

## رویکردی در تدریس ریاضیات عالی

مسعود آرین نژاد

### چکیده

آموزش و یادگیری ریاضیات محض و پیشرفته، همواره با مشکلات تفهیمی و ادراکی زیادی مواجه است. اما این مشکلات فقط محدود به سختی و پیچیدگی مفاهیم و روش‌های موجود در چنین مباحثی نیست. خیلی اوقات، درک و پذیرش این مفاهیم و کنار آمدن با نوع نگاه آن‌ها همراه با درک و فهم شیوه‌های بحث و بررسی‌های موجود در آن‌ها از موانع اصلی هستند. در این نوشته به این جنبه از آموزش ریاضیات به‌ویژه در حوزه ریاضیات پیشرفته می‌پردازیم و البته ادبیات و لحن بیان این گزارش بیشتر تجربی و شخصی است تا فلسفی و کلاسیک.

### ۱. دورنمای عمومی

فلسفه و ریاضیات قرابت و خویشاوندی دیرینه‌ای باهم دارند، هر چند که در ظاهر در دو سوی عالم تفکر و اندیشه بشر نشسته‌اند. در یک سوی، ریاضیات از عدد و شکل و اندازه و تابع و شمارش و کران و محاسبه و تقریب سخن می‌گوید و در صورت و سیرت خود، قطعی‌ترین و یقینی‌ترین تفکرات، دریافت‌ها و داوری‌های علمی را باز می‌نمایاند و درسوی دیگر، فلسفه از وجود و عدم و علیت و ضرورت و جوهر و ماده و ماهیت و نهایت و اخلاق و سعادت و ازل و ابد سخن می‌گوید و همه چیز را با تردیدهای بارز و مشهودی از گمانه‌های صدق و صحت و اطلاق نشر می‌دهد و همیشه به نوعی در وضعیت تعلیق قرار دارد و از هر قطعیتی می‌گریزد. ریاضیات، به خانواده عبارات و کلمات کلیدی. فلسفه، اصل موضوع، پیوستگی.

2010 Mathematics Subject Classification. 00A30 ; 97E20.

علوم یقینی تعلق دارد و فلسفه به خانواده معرفت‌های شناور و نادقیق و همیشه لرزان. با وجود این، یعنی با وجود همه این تقابل‌های واقعی، آن قرابت و خویشاوندی یاد شده هم، مستندات و موجبات محکم و متعددی دارند هر چند که ممکن است قدری عجیب بنمایند.

• مفاهیم و مضامین مجرد و به تعبیر افلاطون موجودات دنیای مثل، فقط موضوع مطالعه این دو حوزه هستند و شاید همین هم دلیل اصلی آن بوده است که در تاریخ علم باستان، خیلی اوقات، صاحبان این هر دو معرفت، به روال و طریقی طبیعی و معمول، یکی بوده‌اند یا از یک دسته شمرده می‌شده‌اند. برای همین هم فیثاغورث و افلاطون و ارشمیدس و خیام و خوارزمی فلسفه و ریاضیات آمیخته‌ای پرورده‌اند و مکتب فلسفی ریاضیاتی یا ریاضیات فلسفی همگن آمیخته‌ای را پیرامون خود آفریده‌اند.

• دلیل دیگر، روش واحد دریافتی و شناختی این هر دو شاخه از معرفت در تولید دانش ویژه خود است. این روش برای هر دو وادی، صرفاً عقلی، استدلالی و تحلیلی است و از تجربه و مشاهده، جز در حد بسیار محدودی و آن هم فقط از برای پروردن شهود و استخراج انتزاع و تجرید، بهره‌ای نمی‌گیرند. این وحدت روش و ابزار سررشته مهمی در یکی انگاشتن خاستگاه‌های ادراکی و خویشاوند خواندن این دو دانش است.

• دلیل سوم، علاقه‌ای است که به طور معمول بسیاری از ریاضی‌دانان به فلسفه و شمار فراوانی از فیلسوفان به ریاضیات نشان داده و می‌دهند. عطش، نیاز، علاقه و انگیزه‌های علمی واحدی آن‌ها را به سوی هم می‌خواند. به همین دلیل حتی در قرون جدید هم ریاضی‌دانان فیلسوف یا فیلسوفان ریاضی‌دان، واژگان آشنایی در سرگذشت و سرنوشت تحولات ریاضیات و فلسفه است، از آن جمله‌اند رنه دکارت<sup>۱</sup>، برتراند راسل<sup>۲</sup>، الفرد نورث وایتهد<sup>۳</sup>، گوتلوب فرگه<sup>۴</sup>، ویلارد کواین<sup>۵</sup>، کورت گودل<sup>۶</sup>، آلفرد تارسکی<sup>۷</sup>، لویتنز براور<sup>۸</sup> و الیوت مندلسون<sup>۹</sup>. برای همین است که گاهی به تلمیح در نسبت این دو شعبه دانش گفته می‌شود: «ریاضی‌دان، فیلسوفی است که به کاغذ و قلم نیاز دارد و فیلسوف، ریاضی‌دانی است که حتی از کاغذ و قلم هم بی‌نیاز است!» بر همین طریق گوتلوب فرگه یکی از بزرگترین فیلسوفان و منطق‌دانان ریاضی جهان معتقد است «فیلسوفی که کاری به هندسه نداشته باشد یک نیمه فیلسوف است، ریاضی‌دانی هم که به فلسفه کاری نداشته باشد فقط یک نیمه ریاضی‌دان است [۶]». رابرت براون<sup>۱۰</sup> در کتاب کلاسیک «فلسفه ریاضیات» خود نوشته

<sup>۱</sup>René Descartes    <sup>۲</sup>Bertrand Russell    <sup>۳</sup>Alfred North Whitehead    <sup>۴</sup>Gottlob Frege    <sup>۵</sup>Willard Quine  
<sup>۶</sup>Kurt Gödel    <sup>۷</sup>Alfred Tarski    <sup>۸</sup>Luitzen Egbertus Jan Brouwer    <sup>۹</sup>Elliott Mendelson

<sup>۱۰</sup>James Robert Brown

است «هرکسی که واقعاً به فلسفه علاقمند باشد باید به طبیعت ریاضیات هم علاقمند باشد و... اما آنهایی را که این طور فکر نمی‌کنند بگذار تا به جهنم بروند!» [۶].

