فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۷ (پاییز و زمستان ۱۳۹۴) صص. ۵۳ تا ۸۰

بافه چیست؟

ای. سیباخ، ال. سیباخ، و ال. استین

برگردان: داود حسن‌زاده للکامی و هاجر روشن شکالگورابی

از وقتی که ژان لورِ[۱] و هنری کارتان[۲] در سال ۱۹۵۰ رسماً مفهوم بافه[۳] را معرفی نمودند، مثال‌های متنوع و کاربردهای بافه‌ها، نقش بزرگی در زمینه‌های گوناگون ریاضی مانند متغیرهای مختلط، هندسهٔ جبری، هندسهٔ دیفرانسیل و توپولوژی جبری ایفا نموده است. هنوز تقریباً همهٔ متونی که بافه‌ها را معرفی یا از آن استفاده می‌کنند فرض را بر آشنایی خواننده با توپولوژی جبری تا سطح کارشناسی می‌گذارند. لذا برای یک دانشجوی کارشناسی به‌دست آوردن درک واقعی از بافه‌ها و کاربردهایشان بسیار سخت است. هدف این مقاله معرفی کردن نظریهٔ بافه‌ها در سطحی مقدماتی است. با امید به این که خوانندگان علاقه‌مند به‌همراهِ بصیرتی کامل، توانایی حرکت به سمت مقالات استاندارد (مانند [۲]، [۳]، [۶]، [۱۰] یا [۱۱]) را داشته باشند.

مسیر حرکت ما به‌سوی نظریهٔ بافه‌ها از میان مثال‌های مربوط به سه ناحیهٔ وسیع از ریاضیات عبور خواهد کرد: از ناحیهٔ آنالیز ریاضی، بافهٔ ریشه‌های نگاشت‌های تمامریخت؛ از ناحیهٔ جبر، بافهٔ حلقه‌های موضعی، و از ناحیهٔ هندسه، بافهٔ فرم‌های دیفرانسیل. هر یک از این بافه‌های خاص را با جزئیات قابل‌ملاحظه‌ای شرح خواهیم داد، زیرا چشم‌اندازهای مختلفی که این‌گونه آشکار می‌گردند، مباحث بعدی نظریهٔ کلی بافه‌ها را با سهولت بیشتری شفاف خواهند ساخت.

J. A. Seebach, Jr., L. A. Seebach and L. A. Steen, What is a Sheaf?, *Amer. Math. Monthly* ,**77** (1970) 681-703.

[۱] Jean Leray [۲] Henri Cartan [۳] sheaf

۱. بافهٔ ریشه‌های نگاشت‌های تمامریخت

یک نگاشت تمامریخت[۱] (یا تحلیلی[۲]) بر یک زیرمجموعهٔ باز D از n–فضای مختلط $\mathbb{C}^n$ نگاشتی مختلط–مقدار بر D است که در هر نقطه از D دارای یک نمایش سری توانی موضعی باشد. لم اوسگود[۳] [۶، ص ۲] بیان می‌کند که یک نگاشت پیوسته بر $D \subset \mathbb{C}^n$ تمامریخت است اگر و تنها اگر جداگانه نسبت به هر یک از متغیرها تمامریخت باشد.

یک خاصیت بسیار مهم نگاشت‌های تمامریخت این است که آنها به‌طور یکتا توسط رفتارشان بر مجموعه‌های باز تعیین می‌شوند: اگر f و g بر دامنهٔ D (دامنه، مجموعه‌ای باز و همبند است) تمامریخت بوده و بر یک زیرمجموعهٔ باز ناتهی از D برابر باشند، آنگاه بر سراسر D، f با g برابر است. برای اثبات این مطلب، کافی است مشاهده کنیم که بزرگ‌ترین زیرمجموعهٔ باز از D که بر آن $f = g$ (نسبت به D) بسته است زیرا مشتقات جزئی که بسط سری توانی را تعیین می‌کنند، پیوسته‌اند. چون D همبند است، این مجموعه باید برابر با D باشد.

اکنون اگر $z \in \mathbb{C}^n$، گوییم f در z تمامریخت است هرگاه بر یک همسایگی از z تمامریخت باشد. مجموعهٔ A_z متشکل از همهٔ نگاشت‌های تمامریخت در z، تشکیل یک جبر روی میدان اعداد مختلط می‌دهد که در آن، عمل‌های جمع و ضرب مستلزم اشتراک دامنه‌هاست: اگر $f : U \to \mathbb{C}$ و $g : V \to \mathbb{C}$، آنگاه $f + g : U \cap V \to \mathbb{C}$ و $fg : U \cap V \to \mathbb{C}$. فرض کنیم ایدآل I_z از A_z متشکل از نگاشت‌هایی از A_z باشد که بر یک همسایگی از z صفر می‌شوند.

جبر ریشه‌های نگاشت‌های تمامریخت در z به‌صورت حلقهٔ (جبر) خارج‌قسمتی A_z/I_z تعریف شده و با O_z نمایش داده می‌شود. لذا یک ریشه[۴] از یک نگاشت تمامریخت، عضوی چون $f + I_z$ از O_z است که در آن، f در z تمامریخت می‌باشد. معمولاً این ریشه را با $[f]_z$ نمایش می‌دهیم. طبق معمول، دو نگاشت که به یک ریشه تعلق دارند را یکی گرفته یا بین آنها تفاوتی قائل نمی‌شویم. این بی‌توجهی تا حدی توسط خاصیت یکتایی که در بالا بیان شد توجیه می‌شود، زیرا دو نگاشت که به یک ریشه تعلق دارند و بر یک دامنهٔ یکسان D تعریف می‌شوند باید در حدِ یک نگاشت در I_z تفاوت داشته باشند؛ این بدان معنی است که آنها بر یک همسایگی از z یکسان بوده و لذا باید بر D نیز یکسان باشند.

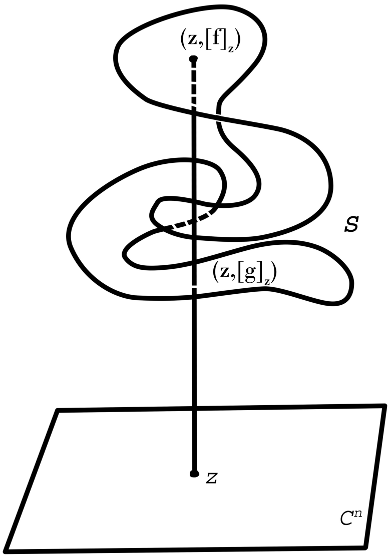
اکنون فضای ساقه‌ای[۵] (espace étalé) نگاشت‌های تمامریخت را به‌صورت مجموعهٔ

$$S = \{(z, [f]_z) \mid f \text{ در } z \in \mathbb{C}^n \text{ تمامریخت است}\}$$

---

[۱]holomorphic [۲]analytic [۳]D. Osgood [۴]germ [۵]stalk space

به همراه نگاشت طبیعی ρ از S به $\mathbb{C}^n$ با ضابطهٔ $\rho((z,[f]_z)) = z$ تعریف می‌کنیم. $\rho^{-1}(z)$ را ساقهٔ[۱] در نقطهٔ $z \in \mathbb{C}^n$ می‌نامیم. به‌سادگی دیده می‌شود که این یک نسخه از O_z، یعنی جبر ریشه‌های نگاشت‌های تمامریخت در z است. بنابراین فضای ساقه‌ای S اجتماع مجزای ساقه‌هاست. به‌طور شهودی، S را به‌صورت سطوحی بر فراز $\mathbb{C}^n$ که در هم نفوذ کرده‌اند به‌همراه ρ که تصویر کننده S به‌روی $\mathbb{C}^n$ است، رسم می‌کنیم (شکل ۱).



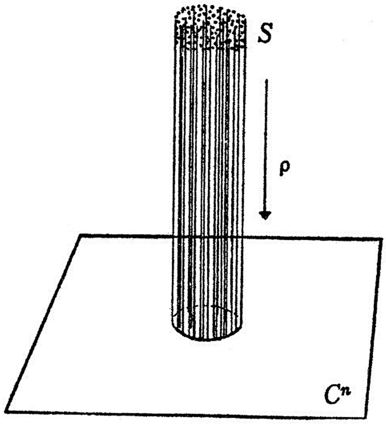
شکل ۱

برای این که درک شهودی بالا را به‌صورت دقیق‌تری بیان کنیم، توپولوژی $\mathbb{C}^n$ را به S انتقال داده و S را به یک فضای توپولوژیک تبدیل می‌کنیم. برای هر مجموعهٔ باز U در $\mathbb{C}^n$ و هر نگاشت f که بر U تمامریخت است، تعریف می‌کنیم $V(f,U) = \{(z,[f]_z) \mid z \in U\}$. مجموعهٔ $V(f,U)$ مشمول در S است و گردایهٔ همهٔ این مجموعه‌ها، S را می‌پوشاند، زیرا اگر $(z,[f_\circ]_z) \in S$، آن‌گاه $f_\circ$ باید در یک همسایگی $U_\circ$ از z تمامریخت بوده و $(z,[f_\circ]_z) \in V(f_\circ,U_\circ)$. افزون بر این، $V(f_1,U_1) \cap V(f_2,U_2) = V(f,U)$ که در آن، $U = \{z \in U_1 \cap U_2 \mid [f_1]_z = [f_2]_z\}$ و $f = f_1|_U = f_2|_U$. بنابراین مجموعه‌های $V(f,U)$ تشکیل یک پایه برای یک توپولوژی روی S می‌دهند و نسبت به این توپولوژی، نگاشت افکنش ρ یک همسانریختی موضعی[۲] است. یعنی به‌ازای هر همسایگی پایه $V(f,U)$ در S، نگاشت یک‌به‌یک $\rho|_{V(f,U)}$ یک همسانریختی به‌روی U است، زیرا

[۱] stalk [۲] local homeomorphism

اگر $\rho_{f,U}$ نمایش $\rho|_{V(f,U)}$ بوده و N یک زیرمجموعهٔ باز از U باشد، آن‌گاه $\rho^{-1}_{f,U}(N) = V(f, N)$ در S باز است؛ در حالی که اگر $V(f, U') \subset V(f, U)$، آن‌گاه $\rho_{f,U}(V(f, U')) = U'$. توپولوژی روی S به‌شرط آن که نگاشت افکنش ρ یک همسانریختی موضعی باشد، به‌طور یکتا تعیین می‌گردد.

