فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۷ (پاییز و زمستان ۱۳۹۴) صص. ۴۳ تا ۵۱

نظریه بازی‌ها و مسابقهٔ طناب‌کشی

پیمان فهیمی

چکیده

در این مقاله با تلفیق مکانیک کلاسیک در علم فیزیک و نظریه بازی‌ها در ریاضیات کاربردی، عوامل پیروزی یک تیم در مسابقه طناب‌کشی را ابتدا به صورت یک فعالیت هم افزا و سپس به شکل یک رقابت دو جانبه بررسی می‌کنیم.

۱. مقدمه

هرگاه سود یک موجودیت، تنها درگرو رفتار خود او نبوده و متأثر از رفتار یک یا چند موجودیت دیگر باشد، و تصمیمات دیگر تأثیر مثبت و منفی بر روی سود او داشته باشند، یک بازی[۱] میان دو یا چند موجودیتِ یاد شده شکل گرفته است. نظریه بازی شاخه‌ای از ریاضیات کاربردی است که در علوم بسیاری به ویژه اقتصاد مورد استفاده قرار می‌گیرد. بسیاری از مورخین ایجاد نظریهٔ بازی را به جان فون نویمان[۲] ریاضی‌دان مجارستانی نسبت داده‌اند. نویمان دریافته بود که نتیجه یک بازی، صرفاً با نظریهٔ احتمالات تعیین نمی‌شود. او شیوه بلوف‌زدن در بازی را فرمول‌بندی کرد. بلوف‌زدن در بازی به معنای راه‌کارِ فریب‌دادن سایر بازیکنان و پنهان‌کردن اطلاعات از آن‌ها است. در سال ۱۹۹۴، جان نش[۳] به همراه دو نفر دیگر به خاطر مطالعات خلاقانه خود در زمینه نظریهٔ

عبارات و کلمات کلیدی. نظریه بازی‌ها، تعادل نش، تابع بهترین پاسخ، فعالیت هم افزا، رقابت دو جانبه، مسابقه طناب کشی.

[۱] game [۲] John von Neumann [۳] John forbes Nash

بازی برنده جایزه نوبل اقتصاد شدند. در سال‌های بعد نیز برندگان جایزه نوبل اقتصاد عموماً از میان نظریه‌پردازان بازی انتخاب شدند [۱].

نظریه بازی تلاش می‌کند تا رفتار ریاضی حاکم بر یک موقعیت استراتژیک (تضاد منافع) را مدل‌سازی کند. این موقعیت زمانی پدید می‌آید که موفقیت یک فرد یا تیم وابسته به راه‌بردهایی باشد که دیگر افراد یا دیگر تیم‌ها انتخاب می‌کنند. هدف نهایی این دانش، یافتن راه‌برد بهینه برای بازیکنان در جهت بردن بازی است. یکی از اصلی‌ترین شرایط به‌کارگیری این نظریه در تحلیل محیط‌های رقابتی، وفاداری عوامل متعامل در رعایت منطق بازی است. هر چه قدر توان پیش‌بینی گزینه‌ها و نتایج حاصل از انتخاب آن‌ها بیشتر باشد، عدم قطعیت در این تکنیک کاهش می‌یابد [۱].

۲. مبانی اولیهٔ نظریه بازی

هر بازی از سه عنصر اساسی تشکیل شده است:

(۱) بازیکن‌ها

(۲) عمل‌ها[۱]

(۳) ترجیحات[۲]

بازیکن‌ها در اصل همان تصمیم گیرندگان بازی هستند. بازیکن می‌تواند شخص، تیم، شرکت و... باشد.

عمل، مجموعه‌ای از تصمیمات و اقداماتی است که هر بازیکن یا گروه می‌تواند انجام دهد.

ترجیحات نیز، مشوق‌های بازیکن برای گرفتن یا نگرفتن یک تصمیم خاص است. به عبارت دیگر، ترجیحات بیان‌گر نتیجه و سطح مطلوبیت[۳] بازیکن در صورت گرفتن تصمیم متناظر با آن می‌باشد، که با تابعی مانند U نمایش داده می‌شود [۲، ۱].

