین: اگر S یک ابررویه سایاگونه در (M,ω) باشد که اولین گروه کوهومولوژی آن صفر است ($H^1(S) = 0$)، آنگاه $\mathcal{P}(S)$ ناتهی است.

در سال ۱۹۹۰، هوفر و زندر برای اثبات حالت ویژه‌ای از این حدس، نخستین بار سرنوشت مدارهای بسته را با گنجایش‌های همتافته گره زدند. آنها با حذف شرط توپولوژیکی $H^1(S) = 0$ و جایگزین نمودن آن با این شرط که یک همسایگی از S، گنجایش هوفر ـ زندر متناهی داشته باشد، این حدس را ثابت نمودند.

---

1) Weinstein   2) contact type   3) restricted contact type

فرض کنید $S = H^{-1}(c)$ یک ابررویه فشرده و منظم در (M,ω) بوده و g یک متریک ریمانی دلخواه روی M باشد. چون میدان گرادیان ∇H (نسبت به g) در یک همسایگی از S ناصفر است، میدان $X = \frac{\nabla H}{g(\nabla H, \nabla H)}$ را می‌توان در نزدیکی S تعریف کرد. اگر ψ^t شار این میدان باشد، برای هر $x \in S$ داریم $H(\psi^t(x)) = 1 + t$. پس نگاشت $\psi : (x,t) \longmapsto \psi^t(x)$ یک وابرریختی از $S \times (-\epsilon, \epsilon)$ بروی زیرمجموعه بازی مثل $U \subseteq M$ تعریف می‌کند. نگاشت $\psi : S \times (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow U$ را یک قطور شده[1] S می‌گویند. برای هر $t \in (-\epsilon, \epsilon)$، تصویر $S \times \{t\}$ تحت ψ را با S_t نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱.۸. [۱۸] (هوفر ـ زندر) فرض کنید $S = H^{-1}(1)$ یک ابررویه فشرده و منظم از (M,ω) بوده و U یک همسایگی از S باشد که $C_{HZ}(U,\omega)$ متناهی است. دنباله $t_j \to 1$ از مقادیر عادی H وجود دارد که X_H روی هر ابررویه S_{t_j} یک مدار متناوب دارد.

امروزه حدس واینشتاین برای تمام ابررویه‌های سایاگونه رده‌های خاصی از خمینه‌های همتافته، ثابت شده است [۲، ۷، ۱۵، ۱۶، ۱۸، ۲۳، ۳۱]. در این مقاله، پس از معرفی چند نمونه از گنجایش‌های همتافته در بخش پایانی چند نتیجه جدید در مورد وجود مدارهای متناوب ارائه می‌شود.

۲ گنجایش همتافته

در این بخش افزون بر پهنای گروموف که در مقدمه معرفی شد گنجایش‌های هوفر ــ زندر، گنجایش انرژی جابجایی، گنجایش اکلند ــ هوفر و گنجایش‌های طیفی را نیز معرفی می‌نماییم. اما قبل از آن لازم است چند ویژگی کلی از گنجایش همتافته را به شرح زیر برشماریم.

۱) وجود گنجایش همتافته با قضیه نافشردگی گروموف هم‌ارز است.

۲) هر گنجایش همتافته یک ناوردای همتافته است.

۳) در بعد ۲، گنجایش همتافته همان حجم کل بوده و بنابراین یکتاست.

۴) در بعدهای بزرگتر از ۲، حجم یک گنجایش همتافته نیست.

۱.۲ پهنای گروموف

در این زیربخش ابتدا با پذیرش قضیه نافشردگی (که اثباتی بسیار پیچیده دارد) نشان می‌دهیم پهنای گروموف یک گنجایش است و سپس برخی از ویژگی‌های کلی آن بیان می‌شود.

گزاره ۱.۲. پهنای گروموف یک گنجایش همتافته است.

اثبات. اگر $\varphi : (B^{2m}(r), \omega_0) \hookrightarrow (M,\omega)$ یک نشاننده همتافته باشد آنگاه $\varphi \circ \psi^{\pm} : (B^{2m}(r\sqrt{|a|}), \omega_0) \hookrightarrow (M, a\omega)$ (بسته به علامت a) یک نشاننده همتافته است که در آن

1) thickening

$$\psi^{\pm}: B^{2m}(r\sqrt{|a|}) \longrightarrow B^{2m}(r), \qquad (x,y)\longmapsto \frac{1}{\sqrt{|a|}}(\pm x, y).$$

به طور مشابه اگر $\theta: (B^{2m}(r),\omega_0) \hookrightarrow (M, a\omega)$ یک نشانننده همتافته باشد آنگاه $\theta\circ\eta^{\pm}: (B^{2m}(\frac{r}{\sqrt{|a|}}),\omega_0) \hookrightarrow (M,\omega)$ (بسته به علامت a) یک نشاننده همتافته است که در آن

$$\eta^{\pm}: B^{2m}(\frac{r}{\sqrt{|a|}}) \longrightarrow B^{2m}(r), \qquad (x,y)\longmapsto \sqrt{|a|}(\pm x, y).$$

به این ترتیب، خاصیت همدیسی c_G ثابت می‌شود. اگر $B^{2m}(1) \hookrightarrow B^{2m}(r)$ یک نشاننده همتافته باشد آنگاه می‌توان گفت $r \geq 1$. از طرفی نگاشت شمول از $B^{2m}(1)$ بتوی خودش یک نشاننده همتافته است. پس $c_G(B^{2m}(1),\omega_0) = \pi$. همچنین بنا بر قضیه نافشردگی، $B^{2m}(r)$ را می‌توان به طور همتافته در $Z^{2m}(1)$ نشاند هرگاه $r \leq 1$ و نگاشت شمول $B^{2m}(1) \hookrightarrow Z^{2m}(1)$ همتافته است؛ پس $c_G(Z^{2m}(1),\omega_0) = \pi$. بررسی خاصیت یکنوایی نیز سرراست است.