● از همه این‌ها که بگذریم رویکردهای نوین در دوره‌های آموزش همگانی در مدارس [۱، ۸]، فرصتی را برای توجه برنامه‌ریزی شده محتوایی‌تری به فلسفه فراهم آورده است. یکی، از جهت توجه به اهمیت بی‌نظیر روش آموزش «جدل و گفتگوهای سقراطی» در هر فضای آموزشی و کلاس درسی، برای یادگیری‌های خلاق و درونی و مؤثر. دیگر، از جهت فراهم آوردن فرصتی برای ورزش فکری و تنفس عقلی نسل‌های نو از همان سنین کودکی به وسیلهٔ درگیر کردن آن‌ها در چون و چراهای صرفاً استدلالی مباحث طبیعی فلسفی (مثلاً دربارهٔ مفاهیمی چون خوبی، بدی، شادی، زیبایی، زشتی، سعادت، سخاوت، ذکاوت، محبت، صلح، جنگ، پیشرفت، دوست داشتن، تنفر و مانند آن) تا زیربناهای نیروی‌های استدلال، تحلیل، تعقل، منطق و نظریه‌پردازی نوآموزان علم و دانش بر چنین تار و پودهای جایگزین ناپذیری استوار گردد.

یک قصد این نوشته توجه دادن به نقش و ارزش گفت و گوهای زنده دربارهٔ مضمون‌هایی از ریاضیات محض است که دارای ظرفیت‌های تفسیری و فلسفی روشنی در آموزش و فهمیدن ساختمان عمومی این علم هستند. قصد دیگر، فعال کردن ظرفیت تخیل، پرسشگری و استنتاج‌های فلسفی در چارچوب مواد و مفاهیم دروس تخصصی ریاضیات پیشرفته است همان چیزهایی که اغلب، مایه‌های الهام بخش و جذاب ریاضیات از جانب خیلی از فیلسوفان به این سوی علم بوده است. باید گفت که خیلی از عناوین و مفاهیم ریاضیات پیشرفته، به خوبی ظرفیت چنین گفتگوهایی را در خود دارند و کافی است اندکی مستقل از تشریفات رسمی آموزشی و درسی مورد درنگ و تأمل قرار گیرند. به طور مثال مفاهیمی چون «نهایت، بی‌نهایت، کران، بی‌کرانی، بعد، نامتناهی، پیوستگی، گسستگی، برابری، یکسانی، ترتیب، چیدمان، نظم، جهت، جهت پذیری، شمارش، شمارش پذیری، استقراء، تقریب، پیچیدگی» همگی دارای لایه‌های فلسفی قابل بحثی هستند که البته از دیدگاه ریاضیات هم کاملاً مورد اعتنا و توجه‌اند.

## ۲. از زوایای دیگر

این گونه تأملات و این رویکرد به آموزش ریاضیات دلایل دیگری هم دارد. آموزش و یادگیری ریاضیات محض و پیشرفته در سطح رشته ریاضی دانشگاه، به غیر از سخت فهمی و پیچیدگی‌های

طبیعی‌اش، همواره با چالش‌های ادراکی و تفسیری متفاوتی در کلاس‌های درسی مواجه است. چرا که مفاهیم، مستندات و مثال‌های این سطح از ریاضیات:

۱. ارتباط روشنی با مفاهیم و مثال‌های ریاضیات سنتی و مدرسه‌ای ندارند. در این گونه اخیر از ریاضیات، عناوین آموزشی آشنایی چون هندسه (بررسی و تحلیل اشکالی چون مثلث و دایره)، مثلثات (تحلیل روابط بین نسبت زوایا و پاره‌خط‌های مثلث)، جبر (تجزیه و حل معادلات چندجمله‌ای از درجه یک، دو و حداکثر سه) و حساب اعداد (تحلیل و بررسی اعداد اول، تقسیم پذیری، تجزیه پذیری و مانند آن) همواره با احساس، تفسیر و شهودهای طبیعی و ساده‌ای همراه هستند که پشتوانه توجیه چونی‌ها و چرایی‌های محتوای آن‌هاست و دانش‌آموز و لاقلم معلم از عهده توصیف و توجیه حسی و تجربی قابل قبول آن‌ها بر می‌آیند.

۲. پیوند مستقیمی با مفاهیم کلاسیک «حسابان یا ریاضیات عمومی» که از دروس رسمی و پایه‌ای یکی دو سال اول بسیاری از رشته‌های دانشگاهی هستند ندارند. معمولاً مسائل و مفاهیم این درس در همه کتاب‌های کلاسیک با انبوهی از مثال‌های کاربردی توجیه و تشریح می‌شوند. در نتیجه این مثال‌ها به نحو مؤثری کمک می‌کنند تا دانشجویان رشته ریاضی و غیرریاضی دغدغه چندان‌ی در پذیرش و فهم این نوع از ریاضیات به عنوان نوعی از ریاضی سنجی و ریاضی فهمی مسئله‌های طبیعی و واقعی (یعنی فرموله کردن پیوند و ارتباط بین متغیرهای وابسته به یک مسئله) نداشته باشند.