پژوهش‌ها در زمینهٔ نظریه بازی اغلب بر مجموعه‌ای از راه‌بردهای شناخته شده به عنوان تعادل، در بازی‌ها استوار است. این راه‌بردها اصولاً از قواعد عقلانی به نتیجه می‌رسند. مشهورترین تعادل‌ها، تعادل نَش[۴] است. براساس نظریه تعادل نش، اگر فرض کنیم در هر بازی با استراتژی مختلط، بازیکنان به طریق منطقی و معقول راه‌بردهای خود را انتخاب کنند و به دنبال حداکثر سود در بازی باشند، دست کم یک راه‌برد برای به دست آوردن بهترین نتیجه برای هر بازیکن قابل

[۱] actions [۲] payoff function [۳] utility [۴] Nash equilibrium

انتخاب است و چنانچه بازیکن راه‌کار دیگری به غیر از آن را انتخاب کند، نتیجه بهتری به دست نخواهد آورد. در واقع با فرض ثابت بودن بازی سایر بازیکنان، تعادل نش نقطه‌ای است که در آن هر بازیکن با تغییر بازی خود شرایطش بدتر شود و هیچ بازیکنی انگیزهٔ تغییر بازی خود را نداشته باشد. مهم‌ترین مفهوم نظریه بازی‌ها برای محاسبه تعادل نش، به دست آوردن تابع بهترین پاسخ[۱] است. در واقع به زبان ساده، بهترین پاسخ به این معنی است که، در مقابل عمل هر بازیکن یا تیم، بهترین عکس العمل بازیکن یا تیم مقابل به چه شکل خواهد بود؟ [۲، ۱].

به عنوان یک مثال ابتدایی، ''معمای زندانی‌ها[۲] '' را بررسی می‌کنیم و سپس به مسئلهٔ اصلی خودمان یعنی مسابقه طناب‌کشی می‌پردازیم:

دو نفر متهم به شرکت در یک سرقت مسلحانه، در جریان یک درگیری دستگیر شده‌اند و هر دو جداگانه مورد بازجویی قرار می‌گیرند. در طی این بازجویی با هریک از آن‌ها جداگانه به این صورت معامله می‌شود:

(آ) اگر دوستت را لو بدهی تو آزاد می‌شوی ولی او به پنج سال حبس محکوم خواهد شد.
(ب) اگر هر دو یکدیگر را لو بدهید، هر دو به سه سال حبس محکوم خواهید شد.
(پ) اگر هیچ‌کدام همدیگر را لو ندهید، هر دو یک‌سال در یک مرکز بازپروری خدمت خواهید کرد.

در این بازی به نفع هر دو زندانی است که گزینه سوم را انتخاب کنند، ولی چون هر کدام از آن‌ها به دنبال کسب بهترین نتیجه برای خود یعنی آزاد شدن است و به طرف مقابل نیز اعتماد ندارد، دوست خود را لو می‌دهد و درنتیجه هردوی زندانی‌ها متضرر می‌شوند. در این مثال، به سادگی می‌توان تشخیص داد که نقطه تعادل نش برای هرمتهم و همچنین تابع بهترین پاسخ هر زندانی در مقابل عمل زندانی دیگر چیست [۲، ۱].

مسئلهٔ اصلی ما در این مقاله، تحلیل یک مسابقه طناب‌کشی از دو جنبه است. یکی از دیدگاه بازیکنان تشکیل دهندهٔ یک تیم به عنوان یک فعالیت هم‌افزا[۳] ، و دیگری از دید مجموعهٔ دو تیم و به عنوان یک رقابت دوجانبه (رقابت کُرنو[۴]).

