فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۵ (پاییز ۱۳۹۳) صص. ۹۹ تا ۱۲۳

نمایش‌های گروه و آنالیز هارمونیک: از اویلر تا لنگلندز(بخش دوم)

آنتونی دبلیو نپ

مترجم: احمد صفاپور

اساس آنالیز هارمونیک تجزیه عبارات پیچیده به اجزایی است که عمل یک گروه را، به شرط وجود عملی، باز نمایاند. در واقع هدف آن به فهم درآوردن تجزیه و تحلیل های دشوار است.

در قرون هفده و هجده گروه‌هایی که در این خصوص ظاهر می‌شدند عبارت بودند از گروه دایره $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$، خط حقیقی $\mathbb{R}$، و گروه‌های آبلی متناهی. آنچه در کاربردها اتفاق می‌افتاد عبارت بود از تجزیه توابع بر حسب کاراکترهای ضربی، یعنی همریختی‌های پیوسته از گروه مربوطه به توی اعداد مختلط غیرصفر. در حالتی که گروه مورد بحث گروه دایره باشد، تجزیه‌ی مذکور چیزی جز بسط سری فوریه‌ی یک تابع روی $(-\pi,\pi)$ نیست،

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \textstyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \\ c_n &= \tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx. \end{aligned} \qquad (1)$$

در حالت خط حقیقی، این تجزیه توسط تبدیل فوریه و فرمول وارون فوریه به دست می‌آید که برای توابع به اندازه کافی خوب، آن را به صورت

---

1) Anthony W. Knapp, Group representation and harmonic analysis from Euler to Langlands, Part II, Notoces of the AMS, 43(5)(1996), 537-549.

بخش اول این مقاله در شماره ۳۴، سال ۲۹ (بهار ۱۳۸۹) مجله‌ی «فرهنگ و اندیشه ریاضی» با ترجمهٔ همین مترجم به چاپ رسیده است.

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x y} dx, \qquad (2)$$
$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) e^{2\pi i x y} dy,$$

می‌نویسیم، و درحالت گروه آبلی متناهی G، این بسط به صورت خیلی ساده‌ی

$$f(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{\omega} [\sum_{y \in G} f(y)\overline{\omega(y)}]\omega(x), \qquad (3)$$

در می‌آید که در آن جمع روی تمام کاراکترهای ضربی گروه گرفته می‌شود.

هنگام به کار گرفتن گروه‌های غیرآبلی از تقارن‌ها، کاراکترها چندان مفید نیستند زیرا هر جابه‌جاگر باید $xyx^{-1}y^{-1}$ را به ۱ بفرستد. برای داشتن آنالیز هارمونیک روی گروه‌های غیرآبلی، تعمیم چند بعدی کاراکترهای ضربی را معرفی می‌کنند یعنی نمایش گروه.

یک نمایش برای گروه G روی فضای برداری مختلط V عبارت است از عمل گروه G روی V از طریق تبدیل‌های خطی یعنی یک همریختی از G به توی گروه تبدیل‌های خطیِ وارون پذیر روی V. غالباً گروه G و فضای برداری V دارای توپولوژی هستند، و در نتیجه معمولاً فرض می‌شود که عمل گروه پیوسته است. یک کاراکتر ضربی ω نمایشی ۱ بعدی روی فضای اعداد مختلط $\mathbb{C}$ به دست می دهد که در اینجا عمل عنصر $g \in G$ به صورت ضرب در $\omega(g)$ است.

اواخر قرن نوزدهم دوره‌ای بود که در آن لی و کلاین ریاضیدانان پیشروی آن بودند و نیز در این دوره عمل‌های گروه از جمله عمل گروه توسط تبدیل‌های خطی وسیعاً مورد مطالعه قرار گرفت. در چنین فضایی طبیعی است انتظار داشته باشیم که برخی به عمل گروه توسط تبدیل خطی نیز توجه کنند و از همین طریق نیز نمایش گروه کشف شود. اما نمایش گروه به هیچ وجه به این صورت به‌وجود نیامد.

گروه‌های متناهی

ددکیند به هنگام کار بر روی نظریه‌ی جبری اعداد متوجه چیزی غیرعادی درباره‌ی گروه‌های آبلی متناهی شد. فرض کنید $G = \{g_1 = 1, g_2, \ldots, g_h\}$ یک گروه متناهی از مرتبه‌ی h بوده و فرض کنید $\chi_{g_1}, \ldots, \chi_{g_h}$ متغییرهای مستقلی باشند که با یکدیگر جابه‌جا می‌شوند و توسط عناصر G پارامتری شده‌اند. ددکیند با دترمینان از ماتریس $(\chi_{g_i g_j^{-1}})$ کار کرد و در حالت آبلی ثابت نمود که θ قابل تجزیه به شکل

$$\theta(\chi_{g_1}, \ldots, \chi_{g_h}) = \prod_{\chi} (\sum_{j=1}^{h} \chi(\chi_{g_j})\chi_{g_j}),$$

است که در آن حاصل ضرب روی تمام کاراکترهای ضربی G گرفته می‌شود.

ددکیند در فکر تعمیم این نتیجه به حالت غیرآبلی بود و این نتیجه را با فروبنیوس درمیان گذاشت. فروبنیوس، کار خود در نظریهٔ نمایش را از سال ۱۸۹۶ با معرفی کاراکترهای

(تحویل ناپذیر[1]) یک گروه متناهی دلخواه و به منظور حل مسئله‌ی ددکیند آغاز نمود([۴]، جلد ۳). امروزه یک کاراکتر، اثر یک نمایش است، اما فروبنیوس نمایش‌ها را به این صورت معرفی نکرد. در عوض با استفاده از ریاضیاتی که امروزه عجیب می‌نماید، او در ابتدا مستقیماً با کاراکترها کار کرد و نمایش‌های متناهی بُعد را تنها در مقاله‌ای دیگر که بعداً منتشر شد معرفی نمود. برنساید[2] در ۱۹۰۴ و آی. شور[3] جوان ([۱۳]، جلد ۱) در ۱۹۰۵، مجدداً کار بر روی این نظریه را شروع کردند که دستاوردهای اولیه هر یک از این مطالعات نمایش‌های ماتریسی بود (همریختی‌های به توی گروه ماتریس‌های وارون پذیر با اندازه‌ی مشخص). بر اساس نظر ای. آرتین[4] ([۱]، ص. ۵۲۸) «این امی نوتر بود که گام تعیین کننده را برداشت. این کار با جایگزین کردن یک تبدیل خطی روی یک فضای برداری به جای ماتریس انجام شد.» از این رو تعریف نوتر اساساً همان تعریف کلی و مدرنِ مفهوم نمایش بود که در بالا ارائه شد. برای برنساید و شور، فضاهای نمایش‌ها، فضای $V = \mathbb{C}^n$ مرکب از بردارهای ستونی بود و به نمایش‌ها به چشم ماتریس نگریسته می‌شد. بعدها زمانی که نظریه‌ی نمایش به گروه‌های لی تعمیم پیدا کرد و زمانی که مکانیک کوانتمی مطالعه‌ی نمایش‌های نامنتاهی بعد را ضروری نمود، ادامه‌ی راه بدون استفاده از دیدگاه نوتر دشوار گردید. دو نمایش متناهی بعد π روی V و π' روی V' از G هم ارز هستند اگر نگاشت خطی وارون پذیر $E : V \to V'$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $g \in G$ ، $\pi'(g)E = E\pi(g)$. یک زیرفضای ناوردای U برای π ، یک زیرفضای برداری است به گونه‌ای که به ازای هر $g \in G$، $\pi(g)U \subseteq U$. نمایش متناهی بعد π تحویل ناپذیر نامیده می‌شود اگر V دارای هیچ زیرفضای سره‌ی ناوردای غیرصفر نباشد.

دستاورد کار برنساید و شور که بخشی از آن برحسب تبدیل‌های خطی از نو بیان شده است، نظریه‌ی مجردی بود که برای گروه‌های متناهی پی ریزی شده بود و با در نظر گرفتن سابقه‌ی موضوع می‌بینیم چیزی است که برای وضعیت‌های دیگر انتظار آن را داشتیم.

(P1) (یکانی بودن و تحویل پذیری کامل[5]) هر نمایش متناهی بعد، هم‌ارز با نمایشی توسط ماتریس‌های یکانی است. بنابراین متمم متعامد هر زیرفضای ناوردا، ناوردا است واز اینجا نتیجه می‌شود که هر نمایش متناهی بُعد مجموع مستقیم نمایش‌های تحویل ناپذیر است. (این نتایج قبلا شناخته شده بود. نقش برنساید نشان دادن این مطلب بود که تحویل پذیریِ کامل نتیجه‌ای از یکانی بودن است.)

(P2) (لم شور). اگر π روی V و π' روی V' نمایش‌های تحویل ناپذیری بوده و $E : V \to V'$ نگاشتی خطی باشد به گونه‌ای که برای هر $g \in G$ ، $\pi'(g)E = E\pi(g)$، آن گاه $E = 0$ یا E وارون پذیر است. اگر $V = V'$، آن گاه E اسکالر است. (نخستین نتیجه منسوب به برنساید و دومی منسوب به شور است.)

(P3) (تعامد شور). اگر π و π' نمایش‌های یکانی تحویل ناپذیر ناهم‌ارز باشند، آن گاه

1) Irreducible 2) Burnside 3) I. Schur 4) E. Artin 5) Unitarity and complete reducibility

$$\sum_{g\in G}\pi_{ij}(g)\overline{\pi'_{kl}(g)} = 0.$$

(P4) (وارون فوریه). فرض کنید π روی مجموعه‌ی کاملی از نمایش‌های یکانی تحویل ناپذیر ناهم‌ارز G تغییر کند. اگر f یک تابع مختلط مقدار روی G باشد تعریف کنید

$$\pi(f) = \sum_{x\in G} f(x)\pi(x).$$

در این صورت

$$f(1) = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi}(\dim \pi)Trace(\pi(f)).$$

(P5) (تمامیت). فرض کنید π روی مجموعه‌ی کاملی از نمایش‌های یکانی تحویل ناپذیر ناهم‌ارز تغییر کند. اگر f یک تابع مختلط مقدار روی G باشد، تعریف کنید

$$\pi(f) = \sum_{x\in G} f(x)\pi(x).$$

در این صورت

$$\sum_{\chi\in G}|f(x)|^2 = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi}\dim \pi||\pi(f)||^2,$$

که در آن $||.||$ نرم هیلبرت ـ اشمیت است (ریشه‌ی دوم مجموع مربع‌های قدر مطلق درآیه‌ها).