یک نکته مهم در مورد پهنای گروموف آن است که در بین همه گنجایش‌ها، پهنای گروموف کوچکترین است. یعنی برای هر گنجایش c داریم

$$c_G(M,\omega) \leq c(M,\omega). \tag{1.2}$$

این نابرابری مهم، نتیجه مستقیم تعریف پهنای گروموف و تعریف گنجایش همتافته است.
برای $r = (r_1, ..., r_m)$ که $0 < r_1 \leq ... \leq r_m$ بیضیگون $E(r)$ و چند دیسکی $P(r)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} E(r) &= \{(x_1,y_1,...,x_m,y_m)\in R^{2m} : \sum_{i=1}^{m} \tfrac{x_i^2+y_i^2}{r_i^2} \leq 1\},\\ P(r) &= B^2(r_1)\times ... \times B^2(r_m). \end{aligned}$$

به سادگی می‌توان دید

$$c_G(E(r),\omega_0) = \pi r_1^2 = c_G(P(r),\omega_0).$$

فرض کنید ω فرم کیلر بر $\mathbb{C}P^m$ باشد. با توجه به این که هوفر و وایتربو[1] در [۱۶] نشان دادند $C_{HZ}(\mathbb{C}P^m,\omega) = \pi$ و با توجه به نابرابری ۱.۲ می‌توان گفت $c_G(\mathbb{C}P^m,\omega) \leq \pi$. تساوی در حالت $m = 1$ برقرار است اما در حالت $M > 1$، هنوز مقدار دقیق $c_G(\mathbb{C}P^m,\omega)$ محاسبه نشده است [۲۲]. اخیراً نیز محاسبه‌ی پهنای گروموف برخی از خمینه‌های همتافته، مورد توجه قرار گرفته است. برای اطلاعات بیشتر در این زمینه، خواننده را به مرجع‌های [۲۰، ۲۷، ۲۲، ۳۳] ارجاع می‌دهیم.

۲.۲. گنجایش هوفر ـ زندر

مجموعه همه نگاشت‌های هموار بر (M,ω) که تکیه‌گاه آنها فشرده بود و در درون $M\backslash\partial M$ قرار

1) Viterbo

دارد را با $\mathcal{H}(M)$ نمایش می‌دهیم.
نگاشت نامنفی $H \in \mathcal{H}(M)$ را ساده می‌نامند و می‌نویسند $H \in \mathcal{S}(\mathcal{M})$ هرگاه
الف) زیرمجموعه‌ی باز و ناتهی U از M وجود داشته باشد که مقدار H بر U ثابت بوده و برابر $\max H$ باشد.
ب) صفر و $\max H$ تنها مقدارهای بحرانی نگاشت H باشند.
مجموعه‌ی همه نگاشت‌های نامنفی $H \in \mathcal{H}(M)$ را که فقط در شرط (الف) صدق می‌کنند، با $\mathcal{F}(M)$ نمایش می‌دهیم.
نگاشت $H \in \mathcal{H}(M)$ را HZ ــ سازگار (به ترتیب HZ° ــ سازگار) گوییم هرگاه شار φ_H^t مدار متناوب (به ترتیب مدار متناوب انقباض پذیر) ناثابتی با دوره تناوب T، $T \leq ۱$ نداشته باشد. برای زیر مجموعه A از M، مجموعه همهٔ نگاشت‌های ساده و HZــ سازگار (به ترتیب HZ°ــ سازگار) را با $\mathcal{S}_{HZ}(A)$ (به ترتیب $\mathcal{S}_{HZ^\circ}(A)$) نمایش می‌دهیم. به طور مشابه، مجموعه‌های $\mathcal{F}_{HZ}(A)$ و $\mathcal{F}_{HZ^\circ}(A)$ تعریف می‌شوند. قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} c_{HZ}(A) &= \sup\{\max H : H \in \mathcal{S}_{HZ}(A)\}, \\ c^\circ_{HZ}(A) &= \sup\{\max H : H \in \mathcal{S}_{HZ^\circ}(A)\}, \\ C_{HZ}(A) &= \sup\{\max H : H \in \mathcal{F}_{HZ}(A)\}, \\ C^\circ_{HZ}(A) &= \sup\{\max H : H \in \mathcal{F}_{HZ^\circ}(A)\}. \end{aligned}$$

در [۱۸، ۱۹، ۲۳، ۲۹] نشان داده شده است که c_{HZ} ، c°_{HZ} ، C_{HZ}، C°_{HZ} همگی گنجایش همتافته هستند. این گنجایش‌ها به گنجایش‌های هوفر ــ زندر معروف هستند. با توجه به تعریف، نامساوی‌های زیر بین این گنجایش‌ها برقرار است.

$$c_{HZ}(A) \leq c^\circ_{HZ}(A), \qquad C_{HZ}(A) \leq C^\circ_{HZ}(A) \tag{۲.۲}$$

$$c_{HZ}(A) \leq C_{HZ}(A), \qquad c^o_{HZ}(A) \leq C^\circ_{HZ}(A). \tag{۳.۲}$$

در [۱۸] نشان داده شده است که برای زیرمجموعه‌های محدب $\mathbf{R}^{۲m}$ در ۳.۲ برابری برقرار است. اما تاکنون نمونه‌ای ارائه نشده است که برای آن نابرابری اکید برقرار باشد. برای زیرمجموعه‌های محدب $E(r)$ و $P(r)$ مقدار تمام این گنجایش‌ها $\pi r_۱^۲$ است.

تبصره ۱. نکته مهم در مورد گنجایش C_{HZ} (همچنین C°_{HZ}) آن است که اگر $C_{HZ}(A) < \infty$ ، $H \in \mathcal{F}(A)$ و $\max H > C_{HZ}(A)$ آنگاه H عضوی از $\mathcal{F}_{\mathcal{H}Z}(\mathcal{A})$ نبوده و بنابراین φ_H^t دارای دست کم یک مدار متناوب ناثابت است.

۳.۲. انرژی جابجایی

فرض کنید (M,ω) یک خمینه همتافته و $H:[0,1]\times M \longrightarrow \mathbf{R}$ یک نگاشت هموار با تکیه‌گاه فشرده باشد. اگر φ_H^t شار میدان برداری وابسته به زمان X_H باشد که از رابطه $\omega(X_H,.) = -dH$ تعریف می‌شود، آنگاه هر یک از وابرریختی‌های φ_H^t را یک وابرریختی همیلتونی می‌نامیم. توجه کنید که چون تکیه‌گاه H فشرده است، پس φ_H^t بر تمام M تعریف شده و تکیه‌گاه فشرده دارد؛ یعنی در خارج از یک مجموعه فشرده، همانی است. برای نگاشت H قرار می‌دهیم

$$||H|| = \int_0^1 (\sup_{x\in M} H(t,x) - \inf_{x\in M} H(t,x))dt,$$

و به کمک آن انرژی یک وابرریختی همیلتونی φ چنین تعریف می‌شود

$$E(\varphi) = \inf\{||H|| : \varphi = \varphi_H^1\}.$$

اکنون انرژی جابجایی یک زیرمجموعه فشرده K از M را به صورت

$$e(K,M) = \inf\{E(\varphi) : \varphi(K)\cap K = \emptyset\},$$

و انرژی یک زیرمجموعه دلخواه A از M به صورت

$$e(A,M) = \sup e(K,M)$$

تعریف می‌شود که در آن سوپریمم بر زیرمجموعه‌های فشرده مشمول در A گرفته شده است. هوفر در [۱۳] نشان داد که e برای زیرمجموعه‌های باز $(\mathbf{R}^{2m},\omega_0)$ یک گنجایش همتافته است. سپس مک داف[1] و لالنده[2] [۲۲] این مهم را برای زیرمجموعه‌های باز یک خمینه همتافته دلخواه ثابت نمودند.