۳. فیزیک و مسابقه طناب‌کشی

عوامل فیزیکی مؤثر در برنده شدن یک تیم در مسابقه طناب‌کشی چیست؟

---

[۱] best response function [۲] prisoner's dilemma [۳] synergetic [۴] Cournot competition

عوامل زیادی در پیروزی یک تیم در چنین مسابقه‌ای دخیل هستند اما همانطور که می‌دانید اصطکاک مهم‌ترین عامل است. یعنی تیمی که بتواند نیروی بیشتری به زمین وارد کند و اصطکاک سطح پاها با زمین را افزایش دهد، شانس بیشتری برای برنده شدن دارد. به همین دلیل است که سعی می‌کنند در این رقابت از افراد سنگین وزن‌تر استفاده کنند. همچنین افزایش اصطکاک بین دست‌ها و طناب نیز بسیار تأثیرگذار است؛ بدین معنی که فشردن طناب و وارد کردن نیرو به آن که درواقع لازمهٔ آن انتخاب افرادی با پنجه‌های قوی‌تر است، می‌تواند شانس پیروزی را بیشتر کند. عامل دیگری که مؤثر است می‌تواند میزان قدرت تیم در افقی قرار دادنِ طناب باشد. یعنی از لحاظ بلندی قد، افرادی انتخاب شوند که در یک راستا قرار گیرند تا نیرو در جهت y تجزیه نشود. بدیهی است که اگر بلندی قد افراد متفاوت باشد، زوایای مثلثاتی تشکیل شده در مسیر نیرو، به صورت یک ضریب، نیرو را کاهش می‌دهند و بالأخره عامل تأثیرگذار نهایی برای پیروزی را نیز، روند کاهش نیروی افراد و مجموعهٔ تیم بر حسب گذشت زمان در نظر می‌گیریم، که بدین منظور باید بازیکنانی با قوای بدنی بیشتر انتخاب گردند [۳].

در این مسئله، اجازه دهید فرض کنیم که تمام شرایط برای دو تیم یکسان است. یعنی هر دو تیم از افرادی سنگین وزن با وزن‌های برابر، پنجه‌های قوی، بلندی قد یکسان و قوای جسمانی مساوی بهره‌مند هستند. حال می‌خواهیم بررسی کنیم که در چنین شرایطی کدام تیم برنده خواهد بود. طبق دانسته‌های قبلی ما، ظاهراً مسابقه نباید هیچ برنده‌ای داشته باشد، اما نظریه بازی‌ها پاسخ دیگری برای این سؤال دارد.

۴. فعالیت چند نفرهٔ هم افزا و اعضای یک تیم طناب‌کشی

در فعالیت هم‌افزا، اگر هرکدام از اعضای تیم طناب‌کشی بیشتر تلاش کنند، خروجی بهتری داشته و به هدف خود نزدیک‌تر می‌شوند. یعنی هر کسی که بیشتر نیرو مصرف کند، بازده مجموع تیم را نیز بالا خواهد برد، و البته به تبع آن بیشتر نیز خسته می‌شود [۲]. این نوع فعالیت تلاش بازیکنان یکی از تیم‌ها را به صورت مستقل و در واقع به شکل یک اصل برهم‌نهی بررسی می‌کند. مثلاً در فیزیک، وقتی می‌خواهیم تأثیر دو بار الکتریکی را بر یکدیگر بررسی کنیم، در ابتدا اثر یکی را نادیده گرفته و سپس نیروی وارد شده از طرف بار الکتریکی دیگر را محاسبه می‌کنیم. در مسابقهٔ طناب‌کشی از دید نظریه بازی‌ها نیز دقیقاً همین فرآیند را دنبال می‌کنیم.