پیچیدگی در آنالیز هارمونیک معمولی بر روی یک گروه متناهی خاص تنها اندکی بیشتر از حالت گروه‌های آبلی متناهی است. می‌توانیم برخی از اصول پنج‌گانه‌ی فوق را برای یک گروه تقارنی سه عضوی بررسی کنیم. برای این گروه G سه نمایش تحویل ناپذیر از بعدهای ۱، ۱ و ۲ وجود دارد. آن‌ها عبارتند از نمایش بدیهی[1] ۱، نمایش علامت[2] و نمایش π در صفحه که از قراردادن یک مثلث متساوی‌الاضلاع در صفحه و قرار دادن مرکز آن در مبدأ مختصات و بررسی اثر جایگشت‌های رئوس آن، به دست می‌آید. برای نمایش دو بعدی π، فرض کنید رئوس آن به مختصات قطبی $(1, 0^\circ)$ ، $(1, 120^\circ)$ و $(1, 240^\circ)$ باشند که با ۱، ۲ و ۳ شماره‌گذاری شده‌اند. با استفاده از پایه‌ی استانده، هر یک از تبدیل‌های خطی $\pi(g)$ را به یک ماتریس تبدیل می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$\pi((2\ \ 3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ و } \pi((1\ \ 2) = \begin{pmatrix} \cos 120^\circ & \cos 30^\circ \\ \sin 120^\circ & \sin 30^\circ \end{pmatrix},$$

1) Trivial representation 2) Sign representation

و π برای هر یک از دو جایگشت دیگر با ضربی متناظر می‌شود. می‌توانیم درآیه‌ها را به عنوان توابعی روی G به صورت زیر درنظر بگیریم:

g\entry	$\pi_{۱۱}(g)$	$\pi_{۱۲}(g)$	$\pi_{۲۱}(g)$	$\pi_{۲۲}(g)$
(۱)	۱	۰	۰	۱
(۱۲۳)	$-۱/۲$	$-\sqrt{۳/۲}$	$\sqrt{۳/۲}$	$-۱/۲$
(۱۳۲)	$-۱/۲$	$\sqrt{۳/۲}$	$-\sqrt{۳/۲}$	$-۱/۲$
(۱۲)	$-۱/۲$	$\sqrt{۳/۲}$	$\sqrt{۳/۲}$	$۱/۲$
(۲۳)	۱	۰	۰	-۱
(۱۳)	$-۱/۲$	$-\sqrt{۳/۲}$	$-\sqrt{۳/۲}$	$۱/۲$

برای نمایش علامت، درآیه‌های مربوطه در اینجا به عنوان تابعی از g عبارتند از ۱، ۱، ۱، -۱، -۱ و -۱ و برای نمایش بدیهی، همگی برابر ۱ هستند. یک محاسبه‌ی سرراست نشان می‌دهد که هر شش ستون بالا بر یکدیگر عمود هستند. ستون‌های نشان داده شده در بالا هر یک دارای نرم مربعی برابر ۳ بوده و ستون‌های مربوط به نمایش‌های علامت و بدیهی دارای نرم مربعی ٦ هستند. این همان خاصیت (P3) است. به دلیل تعامد، این شش ستون پایه‌ای برای فضای ٦ بعدی توابع مختلط مقدار روی G تشکیل می‌دهند و (P5) هم از آنچه در جبرخطی دیده‌ایم، نتیجه می‌شود. از دیدگاهی (P4) و (P5) هم ارز هستند: پیچش روی G را با $f * h(x) = \sum_{y\in G} f(xy^{-۱})h(y)$ تعریف کنید. در این صورت (P5) به (P4) منتهی می‌شود اگر آن را برای تابع $f * f^*$ که $f^*(\chi) = \overline{f(x^{-۱})}$ به کار بگیریم. بنابراین (P5) حالت خاصی از (P4) است. اما توابع $f * f^*$ فضای همه توابع را تولید می‌کنند و بنابراین حالت خاص (P5)، حالت کلی (P4) رانتیجه می‌دهد. این مثال با جزئیات بیشتری در گراس[۱] [۵] آمده است.

بخش دیگری از نظریه‌ی مجرد مورد بحث، ایده‌ی نمایش القا شده است که به فروبنیویس منسوب است. القا، روشی برای ساختن نمایشی از G با استفاده از نمایش یک زیرگروه H از آن است. فرض کنید φ یک نمایش H روی فضای V^φ باشد. در این صورت نمایش القا شده‌ی[۲] $\pi = ind_h^G \varphi$ در فضای برداری

$$\{f : G \to V^\varphi | f(xh) = \varphi(h)^{-۱}(f(x)), h \in H\}$$

به صورت $(\pi(g)f)(x) = f(gx^{-۱})$ عمل می‌کند. اگر φ نمایش بدیهی از H باشد، آن گاه π نمایش منظم چپ[۳] G روی توابع تعریف شده بر G/H است یعنی نمایش l که توسط $l(g)f)(x) = f(g^{-۱})x$ به دست می‌آید.

1) Gross 2) Induced representation 3) Left regular representation

نمایش‌های القا شده‌ی گروه‌های متناهی در رابطه با توابع L اهمیت پیدا می‌کنند که به طور مختصر به آن خواهیم پرداخت.

فروبینیوس[1]

به کار گرفتن آنالیز هارمونیک روی یک گروه متناهی خاص، نیازمند شناخت نمایش‌های تحویل ناپذیر آن گروه، یا حداقل شناخت کاراکترهای آن است. این موضوعات برای گروه‌های متقارن و متناوب به طور مستقل توسط فروبنیوس و یانگ[2] طی یک دوره‌ی زمانی مورد بررسی قرار گرفت. « نمودارهای یانگ[3]» به عنوان ابزارهایی استانده برای کار کردن با چنین نمایش‌هایی باقی مانده‌اند.

یکی از اولین کاربردهای مهم نظریه‌ی نمایش گروه‌های متناهی برای موضوعی به جز نظریه نمایش، در قضیه‌ی زیر از فروبنیوس (۱۹۰۱) بود: یک گروه جایگشتی ترایایی روی n عنصر که اعمال آن به جز عمل همانی، همه و یا همه به جز یک عنصر را انتقال می‌دهند، دارای یک زیرگروه بهنجار از مرتبه‌ی n است. یکی دیگر از کاربردهای اولیه‌ی آن، قضیه‌ی برنساید(۱۹۰۴) بود به این مضون که هر گروه از مرتبه‌ی $p^a q^b$ ، زمانی که p و q اعداد اول باشند، حل پذیر است. پس از آن نتایج اولیه، نظریه‌ی نمایش همچنان در مراحل مختلف رده‌بندی گروه‌های متناهی ساده ایفای

1) Ferdinand George Frobenius 2) Young 3) Young diagrams

نقش می‌کرد. کاربرد دیگری از نظریه‌ی نمایش گروه‌های متناهی در ارتباط با توابع L آرتین است که آرتین آن‌ها را در سال‌های دهه‌ی ۱۹۲۰ معرفی کرد. یک تابع L آرتین روی مجموعه اعداد گویا، $\mathbb{Q}$، چگونگی تجزیه‌ی یک چندجمله‌ای تکین تحویل ناپذیر روی $\mathbb{Z}$ وقتی به پیمانه‌ی هر عدد اول تحویل می‌یابد را بر حسب یک تابع مولد کدگذاری می‌کند. برای چند جمله‌ای $x^۲ + ۱$ تابع L چنین است

$$L(s, \mathbb{Q}(i)/\mathbb{Q}, sgn) = \prod_{p \text{ عدد اول فرد}} \frac{۱}{۱ - (\frac{-۱}{p})p^{-s}}, \qquad (۴)$$

که در آن $(\frac{-۱}{p})$ نماد لژاندر است که اگر ۱− یک مانده مربعی برای p[1] باشد، این نماد مقدار ۱+ را اختیار می‌کند و در غیراین صورت ۱− را. این تابع L با تابعی که اویلر معرفی کرد و در آن $(\frac{-۱}{p})$ با عبارت $\chi^-(p)$ که بسته به این p همنهشت با ۱ باشد یا ۳ به پیمانه‌ی ۴، مقادیر ۱+ یا ۱− را اختیار می‌کند جایگزین شده است، تا حدودی متفاوت است. این واقعیت که $(\frac{-۱}{p}) = \chi^-(p)$، به درستی به عنوان حالتی مقدماتی از قانون تقابل مربعی شناخته شده است و لذا تابع L اویلر و (۴) برابرند. این نقشِ تقابل، امکان تعمیم گسترده‌تری را فراهم می‌کند که در آن نظریه‌ی نمایش برجسته‌تر می‌شود و ما کمی بعد به این بحث برمی‌گردیم. اما اکنون اجازه دهید ببینیم نظریه نمایش از کجا وارد موضوع توابع L آرتین شد. یک تابع کلی‌تر L آرتین، اطلاعاتی اساسی درباره‌ی ایده‌آل‌های اول در حلقه‌ی اعداد صحیح یک میدان از اعداد (توسیع متناهی از $\mathbb{Q}$) فراهم می‌کند. تابع L به یک پارامتر مختلط S، یک توسیع متناهی گالوای K/k از میدان‌های اعداد، و یک نمایش از گروه گالوای (متناهی) K روی k بستگی دارد. ما به تعریف دقیق، که (۴) را تعمیم می‌دهد کاری نداریم. با وجود این، زمانی که $k = K$ و نمایش بدیهی است، تابع L به آن چیزی تحویل می‌شود که تابع ζی K نامیده می‌شود. نمایش‌های القا شده نقش مهمی در درک توابع L ایفا می‌کنند. اگر k با یک میدان کوچکتر $k_\circ$ جایگزین شده و نمایش بالا با نمایش القا شده از $Gal(K/k)$ به $Gal(K/k_\circ)$ جایگزین شود تابع L تغییری نمی‌کند. با قرار دادن $k = K$ مشاهده می‌کنیم که تابع ζی K برابر می‌شود با تابع L آرتین برای $K/k_\circ$ و نمایش چپ منظم $Gal(K/k_\circ)$ روی توابع تعریف شده بر $Gal(K/k_\circ)$. تجزیه‌ی این نمایش به جمعوندهای تحویل ناپذیر، در تجزیه‌ی تابع ζی K به حاصل ضربی از توابع L انعکاس می‌یابد. از این رو توابع L آرتین عوامل کانونی توابع ζی میدان‌های اعداد هستند و به طور طبیعی با بکارگرفتن نظریه‌ی نمایش گروه گالوا پدیدار می‌شوند.