این فضای توپولوژیک S به‌همراه همسانریختی موضعی ρ که S را به‌روی $\mathbb{C}^n$ می‌نگارد، بافهٔ ریشه‌های نگاشت‌های تمامریخت روی فضای زمینه $\mathbb{C}^n$ نامیده می‌شود. همان‌گونه که اصطلاحات تخصصی کشاورزی ایجاب می‌کنند، بافه را همانند یک دسته از ساقه‌ها با سَری انباشته از ریشه‌ها (یا اگر تمایل دارید، بذر، دانه) می‌پنداریم (شکل ۲).



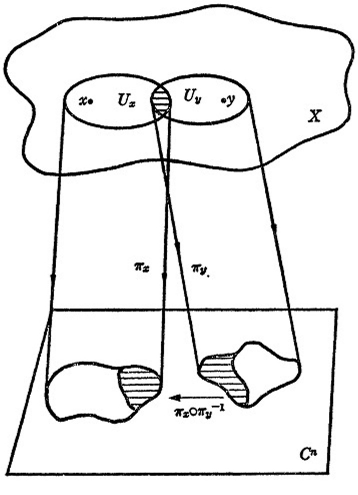
شکل ۲

به شرح زیر می‌توانیم نشان دهیم که فضای ساقه‌ای S، هاسدورف است: نقاط S ممکن است به دو گونه با یکدیگر متفاوت باشند یا روی ساقه‌های متفاوتی قرار می‌گیرند یا روی ترازهای مختلفی از یک ساقه واقع‌اند. در حالت اول، نگاره‌های دو نقطهٔ $p, q \in S$ در $\mathbb{C}^n$ متفاوت است. از این‌رو چون $\mathbb{C}^n$ هاسدورف است، همسایگی‌های مجزایی از $\rho(p)$ و $\rho(q)$ وجود دارند که می‌توان آنها را به بالا و به S برگرداند. برای روشن‌تر شدن مطلب، اگر $p = (z, [f]_z)$ و $q = (w, [g]_w)$ که در آن، $z \neq w$، آن‌گاه همسایگی‌های باز مجزای U_z و U_w به‌ترتیب از z و w و بر آنها نگاشت‌های تمامریخت $f \in [f]_z$ و $g \in [g]_w$ موجودند به‌گونه‌ای که $V(f, U_z)$ و $V(g, U_w)$ به‌ترتیب همسایگی‌های مجزایی از p و q هستند.

حالت دوم کمی پیچیده‌تر است، زیرا به خاصیت یکتایی نگاشت‌های تمامریخت بستگی دارد. اگر $p = (z, [f]_z)$ و $q = (z, [g]_z)$ نقاط متفاوتی از یک ساقه باشند، آن‌گاه $[f]_z \neq [g]_z$. بنابراین

باید نگاشت‌های تامریخت متفاوت $f \in [f]_z$ و $g \in [g]_z$ وجود داشته باشند که هر دوی آنها روی یک همسایگی مانند U از z تعریف شده‌اند. ادعا می‌کنیم که $V(f,U)$ و $V(g,U)$ همسایگی‌های مجزایی از p و q هستند. برای این منظور، اگر $(w,[h]_w) \in V(f,U) \cap V(g,U)$، آن‌گاه $w \in U$ و $[f]_w = [h]_w = [g]_w$. اما همان‌طور که در بالا مشاهده کردیم، خاصیت یکتایی نگاشت‌های تامریخت بیان می‌کند که دو نگاشت f و g با دامنهٔ یکسان U که به یک ریشهٔ یکسان $[h]_w$ تعلق دارند، باید بر U با هم برابر باشند. اما آنها روی U با هم مساوی نیستند، زیرا $[f]_z \neq [g]_z$. بنابراین $V(f,U) \cap V(g,U) = \varnothing$ و لذا S هاسدورف است.

هنوز نتیجهٔ دیگری از خاصیت یکتایی نگاشت‌های تامریخت وجود دارد که می‌تواند برای روشن‌تر شدن مفهوم بافهٔ ریشه‌های نگاشت‌های تامریخت مورد استفاده قرار گیرد. خاصیت یکتایی را تقریباً می‌توان به این صورت تفسیر کرد که رفتار کلی یک نگاشت تامریخت به‌طور یکتا توسط رفتارش روی هر مجموعهٔ باز تعیین می‌شود. این به پرسش مبهم دربارهٔ یافتن بزرگ‌ترین دامنه‌ای که نگاشت تامریخت مفروضی را می‌توان به آن گسترش داد، معنا می‌بخشد. در مطالعهٔ کلاسیک نگاشت‌های تحلیلی، این پرسش به مفهوم سطح ریمان یا به‌طور کلی‌تر، به خمینه‌های تحلیلی مختلط منجر شد.



شکل ۳

یک خمینه[۱]، اساساً یک فضای توپولوژیک است که به‌طور موضعی همسانریخت با n–فضای اقلیدسی $\mathbb{C}^n$ می‌باشد. به عبارت دقیق‌تر، یک فضای توپولوژیک X را موضعاً اقلیدسی[۲] (از بعد n)

[۱]manifold [۲]locally Euclidean

می‌نامیم اگر هر $x \in X$ مشمول در یک مجموعهٔ باز U_x باشد که تحت یک نگاشت π_x همسانریخت با زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{C}^n$ است. افزون بر این، قطعه‌های مختصاتی[۱] U_x منسجم هستند، به این معنی که به‌ازای هر $x, y \in X$، $\pi_x \circ \pi_y^{-1}$ یک همسانریختی بین $\pi_y(U_x \cap U_y)$ و $\pi_x(U_x \cap U_y)$ است. نیمهٔ اول این تعریف تضمین می‌کند که X موضعاً شبیه $\mathbb{C}^n$ است و شرط دوم، مستلزم این است که قطعه‌های موضعاً اقلیدسی به‌گونه‌ای همپوشانی داشته باشند که تشکیل یک ساختار اقلیدسی منسجم روی سراسر X دهند. ما هر زوج (U_x, π_x) را یک دستگاه مختصات موضعی[۲] می‌نامیم، زیرا π_x^{-1} دستگاه مختصات روی $\mathbb{C}^n$ را به U برمی‌گرداند (شکل ۳).

از آنجا که یک فضای توپولوژیک ممکن است توسط چندین مجموعهٔ متفاوت از دستگاه‌های مختصاتی (U_x, π_x) پوشانده شود و از آنجا که قصد نداریم بین دو پوشش که اساساً ساختار مختصاتی یکسانی روی X فراهم می‌کنند، تمایزی قائل شویم، خمینه را یک فضای توپولوژیک موضعاً اقلیدسی تعریف می‌کنیم که در آن، مجموعهٔ دستگاه‌های مختصاتی (U_x, π_x) نسبت به خواص تعریف کننده برای یک فضای موضعاً اقلیدسی، ماکسیمال باشد. چون هر فضای موضعاً اقلیدسی یک خمینهٔ یکتا را تولید می‌کند، اغلب فضاهای موضعاً اقلیدسی را نیز خمینه گوییم؛ حتی اگر مجموعهٔ دستگاه‌های مختصاتی موضعی، ماکسیمال نباشد. گونه‌های دیگری از خمینه‌ها ممکن است با نگاشتن به فضای اقلیدسی حقیقی $\mathbb{R}^n$ به‌جای $\mathbb{C}^n$ یا با نیاز به شرط تحلیلی یا $\mathbb{C}^\infty$ (بینهایت بار مشتق‌پذیر) بودن همسانریختی‌های $\pi_x \circ \pi_y^{-1}$ تولید شوند. این خمینه‌ها به‌طور طبیعی خمینه‌های تحلیلی یا خمینه‌های $\mathbb{C}^\infty$ نامیده می‌شوند.

نگاشت $f : X \to Y$ از یک خمینهٔ تحلیلی به یک خمینهٔ تحلیلی دیگر را تمامریخت گوییم اگر به‌ازای هر x و y، $\pi_y \circ f \circ \pi_x^{-1}$ روی دامنه‌اش یعنی $\pi_x(U_x \cap f^{-1}(U_y))$ تمامریخت باشد. در حالت خاصی که $Y = \mathbb{C}^1$، نگاشت همانی $i : Y \to \mathbb{C}^1$ برای تعریف کردن دستگاه‌های مختصاتی موضعی استفاده می‌شود. بنابراین یک نگاشت تمامریخت f از خمینهٔ تحلیلی X به $\mathbb{C}^1$ توسط این خاصیت که $f \circ \pi_x^{-1}$ روی $\pi_x(U_x)$ تمامریخت است، مشخص می‌شود.

از این توضیحات باید واضح باشد که بافهٔ ریشه‌های نگاشت‌های تمامریخت را می‌توان، با استفاده از ρ جهت تعریف دستگاه‌های مختصاتی موضعی، مانند یک خمینهٔ تحلیلی در نظر گرفت. این یک خمینهٔ مهم و ویژه است، زیرا می‌توانیم روی آن چیزی را که به‌عنوان نگاشت تمامریخت جهانی[۳] شناخته شده است، تعریف کنیم. این، نگاشت $F : S \to \mathbb{C}$ است که توسط $F((z, [f]_z)) = f(z)$ تعریف

[۱] coordinate patches [۲] local coordinate system [۳] universal holomorphic function

می‌شود. واضح است که F تمامریخت است، زیرا به‌ازای هر دستگاه مختصاتی موضعی $(U, \rho|_U)$، داریم $F \circ (\rho|_U)^{-1} = f|_{\rho(U)}$ که در آن، $f : \rho(U) \to \mathbb{C}$ تمامریخت است.