فرض کنید هر تیم ۲ بازیکن دارد. عمل هرکدام از بازیکنان ۱ و ۲، اِعمال نیرو و فشار بیشتر به زمین و طناب و در نهایت افزایش اصطکاک است که بازهٔ تغییرات آن می‌تواند بین یک مقدار کمینه و بیشینه باشد. قبل از شروع رقابت، بازیکنان بر روی زمین ایستاده و همچنین طناب را در دست‌های خود گرفته‌اند، بنابراین مقداری اصطکاک بین پاها و زمین، و دست‌ها و طناب ایجاد می‌شود که همان مقدار کمینهٔ مسئله یعنی $F_۱$ است. مقدار بیشینه یعنی $F_۲$ نیز می‌تواند با توجه به قدرت بازیکنان و مجموع عواملی که در قبل ذکر شد تعیین شود. ترجیحات این رقابت نیز مطلوبیتی است که از تلاش دو بازیکنِ یک تیم و صرف نیرو توسط آن‌ها به دست می‌آید. برای این مطلوبیت یک مدل دلخواه تعریف می‌کنیم تا نیازهای ما در مسئله را برطرف سازد. مثلاً مطلوبیت بازیکن اول یعنی $U_۱$ ، تابع مثبتی از نیروی $(f_۱)$ اوست که در یک مقدار ثابت مانند $C_۱$ ضرب می‌شود. یک هم‌افزایی نیز در این معادله وجود خواهد داشت که به صورت حاصلضرب نیروی دو بازیکن $(f_۱ \times f_۲)$ در ثابت‌های آن‌ها نوشته می‌شود، یعنی اگر هر دو بازیکن بیشتر نیرو صرف کنند، به صورت ضربی سودشان افزایش می‌یابد نه به صورت جمعی. در نهایت نیز هزینهٔ این تلاش یک مقدار خستگی است که باعث تحلیل رفتن نیروی بازیکن می‌شود. اگر فرض کنیم این خستگی متناسب با گذشت زمان، به صورت نمایی افزایش می‌یابد می‌توان آن را به شکل $C_۳e^f$ در نظر گرفت. (در این مسئله، نیرو را تابعی از زمان در نظر گرفته‌ایم اما به دلیل این که جواب عمومی مسئله مورد نظر است، وابستگی دقیق نیرو به زمان ذکر نشده است)؛ پس داریم:

بازیکن‌ها: ۱ و ۲

عمل‌ها:

بازهٔ نیرو به صورت $F = [F_۱, F_۲]$ و مقدار نیروی نفر اول و دوم به شکل $f_۱(t), f_۲(t)$

ترجیحات:

$$\begin{cases} U_۱(f_۱, f_۲) = C_۱ f_۱(t) + C_۱ C_۲ f_۱(t) f_۲(t) - C_۳ e^{f_۱(t)} \\ U_۲(f_۱, f_۲) = C_۱ f_۲(t) + C_۱ C_۲ f_۱(t) f_۲(t) - C_۳ e^{f_۲(t)} \end{cases}$$

حل بازی:

همان طور که در ابتدا گفته شد هم اکنون باید تابع بهترین پاسخ هر بازیکن به هم‌تیمیِ خود (یعنی $B_۱$، $B_۲$) و سپس نقطه تعادل نش بازی را به دست آوریم. نقطه تعادل در اینجا نقطه‌ای است که بازیِ بازیکن ۱، بهترین بازی‌اش نسبت به بازی بازیکن ۲ باشد و بالعکس.

شرط برقراری تعادل نش:

$$\begin{cases} f_1^* = B_1(f_2^*) \\ f_2^* = B_2(f_1^*) \end{cases}$$

برای محاسبهٔ تابع بهترین پاسخ باید ببینیم بهترین پاسخ بازیکن ۱ برای بازی بازیکن ۲ و همچنین بهترین پاسخ بازیکن ۲ برای بازی بازیکن ۱ چیست. می‌دانیم که برای به دست آوردن ماکزیمم یک تابع باید از آن مشتق گرفت؛ اما پیش از این کار باید کمی از روش تقریب و اختلال برای حل این مسئله کمک بگیریم. می‌دانیم که بسط یک تابع نمایی به شکل زیر است:

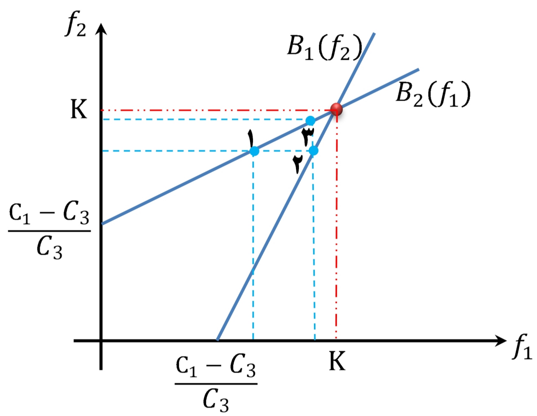
$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