انتگرال لبگ، سری‌های فوریه و تبدیل فوریه

تقریباً هم زمان با پیشرفت نظریه‌ی نمایش گروه‌های متناهی، رشد سریع نظریه‌ی سری‌های فوریه و تبدیل فوریه شروع شد. نقطه‌ی عطف در این زمینه، معرفی انتگرال لبگ در رساله لبگ درسال ۱۹۰۲ و کتاب او در سال ۱۹۰۴ بود. حالتی از (P4) که در آن $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$

1) Square modulo p

به شرط آن که $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2<\infty$ و f پیوسته باشد، قبلاً شناخته شده بود زیرا مفهوم (P5) همان اتحاد پارسوال $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2 d\chi=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$ است که این خود محکی است برای کامل بودن دستگاه توابع نمایی. اما انتگرال لبگ راه را برای قضیه‌ی ریس ـ فشیر در سال ۱۹۰۷ که بیان می‌دارد هر دنباله‌ی مربع انتگرال پذیر$\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$، دنباله‌ی ضرایب فوریه‌ی یک تابع عضو L^2 بر $(-\pi,\pi)$ است، و در نتیجه برای درک کاملی از این که نگاشت ضرایب فوریه که $f\mapsto\{c_n\}$، یک نگاشت خطی یکریختی از یک فضای L^2 به روی فضایی دیگر است، هموار نمود.

پلانشرال در سال ۱۹۱۰ حالتی از (P5) را برای تبدیل فوریه اثبات کرد و همه‌ی تعمیم‌های بَعدی این ویژگی، فرمول پلانشرال نامیده شده است. بر اساس نمادهای (۲)، نتیجه‌ی کار او این بود که نگاشت تبدیل فوریه $f\mapsto\hat{f}$ روی $L^1\cap L^2$ در رابطه‌ی $||f||_2^2=||\hat{f}||_2^2$ صدق می‌کند و در نتیجه، تبدیل فوریه به یک نگاشت یکریختی از L^2 به توی L^2 تعمیم می‌یابد. چون فرمول وارون در (۲) به نوعی همانند خود تبدیل است، در نتیجه تبدیل فوریه به طور خودکار بروی L^2 تعمیم یافته و صورت‌بندی مورد نیاز برای آنالیز هارمونیک مهیا بود.

از نظر تاریخی به نظر می‌رسد اولین عملگری که به طور مشخص با استفاده از انتگرال لبگ با سری فوریه‌ای به شکل

$$T(\sum c_n e^{inx})=\sum b_n c_n e^{inx} \tag{۵}$$

نوشته شد، عملگر هیلبرت بود. در این جا $b_n=-isgnn$. این عملگر با در نظر گرفتن f به عنوان تابعی روی دایره‌ی یکه، استفاده از فرمول انتگرال پواسون برای به دست آوردن یک تابع همساز روی قرص یکه، رفتن به تابع همساز مزدوج بهنجار شده‌ی آن که در مبدأ مقدار ۰ را اختیار کند، و بالاخره اختیار کردن مقادیر مرزی حاصل می‌شود. این مطالعه به طور مستقل توسط پریوالوف[1] (۱۹۱۸) و پلسنر[2] (۱۹۲۳) انجام شد، و به طریقی مشابه حالتی از تبدیل فوریه و نیم صفحه را می‌توان بررسی کرد. در سال ۱۹۲۷ م. ریس[3] ثابت کرد که تبدیل هیلبرت سری فوریه روی L^p، که $1<p<\infty$، کراندار است، و به سادگی نتیجه می‌شود که اگر $1<p<\infty$ ، مجموع‌های جزئی سری فوریه‌ی توابع عضو L^p، در L^p به همان تابع همگرا هستند. نتیجه‌ی کرانداری مشابهی برای حالت مناسبی از تبدیل هیلبرت برای تبدیل فوریه و نیم‌صفحه برقرار است. عملگرهای پیچیده‌تری که با انتقال ها جا به جا می‌شوند در ابتدا در سال‌های دهه ۱۹۳۰ مورد مطالعه قرار گرفتند و موضوع برای حالت‌های چند متغیره بسط یافت. به عنوان مثال برای تبدیل فوریه در $\mathbb{R}$، فرمول وارون همانند (۲) است اما با این تفاوت که انتگرال گیری روی $\mathbb{R}^n$ انجام شده و xy با ضرب نقطه‌ای $x.y$ جایگزین می‌شود. کتاب‌های زیگموند[4] [۱۸] و اشتاین[5] [۱۴] شرح کاملی از این نظریه‌ها را ارائه می‌دهند. یک نتیجه در خور توجه ویژه قضیه بوخنر[6] در سال ۱۹۳۲ برای توابع معین مثبت است که بعداً به نوعی مورد استفاده قرار گرفت. یک تابع معین مثبت f روی یک گروه G تابعی است که

---

1) Privalov 2) Plessner 3) M. Riesz 4) Zygmund 5) Stein 6) Bochner

برای آن ماتریس $\{f(x_i x_j^{-1})\}$ همواره هرمیتی نیمه معین مثبت است. قضیه به این صورت است که در بین توابع پیوسته روی $\mathbb{R}^n$، توابع معین مثبت دقیقاً آن توابعی هستند که تبدیل فوریه‌ی اندازه‌های متناهی هستند. گاردینگ در سال ۱۹۵۳ تبدیل فوریه روی $\mathbb{R}^n$ را با چیزی که قبلاً ابداع شده بود یعنی یک «اصل انجماد [۱]» ترکیب کرد تا توانایی تبدیل فوریه را به قلمروهایی گسترش دهد که در آن‌ها هیچ‌گونه تقارنی تحت یک گروه به چشم نمی‌خورد. «نامساوی گاردنیک» کران پایینی برای ضرب داخلی $< Lu, u >$ به دست می‌دهد که در آن L یک عملگر دیفرانسیل حقیقی بیضوی از مرتبه‌ی m بوده و u دارای محمل فشرده می‌باشد. استفاده از فرمول پلانشرال حالتی را فراهم می‌کند که در آن تمامی جملات از مرتبه‌ی m بوده و دارای ضرایب ثابت هستند.

هرمان ویل [۲]

رفتار یک عملگرِ کلی در نزدیکی یک نقطه، با کمک رفتار یکی از این عملگرهای خاص با ضرایب ثابتی که برابر مقدار ضرایب پیشرو در آن نقطه است، تقریب زده می‌شود (اصل انجماد)، و چنین تخمین‌هایی با کمک افراز یکانی کنار هم چیده می‌شوند. کتاب بِرز [۳]، جان [۴] و اسکچر [۵] [۳] جزئیات را ذکر کرده است. در این رابطه ایده‌ی یک اصل انجماد انگیزه‌ای است برای نظریه‌ی جدیدتر عملگرهای شبه دیفرانسیل و تعمیم‌های آن. زمانی که گروه‌های لی پوچتوان را در نظر می‌گیریم اصل انجماد دوباره مطرح می‌شود.

1) Freezing principle 2) Hermann Weyl 3) Bers 4) John 5) Schecher

گروه‌های فشرده

در اوایل قرن بیستم تمامی آنچه برای تعمیم بخش‌هایی از نظریه‌ی نمایش گروه‌های متناهی به گروه‌های فشرده مورد نیاز بود عبارت بود از انتگرال گیری ناوردا، و این کار قبلاً برای گروه‌های دَوَران [۱] و گروه‌های یکانی در سال ۱۸۹۷ در مقاله‌ای از آ. هورویتس [۲] انجام شده بود. نظریه‌ی مجرد و تعیین نمایش‌های تحویل ناپذیر شانه به شانه‌ی یکدیگر پیش می‌رفتند. شور در سال ۱۹۲۴ مشاهده نمود که چنانچه انتگرال گیری ناوردا داشته باشیم (P1)، (P2) و (P3) تعمیم پیدا می‌کنند، انتگرال‌ها جایگزین جمع‌های روی G شده و اندازه کل جایگزین $|G|$ می‌شود. علاوه بر آن شور نمایش‌های تحویل ناپذیر گروه‌های دَوَران و گروه‌های یکانی را به دست آورد.

ای. کارتان قبلاً در سال ۱۹۱۳ قضیه‌ی بالاترین وزن [۳] را که نمایش‌های تحویل ناپذیر جبرهای لی نیم ساده‌ی مختلط را دسته‌بندی می‌کند، با استفاده از ابزارهای جبری ثابت کرده بود. اما این موضوع که او در آن زمان متوجه شده باشد که این نتیجه چقدر به یک دسته‌بندی از نمایش‌های تحویل ناپذیر گروه‌های لی همبند فشرده نزدیک است (حداقل زمانی که آن‌ها همبند ساده هستند.) و یا حتی این که او یک مفهوم مهم را به این مسئله اضافه نموده باشد، مشکوک به نظر می‌رسد. ویل در سال‌های ۲۶ــ۱۹۲۴، تا حدودی با الهام از مقاله‌ی ۱۹۲۴ شور، این نظریه را به طور تحلیلی برای گروه‌های لی همبند فشرده به پیش برد. او از انتگرال گیری ناوردا برحسب فرم‌های دیفرانسیلی استفاده نموده، نشان داد که هر عضو گروه مزدوج یک عضو از یک چنبره ماکسیمال است، فرمولی برای انتگرال‌گیری برحسب انتگرال‌گیری از رده‌های تزویجی ارائه داد، و از کاراکترها و فرمول انتگرال‌گیری استفاده نمود تا حالتی از قضیه‌ی بالاترین وزن را به نظریه‌ی سری‌های فوریه روی چنبره‌های ماکسیمال فرو کاهد. قضیه‌ی معروف پیتر ــ ویل که (P5) را ثابت می‌کند و همچنین (P4) که نتیجه‌ای از آن برای توابع هموار است، در سال ۱۹۲۷ بدست آمد. برخلاف حالت گروه‌های متناهی، قضیه‌ی پیتر ــ ویل باید قدری از آنالیز استفاده کند و بدون تردید قضیه‌ی طیفی برای عملگرهای فشرده‌ی خودالحاق ابزار مورد نیاز آن است. در ۱۹۲۹ کارتان در مقاله‌ای با نشان دادن ارتباط کامل بین جبرهای لیِ نیم ساده‌ی مختلط و جبرهای لیِ حقیقی گروه‌های لی فشرده، نظریه‌های جبری و تحلیلی را به یکدیگر گره زد. در اوایل دهه‌ی ۱۹۳۰ اثبات وجود و یکتایی اندازه‌ی هار توسط هار و فون نویمان امکان تعمیم (P1) تا (P5) را به تمام گروه‌های توپولوژیک فشرده فراهم ساخت.

اولین کاربرد ریاضی آنالیز هارمونیک برای گروه‌های فشرده تفسیر مجدد کارتان از بخشی از نظریه توابع خاص به زبان فضاهای متقارن فشرده ریمانی در سال ۱۹۲۹ بود. در ساده‌ترین مثال این کار روشی را نمایان می‌کند که در آن هارمونیک‌های کروی و چند جمله‌ای‌های لژاندر، از عمل گروه دوران $SO(۳)$ روی کره‌ی $S^۲$ حاصل می‌شوند. گراس [۵] دقیقاً آنچه را نظریه‌ی کارتان درباره‌ی این مثال بیان می‌کند، شرح می‌دهد.