یک ویژگی مهم انرژی جابجایی ویژگی زیر است که توسط هوفر و زندر ثابت شده است. اگر U زیرمجموعه بازی از M باشد

$$C_{HZ}(U) \leq e(M,\omega). \qquad (۴.۲)$$

تعریف ۲.۲. زیرمجموعه A از (M,ω) را جابجاپذیر[3] نامند هرگاه وابرریختی همیلتونی φ وجود داشته باشد که $\varphi(A)\cap A = \emptyset$.

نابرابری ۴.۲ و قضیه هوفر ـ زندر نشان می‌دهند که اگر U جابجاپذیر باشد آنگاه تقریباً هر رویه انرژی از همیلتونی $H : M \longrightarrow \mathbf{R}$ که مشمول در U است، دست کم یک مدار بسته دارد.

۴.۲. گنجایش اکلند ـ هوفر

در [۵] و سپس در [٦]، اکلند و هوفر دنباله‌ای از گنجایش‌های همتافته را بر زیرمجموعه‌های

1) MacDuff 2) Lalonde 3) displaceable

$(\mathbf{R}^{2m}, \omega_0)$ معرفی نمودند.
در این زیربخش، اولین گنجایش از این دنباله را که آسان‌تر است معرفی می‌کنیم. قبل از آن لازم است چند نماد و مفهوم که در بخش بعد نیز مورد نیاز است معرفی شود.

برای $A \subseteq M$ و $I = [0, 1]$، مجموعه همه‌ی نگاشت‌های هموار $H : I \times A \longrightarrow \mathbf{R}$ که تکیه‌گاه آنها فشرده بوده و مشمول در $I \times intA$ است را با $\mathcal{H}(I \times A)$ نمایش می‌دهیم. در حالت خاص $A = M$، این مجموعه را به طور ساده با $\mathcal{H}$ نمایش خواهیم داد. برای $H \in \mathcal{H}$ ، $\mathcal{P}^{\circ}(H)$ مجموعه همه‌ی مدارهای متناوب از φ_H^t با دوره تناوب ۱ را که انقباض پذیر هستند، نمایش می‌دهد. برای $x \in \mathcal{P}^{\circ}(H)$ فرض کنید $\mathcal{D}(x)$ مجموعه همه‌ی گسترش‌های $\overline{x} : D^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\} \longrightarrow M$ باشد. برای $\overline{x} \in \mathcal{D}(x)$ قرار می‌هیم $\int_{\overline{x}} \omega = \int_{D^2} (\overline{x})^* \omega$ و $H \in \mathcal{H}$ عملگر کنش $\mathcal{A}_H$ روی $\overline{\mathcal{P}}^{\circ}(H) = \{(x, \overline{x}) : x \in \mathcal{P}^{\circ}(H), \overline{x} \in \mathcal{D}(x)\}$ به صورت

$$\mathcal{A}_H(x) = -\int_{\overline{x}} \omega + \int_0^1 H(t, x(t))dt \qquad (۵.۲)$$

تعریف می‌شود.
فرض کنید E مجموعه همه‌ی نگاشت‌های $x \in L^2((0, 1), \mathbf{R}^{2m})$ باشد که سری فوریه آنها

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_k \exp 2k\pi i t, \quad x_k \in \mathbf{R}^{2m}$$

در نابرابری $\sum |k||x_k|^2 < \infty$ صدق کند. اگر $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ضرب داخلی اقلیدسی بر $\mathbf{R}^{2m}$ باشد، ضرب داخلی $(\cdot, \cdot)$ را بر E به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(x, y) = \langle x_0, y_0 \rangle + 2\pi \sum |k| \langle x_k, y_k \rangle.$$

با این ضرب داخلی، E یک فضای هیلبرت است. فضای E را می‌توان به سه زیرفضای دوبدو متعامد زیر تجزیه نمود.

$$\begin{aligned} E^+ &= \{x : x_k = 0, k = 0, -1, -2, ...\} \\ E^{\circ} &= \{x : x_k = 0, k \neq 0\} \\ E^- &= \{x : x_k = 0, k = 0, 1, 2, ...\}. \end{aligned}$$

افکنش $x \in E$ بر این زیرفضاها را به ترتیب با x^+ ، x° و x^- نمایش می‌دهیم.
اکنون فرض کنید $M = \mathbf{R}^{2m}$ و نگاشت $H \in \mathcal{H}$ را در نظر بگیرید. اگر $x \in \mathcal{P}^{\circ}(H)$ و $\overline{x}$ گسترشی از x به سراسر دیسک واحد باشد، آنگاه چون ω_0 دقیق است پس $\int_{\overline{x}} \omega_0$ مستقل از $\overline{x}$ است. بنابراین می‌توان $\mathcal{A}_H$ را بر $\mathcal{P}^{\circ}(H)$ به صورت ۵.۲ تعریف کرد. عملگر کنش $\mathcal{A}_H : \mathcal{P}^{\circ}(H) \longrightarrow \mathbf{R}$ را با ضابطه

$$\mathcal{A}_H(x) = a(x) + b(x), \quad x \in E$$

مـی‌تـوان بـه E گـسـتـرش داد کـه در آن $a(x) = -\int_{\overline{x}} \omega_\circ = \frac{\|x^+\|^2 - \|x^-\|^2}{2}$ و $b(x) = \int_\circ^1 H(t, x(t))dt$. نـگـاشـت $\mathcal{A}_H : E \longrightarrow \mathbf{R}$ مـشـتـق پـذیـر بـوده و گـرادیـان آن عبارت است از

$$\nabla \mathcal{A}_H(x) = x^+ + x^- + \nabla b(x).$$

با توجه به ساختار شار این میدان گرادیان، گروه Γ متشکل از همه همسانریختی‌های $h : E \longrightarrow E$ را با ویژگی‌های زیر در نظر می‌گیریم:

الف) h و h^{-1} هر دو زیرمجموعه‌های کراندار از E را به زیرمجموعه‌های کراندار می‌نگارند.