F جهانی[1] است به این معنی که رفتار تمام نگاشت‌های تمامریخت روی $\mathbb{C}^n$ رده‌ای از F استنتاج می‌شوند. به‌ویژه هرگاه $f : D \to \mathbb{C}$ تمامریخت باشد (که در آن، D یک دامنه در $\mathbb{C}^n$ است)، می‌توانیم f را از طریق بافهٔ S به‌صورت زیر تجزیه کنیم: یک نگاشت یکتای $\hat{f} : D \to S$ وجود دارد به‌طوری‌که $F \circ \hat{f} = f$. به وضوح $\hat{f}$ با ضابطهٔ $\hat{f}(z) = (z, [f]_z)$ تعریف می‌شود و لذا نمودار وابسته به آن (شکل ۴) تعویض‌پذیر است. $\hat{f}$ پیوسته است، زیرا $\hat{f}^{-1}(V(f,U)) = U$.

$$
\begin{tikzcd}
S \arrow[dr, "F"] & \\
D \arrow[u, "\hat{f}"] \arrow[r, "f"'] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}
$$

شکل ۴

اکنون با این ساختار، می‌توانیم دامنهٔ تمامریختی[2] نگاشت تمامریخت f را (که همان بزرگ‌ترین دامنه‌ای است که f می‌تواند به آن به‌طور یکتا گسترش داده شود) توضیح دهیم: مؤلفهٔ همبندی E از S که شامل $\hat{f}(D)$ است. (البته $\hat{f}(D)$ همبند است، زیرا تصویر پیوستهٔ یک مجموعهٔ همبند است.) با اینکه D دقیقاً زیرمجموعهٔ E نیست، توسط $\hat{f}$ در E نشانده می‌شود و از این‌رو نگاشت تمامریخت جهانی F توسیعی از نگاشت f به E است.

۲. بافهٔ حلقه‌های موضعی

فرض کنیم A یک حلقهٔ تعویض‌پذیر یکدار و S یک زیرمجموعهٔ ناتهی بستهٔ ضربی از A باشد که $0 \notin S$. با استفاده از A و S، حلقه‌ای مانند A_S به‌نام حلقهٔ خارج‌قسمت‌های A را می‌سازیم که در آن، عضوهای S دارای وارون ضربی هستند. روی مجموعهٔ

$$A \times S = \{(a, s) \mid a \in A, s \in S\}$$

[1] universal [2] domain of holomorphy

یک رابطهٔ هم‌ارزی تعریف می‌کنیم: $(a,s) \sim (b,t)$ اگر و تنها اگر عضو $r \in S$ وجود داشته باشد که $(at-bs)r = ۰$. همچنین، دو عمل جمع و ضرب تعریف می‌کنیم:

$$(a,s)+(b,t) = (at+bs, st) \quad \text{و} \quad (a,s)(b,t) = (ab, st),$$

که با رابطهٔ گفته‌شده سازگار هستند. حلقهٔ رده‌های هم‌ارزی به‌همراه عمل‌های القا شده را با A_S نمایش می‌دهیم. همانند حلقهٔ اعداد صحیح به‌همراه مجموعهٔ عضوهای ناصفر به‌عنوان S، کلاس هم‌ارزی (a,s) را با $\frac{a}{s}$ نمایش می‌دهیم. از این‌رو S را مجموعهٔ مخرج‌ها[1] هم می‌نامیم.

عضو ۰ از A_S (به‌ازای هر s از S) $\frac{۰}{s}$ بوده و عضو همانی $\frac{s}{s}$ می‌باشد. اگر $s \in S$، آن‌گاه $s^{-۱} = ۱/s$. یک همریختی $\alpha : A \to A_S$ با ضابطهٔ $\alpha(a) = as/s$ که مستقل از انتخاب s است موجود می‌باشد. البته اگر A یک دامنهٔ صحیح باشد، α یک‌به‌یک است، زیرا

$$Ker\,\alpha = \{a \mid \exists s \in S; sa = ۰\}.$$

اگر I ایدآلی از A باشد، ایدآل $\alpha(I)$ در A_S را می‌توان توسط

$$\alpha(I) = \{a/s \mid a \in I, s \in S\},$$

نمایش داد و به‌جای $\alpha(I)$ می‌نویسیم IA_S. این نگاشت α روی مجموعهٔ ایدآل‌های A یک تناظر یک‌به‌یک بین مجموعهٔ ایده‌آل‌های اول در A_S و مجموعهٔ ایدآل‌های اول در A که اشتراکشان با S تهی است، تعریف می‌کند [۱۲، ص ۲۲۳].

از آنجا که ایدآل اول P در A ایدآلی است که متمم آن بستهٔ ضربی است، می‌توانیم حلقهٔ خارج‌قسمت‌های A را که مجموعهٔ مخرج‌های آن، متمم P است، تشکیل دهیم. این حلقهٔ خارج‌قسمت‌ها را با A_P نمایش داده و آن را حلقهٔ موضعی A در P می‌نامیم. حلقهٔ A_P تنها دارای یک ایدآل ماکسیمال، PA_P، است، زیرا به‌وضوح P بزرگ‌ترین ایدآل اول از A با این خاصیت است که اشتراکش با متمم P تهی است.

این حلقه‌های موضعی، ساقه‌هایی برای بافهٔ حلقه‌های موضعی خواهند بود و مجموعهٔ ایدآل‌های اول A تشکیل فضای زمینه را خواهد داد. این فضا، طیف A نامیده شده و با $\operatorname{Spec} A$ نمایش داده می‌شود و دارای یک توپولوژی است که خانوادهٔ مجموعه‌های

$$V_x = \{P \in \operatorname{Spec} A \mid x \notin P\},$$

[1] set of denominators

$x \in A$، یک پایه برای آن است. پس $V_1 = \mathrm{Spec}\, A$، $V_0 = \varnothing$ و $V_x \cap V_y = V_{xy}$ و بنابراین $\{V_x\}_{x\in A}$ یک پایه است. چون $\bigcup_{x\in M} V_x = \{P \mid (x)_{x\in M} \not\subset P\}$ که در آن، $(x)_{x\in M}$ ایدآل تولید شده توسط زیرمجموعهٔ M از A است، هر ایدآل I از A یک مجموعهٔ باز $V_I = \{P \mid I \not\subset P\}$ تعریف می‌کند و هر مجموعهٔ باز U به همین گونه است؛ اگرچه I به‌طور یکتا توسط U مشخص نمی‌شود. بنابراین یک مجموعهٔ بسته، مجموعه‌ای است از ایدآل‌های اولی که شامل ایدآل ثابتی هستند و لذا یک نقطهٔ P از $\mathrm{Spec}\, A$ بسته است اگر و تنها اگر یک ایدآل ماکسیمال باشد. بنابراین برای اکثر حلقه‌ها، فضای زمینه حتی T_1 نیست، در حالی که $\mathrm{Spec}\, A$ همواره T_0 است.

این امکان وجود دارد که حلقهٔ خارج‌قسمت‌ها را نسبت به متمم یک ایدآل اول P تعریف کنیم، زیرا بستهٔ ضربی است. اما متمم یک اجتماع از اول‌ها نیز بستهٔ ضربی است. از این‌رو به هر مجموعهٔ باز ناتهی U در $\mathrm{Spec}\, A$ می‌توانیم حلقهٔ خارج‌قسمت‌های

$$A_U = \{a/s \mid P \in U \Rightarrow s \notin P\}$$

را وابسته کنیم که مجموعهٔ مخرج‌هایش برابر با متمم اجتماع همهٔ اول‌های U است. اگر U و V مجموعه‌های باز در $\mathrm{Spec}\, A$ باشند به‌طوری که $U \subset V$، می‌توانیم همریختی‌های تحدید[1] $\rho_{U,V} : A_V \to A_U$ را به این صورت تعریف کنیم: اگر $a/s \in A_V$، s عضو هیچ‌یک از ایدآل‌های اول P در V نیست و به طریق اولیٰ، عضو هیچ‌یک از ایدآل‌های اول P در U نیست. از این‌رو a/s عضوی از A_U نیز هست. تعریف می‌کنیم $\rho_{U,V}(a/s) = a/s$. اما این نگاشت، همانی یا حتی یک‌به‌یک نیست، زیرا رده‌های هم‌ارزی که برای تعریف حلقهٔ A_U استفاده می‌شوند بزرگ‌تر از آنهایی است که برای تعریف کردنِ A_V استفاده می‌شود. هستهٔ $\rho_{U,V}$ شامل آن عضوهای a/s است که a یک مقسوم‌علیه صفر نسبت به عضوی از یکی از ایدآل‌های اول V باشد که به هیچ‌یک از عضوهای U تعلق ندارد.

یک خاصیت مهم $\rho_{U,V}$ تعویض‌پذیر بودنِ نمودار شکل ۵ است که در آن، $\alpha_U : A \to A_U$، a را به $a/1$ می‌برد. حال $\rho_{U,V}$ با این خاصیت به‌طور یکتا تعیین شده و از این، نتیجه می‌شود که $\rho_{U,U}$ نگاشت همانی است و اگر $U \subset V \subset W$، آنگاه $\rho_{U,W} = \rho_{U,V} \circ \rho_{V,W}$. این دستگاه که شامل $\mathrm{Spec}\, A$، حلقه‌های A_U و نگاشت‌های $\rho_{U,V} : A_V \to A_U$ وقتی $U \subset V$ است، یک پیش‌بافه[2] روی $\mathrm{Spec}\, A$ نامیده می‌شود. در کنار نگاشت‌های $\rho_{U,V}$ متناظر با زوج مجموعه‌های باز که $U \subset V$، می‌توانیم نگاشت‌های $\rho_{P,V} : A_V \to A_P$، $P \in V$، را تعریف کنیم. اگر V باز باشد و $P \in V$، $\rho_{P,V} : A_V \to A_P$ را با ضابطهٔ $\rho_{P,V}(a/s) = a/s$ تعریف می‌کنیم و این امکانپذیر است، زیرا

[1] restriction homomorphism [2] presheaf

$a/s \in A_V$ ایجاب می‌کند که $s \notin P$. نگاشت $\rho_{P,V}$ نگاشت یکتایی است که نمودار وابسته را تعویض‌پذیر می‌سازد (شکل ۶).