---

1) Rotation groups 2) A. Hurwitz 3) Theorem of the Highest Weight

تعداد نسبتاً معدودی از کاربردهای آنالیز هارمونیک برای گروه‌های فشرده وجود دارند که مشابه آن چیزی هستند که در (۵) اتفاق می‌افتد: این که ضرایب فوریه‌ی یک تابع روی گروه در چیزی ضرب شده و عملگر حاصل بررسی می‌شود. یکی از چنین کاربردهایی بررسی L^p ــ همگرایی مجموع‌های جزئی بسط فوریه‌ی یک تابع روی یک گروه فشرده است که روی رده‌های تزویج ثابت باشد. هِرتس[1] و ر. اشتانتون[2] این مسئله را برای گروه‌های نیم ساده‌ی فشرده حل کردند و همگرایی در L^p برای مقادیری از p در بازه‌ای به شکل $۱ + \varepsilon < p < ۱ + \frac{1}{\varepsilon}$ اتفاق می‌افتد. برخلاف حالت سری‌های فوریه‌ی کلاسیک، بهترین ε برای یک گروه نیم ساده‌ی فشرده‌ی مفروض، اکیداً مثبت است. در بسیاری از کاربردهای آنالیز هارمونیک گروه‌های فشرده، یک گروه فشرده به صورت غیرترایایی روی یک فضای اندازه‌ی X عمل می‌کند و عملگری روی $L^۲(X)$ بررسی می‌شود که با عمل G جا به جا شود. یک مثال مناسب برای این مورد، تبدیل فوریه روی $L^۲(\mathbb{R}^n)$ است که با دوران‌ها جا به جا می‌شود. از آنالیز هارمونیک روی گروه دوران $SO(n)$ انتظار می‌رود اطلاعاتی را به دست دهد. بوخنر در سال ۱۹۵۱ با استفاده از هارمونیک‌های کروی و تبدیل‌های ۱ ــ بعدیِ هنکل[3] چنین اطلاعاتی را به دست آورد. کتاب اشتاین[4] و وایز[5] [۱۵] این اطلاعات را با تأکید بیشتر بر نظریه گروه‌ها در اختیار می‌نهد.

کاربردهای گروه‌های فشرده در فیزیک از این نوع هستند. نظریه‌ی نمایش گروه‌های یکانی به‌ویژه $SU(n)$ برای مقادیر مشخص n، در مطالعه‌ی واکنش‌های هسته‌ای در نظریه ی ذرات بنیادی نقشی ایفا کرده است. در مکانیک کوانتمی آنچه که از آزمایشات مشاهده می‌شود مقادیر ویژه‌ی عملگرهای خودالحاق خاصی روی فضاهای هیلبرت هستند (یا عناصر طیف آن، اگر مقادیر ویژه گسسته نباشند). قوانین بقا متناظر با عملگرهای خود الحاقی مانند A هستند که برای آن‌ها گروه یک پارامتری عملگرهای یکانی e^{jtA} با هامیلتونی جا به جا می‌شوند. در نتیجه یک دستگاه از قوانین بقا، به یک گروه از تقارن‌ها یعنی یک گروه از عملگرهای یکانی که با هامیلتونی جا به جا می‌شوند، منجر می‌شوند. بخشی از این گروه تقارن، برخی انواع خاص $SU(n)$ ها هستند. مشاهده پذیرهای همزمان با گروه‌های تک پارامتری جا به جا شونده و در نتیجه با زیرفضاهای جا به جا شونده جبرهای لی متناظر هستند. برای $SU(n)$، یک زیرفضای جا به جا شونده از جبر لی دارای بعدی کوچکتر یا مساوی $n - ۱$ است (و از این رو این زیرفضا می‌تواند قطری درنظر گرفته شود) و در نتیجه حداکثر $n - ۱$ کمیت فیزیکی هم زمان مشاهده پذیر را می‌توان با استفاده از نظریه‌ی $SU(n)$ از یکدیگر تمیز داد. ذرات بنیادی، با بردارهای مشخصی در فضاهای نمایش‌های تحویل ناپذیر، یعنی ویژه بردارهای هم زمان زیرگروه قطری (که چنانچه مضرب اسکالری از یکدیگر باشند یکی گرفته می شوند) متناظر می‌شوند. کوارک ها با بردارهای پایه‌ی استاندارد برای نمایش استاندارد متناظر می‌شوند. قدرت نظریه ناشی از روشی است که طبق آن باید برهم‌کنش متقابل

1) Herz 2) R. Stanton 3) Hankel 4) Stein 5) Weiss

ذرات درک شود: ضرب تانسوری نمایش‌ها را در نظر می‌گیریم، سپس آن را بر اساس (p۱) تجزیه و نگاه می‌کنیم ببینیم چه ترکیب‌هایی از ذرات رخ می‌دهد.

گروه‌های آبلی موضعاً فشرده

در سال های ۳۵−۱۹۳۴ پونتریاگین و ون کمپن[1] قضیه‌ای دوگانی برای گروه‌های موضعاً فشرده‌ی آبلی را اثبات نمودند و کمی بعد وِیل[2] [۱۶] نظریه‌ای در آنالیز هارمونیک را بر اساس این قضیه‌ی دوگانی بنا نهاد. لزوماً تمام کاراکترهای یک گروه آبلی نافشرده‌ی موضعاً فشرده همانند $\mathbb{R}$ مورد توجه نیستند. برای $\mathbb{R}$، تابع $x \mapsto e^{-۲\pi ixy}$ زمانی که y یک عدد مختلط باشد، یک کاراکتر ضربی است اما تنها آن کاراکترهایی جالب توجه هستند که در آن ها y حقیقی باشد. یک کاراکتر ضربی یکانی نامیده می‌شود اگر قدر مطلق آن برابر ۱ باشد. (به عبارت کلی‌تر یک نمایش π در یک فضای هیلبرت یکانی است اگر هر عملگر $\pi(x)$ یکانی باشد.)

اگر G یک گروه آبلی موضعاً فشرده باشد، آن گاه کاراکترهای ضربی یکانی تحت عمل ضرب نقطه‌ای یک گروه $\hat{G}$ را تشکیل می‌دهند و اگر $\hat{G}$ به توپولوژی همگرایی یکنواخت روی مجموعه‌های فشرده مجهز شود، به یک گروه آبلی موضعاً فشرده (گروه دوگان) تبدیل می‌شود. زمانی که گروه G چنبره‌ی T^n یا گروه $\mathbb{R}^n$ باشد، $\hat{G}$ دقیقاً متشکل از آن کاراکترهای ضربی یکانی است که ما استفاده کردیم و توپولوژی آن همان توپولوژی معمولی است. از این رو در این دو حالت $\hat{G}$ با $\mathbb{Z}^n$ یا $\mathbb{R}^n$ یکریخت است. در کلی‌ترین حالت گروه $\hat{G}$ موضعاً فشرده آبلی بوده و دارای یک دوگان $\hat{\hat{G}}$ است، و یک همریختی پیوسته‌ی کانونی از G به توی $\hat{\hat{G}}$ وجود دارد: اگر g عضوی از G باشد، آن گاه عنصر متناظر آن در $\hat{\hat{G}}$ در کاراکتر $\omega\epsilon\hat{G}$، همان مقداری را اختیار می‌کند که $\omega(g)$ اختیار کند. قضیه‌ی دوگانی بیان می‌کند که این همریختی $G \to \hat{\hat{G}}$ یک یکریختی توپولوژیکی پِرو است. پونتریاگین و ون کمپن قضیه‌ی دوگانی را به عنوان نتیجه‌ای از یک نظریه‌ی ساختاری که خودشان ارائه داده بودند، اثبات کردند. وِی به سوی تعریف تبدیل فوریه $f \mapsto \hat{f}$ی پیش رفت که توابع روی G را به توابع روی $\hat{G}$ ببرد:
که در آن dx اندازه‌ی هار روی G است. فرمول وارون وِی ، که برای آن دسته از توابع پیوسته‌ی انتگرال پذیر f برقرار است که تبدیل فوریه‌ی آن‌ها انتگرال پذیر باشد، بیان می‌دارد که یک بهنجارسازی برای اندازه‌ی هار $d\omega$ روی $\hat{G}$ وجود دارد به گونه‌ای که

$$f(x) = \int_{\hat{G}} \hat{f}(\omega)\omega(x)d\omega.$$

فرمول پلانشرال $||f||_۲^۲ = ||\hat{f}||_۲^۲$ نتیجه‌ای از (P4) و (P5) و بنابراین نسخه‌ای از آن‌ها است که برای G برقرار است. رودین [12] نشان داد که چگونه قضیه‌ی دوگانی و آنالیز هارمونیک را می‌توان با نادیده گرفتن نظریه‌ی ساختاری، بسط و گسترش داد.

1) Van Kampen 2) Weil

اَدِل‌ها و آیدِل‌ها[۱]

آنالیز هارمونیک روی گروه‌های آبلی موضعاً فشرده کاربرد مهمی در نظریه‌ی جبری اعداد دارد که منسوب به تِیت[۲] است. برای بیان این موضوع لازم است که نگاه دیگری به توابع L، همان گونه که در سال ۱۹۲۰ ظاهر شدند، بیندازیم. حتی پیش از آن که آرتین توابع L خود را معرفی کند، هِکه[۳] انواع دیگری از آن‌ها را معرفی کرده بود. یکی از انواع توابعی که هِکه مورد بررسی قرار داد تعیمی از تابع L اویلر و دیگر توابع L دیریکله بود. این تابع L وابسته به چیزی بود که کاراکتر گروسن[۴] نامیده می‌شد و ما به طور مختصر به آن می‌پردازیم. هِکه به طریقی پیچیده ثابت نمود که این $L-$ توابع که روی نیم صفحه‌ی راست همگرا هستند، به صورت مرومورفیک به صفحه‌ی مختلط تعمیم می‌یابند، در یک معادله تابعی صدق می‌کنند، مقادیر آن‌ها را در s و $s-1$ به هم ربط می‌دهند و همگی تام هستند به جز حالتی که تابع مورد نظر خود $\zeta(s)$ باشد. به دلیل برخی کارهای تاکاجی[۵]، آرتین متوجه شد که توابع L او در حالتی که گروه گالوا، آبلی باشد باید برابر توابع L هِکه حاصل از گراسن کاراکترها باشند. این توقع آرتین را به سوی فرمول بندی و سپس اثبات قضیه تقابل آرتین[۶] هدایت نمود که تعمیمی فوق‌العاده قوی از تقابل مربعی بوده و یکی از ارکان نظریه‌ی ردهٔ میدان آبلی است. قضیه تقابل آرتین نیز آرتین را قادر نمود تا تساوی مورد انتظار برای توابع L را اثبات نماید. از اینرو توابع L آرتین در حالت گروه‌های گالوای آبلی درمعادلات تابعی صدق می‌کنند و برای کاراکترهای ضربی غیربدیهی این چنین گروه‌های گالوایی، آن ها تام هستند.