ب) نگاشت‌های پیوسته $\gamma^\pm : E \longrightarrow \mathbf{R}$ و $k : E \longrightarrow E$ وجود دارند که زیرمجموعه‌های کراندار از E را به زیرمجموعه‌های پیش فشرده می‌نگارند. افزون بر این $\rho = \rho(h)$ وجود دارد که برای هر $x \in E$ $\|x\| \geq \rho$ داریم $\gamma^\pm(x) = \circ$، $k(x) = \circ$ و

$$h(x) = e^{\gamma^+(x)} x^+ + x^\circ + e^{\gamma^-(x)} + k(x), \quad \forall x \in E.$$

قرار می‌دهیم

$$\sigma_{HZ}(H) = \sup \inf \mathcal{A}_H(x) \qquad (۶.۲)$$

که در آن سوپریمم بر Γ و اینفیمم بر $S^+ = \{x \in E^+ : \|x\| = 1\}$ گرفته شده است. اکلند و هوفر به کمک این حقیقت که $h(E^+) \cap h(E^- \bigoplus E^\circ) \neq \emptyset$ نشان دادند $\sigma_{HZ}(H)$ متناهی است. اکـنـون زیـرمـجـمـوعـه کـرانـدار B از $\mathbf{R}^{2m}$ را درنـظـر گـرفـتـه و مـجـمـوعـه هـمـه‌ی نـگـاشـت‌هـای $H \in \mathcal{F}(\mathbf{R}^{2m})$ را که در یک همسایگی از $cl(B)$ صفر می‌شوند با $\mathcal{F}(B)$ نمایش می‌دهیم. بگیرید:

$$c_{EH}(B) = \inf\{\sigma_{HZ}(H) : H \in \mathcal{F}(B).$$

سرانجام برای زیرمجموعه دلخواه $A \subseteq \mathbf{R}^{2m}$ تعریف می‌کنیم

$$c_{EZ}(A) = \sup c_{EH}(B),$$

که سوپریمم بر زیرمجموعه‌های کراندار مشمول در A گرفته شده است. اکلند و هوفر در [۵] نشان دادند c_{EH} یک گنجایش همتافته است.

۵.۲ گنجایش‌های طیفی

دوباره (M, ω) را یک خمینه همتافته دلخواه گرفته و برای $H \in \mathcal{H}$ عملگر کنش $\mathcal{A}_H$ را در نظر بگیرید. مجموعه

$$\Sigma^\circ(H) = \{\mathcal{A}_H(\overline{x}) : (x, \overline{x}) \in \overline{\mathcal{P}}'(\mathcal{H})\}$$

را طیف کنش[1] می‌نامند. اگر $a \in \Sigma^\circ(H)$ آنگاه $a + \omega(\pi_2(M))$ مشمول در $\Sigma^\circ(H)$ است.

1) action spectrum

لذا $\Sigma^\circ(H)$ می‌تواند در $\mathbf{R}$ چگال باشد (مثلاً اگر $\omega(\pi_2(M))$ چگال باشد). نکته مهم در مورد $\Sigma^\circ(H)$ این است که اندازه لبگ آن صفر است [۱۹]. برای $H \in \mathcal{H}$ قرار می‌دهیم

$$E^+(H) = \int_0^1 \max_{x\in M} H(t,x)dt$$

اگر $H, K \in \mathcal{H}$ ، به سادگی دیده می‌شود ترکیب $\varphi_H^1 \circ \varphi_K^1$ توسط تابع زیر تولید می‌شود

$$(H \divideontimes K)(t,x) = H(t,x) + K(t, (\varphi_H^t)^{-1}(x)).$$

تعریف ۳.۲. یک کنش گزینشگر ضعیف[1] روی (M,ω) عبارت است از یک نگاشت $\sigma : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbf{R}$ که برای هر $H, K \in \mathcal{H}$ در شرایط زیر صدق کند:

۱− $\sigma(H) \in \Sigma^\circ(H)$

۲− اگر $0 \neq H \in \mathcal{S}(M)$ آنگاه $\sigma(H) > 0$

۳− $\sigma(H) \le E^+(H)$

۴− σ نسبت به توپولوژی C° روی $\mathcal{H}$ پیوست باشد

۵− $\sigma(H \divideontimes K) \le \sigma(H) + E^+(K)$

کنش گزینشگر ضعیف σ را یک کنش گزینشگر گوییم هرگاه

۶− اگر $H \in \mathcal{S}_{HZ}^\circ(M)$ آنگاه $\sigma(H) = \max H$

مثال ۱. σ که در بخش قبل (۶.۲) معرفی گردید یک کنش گزینشگر برای (R^{2m}, ω_0) است.

برای آشنایی با نمونه‌های دیگری از کنش گزینشگر، می‌توان به منابع [۲۵، ۲۶، ۲۹] مراجعه کرد.

تعریف ۴.۲. خمینه همتافته (M,ω) را به طور ضعیف دقیق[2] هرگاه $[\omega]$ روی $\pi_2(M)$ صفر شود.

لم ۵.۲. اگر (M,ω) به طور ضعیف دقیق باشد آنگاه هر کنش گزینشگر ضعیف برای آن، یک کنش گزینشگر است.

اثبات. تابع $H \in \mathcal{S}_{HZ}^\circ(M)$ را در نظر بگیرید. با توجه به این که H مستقل از زمان است و φ_H^t نیز هیچ مدار متناوب ناثابت و انقباض پذیر، با دوره تناوب ۱ ندارد، پس $\mathcal{P}^\circ(H)$ فقط شامل تمام مدارهای ثابت $x(t) = x$ است که h در x بیشترین و یا کمترین مقدار خود را دارد. لذا با توجه به فرض

$$\mathcal{A}_H(\overline{x}) = -\int_{\overline{x}} \omega + \int_0^1 H(t,x(t))dt = 0 + H(t,x) = 0 \quad \text{یا} \quad \max H.$$

---

1) weak action selector   2) weakly exact

پس $\Sigma^\circ(H) = \{\circ, \max H\}$. اکنون شرط‌های اول و دوم تعریف نشان می‌دهند $\sigma(H) = \max H$. $\square$

تعریف ۶.۲. ([۳۱]) فرض کنید σ یک کنش گزینشگر ضعیف برای (M,ω) باشد. برای $A \subseteq M$ گنجایش‌های طیفی c_σ و c^σ چنین تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} c_\sigma(A,M) &= \sup\{\sigma(H) : H \in \mathcal{S}(A)\}, \\ c^\sigma(A,M) &= \sup\{\sigma(H) : H \in \mathcal{H}(I \times A)\}. \end{aligned}$$

بنا بر تعریف، آشکار است که $c_\sigma(A,M) \leq c^\sigma(A,M)$. قضیه زیر ارتباط بین گنجایش‌های معرفی شده را بیشتر نمایان می‌کند.

قضیه ۷.۲. ([۸]) (M,ω) یک خمینه همتافته و A زیرمجموعه‌ای از M است.