۳. هیچ‌گونه اشاره مستقیم و روشنی به تفسیر و تشریح ریاضی‌وار جهان و عالم واقعی ندارد چیزی که تقریباً در همه دیگر رشته‌های دانشگاهی خیلی طبیعی و عادی رخ می‌دهد و همین هم، مورد انتظار دانشجویان این حوزه‌هاست. به علاوه تقریباً همه افراد درگیر و مانوس در این رشته‌ها، به طور یکسان اشاره‌های واقعیت‌نمای بحث‌های خود را می‌فهمند و تلقی و تعبیر بسیار نزدیک و مشابهی از آن‌ها دارند. این یعنی در حوزه دانش فیزیک همه اهالی این رشته (از دانشجو تا استاد) تقریباً به یک شکل می‌فهمند و باور دارند که این دانش دست اندر کار تبیین و توصیف و تشریح چهره‌های فیزیکی عالم (مثل نیرو، میدان مغناطیس، تغییر مکان، سرعت، شتاب، دما، شدت جریان یا گرانش) است. شیمی و اهالی شیمی و دیگر رشته‌ها هم به همین قیاس.

۴. پیدا نیست که تا کجا و کی این نوع از ریاضیات حس کنج‌کاو و پرسش‌گری‌های طبیعی و عمومی ذهنی را پاسخ می‌دهند و انگیزه ساختن و پایداری و تکثیر و گسترش آن‌ها چیست. این یعنی برای خیلی‌ها، از دانشجو تا استاد، تقریباً هیچ معلوم نیست که مثلاً نظریه اندازه یا جبرهای

ناجایبایی یا فضای دیفرانسیل پذیر، هندسه منیفلد و جبر باناخ برای چه مقصودهایی و به چه دلایلی مطرح یا ساخته و پرداخته شده‌اند و اینکه آیا ضروری و گریزناپذیر بوده‌اند یا فقط یک ابزار و وسیله مطالعاتی موضعی و موردی هستند.

این هر چهار جنبه، درست بر خلاف آن چیزی است که اغلب در دیگر رشته‌های علوم پایه مانند فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی و حتی اغلب رشته‌های دانشگاهی، دانشجو با آن‌ها مواجه می‌شود. در آموزش این رشته‌ها اغلب، موضوعات و مفاهیم در تداوم حسی و تجربی جستجوگرانه هم هستند و چیزهایی با نام پرسش و مکاشفه و تأمل دربارهٔ چیستی‌ها و دلالت‌ها و کاربردهای نظریه‌های مطرح، در صحنه‌های واقعی علم و دانش و فن‌آوری آن حوزه‌ها اصولاً مطرح نیستند و تفاهمی تقریباً جامع، بدیهی و ساده، محوری از همسونگری، واقع‌نگری و طبیعی بودن را پشتوانهٔ آموزش‌های موفق‌تر و پذیرفتنی‌تری در این بخش‌های علوم می‌سازد.

### ۳. ریاضیات چیست؟

در آموزش ریاضیات پیشرفتهٔ محض، خیلی اوقات یکی از دغدغه‌های مهم دانشجویان، حسارت ابراز صریح پرسش‌های سرکوب شده‌ای از این قبیل است که این‌ها چیست و به چه دردی می‌خورد؟ چرا این‌ها ریاضیات است؟ ریاضیات چرا این‌هاست و اصلاً ریاضیات مگر چیست؟ این یعنی یکی از بی‌تابی‌های مستمر دانشجویان ریاضی به هنگام مواجه شدن و آموختن موضوعات و مفاهیم دروس محضی مانند جبر مدرن، توپولوژی، هندسه خمینه‌ها، نظریه رسته‌ها، همولوژی، آنالیز غیر استاندارد، هندسه دیفرانسیل، منطق ریاضی و مانند آن، طرح پرسش‌هایی ماهوی و ریشه‌ای دربارهٔ ریشه‌ها و خاستگاه‌های معنایی و استنادی این‌گونه مفاهیم است. همچنین کند و کاوهای صرفاً نظری به علاوهٔ شیوه و نوع کنار آمدن و پذیرفتن و باور به آن‌ها نیز پرسش برانگیز است.

جالب است که این اتفاق، فقط در یک جای دیگر در صحنه معارف بشری رخ می‌دهد و آن هم فلسفه است. یعنی تقریباً فقط در این رشته است که مدخلی با عنوان «فلسفه چیست» در همه منابع علمی آموزشی این رشته به طور جدی مطرح است و اهالی فلسفه خود را مقید و مکلف به توضیح و شرح آن می‌دانند و در مدخل بسیاری از کتاب‌های آموزشی و عمومی فلسفه، بخشی یا فصلی در ابتدای این کتاب‌ها هست که به پرسش و پاسخ و توضیح این گونه گفتگوها می‌پردازد. وجود و حضور همین‌گونه نیازها در عالم ریاضیات منجر به نگارش کتاب مهمی با نام «ریاضیات چیست؟» ریچارد کورانت<sup>۱</sup> در سال ۱۹۴۱ گردید. این کتاب یکی از شاخص‌ترین نوشته‌های عمومی

<sup>۱</sup>Richard Courant

ریاضیات در طی بیش از هفتاد سال گذشته است. توصیف خوب کورانت از چستی ریاضیات در این کتاب آنقدر ارزنده بوده است که یان استیوارت<sup>۱</sup> ریاضی‌دان توصیفی‌نویس مشهور، ویرایش به روزی از آن کتاب را در سال ۱۹۹۶ عرضه و چاپ کرد [۲]. یکی دیگر از کتاب‌های کلاسیکی که لاقلاً یک بخش خود را برای پاسخ به این پرسش اختصاص داده است کتاب «هندسه‌های اقلیدسی و نا اقلیدسی» نوشته ماروین جی گرینبرگ<sup>۲</sup> است [۳]. این نکته هم اینجا شایسته گفتن است که در برابر پرسش «چیستی فلسفه و چستی ریاضیات» همواره دو گونه پاسخ کلی متصور است یکی این‌که بگوییم ریاضی و فلسفه یعنی همه آن مواد و محتوایی که ریاضی‌کاران و فلسفه‌کاران با آن‌ها کار می‌کنند و درگیر آن هستند. یک پاسخ دیگر، انتظار توصیف محتوایی و تشریح اهداف، انگیزه‌ها، مفاهیم، موضوع‌ها و روش‌های کارکرد و نوع توسعه و پیشرفت هر یک از این دو علم است. در فلسفه همواره به این بخش توجه فراوانی می‌شود تا فلسفه خوانان جوان، نخست انگیزه و علائق خود را برای ورود به مباحث عمیق و جدی این نوع از دانستن صیقل دهند و پیش از هر چیز به مرتبه‌ای از باور، نیاز و انتظار به گونه‌ای از فلسفه برسند. البته در ریاضیات، غالباً چنین رویکردی در پیش گرفته نمی‌شود. این امر، به دلیل غفلت از چنین نیازی نیست، بلکه از سخت‌تر بودن پرداختن به آن ناشی می‌شود.