کاراکترهای گروسن در فرمول بندی اولیه‌شان به نوعی با گروه رده‌ی ایده‌آلی ددکیند مربوط بودند، اما چوالی[۷] فرمول بندی دیگری را در سال ۱۹۳۶ کشف کرد. یک مکان v از یک میدان عددی k، یک رده‌ی یکریختی از نگاشت‌های میدان k است بروی یک زیر میدان چگال از یک میدان موضعاً فشرده‌ی ناگسسته‌ی K_v. برای $k=\mathbb{Q}$، مکان‌ها عبارت‌اند از نشاندن‌های $\mathbb{Q}$ بتوی $\mathbb{R}$ و بتوی میدان $\mathbb{Q}_p$ از اعداد $p-$ اَدیک برای هر عدد اول p. هر یک از میدان‌های موضعاً فشرده یک نگاشت قدر مطلق دارند، عناصر $\mathbb{Q}_p$ با قدر مطلق ۱ بستار آن اعداد گویایی هستند که صورت و مخرج آن‌ها نسبت به p اول هستند. چوالی گروه آیدل‌های k را به عنوان زیرگروهی ضربی از تمام آن عناصری در گروه ضربی $K_v^\times$ معرفی کرد که قدر مطلق آن‌ها در همه به جز تعداد متناهی v برابر ۱ است و با تعریف یک توپولوژی مناسب، این گروه آبلی را به یک گروه آبلی موضعاً فشرده تبدیل نمود. به نظر می‌رسد گروه ضربی $K^\times$ دارای یک نشاننده قطری بتوی گروه آیدل باشد. با این توضیحات یک کاراکتر گروسن، صرفاً یک کاراکتر ضربی از گروه آیدل‌هایی است که روی نشاننده قطری $K^\times$ بدیهی باشند.

تِیت دررساله‌اش در سال ۱۹۵۰ آنالیز هارمونیک برای گروه‌های آبلی موضعاً فشرده را

---

1) Adeles and Ideles 2) Tate 3) Hecke 4) Grossen character 5) Takagi
6) Artin reciprocity 7) Chevally

امیل آرتین[۱]

در چنین وضعیتی به کار برد. ایدل‌های k زیرگروه‌های جمعی تمام عناصری از $\prod k_v$ هستند که قدرمطلق آن‌ها در همه جز تعدادی متناهی از vها کمتر یا مساوی ۱ باشد. آن‌ها با ضرب مؤلفه‌وار و یک توپولوژی مناسب، یک حلقه‌ی جا به جایی موضعاً فشرده تشکیل می‌دهند.

تِیت با استفاده از آنالیز هارمونیک و کشف ارتباط متقابل بین ایدل‌ها و آیدل‌ها، $L-$ تابع‌های هِکه را بازتعریف نمود و نشان داد که تداوم تحلیلی و معادله‌ی تابعی نتایجی از فرمول جمع‌بندی پواسون برای این حالت هستند. بزودی به حالت‌های غیرآبلی نظیر این نتیجه برمی‌گردیم.

گروه‌های موضعاً فشرده

در پی پیشرفت‌های مکانیک کوانتم در حدود سال ۱۹۲۷، نظریه‌ی نمایش توسعه پیدا کرد و گروه‌های موضعاً فشرده‌ای را که نه فشرده بودند و نه آبلی دربرگرفت. دو مورد ملموس که قبل از ۱۹۴۰ مورد مطالعه قرار گرفتند آن چیزهایی بودند که امروزه گروه n متغییره‌ی مختلط هایزنبرگ و گروه غیرهمگن لورنتس نامیده می‌شوند. به زبان آن روزگار، نظریه نمایش گروه هایزنبرگ در قالب نمایش‌های تصویری گروه $\mathbb{C}^n$ بررسی شده بود، و در آن توابع π در شرط $\pi(x+y)=c(x,y)\pi(\chi)\pi(y)$ برای اسکالرهای غیر صفر $c(x,y)$ صدق می‌کنند. اما ما همچنان

1) Emil Artin

به نمایش‌های گروه می‌پردازیم.

گروه هایزنبرگ H^n با n متغییر مختلط، گروه تمام (z,t)هایی است که $z \in \mathbb{C}^n$ و $t \in \mathbb{R}$ و دارای ضربی به صورت

$$(w,t)(z,t') = (w+z, t+t' + IMW^* z),$$

می‌باشد که در آن‌ها W^* به معنای ترانهاده مزدوج w است. این گروه با گروه ماتریس‌هایی که به شکل بلوکی

$$\begin{pmatrix} ۱ & z^* & \frac{۱}{۲}z^۲ + it \\ ۰ & ۱ & z^* \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

هستند یکریخت و وارون در آن به صورت $(z,t)^{-۱} = (-z,-t)$ است. مرکز آن Z، مجموعه‌ی تمام عناصر به شکل $(۰,t)$ است و $H^n/Z \cong Bbbc^n$. اولین نظریه نمایش H^n از پژوهش‌های هایزنبرگ، ویل (Weyl)، استون و فون نویمان سرچشمه گرفته است.

گروه H^n دارای این ویژگی است که به دلیل بدیهی بودن هر نمایش یکانی متناهی بعد روی Z، به نمایش‌های خارج قسمتی $\mathbb{C}^n$ تجزیه می‌شود. در نتیجه، چنین نمایش هایی همه‌ی نقاط گروه را از یکدیگر متمایز می‌کنند. در واقع (P1) را برای چنین نمایش های φ می‌توان به کار گرفت و می‌توانیم فرض کنیم که φ یک نمایش یکانی تحویل ناپذیر با بعد متناهی $\dim\varphi$ است. خاصیت (P2) برقرار است، و لذا $\varphi(o,t)$ اسکالر است، در نتیجه به شکل مضرب $e^{۲\pi it\chi}$ از همانی می‌باشد. هم چنین یک محاسبه‌ی مختصر نشان می‌دهد که

$$(w,t)(z,t')(w,t)^{-۱}(z,t')^{-۱} = (۰, IM(w^*z - z^*w))$$

دترمینان φ سمت چپ، برابر حاصل ضرب دترمینان φی هر یک از عامل‌ها بوده و لذا برابر ۱ است. بنابراین برای هر w و z $exp(۲\pi ilm(W'Z^* - z^*w)xdim\varphi) = ۱$ و در نتیجه $x = ۰$.

از این رو برای داشتن آنالیز هارمونیک معنی‌دار به اینجا می‌رسیم که آن دسته ازنمایش‌های یکانی را در نظر بگیریم که نامتناهی بُعد هستند. این تعدیل مستلزم اندکی اصلاح در تعریف‌های‌مان است. اکنون فضای کلی یک فضای هیلبرت خواهد بود، زیرفضاهای ناوردای مورد علاقه، زیرفضاهای بسته هستند، و یک نمایش تحویل ناپذیر است اگر شامل هیچ زیرفضای سره‌ی بسته‌ی ناصفر ناوردا نباشد. به این معنا، قضیه‌ی استون ــ فون نویمان بیان می‌کند که نمایش‌های یکانی تحویل ناپذیر نامتناهی بعد H^n، با تقریب هم ارزی، توسط یک عنصر غیرصفر $\lambda \in \mathbb{R}$ پارامتری شده‌اند. نمایش π_λ با پارامتر λ روی $L^۲(\mathbb{R}^n)$ به صورت

$$\pi_\lambda(x+iy,t)f(x') = e^{۲i\lambda y^*x'} e^{i\lambda(t+y^*x)} f(x'+x), \qquad (٦)$$

عمل می‌کند. در اینجا ما به حالت بینهایت کوچک π_λ و ارتباط آن با مکانیک کوانتمی نمی‌پردازیم. این موضوع در مقاله مک کی [۱۱] به طور مفصل مورد بررسی قرار گرفته است.

گروه موضعاً فشرده‌ی ناآبلی دیگری که پیش از ۱۹۴۰ مورد مطالعه قرار گرفت گروه غیرهمگن ۱۰ ـ بعدی لورنتس بود. باز هم انگیزه این مطالعه مکانیک کوانتمی بود. کار معروف ای. ویگنر[1] روی نظریه‌ی نمایش این گروه در ۱۹۸۳ منتشر شد و در کار وایتمن[2] [۱۷] مورد بررسی قرار گرفته است.

در سال ۱۹۳۶، پیش از آن که ویگنر این دومین گروه ناآبلی غیرفشرده را مورد مطالعه قرار دهد، موری[3] و فون نویمان مطالعه‌ای روی حلقه‌های عملگرها انجام دادند که پیامدهایی را برای نظریه‌ی مجرد نمایش گروه دربرداشت. اگر π نمایشی یکانی از G روی فضای هیلبرت جدایی‌پذیر H باشد، فرض کنید $R(\pi)$ کوچک‌ترین جبر ضعیف ـ بسته ی عملگرهای خطی کراندار باشد که شامل تمام $\pi(g)$ها به ازای هر $g \in G$ است. گوییم π اولیه[4] است اگر مرکز $R(\pi)$ تنها از عملگرهای اسکالر تشکیل شده باشد. مجموع متعامد تعدادی متناهی یا شمارا از نسخه‌های یک نمایش تحویل ناپذیر، همواره یک نمایش اولیه است. اگر نمایش اولیه π به این شکل خاص باشد، گوییم π از نوع[5] I است. گروه G از نوع I است اگر تمام نمایش‌های اولیه‌ی آن از نوع I باشند. یکی از کشفیات موری و فون نویمان آن است که گروه‌های موضعاً فشرده‌ای وجود دارند که از نوع I نیستند: ثابت شده است که گروه (گسسته) آزاد با دو مولد چنین گروهی است. با کار مک کی و گلیم[6] روشن شده است که یک گروه جدایی پذیر G از نوع I است اگر و تنها اگر فضای رده‌های هم‌ارزی نمایش‌های یکانی تحویل ناپذیر یک فضای بورل استاندارد باشد. از این رو گروه‌هایی که از نوع I نیستند مناسب بحث فعلی نیستند و آن‌ها را کنار می‌گذاریم.