$$\begin{tikzcd}
& A_V \arrow[dd, "\rho_{U,V}"] \\
A \arrow[ur, "\alpha_V"] \arrow[dr, "\alpha_U"'] & \\
& A_U
\end{tikzcd}$$

شکل ۵

$$\begin{tikzcd}
& A_V \arrow[dd, "\rho_{P,V}"] \\
A \arrow[ur, "\alpha_V"] \arrow[dr, "\alpha_P"'] & \\
& A_P
\end{tikzcd}$$

شکل ۶

مانند قبل، از یکتاییِ $\rho_{P,V}$ نتیجه می‌شود که

$$\rho_{P,W} \circ \rho_{W,U} = \rho_{P,U}, \quad P \in W \subset U.$$

اگر U در $\operatorname{Spec} A$ باز بوده و u عضوی از A_U باشد، می‌توانیم با u به‌عنوان یک نگاشت از U به فضای ساقه‌ای $S = \bigcup\{A_P \mid P \in \operatorname{Spec} A\}$ رفتار کنیم با این تعریف که به‌ازای هر $P \in U$، $u(P) = \rho_{P,U}(u) \in A_P$. اگر $V \subset U$، $\rho_{V,U}(u)$ را تحدید u به V گوییم. اگر $u \in A_U$ و $v \in A_V$ و اگر یک مجموعهٔ باز $W \subset U \cap V$ وجود داشته باشد به‌طوری که $\rho_{W,U}(u) = \rho_{W,V}(u)$، گوییم u و v روی مجموعهٔ باز W یکسان هستند، زیرا اگر $P \in W$، آن‌گاه

$$u(P) = \rho_{P,U}(u) = \rho_{P,W} \circ \rho_{W,U}(u) = \rho_{P,W} \circ \rho_{W,V}(v) = \rho_{P,V}(v) = v(P).$$

اگر $u \in A_U$، نگاشت u یا نگاره آن $u(U)$ در S، یک برش[۱] از پیش‌باقه نامیده می‌شود. مجموعهٔ برش‌های $u(U)$، S را می‌پوشاند. زیرا اگر $a/s \in A_P$، آن‌گاه s یک مخرج از A_V است که در آن، $V = \{Q \mid s \notin Q\}$ و $a/s \in A_V$ یک برش روی V است که نگارهٔ آن در P، a/s می‌باشد.

گردایهٔ همهٔ برش‌های $u(U)$ یک پایه برای توپولوژی روی S است، زیرا اشتراک دو برش اجتماعی از برش‌ها است. برای اثبات این مطلب، گیریم $u \in A_U$ و $v \in A_V$ برش‌هایی روی مجموعه‌های باز U و V باشند. اگر $u(U) \cap v(V) = \varnothing$، آن‌گاه چیزی برای نشان دادن نمی‌ماند. اگر $x \in u(U) \cap v(V)$، آن‌گاه به‌ازای $P \in U \cap V$ای داریم $x = \rho_{P,U}(u) = \rho_{P,V}(v) \in A_P$. در این صورت $u = a/s$ که

[۱] section

در آن، s عضو هیچ‌یک از عضوهای U نیست و $v = a'/s'$ که در آن، s' عضو هیچ‌یک از عضوهای V نیست. از آنجا که در A_P داریم $a/s = a'/s'$، $t \notin P$ وجود دارد به‌طوری که $t(as' - a's) = 0$. فرض کنیم $W = \{Q \mid t \notin Q\}$. در این صورت در $A_{W\cap U\cap V}$ داریم $a/s = a'/s'$ و چون نمودار شکل ۷ تعویض‌پذیر است، برش روی $W \cap U \cap V$ تعریف شده با $a/s = a'/s'$، زیرمجموعه‌ای از $u(U)$ و $v(V)$ و یک همسایگی از x است.

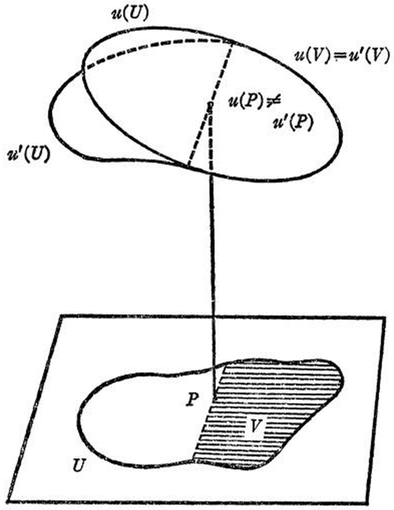
$$\begin{tikzcd}
A_V \arrow[dr] \arrow[drr] & & \\
& A_{W\cap U\cap V} \arrow[r] & A_P \\
A_U \arrow[ur] \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

شکل ۷

در این توپولوژی، نگاشت افکنش ρ یک همسانریختی موضعی است، زیرا اگر $x \in A_P$، آن‌گاه به‌ازای Vای برش v روی V گذرا از x وجود دارد و تحدید ρ به برش $v(V)$ یک‌به‌یک و پوشا است. اگر $U \subset V$ باز باشد و $x \in U$، آن‌گاه تحدید v به U همچنان یک برش گذرا از x بوده و لذا $u(U)$، که در آن، $u = \rho_{U,V}(v)$، در $u(V)$ باز است و بنابراین ρ پیوسته می‌باشد. اگر N زیرمجموعه‌ای باز از $v(V)$ باشد، آن‌گاه اجتماعی از برش‌ها روی زیرمجموعه‌های باز V نیز هست و $\rho(N)$ اجتماع این زیرمجموعه‌های باز می‌باشد.

فضای توپولوژیک S به‌همراه افکنش $\rho : S \to \operatorname{Spec} A$ بافهٔ حلقه‌های موضعی روی $\operatorname{Spec} A$ نامیده می‌شود. اگر U یک زیرمجموعهٔ باز از $\operatorname{Spec} A$ باشد، هر نگاشت پیوسته مانند $f : U \to S$ که $\rho \circ f$ روی U همانی باشد، یک برش از بافهٔ S نامیده می‌شود. مجموعهٔ همهٔ برش‌ها روی مجموعهٔ باز U با $\Gamma(U, S)$ نمایش داده می‌شود. رابطهٔ بین برش‌های بافهٔ S و برش‌های پیش‌بافه (یعنی، عضوهای $u \in A_U$) نسبتاً ظریف است، زیرا اگرچه هر برش پیش‌بافه را می‌شود مانند یک نگاشت (پیوسته) روی U که وارون موضعی برای ρ است پنداشت، دو حالت غیرعادی ممکن است رخ دهد. یکی اینکه دو عضو متفاوت $u = a/s$ و $v = b/t$ از حلقهٔ A_U نگاشت یکسانی را تحت تفسیری که در بالا به آن اشاره شد تولید کنند و دیگر اینکه نگاشت‌هایی در $\Gamma(U, S)$ وجود داشته باشند که از هیچ‌یک از برش‌های $u \in A_U$ مشتق نشوند. از این‌رو نگاشت تفسیری از A_U به $\Gamma(U, S)$ لزوماً یک‌به‌یک و پوشا نیست، به هر حال اگر U یک مجموعهٔ پایه‌ای باشد (یعنی به‌ازای یک $x \in A$ به‌صورت V_x باشد)، آن‌گاه

یکریختی است [۵، شماره ۴، ص ۸۶]. به همین دلیل، مجموعه‌های V_x اغلب مجموعه‌های باز ممتاز[1] نامیده می‌شوند.



شکل ۸

اگر فضای زمینه $\operatorname{Spec} A$ هاسدورف نباشد، قطعاً بافهٔ S نمی‌تواند هاسدورف باشد. اما اگر $\operatorname{Spec} A$، T_2 باشد ممکن است (اگرچه به تصویر کشیدن آن روی برگهٔ هاسدورف مشکل است) که دو برش متمایز u و u' روی U، بر روی یک زیرمجموعهٔ باز مناسب V از U یکسان باشند (شکل ۸). اگر P در بستار V باشد ولی در V نباشد، $u(P)$ و $u'(P)$ نقاطی متمایز از بافه هستند اما نمی‌توانند جدا شوند زیرا هر همسایگی از P شامل نقاطی از V است که روی آن u و u' یکسان هستند.

به‌منظور فراهم آوردن تفسیر هندسی بیشتری از بافهٔ حلقه‌های موضعی و نیز با نگاهی به سرچشمهٔ موضوع، نگاهی به برخی از حلقه‌های خاص می‌اندازیم. فرض کنیم $\mathbb{Q}$ میدان اعداد گویا، $\mathbb{Q}[x_1, \cdots x_n]$ حلقهٔ چندجمله‌ای‌های n متغیره با ضرایب گویا و I یک ایدآل از $\mathbb{Q}[x_1, \cdots x_n]$ باشد. فرض کنیم A حلقهٔ خارج‌قسمتی $\mathbb{Q}[x_1, \cdots x_n]/I$ باشد که می‌توان آن را به‌صورت $\mathbb{Q}[\bar{x}_1, \cdots \bar{x}_n]$ نوشت که در آن، $\bar{x}_i = x_i + I$، $i = 1, \dots, n$. اگر

$$E = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid \forall p \in I,\, p(x_1, \cdots, x_n) = 0\},$$

یعنی E اشتراک مجموعه‌های صفر همهٔ چندجمله‌ای‌های در ایدآل I باشد، آنگاه می‌توانیم A را به‌عنوان

[1] distinguished

حلقهٔ نگاشت‌های مختلط-مقدار روی E تفسیر کنیم، زیرا اگر $p_{۱}(\bar{x}) = p_{۲}(\bar{x})$، آنگاه $p_{۱}(x) - p_{۲}(x) \in I$. لذا اگر $x = (x_{۱}, \cdots, x_{n}) \in E$، آنگاه $p_{۱}(\bar{x}) = p_{۲}(\bar{x})$ ایجاب می‌کند که $p_{۱}(x) = p_{۲}(x)$.