#### ۴. در آسیاب تجربه

به تجربه گاهی رویکردهای ساده‌تری هم موضوعیت و مناسبت دارند به طور مثال گاهی حتی تأنی در این نکته ظاهراً سهل و ممتنع هم، در کلاس‌های درس، کاملاً مفید و مثبت و پر مخاطب و جدی و واقعی است: آیا اصلاً ریاضیات یک علم است؟! اگر هست، چرا یک علم است و در این صورت آیا دریافته‌های ریاضیاتی دریافته‌هایی از نوع و جنس دریافته‌های رایج در علوم دیگر است یا ریاضیات چیزی و راء و متفاوت با دیگر علوم کلاسیک است و ادراک آن هم متفاوت با سبک و سیاق ادراکی یا اکتشافی آن‌هاست. باز هم از باب مثال، توصیف فرضی ریاضیات به عنوان نوعی بازی توافق شده با نمادها و تعاریف و قراردادهای شخصی و توافقی هم میدان خوبی برای بسط دامنه تخیل نسبت به ماهیت و محتوای ریاضیات است. از این پیش‌تر هم می‌توان رفت و گاهی حتی مقایسه صریح و بی‌پروای ریاضیات با بازی جذاب شطرنج که نمونه خوبی مملو از تنوع شرایط، قراردادهای، نمادها و حالت‌های اکتشافی یا ابتکاری است می‌تواند میدان تخیل‌ها و مجادله‌های شیرین و هیجان بخشی را در فضای درسی و آموزشی ریاضیات برانگیزد. در این مثال،

<sup>۱</sup>Ian Stewart    <sup>۲</sup>Marvin Jay Greenberg

با چنین مقدمه چینی‌هایی، زنجیری از پرسش‌های پی در پی شبه فلسفی هم می‌توانند جان بگیرند و چالش‌هایی برانگیزند و جاری شوند: مثلاً علم چیست، اقسام علوم کدامند؟ علوم پایه (که ریاضیات را معمولاً بخشی از آن می‌خوانند)، علوم مهندسی، علوم انسانی و غیر آن هرکدام به طور کلی و عمومی چیستند و چه حد و مرز و توصیف و مسئولیتی در میدان بزرگ علوم دارند؟ علوم عقلی و علوم نقلی چیستند؟ علوم تجربی و علوم نظری یعنی چه؟ علوم محض و علوم کاربردی چیستند؟ در این انواع تقسیم بندی‌ها، ریاضیات در حوزه کدام قسم قرار می‌گیرد؟ ریاضیات عینی است یا ذهنی [۷]؟ مفاهیم مجرد و محض چیستند؟ مفاهیم و موضوعات مورد توجه و کاوش اکتشافی بشر بر چند قسمند؟ مثال‌های هر یک چیست؟ ریاضیات به کدامیک از این موضوعات و مفاهیم می‌پردازد؟ ریاضیات را زبان علوم، پایه علوم، مادر علوم و گاهی هم ملکه یا پادشاه علوم می‌خوانند. این توصیف‌ها هر یک به چه معنی هستند و تا چه حد اعتبار و منزلت دارند و پذیرفتنی هستند؟ ریاضیات را زبان مشترک علوم تجربی می‌خوانند. اگر این تعبیر و تلقی را بپذیریم در این صورت آیا ریاضیات هم به عنوان نوعی زبان و محور تفاهم و ارتباط، واجد همان ویژگی‌های زبان عرفی در ذخیره کردن تاریخی ادراک عمومی از تجربه‌های معنایی و حسی است و پس از آن مبنایی در انتقال معانی و مقصودهای مشترک یا افزون بر آن و متفاوت با آن ویژگی‌های اکتشافی و ارتباطی مختص خود را هم دارد؟

به تجربه، چنین گفتگوهایی که البته باید با زبان هر چه ساده‌تری عرضه و پیگیری شوند در حاشیه‌های گاه به گاه بحث‌های نظری و نسبتاً پیشرفته ریاضیات و متناسب شرایط درس و ویژگی‌های مفهومی و موضوعی آن، همواره متضمن دریافت‌ها و موضع‌گیری‌های غرور آمیزی از جانب دانشجویان نسبت به نقش و ابعاد قابل تعبیر ریاضیات هستند. همراهی مدرس در گسترش فضای آزادی از طرح و بحث این گونه پرسش‌ها هم همواره فرصت‌های تأمل و درنگ‌های شیرین و موفق را در محیط یک کلاس درس جدی و تخصصی ایجاد می‌کنند و این ظرفیت را دارند که بر قوت، کیفیت و انگیزه یادگیری‌ها دو چندان و بل صد چندان بیفزایند.

ناگفته پیداست که میدان دادن به چنین مباحثه‌های آزادی، همواره یک مخاطره جدی هم برای مدرس دارد و آن این که مدرس را در معرض پاسخگویی به همه پرسش‌های پر دامنه‌ای از این نوع قرار دهد. به رغم وجود این مخاطره، با گسترش چنین میدان باز و آزادی از گفتگو و پرسشگری، دانشجویان خوب می‌آموزند که هر یادگیری مؤثر و خلاق، خیلی بیشتر از اتکا به پاسخ پرسش‌های رایج، بارور کردن پرسش‌های درونی شده حسی و شخصی است. از این رو باید امیدوار بود و تشویق

کرد تا دانشجویان رفته رفته با جسارت هر چه بیشتری در جوانب موضوع، سؤال‌های حتی از پیش طراحی نشده و پیش‌بینی نشده‌ای بپرسند بدون آن‌که درانتظار پاسخ آن در محدوده کلاس درس و از جانب مدرس باشند. دانشجویان باید یاد بگیرند که گاهی بزرگترین دستاوردهای دورانی از یادگیری، به کف آوردن و صید صدف مروارید پرسش‌های بکر ناگشوده‌ای در تلاطم دریای موج و گسترده کنجکاوی‌هاست.