دومین کار مهم در نظریه‌ی مجرد را گلفاند و رایکوف در سال ۱۹۴۳ انجام دادند. اگر π یک نمایش یکانی از یک گروه موضعاً فشرده‌ی G بوده و v یک بردار باشد، آنگاه تابع $g \mapsto < \pi(g)v, v >$ معین مثبتِ پیوسته است. آنها عکس این مسئله را نیز مورد توجه قرار دادند (یعنی هر تابع معین مثبتِ پیوسته به ازای یک π و یک v، همواره به این شکل است) و سپس ثابت نمودند که π تحویل ناپذیر است اگر و تنها اگر $\pi(G)v$ تمام فضای هیلبرت H را تولید کند و $< \pi(g)v, v >$ روی یک شعاع اکسترمم در مخروط تمام توابع معین مثبتِ پیوسته قرار داشته باشد. آنها با استفاده‌ی مناسب از قضیه‌ی کرین ـ میلمان قادر شدند نتیجه بگیرند که نمایش‌های یکانی تحویل ناپذیر G نقاط را جدا می‌کنند. بنابراین برای انجام آنالیز هارمونیک باید به اندازه‌ی کافی نمایش‌های یکانی تحویل ناپذیر وجود داشته باشد.

در سال ۱۹۴۶، مک کی با الهام از کار وی [۱۶] مطالعه‌ی نظام‌مند نظریه‌ی نمایش گروه‌های موضعاً فشرده را شروع کرد: مک کی از طریق یک مسیر پیچ درپیچ که در [۱۸] صفحات ۸۹۲—۸۹۳ توصیف شده است متوجه این موضوع شد که نمایش‌های القا شده، که توسط فروبینوس برای گروه‌های متناهی معرفی شده بود، برای گروه‌های موضعاً فشرده جدایی پذیر با معنی بوده

1) E. Wigner 2) Wightman 3) Murray 4) Primary 5) type 6) Glimm

و دارای اهمیت است. تنها محدودیتی که وجود داشت این بود که زیرگروهی که القا باید از آن انجام شود، حتما باید بسته باشد. در واقع نمایش‌های (٦) از H^n ، از نمایش‌های یک بعدی القا شده بودند. نمایش‌های ویگنر از گروه ناهمگن لورنتس نیز القا شده بودند و مثال های فراوان دیگری هم وجود داشتند. مک کی در این مسیر حرکت نمود که نظریه‌ای را در جهت دسته‌بندی نمایش‌های تحویل‌ناپذیر ضرب‌های نیم مستقیم گروه‌ها، زمانی که نمایش‌های هر عامل ضرب شناخته شده‌اند و عمل چندان پیچیده نیست، تدوین نماید.

بخش پایانی نظریه‌ی مجرد، فرمول پلانشرال است. ماونتر[1] و سِگال[2] در سال ۱۹۵۰ و مستقل از یکدیگر ثابت نمودند که هر گروه نوع I که تک پیمانه‌ای باشد (یعنی دارای اندازه‌ی هار چپی برابر با اندازه‌ی راست آن باشد) دارای اندازه‌ی یکتای $d\mu$ روی فضای رده‌های هم‌ارزی نمایش‌های یکانی تحویل ناپذیر است به گونه‌ای که برای هر $f \in L^2(G)$، $||f||^2 = \int ||\pi(f)||_{HS}^2 d\mu(\pi)$. توضیحات بیشتر درباره‌ی نظریه‌ی مجرد را می‌توان در مقاله‌ی مک کی [۱۰] مشاهده نمود.

از این رو در تکامل اولیه‌ی نمایش گروه‌های ناآبلی غیر فشرده، سه پرسش کلیدی درباره‌ی گروه‌های ویژه مطرح شد. آیا G از نوع I است؟ اگر چنین است، نمایش‌های یکانی تحویل ناپذیر G چه هستند؟ اگر چنین است و اگر G تک پیمانه‌ای است، اندازه‌ی پلانشرال آن به طور مشخص چیست؟ این پرسش‌ها برای گروه‌های موضعاً فشرده‌ی کلی بسیار دشوارتر است تا برای گروه‌های آبلی یا فشرده.

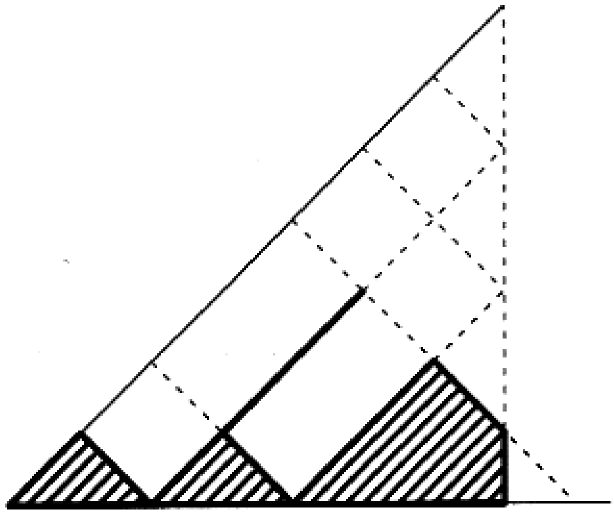
در بین رده‌هایی از گروه‌های موضعاً فشرده که مورد مطالعه قرار گرفته‌اند گروه‌های لی پوچتوان، گروه‌های لی نوع I حل پذیر، گروه‌های لی نیم ساده با مرکز متناهی، گروه‌های لی عام همبند نوع I و گروه‌های $P-$ ادیک کُلی قرار دارند. ما فقط برخی از آن‌ها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

گروه‌های حل پذیر و پوچتوان

یک گروه لی پوچتوان دارای یک گروه پوششی همبند همانریخت با $\mathbb{R}$ است و نمونه بارز آن، زیرگروه بسته‌ی همبند از ماتریس‌های مختلط بالا مثلثی است که درآیه‌های روی قطر آن ۱ است. گروه هایزنبرگ H^n مثالی از این نوع است. هر گروه لی پوچتوان همواره تک پیمانه‌ای از نوع I است. کیریلُف[3] نشان داد که نمایش‌های یکانی تحویل ناپذیر همواره از نمایش‌های ۱ بعديِ زیرگروه‌های بسته القا می‌شوند، او این نمایش‌ها را طبقه‌بندی کرد و اندازه‌ی پلانشرال را به طور صریح به دست آورد. او در کارش یک «تصویر مداری[4]». برای نمایش‌های تحویل ناپذیر فراهم ساخت که پیشتر توسط هریش ـ چاندارا[5] برای حالت فشرده معرفی شده بود. تصویر مداری، نمایش‌ها را با داده‌های ضمیمه شده به مدارهای عمل گروه روی فضای برداری دوگان جبری متناظر می‌کند. این موضوع به طور مفصل در اثر هو[6] [٦] توصیف شده است.

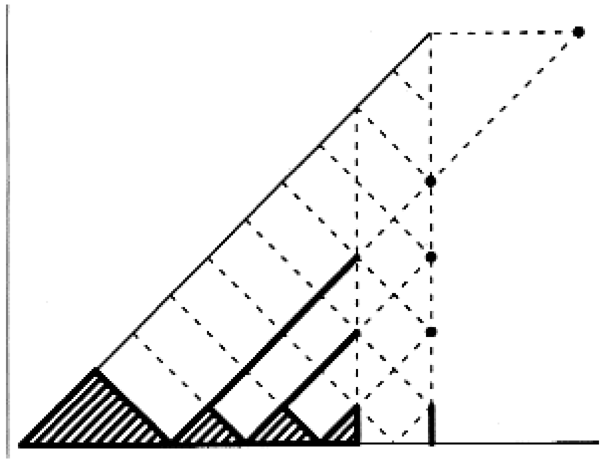
1) Maunter 2) Segal 3) Kirillov 4) Orbit picture 5) Harish-Chandra 6) Howe

فولند در سال ۱۹۷۳ از آنالیز هارمونیک روی گروه هایزنبرگ استفاده کرد تا تخمین جدیدی برای یک عملگر دیفرانسیل زیربیضوی در فضای اقلیدسی، که به عملگر $\Box_b = \bar{\partial}_b\bar{\partial}_b^* + \bar{\partial}_b^*\bar{\partial}_b$ وابسته به مرز گوی یکه در $\mathbb{C}^n$، میل می‌کند، فراهم کند. به نظر می‌رسد که این عملگر را می‌توان به عنوان یک عملگر دیفرانسیلی با ضرایب ثابت روی H^{n-1} در نظر گرفت، که از H^{n-1} استفاده می‌کند و تخمینی دقیق‌تر از روش مرسوم اقلیدسی به دست می‌دهد. در سال ۱۹۷۴ فولند و اشتاین این ایده برای H^{n-1} را با یک اصل انجماد تلفیق نمودند تا $\Box_b$ را برای دامنه‌های شبه محدب اکید بررسی کنند. روثشیلد[۱] و اشتاین در سال ۱۹۷۶ نظریه‌ی نمایش برای دیگر گروه‌های لی پوچتوان را با یک اصل انجماد ترکیب کردند تا عملگرهای زیربیضوی $\sum X_i^2$ روی یک خمینه را، زمانی که X_iها چنان میدان‌های برداری هستند که همراه با جابجاگرهایشان با یک ترتیب ثابت، فضای مماس کامل در هر نقطه از این خمینه را تولید می‌کنند، آنالیز کند. در ریاضیات هیچ مثال شناخته شده‌ای از یک تقارن شکسته شده که از طریق ترکیب یک اصل انجماد با نظریه‌ی نمایش یک گروه پوچتوان به دست آید وجود ندارد. یک گروه لیِ حل پذیر، دارای یک گروه پوششی همبند ساده است که با $\mathbb{R}^n$ همانریخت می‌باشد و هر زیرگروه بسته‌ی همبند از ماتریس‌های مختلط بالا مثلثی، نمونه‌ی خوبی برای این منظور است. چنین گروهی ممکن است تک پیمانه‌ای نباشد، و ممکن است از نوع I نیز نباشد. در سال ۱۹٦۹ ل. آوسلندر[۲] و کاستانت[۳] برای دسته‌بندی کردن نمایش‌های یکانی تحویل ناپذیر نوع I گروه‌های لی حل پذیر، تصویرمداری کریلف را تعمیم دادند. پوکانسزکی[۴] حالتی از فرمول پلانشرال را ارائه نمود که در آن نیازی به تک پیمانه‌ای بودن و یا حتی نوع I بودن گروه نبود.