می‌توانیم با زوج‌سازی[۱] که $p \in A$ و $x \in E$ را به $p(x) \in \mathbb{C}$ می‌برد، یک تناظر یک‌به‌یک بین نقاط E و همریختی‌های از A به $\mathbb{C}$ ایجاد کنیم. اگر $x = (x_{۱}, \cdots, x_{n}) \in E$، آنگاه نگاشتی که p را به $p(x)$ می‌برد، یک همریختی از A به $\mathbb{C}$ است و برعکس اگر $\phi : A \to \mathbb{C}$ یک همریختی باشد، آنگاه $x = (\phi(\bar{x}_{۱}), \cdots, \phi(\bar{x}_{n})) \in E$. چون اگر $p \in I$، آنگاه

$$p(x) = p(\phi(\bar{x}_{۱}), \cdots, \phi(\bar{x}_{n})) = \phi(p(\bar{x}_{۱}), \cdots, p(\bar{x}_{n})) = \phi(\circ) = \circ.$$

چون $\mathbb{C}$ یک حوزهٔ صحیح است، هستهٔ نگاشت تعریف شده توسط $x \in E$ یک ایدآل اول در A است. برعکس، می‌توان نشان داد که اگر P یک عضو از $\operatorname{Spec} A$ باشد، آنگاه هستهٔ یک همریختی از A به $\mathbb{C}$ است [۱۳، ص ۱۶۴]. لذا می‌توانیم $\operatorname{Spec} A$ را مجموعه‌ای از رده‌های هم‌ارزی E تحت رابطهٔ زیر در نظر بگیریم: $x \sim x'$ اگر و تنها اگر x و x' صفرهای چندجمله‌ای‌های یکسان $p \in A$ باشند. از این‌رو اگر $x \sim x'$، آنگاه به‌ازای هر p در A، $p(x) = p(x')$. بنابراین A را می‌توان یک حلقهٔ نگاشت‌های روی $\operatorname{Spec} A$ نیز دانست.

اینکه عضو p از A در یک ایدآل اول P قرار نداشته باشد به این معنی است که p در هستهٔ نگاشت $A \to A/P$ قرار ندارد؛ معادلاً p روی هر نقطهٔ x در E که به‌ازای آن هستهٔ همریختی متناظر، مشمول در P باشد ناصفر است. از این‌رو حلقهٔ موضعی A_P در P که شامل وارون هر $p \notin P$ است، حلقهٔ همهٔ نگاشت‌های گویا است که به‌طور موضعی، یعنی در یک همسایگی از P در $\operatorname{Spec} A$ تعریف شده‌اند. مجموعهٔ چنین نگاشت‌هایی که در P صفر می‌شوند، تنها ایدآل ماکسیمال این حلقه است. حلقهٔ A_U از برش‌های پیش‌بافه روی یک مجموعهٔ باز $U \subset \operatorname{Spec} A$ یک حلقه از نگاشت‌ها است که روی هر نقطه از U تعریف شده‌اند. (اگر U یک مجموعهٔ باز ممتاز باشد، A_U حلقهٔ همهٔ این‌چنین نگاشت‌هایی است.) هستهٔ یک نگاشت تحدید $\rho_{U,V} : A_V \to A_U$ (که در آن، $U \subset V$)، مجموعهٔ نگاشت‌هایی است که در هر نقطهٔ U صفر می‌شوند؛ اگرچه ممکن است روی همهٔ V صفر نباشند. عضوهایی از A_U که تحدید نگاشت‌های در A_V نیستند، وارون نگاشت‌هایی هستند که در $V \setminus U$ دارای صفر می‌باشند.

توپولوژی $\operatorname{Spec} A$ یک توپولوژی در E القا می‌کند: ضعیف‌ترین توپولوژیی که در آن، نگاشت شناسایی[۲] از E به $\operatorname{Spec} A$ پیوسته است. در این توپولوژی، بستار نقطهِٔ $x \in E$ برابر با مجموعهٔ همهٔ نقاطی از E است که در همان چندجمله‌ای‌هایی صدق می‌کنند که x صدق می‌کند. یک حلقهٔ ویژهٔ A را

[۱] pairing [۲] identification map

انتخاب می‌کنیم تا با جزئیات بیشتر به مطالعه بپردازیم. در $\mathbb{Q}[x, y]$، فرض کنیم $I = (xy)$ و

$$A = \mathbb{Q}[x, y]/(xy) \simeq \mathbb{Q}[\bar{x}, \bar{y}]$$

که در آن، $\bar{x}\bar{y} = xy + (xy) = (xy) = (0)$. در این صورت

$$E = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid zw = 0\} = \{(z, 0) \mid z \in \mathbb{C}\} \cup \{(0, w) \mid w \in \mathbb{C}\}$$

اجتماع محورهای (صفحات) مختصاتی مختلط در $\mathbb{C}^2$ است.

ایدآل‌های $(\bar{x})$ و $(\bar{y})$ در A اول‌اند ولی ماکسیمال نیستند، زیرا $\mathbb{Q}[\bar{x}, \bar{y}]/(\bar{x}) \simeq \mathbb{Q}[\bar{y}] \simeq \mathbb{Q}[y]$ یک میدان نیست. نقاط (z, w) در E که ایدآل متناظرشان $(\bar{x})$ است، نقاطی هستند به‌صورت $(0, w)$ که در آن، w به روی $\mathbb{Q}$ متعالی[1] است و به‌طور مشابه، نقاط متناظر با ایدآل $(\bar{y})$ به‌شکل $(z, 0)$ برای z متعالی هستند، زیرا همریختی $\mathbb{Q}[\bar{x}, \bar{y}] \to \mathbb{C}$ با ضابطهٔ $\bar{x} \to 0$ و $\bar{y} \to w$ دارای هستهٔ $(\bar{x})$ است اگر و تنها اگر w متعالی باشد. به‌علاوه، در A داریم $(\bar{x}) \cap (\bar{y}) = (0)$، هر ایدآل اول شامل $(\bar{x})$ یا $(\bar{y})$ است و مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های صفر در A برابر است با $(\bar{x}) \cup (\bar{y})$.

ایدآل‌های اول ماکسیمال در A هسته‌های همریختی‌های $\phi : \mathbb{Q}[\bar{x}, \bar{y}] \to \mathbb{C}$ هستند که برد آنها یک میدان است به‌طوری که $\phi(\bar{x})$ و $\phi(\bar{y})$ جبری‌اند و چون $\phi(\bar{x})\phi(\bar{y}) = \phi(\bar{x}\bar{y}) = 0$، باید یکی از $\phi(\bar{x})$ و $\phi(\bar{y})$ صفر و دیگری، جبری باشد. چنین نقاط $(\phi(\bar{x}), \phi(\bar{y}))$ در E یا به‌شکل $(z, 0)$ با z جبری یا $(0, w)$ با w جبری هستند. هسته‌های همریختی‌های به $(z, 0)$ و $(0, w)$، ایدآل‌های $(p(\bar{x}), \bar{y})$ و $(\bar{x}, q(\bar{y}))$ هستند که در آن، p چندجمله‌ای مینیمال z (و q از w) است. این ایدآل‌ها به‌همراه $(\bar{x})$ و $(\bar{y})$ دقیقاً نقاط $\operatorname{Spec} A$ هستند.

نقاط $E \subset \mathbb{C}^2$ به رده‌های هم‌ارزی متناظر با ایدآل‌های مشمول در $\operatorname{Spec} A$ تقسیم می‌شوند: به هر یک از (x) و (y) یک رده از نقاط متعالی متناظر می‌گردد، در حالی که هر ایدآل ماکسیمال $(p(\bar{x}), \bar{y})$ (که در آن، p تحویلناپذیر است) متناظر با مجموعهٔ نقاط جبری $\{(z, 0)\}$ است که z ریشه‌ای از p می‌باشد.

در توپولوژی القایی روی E توسط $\operatorname{Spec} A$، بستار یک نقطهٔ متعالی مانند $(z, 0)$، محور z و بستار یک نقطهٔ جبری مانند $(z, 0)$ همهٔ $(z', 0)$هایی است که در آن، z' یک ریشهٔ چندجمله‌ای مینیمال z نیز است. یک پایه برای مجموعه‌های باز در $\operatorname{Spec} A$، خانوادهٔ همهٔ مجموعه‌های $V_p = \{P \in \operatorname{Spec} A \mid p \notin P\}$ است. در حالت خاص $p = \bar{x}$،

$$V_{\bar{x}} = \{P \in \operatorname{Spec} A \mid \bar{x} \notin P\} = \{(\bar{y}, p(\bar{x})) \mid p \neq \bar{x} \text{ و } \text{تحویلناپذیر یا صفر است } p \in A\}.$$

[1] transcendental

مجموعهٔ باز $V_{\bar{x}} \subset \operatorname{Spec} A$ متناظر با متمم محور w در E است. به‌طور مشابه، $V_{\bar{y}}$ را می‌توان متمم محور z در نظر گرفت. متمم مجموعه‌ای متناهی از نقاط جبری متناظر با ایدآل‌های ماکسیمال

$$(\bar{x}, p_۱(\bar{y})), \cdots, (\bar{x}, p_k(\bar{y})), (p_{k+۱}(\bar{x}), \bar{y}), \cdots, (p_n(\bar{x}), \bar{y})$$

برابر است با $V_{p_۱(\bar{y})} \cap \cdots \cap V_{p_n(\bar{x})}$. چون هر چندجمله‌ای $p \in A = \mathbb{Q}[\bar{x}, \bar{y}]$ را می‌توان به‌صورت $p = p_۱(x) + p_۲(y) - c$ نوشت که در آن، $p_۱(۰) = p_۲(۰) = p(۰, ۰) = c$، نقاط در V_p عبارت‌اند از $(z, ۰)$ که $p_۱(z) = ۰$ و $(۰, w)$ که $p_۲(w) = ۰$.