الف) اگر σ یک کنش گزینشگر برای (M,ω) باشد،

$$c_\sigma(A,M) \leq c^\sigma(A,M) \leq e(A,M).$$

ب) اگر σ یک کنش گزینشگر باشد، $c^\circ_{HZ}(A,M) \leq c_\sigma(A,M)$ و لذا

$$c_G(A) \leq c_{HZ}(A) \leq c^\circ_{HZ}(A,M) \leq c_\sigma(A,M) \leq c^\sigma(A,M) \leq e(A,M).$$

برای اثبات این قضیه ابتدا دو گزاره زیر ثابت می‌شود.

گزاره ۸.۲. اگر $\tau : [\circ, ۱] \longrightarrow [\circ, ۱]$ تابع هموازی با شرایط $\tau(\circ) = \circ, \tau(۱) = ۱$ بوده و برای $H \in \mathcal{H}$ تابع H^τ به صورت $H^\tau(t,x) = \tau'(t)H(\tau(t),x)$ تعریف شود آنگاه $\sigma(H^\tau) = \sigma(H)$.

اثبات. چون H^τ مضربی از H است پس شار همیلتونی $\varphi^t_{H^\tau}$ بازپرمایشی از شار همیلتونی φ^t_H است

$$\varphi^t_{H^\tau}(x) = \varphi^{\tau(t)}_H(x), \qquad x \in M.$$

بنابراین با توجه به شرط‌های آغازی τ، مدار $x^\tau \in \mathcal{P}^\circ(H^\tau)$ با مدار $x \in \mathcal{P}^\circ(H)$ متناظر می‌شود که در آن

$$x^\tau(t) = x(\tau(t)).$$

افزون بر این با کمک یک تغییر متغیر داریم

$$\int_\circ^۱ H^\tau(t, x^\tau(t))dt = \int_\circ^۱ \tau'(t)H(\tau(t), x(\tau(t)))dt = \int_\circ^۱ H(t,x(t))dt.$$

همچنین چون تصویر x^τ و مدار متناظر آن x در M یکسان است، پس $\mathcal{D}(x) = \mathcal{D}(x^\tau)$. بنابراین $\mathcal{A}_{H^\tau}(\overline{x}^\tau) = \mathcal{A}_H(\overline{x})$ و لذا $\Sigma^\circ(H) = \Sigma^\circ(H^\tau)$. اکنون برای $s \in [\circ, ۱]$ نگاشت هموار

$[0, 1] \longrightarrow [0, 1]$: τ_s را با ضابطه $\tau_s(t) = (1-s)t + s\tau(t)$ تعریف می‌کنیم. بنا بر آنچه گفته شد $\Sigma^\circ(H^{\tau_s}) = \Sigma^\circ(H)$. سرانجام چون $\sigma : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbf{R}$ پیوسته بوده و اندازه لبگ $\Sigma^\circ(H)$ صفر است، نگاشت

$$[0, 1] \longrightarrow \Sigma^\circ(H) \qquad s \mapsto \sigma(H^{\tau_s})$$

باید ثابت باشد. پس $\sigma(H^\tau) = \sigma(H)$.

گزاره ۹.۲. $H, K \in \mathcal{H}$ بوده و φ_K^1 مجموعه $SuppH = \overline{\bigcup_{t\in[0,1]}\{x \in M : H_t(x) \neq 0\}}$ را جابه‌جا می‌کند. در این صورت $\sigma(H) \leq \|K\|$.

اثبات. با توجه به گزاره ۸.۲، بدون آن که از کلیت مسأله کاسته شود می توان فرض کرد

$$H_t = 0, \quad t \in [0, \frac{1}{2}], \qquad K_t = 0, \quad t \in [\frac{1}{2}, 1].$$

پس

$$sH \divideontimes K(t,x) = sH(t,x) + K(t,x), \qquad s \in [0,1], (t,x) \in I \times M.$$

$x \in \mathcal{P}^\circ(K)$ را در نظر می‌گیریم. چون φ_K^1 مجموعه $Supp(sH) = SuppH$، $s \in (0, 1]$ را جابه‌جا می‌کند، پس $x(0)$ در $SuppH$ نیست. بنابراین $H(t, x(0)) = 0$ و لذا $\varphi_{sH}^t(x(0)) = x(0)$ و از آنجا

$$\varphi_{sH}^1 \circ \varphi_K^1(x(0)) = \varphi_{sH}^1(x(0)) = x(0).$$

اما $\varphi_{sH}^1 \circ \varphi_K^1$ شار همیلتونی $sH \divideontimes K$ در لحظه $t = 1$ است. این نشان می‌دهد $x \in \mathcal{P}(sH \divideontimes K)$. برعکس برای $y \in \mathcal{P}^\circ(sH \divideontimes K)$ در لحظه $t = 1$ داریم $\varphi_{sH}^1 \circ \varphi_K^1(y(0)) = y(0)$. اگر $y(0) \in Supp(sH)$ آنگاه بنا بر فرض $\varphi_K^1(y(0))$ در $Supp(sH)$ نیست؛ لذا $\varphi_K^1(y(0)) = \varphi_{sH}^1 \circ \varphi_K^1(y(0)) = y(0)$. اگر $y(0)$ در $Supp(sH)$ نباشد آنگاه $\varphi_{sH}^{-1}(y(0)) = y(0)$ و بنابراین $\varphi_K^1(y(0)) = \varphi_{sH}^{-1}(y) = y(0)$. پس در هر صورت $y \in \mathcal{P}^\circ(K)$. بحث فوق نشان می‌دهد $\mathcal{P}^\circ(K) = \mathcal{P}^\circ(sH \divideontimes K)$. پس $\Sigma^\circ(sH \divideontimes K) = \Sigma^\circ(K)$.
اکنون مانند اثبات گزاره قبل می‌توان نتیجه گرفت $\sigma(H \divideontimes K) = \sigma(K)$.
از آنجا که φ_K^{-1} توسط $\overline{K}(t,x) = -K(t, \varphi_K^t(x)$ تولید شده [۱۹] و $K \divideontimes \overline{K} = 0$ شرط پنجم تعریف ۳.۲ نتیجه می‌دهد

$$\sigma(H) = \sigma(H \divideontimes K) \leq \sigma(H \divideontimes K) + E^+(\overline{K}) = \sigma(K) + E^+(\overline{K}).$$

سرانجام با توجه به این که $\max \overline{K}(t,x) = -\min K(t,x)$ و شرط سوم تعریف ۳.۲ داریم

$$\sigma(H) \leq \sigma(K) + E^+(\overline{K}) \leq \int_0^1 (\max_{x\in M} K(t,x) - \min_{x\in M} K(t,x))dt = \|K\|.$$

اثبات قضیه ۷.۲. الف) برای $e(A, M) = \infty$ حکم واضح است. بنابراین فرض می‌کنیم $e(A, M) < \infty$. عدد $\delta > 0$ را در نظر گرفته $K \in \mathcal{H}$ را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $\|K\| \leq e(A, M)$ و φ_K^1 نیز مجموعه A را جابه‌جا کند. بنابراین φ_K^1 تکیه‌گاه هر نگاشت $H \in \mathcal{H}(I \times A)$ را جابه‌جا می‌کند. پس بنا به گزاره ۹.۲ داریم

$$\sigma(H) \leq \|K\| \leq e(A, M) + \delta.$$

با توجه به این که $\delta > 0$ دلخواه است، سوپریمم گرفتن بر $H \in \mathcal{H}(I \times A)$ نشان می‌دهد

$$c^\sigma(A, M) \leq e(A, M).$$

ب) چون $\mathcal{S}_{HZ}^\circ(A, M) \subseteq \mathcal{S}(A)$ و برای هر $H \in \mathcal{S}_{HZ}^\circ(A, M)$ طبق شرط ششم تعریف ۳.۲ داریم $\max H \leq \sigma(H)$. اکنون به سادگی دیده می‌شود که $c_{HZ}^\circ(A, M) \leq c_\sigma(A, M)$.