مفاهیم زیادی در دل آموزش دروس تخصصی دوره کارشناسی ریاضی محض قرار دارند که می‌توانند مبنای رویکرد عمومی آموزشگران به بحث‌های فلسفی مناسبی به هنگام تدریس باشند و همیشه می‌توان به هنگام برخورد با چنین عناوین و مفاهیمی بحث را گاه به گاهی به عرصه‌های عمومی‌تری از صرف زبان استدلالی و اصل موضوعی خشک ریاضیات کشاند و چنین فرصت‌هایی را میدانی برای جذب و انگیزه بخشیدن نسبت به گفتگوهای توصیفی و تشریحی ریاضیات که جای آن در محیط‌های آموزشی ما بسیار خالی است قرار داد. تشریح کلی و عمومی و شهودی و حسی و هندسی مفاهیم ریاضیات، سطح متفاوت و مهمی از یادگیری صرف اجزاء و مفاهیم تخصصی و روش‌های فنی و محاسباتی و تکنیکی است.

این یک تلقی ( افلاطونی) خیلی مثبت آموزشی است که به دانشجو بگوییم و تشریح کنیم که یکی از شئون اصلی ریاضیات ارائه یک تصویر و شمای ریاضی از عالم و پدیده‌های آن است درست در همان شأن و وجهی که علمی چون فیزیک، شیمی و زیست‌شناسی در حال ترسیم‌آند. چهره ریاضی جهان درست به مانند چهره‌ها و جنبه‌های فیزیکی، شیمیایی و زیستی جهان که موضوع و هدف مطالعه این علوم هستند موضوع مطالعه ریاضیات است. این چهره بر خلاف چهره‌های دیگر، حسی و تجربه پذیر نیست و تنها با ابزار تجرید، تحلیل و استدلال‌های نظری می‌توان پرتوی بر ویژگی‌های آن افکند و به متن و محتوای ادراک شدنی آن رسوخ کرد و گوهر صید درک و دریافتی به دست آورد. تقویت این طرز تلقی، نگاه و انتظار متفاوتی را در فضای آموزشی و نزد دانشجویان ریاضی تولید می‌کند که برای فهم و باور و اعتقاد به ریاضیات پیشرفته همواره بسیار مفید است و در مراحل تکامل خود هم البته مانع تفسیرهای فلسفی متنوع ریاضیات عالی نمی‌شود.

## ۵. تعریف‌ها و اصل موضوع‌ها

شاید یکی از مهم‌ترین و جالب‌ترین جنبه‌ها در آموزش ریاضیات پیشرفته توجه به نقش و کثرت تعریف‌ها و نیز توجه به اهمیت اصل موضوع‌ها در دامنه بسط و ساختار این دانش است. این دو در واقع دو محور و دو بنیاد اصلی همه ساختمان ریاضیات امروز هستند. به عبارت دیگر ما امروزه



با چیزی به نام ریاضیات طبیعی و بکر یا ارگانیک مواجه نیستیم و البته هیچ‌گاه هم با چنین آرمان خیالی خامی مواجه نبوده‌ایم این یعنی ساختمان عمومی این دانش بر زمین بکری عاری از هرگونه پایه و بنیادستی بنا نشده و نمی‌شود. واقعیت این است که در ریاضیات سنتی، حکم‌ها و قضیه‌ها همیشه با غفلت‌هایی (طبیعی نسبت به زمان خود) همراه بوده‌اند در نتیجه این گمان را موجب می‌گشتند که همگی شاخ و برگ نوعی از نگاه طبیعی و بکر ریاضیاتی به جهان و پدیده‌ها هستند. امروزه معلوم شده است که چنین انتظار و آرزویی، واقعی نیست. ریاضیات امروزی یک دانش اصل موضوعی است به این معنی که در هر حوزه‌ای از جستجوها و تأملات ریاضی، ما همواره با تعدادی اصل موضوع خاص یا عام مواجهیم، مثل اصل انتخاب، اصل پیوستار خطی اعداد حقیقی (متناظر اصل کمال یا خوش ترتیبی)، اصل لانه کبوتری در حوزه‌های عمومی و سرتاسری ریاضیات، اصول موضوع هندسه اقلیدسی و مانند آن.

توضیح چاره‌ناپذیری وجود اصول موضوع و در واقع ضرورت وجود چنین اصولی خیلی ساده است. اگر بخواهیم از راه استدلال محض (که روش عمومی ریاضیات و فلسفه است) ثابت کنیم که حکم الف صحیح است باید نشان دهیم که به «طور منطقی» این استدلال از حکم ب نتیجه می‌شود. تکرار همین روند ارجاع به حکمی مقدم‌تر (به اتکای سه اصل موضوع کلاسیک متافیزیک به نام‌های اصل علیت، اصل بطلان دور و اصل بطلان تسلسل علی) در نهایت ما را به حکمی می‌رساند که نباید نیازی به اثبات و استدلال داشته باشد و به اصطلاح باید بدیهی باشد (که گاهی خیلی هم بدیهی نیست، مثل اصل پنجم اقلیدس). این احکام نخستین و بدیهی را که معمولاً به اتکای نوعی شهود، بدیهی بودن و پذیرش جمعی شکل می‌گیرند و مورد قبول و اجماع ریاضی‌دانان قرار می‌گیرند «اصول موضوع» می‌نامند. همین استدلال ما را به ضرورت پذیرش واژگان‌های تعریف نشده یا تعریف نشدنی نیز می‌رساند (مثل واژه «برابری و یکسانی» در ریاضیات، واژه‌های «مجموعه و عضویت» در نظریه مجموعه‌ها، واژه‌های «نقطه و خط» در هندسه اقلیدس و مانند آن). از همه جالب‌تر این‌که تحلیل بافت همین استدلال گفته شده درباره ضرورت پذیرش اصل موضوع‌ها و واژگان‌های بدیهی و نخستین، ما را به توافق بر سر قواعد و اصول استدلال یا همان اصول نحوی منطق (منطق عمومی و منطق ریاضی) هم هدایت می‌کند (مثل استدلال بر اساس اصل استقرا، اصل طرد شق سوم و مانند آن).