از نظر هندسی، حلقهٔ $A = \mathbb{Q}[\bar{x}, \bar{y}]$، حلقهٔ چندجمله‌ای‌های تعریف‌شده در سراسر E، اجتماع محورهای مختلط است. در نقطهٔ (z, w) از E (که z یا w، ۰ است) متناظر با ایدآل اول P، حلقهٔ موضعی A_P شامل همهٔ نگاشت‌های گویایی است که مخرجش‌هایشان در (z, w) صفر نمی‌شوند. حلقهٔ موضعی $A_{\bar{x}}$، حلقهٔ موضعی در هر نقطه $(۰, w)$ است که در آن، w متعالی است. از نظر جبری، مجموعهٔ مخرج‌ها به‌صورت $S = A - (\bar{x}) = \{p \mid p_۲(\bar{y}) \neq ۰\}$ است که در آن، مانند بالا $p = p_۱ + p_۲ - c$. هستهٔ I از همریختی $\alpha : A \to A_{\bar{x}}$ برابر است با $\{q \in A \mid \exists p \in S; pq = ۰\}$. اگر $p_۱ + p_۲ - c$ یک مقسوم‌علیه صفر باشد، آن‌گاه $c = ۰$. اگر چنین نقطه‌ای در S نیز باشد، داریم $p_۲(\bar{y}) \neq ۰$ و $p_۲(۰) = ۰$. لذا این نقطه عضوی از $(\bar{y}) - \{۰\}$ است. بنابراین $I = (\bar{x})$. از این‌رو $A/I = \mathbb{Q}[\bar{x}, \bar{y}]/(\bar{x}) = \mathbb{Q}[\bar{y}]$ و تصویر S در $\mathbb{Q}[\bar{y}]$، $\mathbb{Q}[\bar{y}] - \{۰\}$ است. لذا $A_{\bar{x}}$ یکریخت با میدان نگاشت‌های گویا در y است. به‌طور مشابه، $A_{\bar{y}} = \mathbb{Q}(x)$.

بحثی مشابه برای حلقهٔ موضعی در ایدآل اول ماکسیمالی به‌جز $(\bar{x}, \bar{y})$ برای مثال $P = (\bar{x}, \bar{y}^۲ - ۲)$، منجر به حلقهٔ $A_P = \{p/q \in \mathbb{Q}(y) \mid q$ را عاد نمی‌کند $(y^۲ - ۲)\}$ خواهد شد. یعنی A_P شامل وارون همهٔ نگاشت‌هایی است که در $(۰, \sqrt{۲})$ صفر نمی‌شوند؛ حال آن که دو چندجمله‌ای از $\bar{x}$ و $\bar{y}$ که روی یک مجموعهٔ باز شامل $(۰, \sqrt{۲})$ یکی هستند، در A_P یکسان در نظر گرفته می‌شوند. از این‌رو نگاشت $\alpha : A \to A_P$ نه یک‌به‌یک و نه پوشا است. حال اگر $P = (\bar{x}, \bar{y})$، آن‌گاه مجموعهٔ مخرج‌ها برای A_P دقیقاً مجموعهٔ چندجمله‌ای‌های $p_۱ + p_۲ - c$ برای $c \neq ۰$ است. لذا در این حالت، نگاشت $\alpha : A \to A_P$ یک شمول می‌باشد که پوشا نیست.

در نهایت، به شرح حلقه‌های برش‌های پیش‌بافه A_U برای مجموعه‌های باز U می‌پردازیم. اگر U متمم یک مجموعهٔ بستهٔ متناهی از ایدآل‌های اول ماکسیمال

$$(\bar{x}, p_۱(\bar{y})), \cdots, (\bar{x}, p_k(\bar{y})), (p_{k+۱}(\bar{x}), \bar{y}), \cdots (p_n(\bar{x}), \bar{y})$$

باشد، آن‌گاه مجموعهٔ مخرج‌ها برای A_U برابر است با $\{p \in A \mid p \notin \bigcup_{P\in U} P\}$ که همان مجموعهٔ تمام حاصلضرب‌های $p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}$ به‌همراه جملهٔ ثابت ناصفر می‌باشد. نگاشت $A_U \to A_P$ هرگاه $P \in U$ دارای هستهٔ $(\bar{x})$ خواهد بود اگر $P = (\bar{x}, p(\bar{y}))$ (که p هر چندجمله‌ای تحویلناپذیر به‌جز $\bar{y}$ است) و هستهٔ $(\bar{y})$ خواهد داشت اگر $P = (\bar{y})$ یا $P = (\bar{y}, p(\bar{x}))$ (که $p(x) \neq x$) و هسته‌ی (0) خواهد داشت اگر $P = (\bar{x}, \bar{y})$. اگر $U = V_{\bar{x}}$ متمم محور w باشد، آن‌گاه مجموعهٔ مخرج‌ها برای A_U برابر با مجموعهٔ چندجمله‌ای‌های $\bar{y}p(\bar{y}) + c\bar{x}^n$ به‌ازای $p \in \mathbb{Q}[\bar{y}]$ و $n \geq 0$ است. بنابراین

$$A_U = \{p(x)/x^n \mid p \in \mathbb{Q}[x]\}.$$

از آنجا که $A_{(\bar{y})} \simeq \mathbb{Q}(x)$، نگاشت $\rho_{(\bar{y}),U} : A_U \to A_{(\bar{y})}$ از حلقهٔ برش‌ها به ساقه در $(\bar{y})$ یک‌به‌یک است ولی پوشا نیست. برای یک ایدآل اول ماکسیمال $(\bar{y}, p) \in V_{\bar{x}}$، که $p(x) \neq x$، $\rho_{(\bar{y},p),U} : A_U \to A_{(\bar{y},p)}$ یک شمول است زیرا x، p را عاد نمی‌کند. اگر U متمم مجموعهٔ بسته‌ی $(\bar{x}, p_1(\bar{y})), \cdots, (\bar{x}, p_k(\bar{y}))$ باشد، آن‌گاه $V_{\bar{x}} \subset U$ و نگاشت تحدید $\rho_{V_{\bar{x}},U} : A_U \to A_{V_{\bar{x}}}$ دارای هستهٔ $(\bar{y})$ است. حلقهٔ برش‌ها روی $\operatorname{Spec} A$، A است، زیرا هر عضو از A در نقطه‌ای از $\operatorname{Spec} A$ صفر می‌شود. از این‌رو برای هر نوع از مجموعهٔ باز U در $\operatorname{Spec} A$، عضوهای حلقه‌های A_U نگاشت‌هایی گویا هستند که در هر نقطه از U تعریف شده‌اند. به‌ویژه، نگاشت‌های $\bar{x}$ و $\bar{x} + \bar{y}$ برش‌های روی مجموعهٔ باز $\operatorname{Spec} A$ هستند. آنها روی زیرمجموعهٔ سرهٔ باز $V_{\bar{x}}$ برابرند، زیرا $(\bar{y})$ هستهٔ نگاشت تحدید $\rho_{V_{\bar{x}},\operatorname{Spec} A}$ است اما روی $(\bar{x}, \bar{y})$ که در بستار $V_{\bar{x}}$ قرار دارد، یکی نیستند. بنابراین نقاط $\bar{x}$ و $\bar{x} + \bar{y}$ در $A_{(\bar{x},\bar{y})}$ گرچه متمایزند، نمی‌توانند با برش‌ها جداسازی شوند، چون هر مجموعهٔ باز شامل $(\bar{x}, \bar{y})$ باید $V_{\bar{x}}$ را قطع کند. از این‌رو این بافه نمی‌تواند هم به‌طور عمودی و هم افقی هاسدورف باشد.

۳. بافهٔ فرم‌های دیفرانسیلی

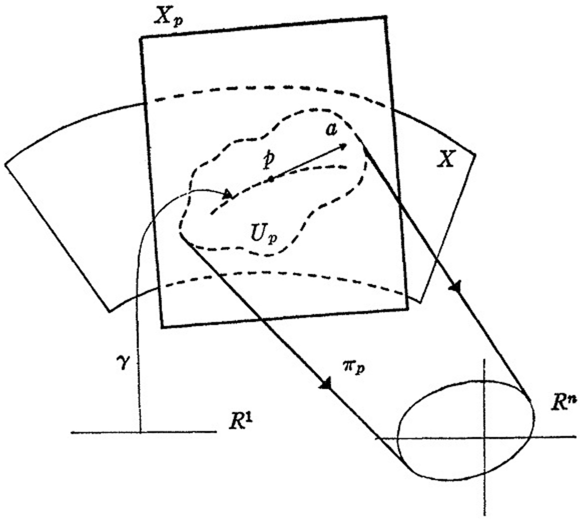
فرض کنید $p \in X$ که در آن، X یک خمینهٔ $\mathbb{C}^\infty$ روی $\mathbb{R}^n$ است. مجموعهٔ همهٔ نگاشت‌ها از X به خط حقیقی $\mathbb{R}^1$ را می‌دهیم که در یک همسایگی از p، $\mathbb{C}^\infty$ هستند، با $\mathbb{C}_p^\infty$ نمایش می‌دهیم. به‌وضوح $\mathbb{C}_p^\infty$ یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ است که در آن، جمع $f + g$ روی اشتراک دامنه‌های f و g تعریف می‌شود. یک مماس[1] بر X در p، نگاشتی خطی مانند $t : \mathbb{C}_p^\infty \to \mathbb{R}^1$ است به‌طوری که