شکل ۱. نقاط یکانی در یک سری یکانی غیرکروی $Sp(6,2)$ با یک کاراکتر حقیقی روی A

1) Rothschild 2) L. Auslander 3) Kostant 4) Pukanszky



شکل ۲. نقاط یکانی شناخته شده در سری اصلی کروی $Sp(۶,۲)$ با یک کاراکتر حقیقی روی A

گروه‌های نیم ساده

وسیع‌ترین عرصه‌ی پژوهشی، گروه‌های لی نیم ساده‌اند که همواره تک پیمانه‌ای بوده و هریش چاندرا در مقاله‌ای در سال ۱۹۳۵ نشان داده است که آن‌ها از نوع I هستند. ما روی آن گروه‌های لی نیم ساده‌ای تمرکز می‌کنیم که می‌توانند به عنوان گروه‌های ماتریس‌های حقیقی یا مختلط شناخته شوند. جدای از یکریختی، گروه‌های لی نیم ساده‌ی ماتریس‌ها، دقیقاً زیرگروه‌های بسته‌ی همبند ماتریس‌های مختلط هستند که تحت عمل ترانهاده ـ مزدوج بسته بوده و دارای مرکز گسسته (و در نتیجه لزوماً متناهی) هستند. گروه‌های خطی ویژه، گروه‌های سیمپلکتیک و انواع متفاوتی از گروه‌های طولپایی فرم‌های مربعی مثال‌هایی برای این ادعا می‌باشند. برای توصیف بیشتری از این نظریه در حد یک کتاب، [۷] را ببینند. اولین گروه از این نوع که مورد توجه قرار گرفت، گروه $SL(۲,\mathbb{R})$ متشکل از ماتریس‌های حقیقی ۲ در ۲ با دترمینان یک بود. بارگمن[۱]، شاید با انگیزه کامل کردن مقاله‌ی سال ۱۹۳۸ ویگنر، نمایش‌های یکانی تحویل ناپذیر این گروه را (و به طور دقیق‌تر، مزدوجی از آن را) در مقاله مشهوری در سال ۱۹۴۷ دسته‌بندی نمود. بارگمن اطلاعاتی در مورد تجزیه‌ی $L^۲$ی این گروه ارائه نمود به گونه‌ای که حتی بر ایده‌ی فرمول پلانشرال پیشی گرفت. نمایش‌های یکانی تحویل ناپذیر در سری‌ها نمود پیدا می‌کند. یکی از این‌ها که امروزه سری اصلی کروی[۲] نامیده می‌شود به ازای هر v حقیقی شامل یک نمایش $P^{+,iv}$ می‌باشد. این نمایش روی $L^۲(\mathbb{R})$ به صورت

$$P^{+,iv}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} f(x) = |bx+d|^{-۱-iv} f(ax+c)(bx+d)^{-۱}), \qquad (۲۷)$$

1) Bargmann 2) Spherical *principle series*

عمل می‌کند و در رده‌بندی تنها نمایش‌هایی با $v \geq 0$ مورد نیاز هستند. نمایش $P^{-,iv}$ از سری‌های اصلی ناکروی روی $L^2(\mathbb{R})$ برای v حقیقی به صورت

$$P^{-,iv}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} f(x) = sgn(bx+d)P^{+,iv}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} f(x), \qquad (\text{۷ب})$$

عمل می‌کند و در رده‌بندی تنها نمایش‌هایی با $v > 0$ مورد نیاز هستند. بارگمن همچنین دو مجموعه از نمایش‌ها را که امروزه سری‌های گسسته نامیده می‌شوند کشف نمود. یکی از این‌ها شامل $D^{+,n}$ به ازای هر $n \geq 2$ می‌باشد. این نمایش روی فضای توابع تحلیلی روی نیم صفحه‌ی بالایی که نسبت به $y^{n-2}dxdy$ مربع آن‌ها انتگرال پذیر است، عمل می‌کند. این عمل به صورت زیر است:

$$D^{+,n}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} f(z) = (bz+d)^{-n} f(az+c)(bz+d)^{-1}). \qquad (۸)$$

نمایش متناظری نیز به صورت $D^{-,n}$ در فضای مزدوج‌های مختلط وجود دارد. سری دیگری به نام سری متمم[1]، همانند (۷آ) عمل می‌کند با این تفاوت که iv با یک پارامتر حقیقی u بین ۰ و ۱ و همچنین توسط یک ضرب داخلی پیچیده که به وضوح معین مثبت نیست جایگزین شده است. همچنین نمایش بدیهی یک بعدی و دو نمایشی که امروزه حدهای سری‌های گسسته نامیده می‌شوند، یعنی $D^{+,1}$ و $D^{-,1}$ وجود داشتند. این همه آنچه بود که وجود داشت. آن چه که بیش از هر چیز دیگری بارگمن را غافلگیر کرد مشاهده این پدیده بود که تنها سری‌های اصلی و سری‌های گسسته در نمایشِ منتظمِ چپ گروه یعنی $l(g)F(x) = F(g^{-1}x)$ روی L^2ی همان گروه نقش دارند. سری متمم هیچ نقشی بازی نکرد. علاوه بر آن، سری گسسته به صورت گسسته مشارکت می‌کرد. این پدیده‌ای جدید بود که پیش از آن در گروه‌های نافشرده مشاهده نشده بود.

هم چنین در سال ۱۹۴۷ گلفاند و نیمارک $SL(2,\mathbb{C})$ را بررسی نمودند. آنها سری‌های اصلی و سری‌های متمم را به دست آورده و پی بردند که هیچ سری گسسته‌ای وجود ندارد. در سال ۱۹۵۰ گلفاند و نیمارک کتابی را منتشر کردند که اطلاعات گسترده‌ای درباره‌ی نظریه‌ی نمایش گروه‌های لیِ نیم ساده‌ی کلاسیکِ مختلط به دست می‌داد. هیچ سری گسسته‌ای در آن ظاهر نشد. کتابِ سال ۱۹۵۰ چگونگی استفاده از هندسه‌ی انتگرال برای به دست آوردن یک فرمول پلانشرال صریح برای $G = SL(n,\mathbb{C})$ (تجزیه $L^2(G)$) را نیز نشان داد.

به نظر می‌رسد مک کی اولین فردی بود که پی برد نمایش‌های (۷)، نمایش‌های القا شده هستند، القا شده از نمایش‌های یک بعدی زیرگروه‌های بالا مثلثی. هریش ـ چاندار در سال ۱۹۵۲ فرمول پلانشرال برای $SL(2,\mathbb{R})$ را به دست آورد، و گلفاند و رایکوف در سال ۱۹۵۳ آن را به $SL(n,\mathbb{R})$ تعمیم دادند. از این نتایج، تصویری از $L^2(G)$ پدیدار شد متشکل از تعداد زیادی قطعه که هر یک از آن‌ها وابسته به آنالیز هارمونیک نوعی اساسی از زیرگروه‌های آبلی ماکسیمال به نام زیرگروه کارتان بود. برای $SL(n,\mathbb{C})$، با تقریب تزویج، تنها یک گروه اینچنینی (زیرگروه قطری)

1) Complementary series

هریش چاندرا[1]

وجود دارد، و فرمول پلانشرال به آنالیز فوریه‌ی زیرگروه قطری تقلیل می‌یابد. برای $SL(n, \mathbb{R})$، دو زیرگروه کارتان غیرمزدوج (زیرگروه قطری و زیرگروه دوران) وجود دارد. آنالیزی که به فرمول پلانشرال منجر می‌شود دقیق است، اما قلب این آنالیز، آنالیز فوریه روی دو زیرگروه کارتان است. برای $SL(n, \mathbb{R})$ تعداد $[\frac{n}{2}] + ۱$ زیرگروه کارتان غیرمزدوج وجود دارد.

هریش ـ چاندار به این نکته پی برد که پیدا کردن نمایش متناظر با یک زیرگروه کارتان فشرده مهم است و این که این‌ها باید سری‌های گسسته باشند ـ نمایش‌هایی که مستقیماً در فرمول پلانشرال ظاهر می‌شوند. او ابتدا تعمیم‌هایی از (۸) به دیگر گروه‌هایی که روی دامنه‌های متقارن کراندار عمل می‌کنند را فراهم کرد، اما می‌دانست که این کافی نیست زیرا چنین گروه‌هایی شامل گروه‌های دارای زیرگروه‌های کارتانِ فشرده نبودند. بالاخره در پی رشته‌ای از مقالات عمیق که در مقاله‌ای ستایش برانگیز در مجله آکتامتمتیکا[2] در سال ۱۹۶۶ به اوج خود می‌رسد، او یک رده‌بندی از سری گسسته را کامل نمود. او بعدها نشان داد که نمایش‌های مرتبط با فرمول پلانشرال، از زیرگروه‌های سهموی که با MAN نشان داده می‌شوند القا می‌شوند، هر MAN از یک رده‌ی تزویجی مجزا با استفاده از زیرگروه‌های کارتان، همراه با نمایش القا شده‌ای متشکل از یک سری گسسته روی M، یک کاراکتر ضربی یکانی گروه اقلیدسی A، و نمایش بدیهی روی گروه پوچتوان همبند ساده‌ی N ساخته شده است. هریش ـ چاندار گام‌های پایانی اثبات فرمول پلانشرال را در سال ۱۹۷۶ منتشر نمود.

1) Harish-Chandra 2) Acta Mathematica

نمایش‌های یکانی تحویل ناپذیر دیگری به جز آنچه برای اندازه‌ی پلانشرال مورد نیاز است، همانند آنچه برای $SL(n,\mathbb{R})$ برقرار است، وجود دارند. رده‌بندی آن ها پیچیده‌تر است و حل نشده باقی مانده است. در سال ۱۹۷۳ یک جهش بسیار بزرگ توسط لنگلندز صورت گرفت، کسی که تمام نمایش‌های «پذیرفتنی[۱]» تحویل ناپذیر، که شامل همه‌ی نمایش‌های یکانی تحویل‌ناپذیر می‌شود را، دسته‌بندی کرد. در شکل نهایی این دسته‌بندی مشاهده شده است که همانند بالا، نمایش‌های پذیرفتنی تحویل ناپذیر، خارج قسمت‌های نمایش القا شده از همان زیرگروه‌های MAN هستند (به جز این که ممکن است لازم باشد برای MA داده شده از بیش از یک N استفاده نمود). یک سری گسسته یا حد یک سری گسسته روی M، و یک کاراکتر ضربی روی A هست که لگاریتم مدول آن در یک مخروط اساسی واقع می‌شود. مجدداً روی N از نمایش بدیهی استفاده می‌شود. در نتیجه پرسش درباره‌ی نمایش های یکانی به پرسشی در این باره تبدیل می‌شود که کدام یک از آن چه خارج‌قسمت‌های لنگلندز نامیده می‌شوند، می‌تواند با معرفی یک ضرب داخلی جدید، یکانی شود. برای $SL(۲,\mathbb{R})$، سری‌های متمم به این طریق به دست آمده‌اند، اما یک جواب کلی لازم است. پیشرفت در این مسیر کند بوده و مبتنی بر یافتن روش‌هایی برای حل و فصل یکانی بودن رده‌های خارج قسمت‌های لنگلندز است. این روش‌ها امروزه به قدر کافی قدرتمند هستند به گونه‌ای که وُگان[۲] مسئله را برای $SL(n,\mathbb{C})$ و به ویژه $SL(n,\mathbb{R})$ به طور کامل حل و فصل کرده و بارباش[۳] نیز همین کار را برای گروه های سیمپلکتیک و متعامد مختلط انجام داده است. اما این احتمال وجود دارد که پاسخ کلی برای تمام G ها ممکن است بیش از آن پیچیده باشد که بتوان آن را به صورت مستدل بیان کرد. شکل های ۱ و ۲ که برگرفته از [۲] است دو وضعیت در یک گروه $SL(٦,۲)$ را نمایش می‌دهد؛ نمایشی از یک M در هر دو حالت ثابت است، و شکل، تصویر دو بعدی لگاریتم‌های کاراکترهای ضربی حقیقی را در یک مخروط مناسب نشان می‌دهد.