در تحلیل موضوع «تعریف‌ها» معمولاً گفته می‌شود که تعاریف در ریاضیات بر چند قسمند. یکی تعریفی صرفاً برای معرفی واژه‌های تعریف نشدنی (چنانچه گذشت) و نمادگذاری‌ها، مثل

تعریف یک نقطه و نمادهای رایج آن در هندسه اقلیدسی یا تعریف مجموعه و عضویت در نظریه مجموعه‌ها. دیگری تعریفی که در شأن یک قرار و توافق ضمنی است، مثل وقتی که جمع نامتناهی اعضای یک دنباله را با نمادی مانند نماد «سری یا جمع بی انتها» معرفی می‌کنیم. اما نوعی از تعریف‌ها در ریاضیات در شأن عالی مرتبه تشخیص و اکتشاف علمی قرار دارند مثل وقتی که عناصر جبری و متعالی در جبر تعریف می‌شوند یا وقتی که مفهوم حد و همگرایی دنباله‌ها در حسابان تعریف می‌شوند.

در واقع در ریاضیات، عنصر و معنی بنیادی «اکتشاف» که موضوع اصلی شناخت و فهم و تفسیر جهان و مقوم و موتور حرکت همه علوم و اصلاً نهایت، آمال و انگیزه هر گونه تلاش علمی است در دو موقعیت قابل مشاهده است، یکی در قضایا و احکام خاص (مثل وقتی که حکم می‌کنیم «پیوستار اعداد حقیقی ناشمارا است» یا «مجموعه اعداد اول نامتناهی است» یا «رویه‌های فشرده کراندار فقط بر سه نوع کره و چنبره و صفحه تصویری هستند» یا «هر تابع پیوسته بر روی کره واحد در فضای حقیقی متناهی بعد به روی خودش حداقل دارای یک نقطه ثابت است»). موضع دیگر اطلاق واژه کشف که گاهی خیلی مهم‌تر از کشف احکام و قضایا هم هست به هنگام عرضه تعریف‌های خاص رخ می‌دهند. به طور مثال تعریف کلاسیک «حد و پیوستگی» که به کوشی ریاضی‌دان بزرگ فرانسوی (۱۷۸۹-۱۸۵۷) نسبت داده می‌شود یک تعریف تشخیصی و اکتشافی ناب در ریاضیات کلاسیک است. همان‌گونه که تعریف «اعداد گنگ» بر محور اعداد حقیقی یک تعریف ناب و اکتشافی عمیق در ریاضیات است و جالب است که چون در این مورد اخیر اطلاق لفظ «تعریف مستند به کشف و تشخیص» به دلیل داستان جالب این کشف به دست فیثاغورثیان، مسوق به سابقه‌ای تاریخی است اطلاق لفظ کشف به آن ساده‌تر و پذیرفتنی‌تر است [۲، ص ۶۴ و ۵، ص ۷۶] [۲، ص ۷۶] [۳، ص ۶۴]. مثال دیگر بروز معنی کشف در «تعریف‌ها» وقتی است که ساختار یا همبستگی ریاضی جدیدی بین پدیده‌های عالم یا اشیاء ریاضی جهان معرفی می‌شوند. مثال خیلی بارز آن تعریف و در واقع کشف برخال‌ها (فراکتال‌ها) است [۲، ص ۵۳۰] [۳، ص ۳۳]. غالب اینگونه تعریف‌ها فرایند تجربی دقیقی (تجربه ریاضیاتی) را از کنجکاو و جستجو و کشف ناب می‌گذرانند تا به سر منزل بلوغ تعریف برسند. توضیح و تشریح تاریخی برخی از اینگونه تعریف‌ها در ریاضیات عالی موجب می‌شوند تا فرصت تلقی‌ها و استنباط‌های وسیع‌تر و عمیق‌تری هم در فضای کلاس و نحوه یادگیری و تأمل بر روی این بنیادهای معنایی پدید آیند.

## ۶. توپولوژی

یکی از مهم‌ترین مفاهیم در سرآغاز آموزش درس توپولوژی، توصیف عمومی موضوع این درس و توضیح نوع توجه، دقت و پرسش‌هایی است که این نظریه در کنجکاو‌های علمی خود مطرح می‌سازد. این توصیف، چنانچه در اغلب متون رسمی آموزش توپولوژی مرسوم است با تعریف رسمی ساختمانی که آن را یک فضای توپولوژیک می‌نامند آغاز شود. البته تمهید طرح همین نقطه آغازین هم مقدماتی می‌خواهد مثلاً این‌که گفته شود ساختمان‌های متنوعی که در ریاضیات مطرح‌اند و گاهی هریک موضوع یک عنوان درسی و آموزشی‌اند مثل ساختمان یک گروه، یک حلقه، یک جبر باناخ، یک فضای متریک، یک فضای برداری، یک فضای دیفرانسیل‌پذیر و مانند این‌ها واقعاً یعنی چه و منظور از ساختمان در اینجا، در کلیت خود، چیست. دیگر این‌که خوب است این معنی هم به بحث گذاشته شود که آیا این تعریف‌ها ذاتی و اصیل‌اند یا جعلی، مفروضی و قراردادی‌اند و صرفاً از یک توافق جمعی ریاضی و چارچوب مفروض تحلیلی ناشی شده و می‌شوند.