$$t(fg) = t(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot t(g)$$

[1]tangent

که در آن، $f, g \in \mathbb{C}_p^\infty$. مجموعهٔ همهٔ بردارهای مماس بر X در p تشکیل یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ می‌دهد که آن را X_p فضای مماس بر X در p می‌خوانیم. اگر $\gamma : [\circ, ۱] \to X$ یک نگاشت از ردهٔ $\mathbb{C}^\infty$ باشد به‌طوری که $\gamma(t_\circ) = p$ و اگر $f \in \mathbb{C}_p^\infty$، آن‌گاه $f \circ \gamma : [\circ, ۱] \to X \to \mathbb{R}^۱$. اگر $(f \circ \gamma)'$ مشتق $f \circ \gamma$ باشد، نگاشت $\gamma_* : \mathbb{C}_p^\infty \to \mathbb{R}^۱$ تعریف شده با $\gamma_*(f) = (f \circ \gamma)'(t_\circ)$ یک مماس است. برای تفسیر هندسی این مطلب، یک دستگاه مختصات موضعی خاص (U_p, π_p) را که در آن، $\pi_p : U_p \to \mathbb{R}^n$ در نظر می‌گیریم. اگر $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^۱$ نگاشت افکنش باشد که با $\pi_i(t_۱, \cdots, t_n) = t_i$ تعریف می‌شود، می‌نویسیم $x_i = \pi_i \circ \pi_p$؛ در این صورت $\pi_p(p) = (x_۱(p), \cdots, x_n(p)) \in \mathbb{R}^n$. اگر $e_i = (\circ, \circ, \cdots, ۱, \cdots, \circ) \in \mathbb{R}^n$، آن‌گاه خم $\gamma(t) = \pi_p^{-۱}(\pi_p(p) + te_i)$ را به‌عنوان محور مختصاتی iام در U_p می‌پنداریم، زیرا $(d/dt)(\pi_p \circ \gamma) \Big|_\circ = e_i$. بنابراین مماس γ_* در

$$\begin{aligned}\gamma_*(f) &= (f \circ \gamma)'(\circ) = \frac{d}{dt}(f \circ \pi_p^{-۱} \circ \pi_p \circ \gamma) \Big|_\circ \\ &= \left(\frac{\partial(f \circ \pi_p^{-۱})}{\partial t_۱}, \cdots, \frac{\partial(f \circ \pi_p^{-۱})}{\partial t_n}\right) \Big|_{\pi_p(p)} \cdot e_i = \frac{\partial(f \circ \pi_p^{-۱})}{\partial t_i} \Big|_{\pi_p(p)}\end{aligned}$$



شکل ۹

صدق می‌کند. از این‌رو $\gamma_*(f)$ معمولاً با $(\partial/\partial x_i)f$ نشان داده می‌شود. مماس‌های $(\partial/\partial x_۱)$، ...، $(\partial/\partial x_n)$ تشکیل یک پایه برای فضای برداری X_p می‌دهند [۸، ص ۷]. X_p را یک ابرصفحهٔ n-بعدی مماس بر X در p می‌پنداریم (شکل ۹).

اگر

$$\gamma_* = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

آن‌گاه $\gamma_*(f)$ همان $a \cdot \operatorname{grad} f$، یعنی مشتق f در راستای $a = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ است.

اگر $\phi : X \to Y$ یک نگاشت $\mathbb{C}^\infty$ از خمینه‌ها باشد، دیفرانسیل ϕ نگاشت خطی $d\phi : X_p \to Y_{\phi(p)}$ با ضابطهٔ است که اگر $t \in X_p$ و $f \in \mathbb{C}^\infty_{\phi(p)}$، آن‌گاه $[d\phi(t)](f) = t(f \circ \phi)$. اگر (U_p, π_p) یک دستگاه مختصاتی موضعی در $p \in X$ باشد، آن‌گاه $x_i = \pi_i \circ \pi_x$ یک $\mathbb{C}^\infty$-نگاشت از زیرخمینهٔ U_p به خمینهٔ $\mathbb{R}^1$ تعریف می‌کند. از این‌رو دیفرانسیل dx_i از x_i یک تبدیل خطی از X_p به $\mathbb{R}^1_{x_i(p)}$ است. چون به‌ازای هر $t \in \mathbb{R}^1$، $\mathbb{R}^1_t$ یکریخت با $\mathbb{R}^1$ است، می‌توانیم dx_i را عضوی از فضای برداری دوگان X_p^* از X_p بدانیم. چون $dx_i(\partial/\partial x_j) = \delta_{ij}$ (که در آن، $\delta_{ij} = 0$، اگر $i \neq j$ و $\delta_{ij} = 1$ اگر $i = j$)، دیفرانسیل‌های dx_1، ...، dx_n تشکیل یک پایه از X_p^* را می‌دهند که دوگان پایهٔ $(\partial/\partial x_1)$، ...، $(\partial/\partial x_n)$ از X_p می‌باشد.

در حالی که هر دیفرانسیل dx_i یک نگاشت صرفاً یک متغیره است، فرم دیفرانسیلی یک نگاشت چندمتغیره است. به‌طور دقیق‌تر، یک k-فرم دیفرانسیلی θ روی X_p یک نگاشت k-خطی متناوب از k-تایی‌هایی از عضوهای X_p به $\mathbb{R}^1$ است. (θ، k-خطی است اگر نسبت به هر متغیر به‌طور جداگانه خطی باشد و متناوب است اگر $\theta(t_1 \cdots t_k) = \operatorname{sgn} \sigma \theta(t_{\sigma(1)} \cdots t_{\sigma(k)})$ که در آن، $\sigma : \{1, \cdots, k\} \to \{1, \cdots, k\}$ یک جایگشت بوده و $\operatorname{sgn} \sigma$، $+1$ است اگر σ زوج و -1 است اگر σ فرد باشد.) منظور از حاصلضرب گوه‌ای $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ فرم k-خطی یکتا روی X_p است که روی یک پایه برای مجموعهٔ k-تایی‌ها به‌وسیله

$$dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \left(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}, \cdots \frac{\partial}{\partial x_{j_k}} \right) = \delta,$$

تعریف شده است و در آن، $\delta = 1$ اگر $(i_1, \cdots, i_k) = (j_1, \cdots, j_k)$ و در غیر این صورت $\delta = 0$. مجموعهٔ همهٔ فرم‌های k-خطی روی X_p یک فضای برداری n^k-بعدی روی $\mathbb{R}$ است و n^k فرم‌های $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ که $i_j \in \{1, \cdots, n\}$، تشکیل یک پایه برای این فضای برداری را می‌دهند. مجموعهٔ k-فرم‌های دیفرانسیلی، یک زیرفضا از مجموعهٔ همهٔ فرم‌های k-خطی است و فرم‌های k-خطی $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$، که $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ پایهٔ آن است. این‌گونه دنباله از اندیس‌ها را یک

k-تایی صعودی می‌نامیم. از این‌رو بعد فضای k-فرم‌های دیفرانسیلی، $\binom{n}{k}$ است اگر $k \leq n$ و صفر است اگر $k > n$.

فرض کنیم S_k مجموعهٔ همهٔ k-تایی‌های صعودی از اعداد صحیح مثبت کوچک‌تر یا مساوی n باشد. برای $x \in S_k$، k-فرم $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ را که $s = (i_1, \cdots, i_k)$، با dx_s نمایش می‌دهیم. حال فرض کنیم $U \subset X$ یک مجموعهٔ باز و θ نگاشتی باشد که به هر $p \in U$، یک k-فرم دیفرانسیلی $\theta(p)$ در p نسبت می‌دهد. وقتی یک بار یک دستگاه مختصاتی موضعی در p اختیار و فرم‌های $dx_1, dx_2, \cdots, dx_n$ تعریف شوند، می‌توانیم بنویسیم

$$\theta(p) = \sum_{s \in S_k} a_s(p) dx_s$$

که هر $a_s(p)$ ضریب بسط $\theta(p)$ برحسب پایهٔ $\{dx_s\}_{s \in S_k}$ است. از این‌رو a_s را می‌توان به‌عنوان یک نگاشت از U به $\mathbb{R}^1$ در نظر گرفت. چون هر $\theta(p)$ یک k-فرم دیفرانسیلی در p است، θ را یک k-فرم $\mathbb{C}^\infty$ روی U می‌نامیم اگر هر نگاشت a_s، $\mathbb{C}^\infty$ باشد. فضای برداری حقیقی همهٔ k-فرم‌های $\mathbb{C}^\infty$ روی U را با $\Omega^k(U)$ نمایش می‌دهیم. اگر $U \subset V$، آن‌گاه تبدیل خطی مانند $\rho_{U,V} : \Omega^k(V) \to \Omega^k(U)$ موجود است که با تحدید دامنهٔ $\theta \in \Omega^k(V)$ تعریف می‌شود. گردایهٔ $\{\Omega^k(U)\}$ به‌ازای U باز در X به‌همراه تبدیلات خطی $\rho_{U,V}$ پیش‌بافهٔ k-فرم‌های دیفرانسیلی نامیده می‌شود.

چون هر خمینهٔ پیرافشرده[۱] دارای یک افراز یکانی[۲] $\mathbb{C}^\infty$ تحت تسلط[۳] هر پوشش باز $\{U_\alpha\}$ است [۸، ص ۸۵]، پیش‌بافه‌های روی چنین خمینه‌هایی در خاصیت ویژهٔ زیر صدق می‌کنند: اگر $U = \bigcup U_\alpha$ که U_α در X باز است و اگر $\theta_\alpha \in \Omega^k(U_\alpha)$ منسجم باشند به این معنی که تحدیدهای θ_α و θ_β به $U_\alpha \cap U_\beta$ یکی باشند (هرگاه $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$) آن‌گاه یک $\theta \in \Omega^k(U)$ یکتا وجود دارد که تحدیدش به هر U_α برابر θ_α است. به‌طور مشخص اگر $\{f_\alpha\}$ یک افراز یکانی $\mathbb{C}^\infty$ برای $\{U_\alpha\}$ باشد به‌طوری که $f_\alpha : U \to \mathbb{R}^1$ و f_α بیرون U_α صفر شود، و $\sum f_\alpha = 1$، آن‌گاه می‌توانیم θ را برابر $\sum f_\alpha \theta_\alpha$ تعریف کنیم.

هر پیش‌بافه با ویژگی فوق را یک بافه می‌گویند. بنابراین هرگاه X پیرافشرده باشد، دستگاه $\{\Omega^k(U), \rho_{U,V}\}$ را بافهٔ k-فرم‌های دیفرانسیلی می‌نامیم. اگر $\Omega^k(p)$ مجموعهٔ k-فرم‌های دیفرانسیلی در p باشد، می‌توانیم $\Omega^k(p)$ را به‌عنوان ساقه‌های بافهٔ S بپنداریم: $S = \bigcup_{p \in X} \Omega^k(p)$. نگاشت

[۱] paracompact [۲] partition of unity [۳] subordinate to

افکنش $\rho : S \to X$ به هر فرم دیفرانسیلی در p نقطهٔ p را نسبت می‌دهد. k-فرم $\mathbb{C}^\infty$، $\theta \in \Omega^k(U)$ یک برش از S بوده و خانوادهٔ $\{\theta(U) \subset S \mid U$ در X باز است$\}$ تشکیل یک پایه برای توپولوژی روی S می‌دهد.