نتیجه ۱۰.۲. اگر σ یک کنش گزینشگر برای $(\mathbf{R}^{2m}, \omega_0)$ باشد آنگاه

$$c_\sigma(B^{2m}(r), \omega_0) = c_\sigma(Z^{2m}(r), \omega_0) = \pi r^2, \quad c^\sigma(B^{2m}(r), \omega_0) = c^\sigma(Z^{2m}(r), \omega_0) = \pi r^2.$$

۳ وجود مدارهای بسته

در این بخش (M, ω) یک خمینه همتافته دلخواه است. یک ابررویه S در M عبارت است از یک زیرخمینه بسته (فشرده و بدون مرز) از M با نقص بعد ۱ که همبند و جهت‌پذیر بوده و مشمول در $M \setminus \partial M$ است. طیف کنش انقباض پذیر S چنین

$$\Sigma^\circ(S) = \{\int_{\overline{x}} \omega : x \in \mathcal{P}^\circ(S), \overline{x} \in \mathcal{D}(x)\}$$

تعریف می‌شود. اگر ۱ ـ فرم λ روی S وجود داشته باشد که $\omega|S = d\lambda$، طیف کنش کامل نیز به صورت

$$\Sigma(S, \lambda) = \{\int_x \omega : x \in \mathcal{P}(S)\}$$

تعریف می‌شود. $\Sigma(S, \lambda)$ در صورتی که اولین گروه کوهومولوژی S بدیهی باشد، مستقل از انتخاب λ است (مجموعه‌های $\Sigma^\circ(S)$ و $\Sigma(S, \lambda)$ دو مجموعه مهم از ناورداهای S هستند). اگر $\mathcal{P}^\circ(S)$ یا $\mathcal{P}(S)$ ناتهی باشد، بگیرید

$$\alpha_1^\circ(S) = \inf\{|a| : a \in \Sigma^\circ(S)\}, \quad \alpha_1(S, \lambda) = \inf\{|a| : a \in \Sigma(S, \lambda)\}.$$

مثال ۲. خمینه همتافته $(\mathbf{R}^{2m}, \omega_0)$ را در نظر گرفته و فرض کنید $S = S^{2m-1}$، کره $2m-1$ بعدی باشد. میدان برداری X_0 و ۱ ـ فرم λ_0 را به ترتیب بر $\mathbf{R}^{2m}$ و S^{2m-1} چنین تعریف کنید

$$X_0 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m (x_i \frac{\partial}{\partial y_i} + y_i \frac{\partial}{\partial x_i}), \qquad \lambda_0 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m (x_i dy_i - y_i dx_i).$$

چون $\iota_{X_0}\omega_0 = \lambda_0$ پس S^{2m-1} یک ابر رویه ساپاگونه است. به سادگی می‌توان تحقیق نمود $\Sigma^{\circ}(S^{2m-1})$ و $\Sigma(S^{2m-1}, \lambda_0)$ ناتهی هستند. توجه شود که چون $S^{2m-1} = H^{-1}(0)$، $H(x,y) = \pi(\sum_{i=1}^{m} x_i^2 + y_i^2 - 1)$ پس $x(t) = (z_1, ..., z_m).e^{2\pi i t}$ یک عضو $\mathcal{P}^{\circ}(S^{2m-1})$ است که در آن $(z_1, ..., z_m) \in S^{2m-1}$ ، $z_j = x_j + iy_j$.

مثال ۳. فرض کنید ω یک فرم سطح بر کره S^2 بوده و S یک دایره هموار نشانده شده در S^2 باشد. چون بعد S برابر ۱ است پس $\omega|S = 0$ و بنابراین S ساپاگونه است. S مرز دو دیسک با مساحت‌های a_1 و a_2 است و $\alpha_1^{\circ}(S) = \min\{a_1, a_2\}$.

گزاره ۱.۳. [۸] فرض کنید U یک دامنه در (M, ω) با بستار فشرده باشد که مرز آن S یک ابررویه ساپاگونه ضعیف است. اگر $\mathcal{P}'(S)$ ناتهی باشد آنگاه

$$0 < \alpha_1^{\circ}(S) \leq c_{HZ}^{\circ}(U, M),$$

واگر $\mathcal{P}(S)$ ناتهی باشد آنگاه

$$0 < \alpha_1(S, \lambda) \leq c_{HZ}(U),$$

که در آن ۱ـفرم λ ر همه M تعریف شده است.

قضیه ۲.۳. [۹] فرض کنید S در (M, ω) جابجاپذیر باشد ($e(S, M) < \infty$). اگر $\psi : S \times (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow U \subseteq M$ یک قطور شده S باشد آنگاه $\{\delta \in (-\epsilon, \epsilon) : \mathcal{P}^{\circ}(S_\delta) \neq \emptyset\}$ در I چگال است.

این قضیه را می‌توان با قضیه هوفر ــ زندر مقایسه کرد که در آن گنجایش انرژی جابجایی، جایگزین گنجایش هوفر ــ زندر شده است.

نتیجه ۳.۳. اگر S در (M, ω) ساپاگونه و جابجاپذیر باشد آنگاه $\mathcal{P}^{\circ}(S)$ ناتهی است. به ویژه حدس واینشتاین در مورد این گونه ابررویه‌ها درست است.

اثبات. فرض کنید X یک میدان لیوویل باشد که در نزدیکی S تعریف شده است و $X(x)$ برای $x \in S$ در $T_x M$ نیست. اگر φ^t شار X باشد آنگاه نگاشت $\psi : S \times (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow U \subseteq M$ با ضابطه $\psi(t, x) = \varphi^t(x)$ برای ϵ به قدر کافی کوچک، یک وابرریختی است. بنابراین ψ^t یک تناظر یک به یک $\mathcal{P}^{\circ}(S) \longrightarrow \mathcal{P}^{\circ}(\psi^t(S))$، $x \mapsto \psi^t(x)$ ، القا می‌کند [۱۹]. اکنون حکم از قضیه ۲.۳ نتیجه می‌شود.