از این مقدمه‌های اغلب مسکوت که بگذریم از همین نقطه آغازین ارائه تعریف هم باید آموزش در دامنه گفتگوها و پرسش و پاسخ‌هایی ادامه یابد و پیش رود که دانشجو حق داشته باشد و تشویق شود تا بپرسد که این قاعده‌ها و شرایط روی یک رده از زیر مجموعه‌های یک مجموعه مفروض یعنی چه، از کجا آمده‌اند، به چه درد می‌خورند و اصلاً توپولوژی، در کنه خود یعنی چه و قرار است چه بخشی و چه نوعی از سؤال‌های ریاضیات را پاسخ دهد؟ این یعنی قبل از متمرکز شدن بر روی اصول موضوعه ساختمان توپولوژی، به شرح فوق، و کار بر روی الزامات و ایجابات آن اصول در شرایط متنوع و تشبیه و استنباط تعمیمی آن از شرایط متناظری که مثلاً در فضا‌های طبیعی‌تر متریک در آنالیز حقیقی وجود دارد، چنانچه اغلب مرسوم است، نخست باید مدخل‌های ملموس و مشهودی برای پاسخ به این‌گونه سؤال‌های بنیادی یا لااقل اصالت حضور و اهمیت طرح و فهم پیشینی آن‌ها مطرح شود. با این مقدمه و با توجه به توصیف‌های رایج مندرج در مقدمه خیلی از کتاب‌های توپولوژی، مهم‌ترین مفهومی که در مسیر چنین بحث و گفتگویی باید بدان پرداخت می‌توان از دیدگاه‌های کلی‌تر و عمومی‌تری در باب آن سخن گفت مفهوم «پیوستگی» است.

## ۷. پیوستگی

«پیوستگی» چیست؟ شهود و تجربه گواهی می‌دهد که یکی از بنیادهای هستی، نهاد «پیوستگی» در تغییر و تحولات و گونه‌گونگی پدیده‌ها و پدیدارهای عالم است. ارسطو معتقد بود که جهان بر

چهار بنیاد استوار است. منشأ، غایت، ماده و حرکت [۴، مقاله‌های نهم و دهم]. این تقسیم‌بندی هنوز هم قابل توجه و معتبر است و می‌توان با آن توصیفی از جهان و فعالیت‌های علمی لازم برای این توصیف را عرضه کرد، هر چند که امروزه توصیف‌های اساسی دیگری مورد توجه هستند. بر اساس این چهار محور، ریاضیات در چه موقعیت و نقشی از جهان علم یا جهان شناسی قرار دارد؟ بخشی از پاسخ پرسش درباره «منشأ و غایت»، در حوزه علوم کیهان‌شناسی، نجوم و فیزیک قرار دارد، بخشی نیز در حوزه فلسفه و متافیزیک و الهیات. ریاضیات در باره پرسش‌های این دو بخش مسؤولیت و موضعی ندارد و در واقع ابزاری برای چنین رویکردی از پرسش، شناسایی، شناخت و دریافت ندارد. اما در دو حوزه دیگر، ریاضیات به شدت فعال، حاضر و جدی است. در بخش مطالعه عنصر «ماده» در هستی، ریاضیات هم به جوهر و ذات تنوع متجسم ماده که در گونه‌گونگی همه اشیاء متجلی‌اند می‌پردازد و هم به عرضیات و صورت‌ها. به طور کلی، ریاضیات به مطالعه آن جنبه‌هایی از جهان ماده و عرصه‌های هستی می‌پردازد که به مرور نام مواد و ویژگی‌ها یا مشخصات ریاضی تفسیر و تشریح جهان را بر خود گرفته‌اند مثل عدد، شکل، تابع، اندازه، اندازه‌گیری، اندازه پذیری، حد، پیوستگی، کران، کران‌داری، مرز، گوی، مثلث، خمینه، رویه، نهایت، بی نهایت، بُعد، شمارش، شمارش پذیری، ترتیب، رابطه، هم ارزی، همبندی، ناهمبندی، گسستگی، برابری، دنباله، سری، تقریب، خطا، غوطه وری، جهت، جهت پذیری، کمینه، کمینگی، بیشینه، بیشینگی، بهینه، بهینگی، بهینه‌سازی، رتبه، محاسبه، محاسبه پذیری، پیچیدگی محاسبه و هزارها عنوان شبیه این‌ها. نگاه ریاضیات به این مفاهیم، «نوعی» است یعنی ریاضیات با الهام از پدیده‌ها در تنوع و تکرار خود، مفهوم عدد، شمارش و اندازه را انتزاع می‌کند و مستقل از نوع تعلق و کاربرد آن به مطالعه مفهوم انتزاع شده می‌پردازد به نحوی که بر تمام مصادیق مثالی خود قابل اطلاق باشد. ریاضیات، نمونه‌ها و مدل‌های ذهنی و نه عینی اشیاء و حتی شرایط و همبستگی بین متغیرها را با ابزارهای خاص خود مطالعه می‌کند. از همین رو ریاضیات را دنیای علوم انتزاعی می‌خوانند.

اما درباره «حرکت» در تقسیم بندی ارسطو، ریاضیات درباره شناسایی و شناخت این وجه از بنیاد جهان بسیار فعال است. ابتدا ببینیم تفسیر و تلقی ریاضیات از حرکت چیست؟ طبیعی است که این تفسیر و تلقی همان چیزی نیست که در دانش فیزیک یا شیمی فهمیده می‌شود. یک مقدمه این است: در هر عرصه‌ای از جهان که مشاهده می‌کنیم یا با آن در تماس هستیم فعل و انفعالات و تحولات بی پایانی در جریانند. ماهیت این تحولات از دیدگاه ریاضیات چنین است: حرکت و تغییر و تحول یعنی تغییر نسبت متغیرهایی در پیوند با هم یا متأثر از هم. ریاضیات چنین فرایند عظیم و

گسترده‌ای را با مفهومی به نام «تابع» مدل‌بندی و بررسی می‌کند. از نظر ریاضیات، «حرکت» یعنی تنوع حضور مصداق توابع گوناگون.