اگر مسئله را تا تقریب مرتبه اول حل کنیم، هیچ نقطه تعادل نش‌ای حاصل نمی‌شود، پس تابع نمایی خود را تا جمله دوم حاصل از بسط نوشته و مسئله را ادامه می‌دهیم :

$$\begin{aligned} B_1(f_2) =: \frac{\partial U_1}{\partial f_1(t)} &= C_1 + C_1 C_2 f_2(t) - \frac{2C_3 f_1(t)}{2} - C_3 = 0 \\ &\to f_1(t) = \frac{C_1 C_2 f_2(t) + C_1 - C_3}{C_3} \\ B_2(f_1) =: \frac{\partial U_2}{\partial f_2(t)} &= C_1 + C_1 C_2 f_1(t) - \frac{2C_3 f_2(t)}{2} - C_3 = 0 \\ &\to f_2(t) = \frac{C_1 C_2 f_1(t) + C_1 - C_3}{C_3} \end{aligned}$$

پس بهترین بازی بازیکن ۱ برای هر بازی بازیکن ۲ و بالعکس، به صورت بالا به دست آمد. حال می‌خواهیم دو تابع بهترین پاسخ را به شکل نمودار رسم و سپس تحلیل کنیم.

برای یافتن نقطه تعادل نش از روی نمودار کافی است که یک نقطه خارج از تعادل را بررسی کنیم. در شکل ۱ ، نقطه‌های آبی رنگ را در نظر بگیرید؛ اگر بازیکن دوم به اندازه نقطه آبی(۱) نیرو صرف کند، بازیکن اول مجبور خواهد بود به عنوان بهترین پاسخ، از نقطه آبی(۱) به نقطه آبی(۲) تغییر موضع داده و میزان نیروی لازم برای پیروزی خود و تیمش را افزایش دهد. متعاقباً با این تغییر، بازیکن دوم دوباره مجبور خواهد شد استراتژی خود را برای بُرد تیمش عوض کرده و در نتیجه به اندازه نقطه آبی(۳) تلاش خود را افزایش دهد. این جابجایی‌ها تا جایی ادامه می‌یابد که



شکل ۱. نمودار توابع بهترین پاسخ در مسابقه طناب‌کشی

هیچ بازیکنی دیگر انگیزهٔ تغییر بازی خود را نداشته باشد. این نقطه همان نقطه تقاطع دو نمودار و درواقع نقطه تعادل نش خواهد بود که در نمودار به رنگ قرمز مشخص شده است.

$$f_1^* = B_1(f_2^*), \qquad f_1^*(t) = \frac{C_1C_2f_2^*(t) + C_1 - C_3}{C_3}$$

$$\rightarrow \quad f_1^*(t) = \frac{C_1C_2(\frac{C_1C_2f_1^*(t) + C_1 - C_3}{C_3}) + C_1 - C_3}{C_3}$$

$$\rightarrow \quad f_1^*(t) = \frac{C_1 - C_3}{C_3 - C_1C_2} = K \quad \rightarrow \quad f_2^*(t) = \frac{C_1 - C_3}{C_3 - C_1C_2} = K$$

طبق محاسبات بالا، هردو بازیکن باید به اندازه K نیرو صرف کنند. این عبارت دو معنی دارد؛ اول اینکه در نقطه (K, K) هیچ بازیکنی با تغییر بازی خودش سود نمی‌برد چون روی بهترین پاسخش قرار دارد. دوم این که هیچ نقطهٔ دیگری وجود ندارد که در آن یکی از بازیکن‌ها حداقل با تغییر بازی خودش بتواند سود بیشتری کسب کند. پس اعضای یک تیم طناب‌کشی باید به اندازه یک مقدار مشخص و برابر همدیگر نیرو صرف کنند تا شانس پیروزی بیشتری داشته باشند و نیازی نیست بیشتر از آن مقدار نیز زحمت بکشند. این بدین معنی است که مثلاً، تیمی که هر دو بازیکن آن ۵۰ نیوتن نیرو مصرف کنند، شانس بیشتری نسبت به تیمی که یکی از بازیکنانش ۳۰ نیوتن و دیگری ۷۰ نیوتن نیرو مصرف کند، برای پیروزی دارد.