نواحی، خطوط و نقاطی که پررنگ‌تر مشخص شده‌اند معرف پارامترهایی هستند که متناظر با نمایش‌های یکانی هستند. در حالت شکل ۱، تصویر کامل شده است و این اعتقاد وجود دارد که در حالت متناظر با شکل ۲ هم تصویر کامل می‌شود. می‌توان ثابت نمود که پارامترهای نمایش‌های یکانی یک گروه دلخواه G مجتمع‌هایی چند وجهی از این نوع را تشکیل می‌دهند، اما توصیف پارامترهای نمایش‌های یکانی در این مثال‌ها به قدری پیچیده است که اکثر پژوهشگران این عرصه به جای جستجوی تمام نمایش‌های یکانی تحویل ناپذیر، تنها به دنبال نمایش‌های یکانی تحویل ناپذیر «مهم» هستند.

دو تا از کاربردهای آنالیز هارمونیک در گروه‌های نیم ساده را متذکر می‌شویم. یکی از آن‌ها تجزیه‌ی فضاهای تابعی روی فضاهای متقارن نیم ساده‌ی G/H است که در آن H یک گروه ثابت از یک گسترده‌ی[۴] G است. این نظریه در حال حاضر نسبتاً کامل است و می‌تواند به عنوان یک تعمیم هم زمان و قابل توجه از سه نظریه در نظر گرفته شود: نظریهٔ کارتان در سال ۱۹۲۹ برای

1) Admissible 2) Vogan 3) Barbasch 4) involution

حالت فشرده، نظریه‌ای در مورد فضاهای متقارن ریمانی که در سال ۱۹۵۸ توسط هریش ـ چاندرا آغاز شده و توسط هلگاسن در سال‌های ۱۹۶۰ و ۱۹۷۰ تعمیم پیدا کرده، و همچنین نظریه هریش ـ چاندرا در سال ۱۹۷۶ برای گروهی به شکل $G \times G/diag(G)$.

برنامه لنگلندز

کاربرد دیگر به برنامه لانگلندز در نظریه اعداد و هندسه محاسباتی مربوط می‌شود که وی به خاطر آن‌ها جایزه وُلف[1] را در سال ۱۹۹۶ دریافت نمود(Notices, February 1996, p. 221) برنامه لنگلندز جنبه‌های متعددی دارد و ما تنها یکی را ذکر می‌کنیم که عبارت است از جستجو برای تعمیمی از قاعده تقابل آرتین برای توسیع های گالوای ناآبلی میدان‌های عددی k. امید این است که بتوان تمام توابع L آرتین را با انواع دیگری از توابع L که دارای پیوستگی تحلیلی و معادلات تابعی هستند مشخص نمود. منبعی برای برخی انواع توابع L با رفتار تحلیلی خوب، رده دیگری از توابع L است که توسط هنکه معرفی شده و براساس فرم‌های هلالی[2] ارائه شده‌اند. در نظریه لاگلندز آن‌ها در تعمیمی از رساله‌ی تیت گنجانده شده‌اند که نتایج آن در بالا مورد بحث قرار گرفت. در نظریه لگلندز، رساله تیت به عنوان ابزاری برای کار با ماتریس‌های ۱ در ۱ در نظر گرفته شده است زیرا آیدل‌ها را می‌توان به عنوان $GL_1(A)$ در نظر گرفت که در آن A حلقه ادل‌های k هستند. توابع L هکه در حالت ۲ در ۲ی نظریه لنگلندز پدیدار می‌شوند. به شکلی خاص‌تر، یک گروسن کاراکتر، کاراکتری از آیدل‌ها است که روی نشانده شده‌ی قطری میدان اعداد k بدیهی است، و لنگلندز به هر نمایش «پذیرفتنی» تحویل ناپذیر از $GL_n(A)$ که مستقیماً در L^2ی $GL_n(A)/GL_n(k)Z$ (با فرض این که k به طور قطری نشانده شده و Z نیز همان مرکز باشد) پدیدار شده و در شرطی که صفر شدن در هلال‌هایی از فرم‌های مدولی کلاسیک را تعمیم می‌دهد صدق کند، یک تابع L را متناظر می‌کند. کارهای انجام شده توسط تاماگاوا[3]، گادیمنت[4]، ژاک[5] ـ لنگلندز، سپس گودیمنت ـ ژاک، و بالاخره ژاک، رفتار تحلیلی خوب این L تابع‌ها را نشان داد.
قاعده تقابل آرتین به این قضیه منجر شد که تابع L آرتین از هر نمایش ۱ بعدی گروه گالوا، تابع Lی است که به همین طریق از $GL_1(A)$ به دست آمده است. تقابل لنگلندز[6] عبارت از این حدس است که تابع L آرتین هر نمایشی از یک گروه گالوای n بعدی، همان تابع L به دست آمده از این طریق از $GL_1(A)$ است. زمانی که میدان اعداد $\mathbb{Q}$ باشد، تقابل لنگلندز به ادعایی در مورد انتخاب الگو برای تشخیص این که چگونه یک چندجمله‌ای یک متغیره تکین تحویل ناپذیر با ضرایب در $\mathbb{Z}$ زمانی که به پیمانه‌ی یک عدد اول تحویل یافته است، تجزیه می‌شود، منجر می‌گردد. لنگلندز در اثری که به خاطر آن در سال ۱۹۸۲ برنده جایزه کول[7] شد این حدس را برای رده‌ای از نمایش‌های گروه گالوای ۲ بعدی که با روش‌های قبلی قابل اثبات نبود، ثابت نمود. تونل[8] قضیه لنگلندز را

1) Volf Prize 2) Cusp forms 3) Tamagawa 4) Godement 5) Jacquent 6) Langlands reciprocity 7) Cole Prize 8) Tunnell

برای تمام نمایش‌های گروه گالوای ۲ بعدی که تصویر آن‌ها در $PGL_۲(\mathbb{C})$ زیرگروهی از گروه متقارن با چهار عنصر است، تعمیم داد.

این قضیه ژرف ازلنگلندز و تونل، اگر چه بر اساس عبارات نمایش‌های گروه، توابع L، و ادل‌ها جمله‌بندی شده است، در نهایت قضیه‌ای درباره اعداد اول است. این قضیه سنگ بنای نظریه نمایشی کار وایلز[۱] روی آخرین قضیه فرما است.

همچنان که لنگلندز در سال ۱۹۹۰ در [۹] درباره کل برنامه‌اش گفت: «ما با حدس‌های درهم تنیده‌ای سر و کار داریم که نمی‌توان به طور مستقیم آنها را مورد حمله قرار داد. کشش زیبای بین جنبه‌های فوری مسائل و عوامل به هم پیوسته از یک سو، و از سوی دیگر عملکرد آن‌ها به عنوان ابزاری برای بیان و ظاهر نمودن قوانینی نه چندان جهانشمول به عنوان پدیده‌ای از نوع دیگر، که برای آن‌ها این قوانین امکان وقوع زیادی دارند، احتمالاً در فیزیک به طور گسترده‌ای شناخته شده است، جایی که در آن مدت طولانی است که پذیرفته شده است که مفاهیم مورد نیاز برای درک یک واقعیت، ممکن است ارتباط اندکی با آن داشته باشد، تا در ریاضیات، که در آن به طرز عجیبی، به ویژه در بین متخصصان نظریه اعداد، نوآوریِ مفهومی، به دلیل اکراه از روبرو شدن با واقعیت و فرار از آن، مکرراً تقبیح شده است. همچنان که بررسی اثبات گرد فالتینگ[۲] از حدس موردل[۳] روشن می‌سازد، پیشرفت‌های نیم قرن اخیر ما را به بلوغ رسانده است، اما هنوز عرصه‌های زیادی وجود دارند که باید تسخیر شوند.»

منابع

[1] E. Artin, *Collected papers*, Springer-Verlag, NewYork, 1965.

[2] M. W. Baldoni-Silva and A. W. Knapp. *A construction of unitary representations in parabolic rank two*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **16** (1989), 579-601.

[3] L. Bers, F. John, and M. Schechter, *Partial Differential Equations,* Interscience, New York, 1964.

[4] F. G. Frobenius, *Gesammelte Abhandungen,* 3 vol., Springer-Verlag, Berlin, 1968.

[5] K. I. Gross *On the evolution of noncommutative harmonic analysis*, Amer. Math. Monthly **85** (1978), 525-548.

[6] R. Howe, *A century of Lie theory,* Mathematics into the Twenty-First Century, Proc. AMS Centennial Symposium (August 1988) vol. II, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, pp. 101-320.

1) Wiles 2) Gerd Falting 3) Mordell

[7] A. W. Knapp, *Representation Theory of Semisimple Groups: An overview based on examples,* Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1986.

[8] A. W. Knapp and D. A. Vogan, *Cohomological Induction and Unitary Representations*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1995.

[9] R. P. Langlands, *Representation theory: Its rise and its role in number theory,* Proc Gibbs Sympos (New Haven, CT, 1989), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990, pp. 18-210.

[10] G. W. Mackey, *Infinite dimensional group representations*, Bull. Amer. Math. Soc. **69** (1963), 628-686.

[11] ——, *Harmonic analysis as the exploitation of symmetry- a historical survey*, Rice Univ. Stud. **64** (1978). No. 2 & 3, 73-228.

[12] W. Rudin, *Fourier Analysis on Groups*, Interscience, New York, 1962.

[13] I. Schur, *Gesammelte Abhandungen*, 3 vol., Springer-Verlag, Berlin, 1973.

[14] E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1970.

[15] E. M. Stein and G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971.

[16] A. Weil, *L'inte'gration dans les groupes topologiques et ses applications*, Hermann, Paris, 1940.

[17] A. S. Wightman, *Eugene Paul Wigner, 1902-1995, Notices* **42** (1995), 769-771.

[18] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, 2 vol., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1959.

مترجم: احمد صفاپور
دانشگاه ولی عصر (عج) ـ رفسنجان
safapour@vru.ac.ir