بخشی از تجارب استقرایی بشر می‌گوید که هستی در بسترهای پیوسته‌ای از تغییر و تحولات و حرکت جلوه می‌کنند و بُروز می‌یابند. هیچ انفصالی و هیچ انقطاعی واقعی نیست مگر به اعتبار تغییر حالت و تغییر وضعیت و گونه‌گونی. عرصه جلوه‌های حضور «پیوستگی» در جهان گاهی هر یک موضوع و عنوان یکی از اقسام علوم هستند مانند انرژی، تکامل، حیات و مانند آن. واقعیت عظیم و سترگ «پیوستگی» همه جا به صورت یکی از حقیقت‌ها و جوهرهای مسلط نظام گیتی نمایان است. به این ترتیب، شرح و شناخت «پیوستگی» یکی از ضروریات شناسایی و فهم نظام «حرکت» در گیتی است و هر علمی به فراخور موضوع و مصادیق حوزه عملکرد خود به مطالعه و جوهری از آن می‌پردازد.

حال پرسش این است که برخورد ریاضیات با این حقیقت پر رمز و راز و پیچیده عالم چگونه است. باید گفت که ریاضیات هم، نگاه و بررسی خاص خود را از این پدیده جهانشمول، با زبان و نوع تحلیل و سنجش ویژه خود دارد و طبیعتاً اولین کار، تعریف و توصیف ریاضی این مفهوم است. در دنیای ریاضیات، مفهوم «پیوستگی» چگونه متجلی می‌شود. تعبیر ریاضی پیوستگی، تبیین آن به عنوان نوعی از یک تابع - توابع پیوسته - است. چنانچه گفته شد «توابع» یکی از عالی‌ترین مفاهیم و ابزارهای ریاضیات برای توصیف و تشریح انواع وابستگی‌ها و انواع حرکت‌های ممکن بین اجزاء عالم را به صورتی منظم و رصد پذیر، معرفی و عرضه می‌کنند. تعریف و توصیف نظری پیوستگی به رغم آنچه معمولاً در کلاس‌ها به صورت یک دستورالعمل تکلیفی گفته می‌شود یک تجربه ناب حسی و شهودی در ریاضیات است و تجربه مشترک و فعال مدرس و دانشجو از این مفهوم عمیق، غنی و غافلگیرکننده، فرصت مغتنمی است که معمولاً در سال‌های اول دانشگاه امکان ادای درست آن چندان فراهم نیست. از این رو طرح مناسب آن در دوره‌های عالی ریاضیات محض بسیار ارزنده خواهد بود.

پس از این است که فرصت برای عرضه توصیف چرایی غایی طرح نظریه توپولوژی مطرح می‌شود. یکی از ویژگی‌های علوم در هر یک از بخش‌ها، افزاز نظری فضای متغیرهای مؤثر و تحدید آن‌ها به چند متغیر قابل ردگیری در آن حوزه است. به طور مثال، ما در مطالعه شرایط دمایی یا رسانایی یا مغناطیسی اجسام در فیزیک، همواره با هزاران هزار متغیر شناخته شده یا ناشناخته رو در رویم اما چارچوب یک مطالعه نظری همواره حکم می‌کند که در این مطالعه فقط

تعداد محدودی متغیر با اثری محسوس در تجربه‌ای محدود و موضعی مورد توجه باشند. دقیقاً همین روند در ریاضیات هم موجب می‌شود که مثلاً برای بررسی ویژگی تقسیم‌پذیری یا تکثیرپذیری خطی یا اندازه‌پذیری، ساختمانی را که فقط حامل این ویژگی‌ها باشند در نظر بگیریم تا دقیقاً امکان ردگیری آثار منحصر به فرد این ویژگی‌ها در دل ساختمان‌های پیچیده‌تری که متغیرهای متنوع و متکثری درگیر آنند میسر باشد. بر همین روال است که ما در ریاضیات علاقمندیم ساختمانی را که تنها ویژگی آن، امکان فرایندهای پیوسته است را بررسی کنیم. چنین ساختمان حداقلی با این ویژگی منحصر به فرد همان فضا‌های توپولوژیک است. این نقطه شروع، تفصیل غنی و فاخر شأن حضور و تعریف این ساختمان است و از داستان این توصیف، البته بسیار باقی است.

## مراجع

- [۱] مسعود آراین نژاد، کودکان و ریاضیات، *خبرنامه انجمن ریاضی ایران*، شماره ۹۷، ۱۳۸۲.
- [۲] هاوارد ایوز، *آشنایی با تاریخ ریاضیات*، ویراست دوم، جلد اول، ترجمه محمد قاسم وحیدی اصل، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۶۹.
- [۳] ریچارد کورانت، هربرت رابینز، *ریاضیات چیست*، ویراست دوم، ترجمه سیامک کاظمی، نشر نی، تهران، ۱۳۷۹.
- [۴] ماروین جی گریبنز، *هندسه های اقلیدسی و نااقلیدسی*، ترجمه محمد هادی شفیع‌ها، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۶۱.
- [۵] محمد حسین طباطبایی، مرتضی مطهری، *اصول فلسفه و روش رئالیسم*، انتشارات صدرا، ۱۳۶۸ تهران.
- [6] G. J. R. Brown, *Philosophy of mathematics*, Routledge, New York, 1999.
- [7] S. Shapiro, *Philosophy of mathematics: structure and ontology*, Oxford University Press, Oxford, 1997.
- [8] <http://www.philosophyslam.org>

---

مسعود آراین نژاد: زنجان، دانشگاه زنجان، گروه ریاضی

تارنما: <http://znu.ac.ir/~ariannejad>

رایانامه: [arian@znu.ac.ir](mailto:arian@znu.ac.ir)