گزاره ۴.۳. ([۸]) (M, ω) یک خمینه همتافته به طور ضعیف دقیق بوده و S یک ابررویه ساپاگونه در M است.

الف) اگر S همبند ساده باشد، $\Sigma^{\circ}(S)$ بسته بوده و شامل صفر نیست. بنابراین اگر $\mathcal{P}^{\circ}(S) \neq \emptyset$ آنگاه $\alpha_1^{\circ}(S) > 0$.

ب) برای هر ۱ ـ فرم λ با شرط $\omega|S = d\lambda$ ، $\Sigma(S,\lambda)$ بسته بوده و شامل صفر نیست. بنابراین اگر $\mathcal{P}(S) \neq \emptyset$ آنگاه $\alpha_1(S,\lambda) > 0$.

اثبات. ۱ ـ فرم λ را بر S انتخاب می‌کنیم به گونه‌ای که $\omega|S = d\lambda$. چون S همبند است برای $x \in S$ می‌توان $\overline{x} \in \mathcal{D}(x)$ را به گونه‌ای انتخاب کرد که تصویر $\overline{x}$ مشمول در S بوده و بنابراین $\int_{\overline{x}} \omega = \int \overline{x} d\lambda = \int_x \lambda$. فرض کنید R میدان ریب[1] وابسته به λ باشد که با شرایط زیر تعریف می‌شود.

$$\iota_R \omega = 0, \quad \lambda(R) = 1.$$

یک متریک ریمانی روی S انتخاب می‌کنیم که نسبت به آن طول R یک باشد. x را به گونه‌ای باز پرمایش می‌کنیم که $x'(t) = R$. در این صورت $\int_x \lambda = \int \lambda(x'(t)dt$ برابر طول x بوده و لذا مثبت است. اگر $\{x_j\}$ دنباله‌ای در $\mathcal{P}^\circ(S)$ باشد که $\int_{x_j} \lambda \longrightarrow a$ آنگاه $\{\int_{xj} \lambda\}$ کراندار بوده و بنابراین طبق قضیه‌ای در [۱۹] $x \in \mathcal{P}^\circ(S)$ با طول a وجود دارد که زیردنباله‌ای از $\{x_j\}$ به آن همگراست. این نشان می‌دهد $\Sigma^\circ(S)$ بسته است. قسمت دوم نیز به طور مشابه ثابت می‌شود.

در آخرین قضیه، هدف یافتن کران بالایی برای $\alpha_1^\circ(S)$ است که در آن S یک ابررویه سایاگونه است و ممکن است کاهش یافته یا مرز یک دامنه نباشد. در این قضیه گنجایش‌های طیفی با وجود مدارهای پیوسته پیوند می‌خورند. البته چون $c_\sigma(S,M) = 0$ (درون S تهی است)، از گنجایش طیفی بیرونی

$$\widehat{c}_\sigma(S,M) = \inf c_\sigma(U,M)$$

استفاده می‌شود که در آن اینفیمم بر زیرمجموعه‌های باز شامل S گرفته می‌شود.

تعریف ۵.۳. خمینه همتافته (M,ω) را گویا[2] گویند هرگاه $\omega(\pi_2(M))$ در $\mathbf{R}$ گسسته باشد. اگر (M,ω) گویا باشد، شاخص گویایی $\rho(M,\omega) \in (0,+\infty]$ از (M,ω)، اگر ω به طور ضعیف دقیق باشد $+\infty$ و در غیر این صورت مولد مثبت زیرگروه دوری $\omega(\pi_2(M))$ از $\mathbf{R}$ تعریف می‌شود.

قضیه ۶.۳. ([۸]) فرض کنید (M,ω) یک خمینه همتافته گویا، σ یک کنش گزینشگر ضعیف برای M و S یک ابررویه سایاگونه در M است. در این صورت

الف) $\widehat{c}_\sigma(S,M) \leq e(S,M)$

ب) اگر $\widehat{c}_\sigma(S,M) < \rho(M,\omega)$ آنگاه $\mathcal{P}^\circ(S)$ ناتهی بوده و

$$\alpha_1^\circ(S) \leq \widehat{c}_\sigma(S,M) \leq e(A,M).$$

اثبات. قسمت اول حکم، نتیجه سرراستی از قضیه ۷.۲ و تعریف گنجایش طیفی بیرونی است. برای اثبات قسمت دوم حکم، نشان می‌دهیم اگر $\psi : S \times (-\epsilon,\epsilon) \longrightarrow U \subseteq M$ یک قطور شده S باشد آنگاه برای هر $\tau > 0$، عدد $\delta \in [-\tau,\tau]$ وجود دارد که $\mathcal{P}^\circ(S_\delta)$ ناتهی بوده و

1) Reeb 2) rational

$$\alpha_1^\circ(S_\delta) \leq \widehat{c}_\sigma(S,M) + \tau \leq e(S,M) + \tau.$$

عدد $\tau > 0$ را آنقدر کوچک در نظر می‌گیریم که

$$C = \widehat{c}_\sigma(S,M) + \tau < \rho = \rho(M,\omega).$$

همچنین $\varepsilon \in (0,\tau)$ را آنقدر کوچک انتخاب می‌کنیم که برای همسایگی $U_\varepsilon = \psi(S \times (-\varepsilon,\varepsilon)$ از S داشته باشیم $c_\sigma(U_\varepsilon, M) < C$. نگاشت هموار $f : \mathbf{R} \longrightarrow [0,C]$ را با شرط‌های زیر اختیار می‌کنیم

$$\begin{array}{rcll} f(t) & = & 0, & t \in (\frac{-\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}), \\ f(t) & = & C, & t \in [\frac{-\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}), \\ |f'(t)| & \neq & 0, & t \in (\frac{-\varepsilon}{2}, \frac{-\varepsilon}{4}) \cup (\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{2}). \end{array}$$

اکنون نگاشت $H \in \mathcal{S}(M)$ را با ضابطه

$$H(x) = \begin{cases} f(t), & x \in S_t, \\ 0, & x \in M \backslash S_t \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. چون $H \neq 0$ پس $\sigma(H) > 0$ و لذا

$$0 < \sigma(H) \leq c_\sigma(U_\varepsilon, M) < C < \rho.$$

پس بنا بر شرط اول تعریف ۳.۲، $(x,\overline{x}) \in \overline{\mathcal{P}}^\circ(H)$ وجود دارد که $\sigma(H) = \mathcal{A}_H(\overline{x})$. ادعا می‌کنیم x ثابت نیست. اگر x ثابت باشد آنگاه بنا به تعریف H، $H(x) \in \{0, C\}$. اگر $H(x) = 0$ آنگاه

$$\sigma(H) = \mathcal{A}_H(\overline{x}) = -\int_{\overline{x}} \omega$$

و چون $0 < \sigma(H) < C$ پس

$$0 < \int_{\overline{x}} \omega < C. \tag{۱.۳}$$

به طور مشابه، اگر $H(x) = C$ آنگاه $\sigma(H) = \mathcal{A}_H(\overline{x} = -\int_{\overline{x}}\omega + C$ و لذا

$$0 < -\int_{\overline{x}} \omega + C < C. \tag{۲.۳}$$

اما چون (M,ω) گویاست پس $\int_{\overline{x}}\omega \in \rho\mathbb{Z}$. بنابراین (۱.۳) و (۲.۳) هر دو با این که $C < \rho$ در تناقض بوده و لذا x ثابت نیست.