در این مقاله، با فرض برابری عوامل مختلف در پیروزی، فقط تابع نیرو را تأثیر دادیم؛ اما می‌توان در تابع مربوط به مطلوبیت، عوامل دیگر از جمله تابع قد و تابع وزن را نیز وارد کرد. مثلاً می‌توان بررسی نمود که اگر قد یک بازیکن یا مجموعهٔ یک تیم، از بازیکن یا مجموعهٔ دیگر ۱سانتی‌متر بیشتر باشد چه تأثیری در روند بازی خواهد داشت؟

لازم به ذکر است که یک بازی می‌تواند از حالت ساده (مانند بالا) خارج شده و به شکل یک بازی پویا درآید و چند نقطه تعادل نش داشته باشد؛ به این معنی که تحت شرایط مختلف (مثلاً دو برابر شدن نیروی کل توسط یکی از تیم‌ها)، تابع بهترین پاسخ هر بازیکن یا هر تیم نسبت به کُنش بازیکن یا تیم دیگر تغییر کند و در نهایت بر روی یک نمودار به صورت یک منحنی (به جای یک خط راست) در آید. به هرحال هر تیم برای برنده‌شدن باید نقطه تعادل نش خود را حفظ نماید.

۵. نتیجه‌گیری

با توجه به عوامل فیزیکی مؤثر در برنده شدن یک تیم در مسابقه طناب‌کشی که در ابتدای مقاله ذکر شد، می‌توان به طور ساده تشخیص داد که چه گروهی در یک رقابت پیروز خواهد شد؛ اما با فرض این که هردو تیم تمام شرایط لازم را فراهم کرده باشند، یعنی افرادی سنگین وزن با پنجه‌های قوی، قدهای یکسان و قوای جسمانی برابر انتخاب شده باشند، وضعیت متفاوت خواهد بود. تحت این شرایط، بازی کاملاً متقارن می‌شود و هردو تیم ویژگی‌های یکسانی پیدا خواهند کرد، پس در نگاه اول نباید هیچ گروهی نسبت به دیگری رفتار متفاوتی داشته باشد. اما نظریه بازی‌ها پاسخ دیگری دارد، که نشان می‌دهد هنوز یک عامل مؤثر برای پیروزی که همان تعادل نش تیم‌هاست، باقی مانده است. در نتیجه با انجام محاسبات می‌توان فهمید که اعضای یک تیم طناب‌کشی باید به اندازهٔ یک مقدار مشخص و برابر همدیگر نیرو صرف کنند تا شانس پیروزی بیشتری داشته باشند. به عبارت دیگر تیمی که بتواند خود را در نقطه تعادل نش حفظ نماید موفق به پیروزی خواهد شد.

تشکر و قدردانی

نویسنده بر خود می‌داند که به ترتیب حروف الفبا از آقایان محسن باقری محراب، سعید عبدی و سلیمان فتح‌الله‌زاده که نظرات سودمندی جهت بهبود مقاله ارائه دادند و همچنین داور (داوران) محترم که نقطه نظرات سازنده‌ای پیشنهاد نمودند، تشکر و قدردانی نماید.

مراجع

[1] M. J. Osborne, *An introduction to game theory*, Oxford University Press, 2000.

[۲] وب‌گاه کلاس درس ؛ «نظریه بازی‌ها» ، ۱۳۸۹: http://kelasedars.org

[۳] د. هالیدی، ر. رزنیک، ج. واکر، *مبانی فیزیک*، ویرایش ششم، ترجمه: ن. گلستانیان، م. بهار، انتشارات مبتکران، تهران، ۱۳۸۲.

پیمان فهیمی: دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، دانشکده فیزیک

رایانامه: pfahimi@mail.kntu.ac.ir