سرانجام، با توجه به ساخت H می‌تون گفت $\delta \in (-\varepsilon,\varepsilon) \subset [-\tau,\tau]$ وجود دارد که $(x,\overline{x}) \in \overline{\mathcal{P}}^{\circ}(S_\delta)$ و $0 < f(\delta) < C$ (نگاشت H روی مدارهای φ_H^t ثابت است). افزون بر این

$$0 < \sigma(H) = -\int_{\overline{x}} \omega + f(\delta) < C.$$

بنابراین $|\int_{\overline{x}} \omega| \leq C$ و لذا $\alpha_1^{\circ}(S_\delta) < \overline{c}_\sigma(S,M) + \tau$.

در پایان، خواننده را برای آشنایی با پژوهش‌هایی که اخیراً در این زمینه انجام شده است به مرجع‌های [۲۸] و [۳۰] ارجاع می‌دهیم.

مراجع

[1] W. Chen, *Pseudo-holomorphic curves and the Weinstein conjecture*, Comm. Anal. Geom. 8 (2000), 115-131.

[2] K. Cieliebak, *Symplectic bounndaries: Closed characterirstics and action spectra*, Diss. ETH No. 11610. Zurich 1996.

[3] K. Cieliebak, A. Floer, H. Hofer and K. Wysocki, *Applications of symplectic homology. II. Stability of the action spectrum*, Math. Z. 233 (1996), 27-45.

[4] K. Cieliebak, H. Hofer, J. Latschev and F. Schlenk, *Quatitative symplectic geometry*, math.SG/0506191.

[5] I. Ekeland and H. Hofer, *Symplectic topology and Hamiltonian dynamics*, Math. Z. 200 (1989), 355-378.

[6] I. Ekeland and H. Hofer, *Symplectic topology and Hamiltonian dynamics II*, Math. Z. 203 (1990), 553-567.

[7] A. Floer, H. Hofer and C. Viterbo, *The Weinstein conjecture in* $P \times \mathbb{C}^l$, Math. Z. 203 (1990), 469-482.

[8] U. Frauenfelder, V. Ginzburg and F. Schlenk, *Energy capacity inequalities via an action selector*, math. DG/0402404v2.

[9] U. Frauenfelder and F. Schlenk, *Applications of Hofer's geometry to Hamltonian dynamics*, math. SG/030514v1.

[10] R. Gompf, *Some new symplectic manifolds*, Turk. Math. J. 18 (1994), 7-15.

[11] R. Gompf, *A new construction of symplectic manifolds*, Ann. Math. 142 (1995), 527-595.

[12] M. Gromov, *Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. 82 (1985), 307-347.

[13] H. Hofer, *On the topological properties of symplectic maps*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 115 (1990), 25-38.

[14] H. Hofer, *Estimates for the energy of a symplectic map*, Comment. Math. Helv. 68 (1993), 48-72.

[15] H. Hofer and C. Viterbo, *The Weistein conjecture in cotangent bundles and related results*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Cl. Sci. IV 15 (1988), 411-445.

[16] H. Hofer and C. Viterbo, *The Weinstein conjecture in the presence of holomorphic spheres*, Comm. Pure App. Math. 45 (1992), 583-622.

[17] H. Hofer and E. Zehnder, *Periodic solutions on hypersurfaces and a result by C. Viterbo*, Invent. Math. 90 (1987), 1-9.

[18] H. Hofer and E. Zehnder, *A new capacity for symplectic manifolds*, Analysis, et cetra, 405-427, Academic Press, Boston, MA, 1990.

[19] H. Hofer and E. Zehnder, *Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics*, Birkhauser, Basel, 1994.

[20] T. Hwang and D. Y. Suh, *The Gromove width from Hamiltonian circle actions*, math. SG/1305.2989v1.

[21] F. Lalonde and D. McDuff, *The geometry of symplectic energy*, Ann. Math. 122 (1995), 349-371.

[22] A. Loi, R. Mossa and F. Zuddas, *Symplectic capasities of hermitian symmetric spaces*, math. SG/1302.1984v1.

[23] G. Lu, *The Weinestein conjecture on some symplectic manifolds containing the holomorphic spheres*, Kyushu J. Math. 52 (1998), 331-351.

[24] D. McDuff and D. Salamon, *Introduction to symplectic topology*, Second edition. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, NewYork, 1998.

[25] Y.-G. Oh, *symplectic topology as the geometry of action functional. I. Relative Floer theory on the cotangent bundle*, J. Differ. Geom. 46 (1997), 499-577.

[26] Y.-G. Oh, *symplectic topology as the geometry of action functional. II. Pants product and cohomological invariants*, Comm. Anal. Geom. 7 (1999), 1-54.

[27] M. Pabiniak, *Gromove width of non-regular coadjoint orbits of $U(n)$, $SO(۲n)$, and $SO(۲n+۱)$*, math. SG/1302.7213v1.

[28] A. S. Salomao and J. Weber, *An almost existence theorem for non-contractible periodic orbits in cotangent bundles*, math. SG/1302.7282v1.

[29] M. Schwarz, *On the action spectrum for closed symplectically aspherical manifolds*, Pacific J. Math. 193 (2000), 419-461.

[30] S. Suhr and K. Zehmisch, *Linking and closed orbits*, math. DS/1305.2799v1.

[31] C. Viterbo, *Symplectic topology as the geometry of generating functions*, Math. Ann. 292 (1992), 685-710.

[32] A. Weinstein, *On the hypotheses of Rabinowitz periodic orbit theorems*, J. Diffe. Equa. 33 (1979) 353-358.

[33] M. Zoghi, *The Gromov Width of Coadjoint Orbits of Compact Lie Groups*, Ph.D thesis, University of Toronto.

محمد شفیعی
دانشگاه ولی‌عصر رفسنجان، گروه ریاضی
mshafiee@vru.ac.ir