۴. بافه‌ها: تعریف عمومی

هر یک از سه مثال قبلی وجوه مختلف مفهوم عمومی یک بافه را منعکس می‌کنند. برای تأکید بر این گوناگونی و فراهم آوردن یک چارچوب منسجم برای تعریف عمومی بعدی، در شکل ۱۰، سه بافهٔ مورد بحث قبلی را خلاصه کرده‌ایم.

	بافهٔ ریشه‌های نگاشت‌های تمامریخت	بافهٔ حلقه‌های موضعی	بافهٔ فرم‌های دیفرانسیلی
ریشه	$[f]_z$	$a/s \in A_P$	
فضای ساقه‌ای	$S = \{(x, [f]_z)\}$	$S = \bigcup\{A_P \mid P \in \text{Spec } A\}$	
نگاشت افکنش	$\rho : S \to \mathbb{C}^n$	$\rho : S \to \text{Spec } A$	
ساقه	$\{(z, [f]_z) \mid f \in A_z\}$	A_P (حلقهٔ موضعی)	
فضای زمینه	$\mathbb{C}^n$	$\text{Spec } A = \{P \mid$ یک ایدآل اول A است $P\}$	خمینه $X = \mathbb{C}^\infty$
برش پیش‌بافه		$a/s \in A_U$	$\theta \in \Omega^k(U)$
همریختی تحدیدی		$\rho_{U,V} : A_V \to A_U$	$\rho_{U,V} : \Omega^k(V) \to \Omega^k(U)$

شکل ۱۰

بافهٔ ریشه‌های نگاشت‌های تمامریخت، فضای ساقه‌ای S به همراه یک توپولوژی و یک همسانریختی موضعی ρ به‌روی $\mathbb{C}^\infty$، تعریف شد. بافهٔ حلقه‌های موضعی به‌طور مشابه تعریف شد. اگرچه در این مورد، دستگاه شامل حلقه‌های A_U و همریختی‌های تحدیدی $\rho_{U,V} : A_V \to A_U$ را به‌عنوان یک پیش‌بافه از حلقه‌ها معرفی کردیم. در مورد سوم، بافهٔ k-فرم‌های دیفرانسیلی، پیش‌بافهٔ k-فرم‌های دیفرانسیلی بود در صورتی که فضای زمینهٔ X پیرافشرده باشد. تشخیص هم‌ارز بودن این دو توصیف، آغاز نظریهٔ بافه را تشکیل می‌دهد. اکنون تعریف‌ها را ارائه می‌کنیم تا این دو رویکرد را رسمیت بخشیده و هم‌ارزی تعریف‌ها را اثبات کنیم.

تعریف ۱. فرض کنیم (X, τ) یک فضای توپولوژیک بوده و $\mathscr{C}$ یک رده از اشیاء ریاضی آشنا (مانند گروه‌های آبلی، مدول‌ها یا حلقه‌ها) باشد. فرض کنیم F یک نگاشت از τ به $\mathscr{C}$ بوده و برای هر

زوج $U,V \in \tau$ که $U \subset V$، نگاشتی (مانند یک همریختی، همریختی مدولی، یا یکریختی) چون $\rho_{U,V} : F(V) \to F(U)$ وجود داشته باشد که ساختار اشیاء $\mathscr{C}$ را حفظ می‌کند. اگر $\rho_{U,V} \circ \rho_{V,W} = \rho_{U,W}$ هرگاه $U \subset V \subset W$ و اگر $\rho_{U,U}$ نگاشت همانی روی $F(U)$ باشد، نگاشت F را به همراه نگاشت‌های تحدید $\rho_{U,V}$ یک پیش‌بافه روی X تعریف می‌کنیم. عضوهای $F(U)$، برش‌های F روی U نامیده می‌شوند. (به زبان نظریهٔ رسته، یک پیش‌بافه یک تابعگون پادورد از رستهٔ مجموعه‌های باز و نگاشت‌های شمول X به یک رسته از اشیاء و ریختارها است.) بافه، یک پیش‌بافه است که در دو اصل انسجام ذیل صدق می‌کند:

۱. اگر $\{U_\alpha\}$ یک خانواده از مجموعه‌های باز در X باشد و $U = \bigcup U_\alpha$ و اگر برش $s, t \in F(U)$ روی هر U_α یکی باشند (یعنی به‌ازای هر α، $\rho_{U_\alpha,U}(s) = \rho_{U_\alpha,U}(t)$)، آن‌گاه $s = t$.

۲. اگر $\{U_\alpha\}$ یک خانواده از مجموعه‌های باز در X باشد و $U = \bigcup U_\alpha$ و اگر برش‌های $s_\alpha \in F(U_\alpha)$ منسجم باشند به این معنی که تحدیدهای s_α و s_β به $U_\alpha \cap U_\beta$ یکی باشند (یعنی $\rho_{U_\alpha \cap U_\beta, U_\alpha}(s_\alpha) = \rho_{U_\alpha \cap U_\beta, U_\beta}(s_\beta)$ هرگاه $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$)، آن‌گاه یک برش $s \in F(U)$ وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر α، $\rho_{U_\alpha,U}(s) = s_\alpha$.

تعریف ۲. فرض کنیم (X, τ) یک فضای توپولوژیک و $\mathscr{C}$ یک رده از اشیاء ریاضی آشنا (مانند گروه‌های آبلی، مدول‌ها یا حلقه‌ها) باشد. یک بافه روی X سه‌تایی $\{S, \pi, X\}$ است که در آن، S یک فضای توپولوژیک و $\pi : S \to X$ یک همسانریختی موضعی (نگاشتی که هر نقطهٔ $p \in S$ دارای یک همسایگی U بوده که روی آن $\pi|_U$ یک همسانریختی می‌باشد) است به‌طوری که هر ساقه $\pi^{-1}(x) \in \mathscr{C}$، و هر عمل به‌عنوان یک نگاشت از $\bigcup_{x\in X}(\pi^{-1}(x) \times \pi^{-1}(x))$ (با توپولوژی القایی از $S \times S$) به $S = \bigcup_{x\in X} \pi^{-1}(x)$ پیوسته است.

بافه از نوع ۱ را بافهٔ برش‌ها و بافه از نوع ۲ را بافهٔ ریشه‌ها می‌نامیم. ارتباط بین این دو نوع از بافه‌ها دقیقاً همان است که در مثال‌های قبلی نشان داده شد.

به بیان صریح، فرض کنید F یک پیش‌بافه (از برش‌ها) روی W باشد. بافهٔ ریشه‌های متناظر را می‌سازیم با این تعریف که یک ریشه در $x \in X$، یک ردهٔ هم‌ارزی از $A_x = \bigcup_{x\in U} F(U)$ تحت رابطهٔ $s \in F(U) \sim t \in F(V)$ است اگر به‌ازای یک $W \subset U \cap V$، $\rho_{W,U}(s) = \rho_{W,V}(t)$. بنابراین ریشهٔ یک برش $s \in F(U)$ در نقطه‌ای مانند $x \in U$ گردایهٔ همهٔ برش‌های $t \in F(V)$

است که با s روی یک همسایگی V از x یکی هستند. مطابق معمول، ریشهٔ s در x را با $[s]_x$ نمایش می‌دهیم و فرض می‌کنیم که فضای ساقه‌ای S، $\{(x,[s]_x) \mid s \in F(U), x \in U\}$ باشد. توپولوژی روی S توسط همسایگی‌های به‌شکل $V(s,U) = \{(x,[s]_x) \mid x \in U\}$ تولید می‌شود. لذا نگاشت افکنش $\pi : S \to X$ یک همسانریختی موضعی خواهد بود. با تفسیر کردن برش به‌عنوان نگاشت، نگاشت‌های به‌اصطلاح تحدید $\rho_{U,V}$ واقعاً تحدید هستند و توپولوژی روی S در بین آن توپولوژی‌هایی که برش‌ها نسبت به آنها پیوسته‌اند، قوی‌ترین است. (همچنین می‌توان توپولوژی روی S را به‌عنوان خارج‌قسمت توپولوژی روی $\bigcup_{U\in\tau}(U \times F(U))$ نسبت به رابطهٔ هم‌ارزی القا شده توسط $\sim$ توصیف کرد که در آن، هر U توپولوژی به توپولوژی زیرفضایی مجهز است و $F(U)$ گسسته است.)

روشن است که هر ساقهٔ $\pi^{-1}(x)$ عمل‌های $F(U)$ را به ارث می‌برد و هر چنین عملی پیوسته است. برای مثال، اگر هر $F(U)$ یک گروه آبلی تحت جمع باشد و اگر $[s]_x, [t]_x \in \pi^{-1}(x)$، آن‌گاه $[s]_x + [t]_x$ به‌صورت $[s+t]_x$ تعریف می‌شود. اگر $V(s+t,U)$ یک همسایگی $[s+t]_x$ باشد، آن‌گاه تصویر معکوس $V(s+t,U)$ تحت $+$ شامل

$$\{(r,q) \mid r \in V(s,U), q \in V(t,U), \pi(r) = \pi(q)\}$$

است که یک مجموعهٔ باز در $\bigcup_{x\in X}(\pi^{-1}(x) \times \pi^{-1}(x))$ می‌باشد. بنابراین $\{S,\pi,X\}$ در واقع یک بافهٔ ریشه‌هاست.

برعکس، فرض کنید $\{S,\pi,X\}$ یک بافهٔ ریشه‌ها باشد (شاید مانند بالا از یک پیش‌بافه ساخته شده باشد). اگر U در X باز باشد، آن‌گاه فرض کنید $F(U)$ گردایهٔ نگاشت‌های پیوسته $s : U \to F$ است به‌طوری که $\pi \circ s$ روی U همانی است. $F(U)$ ساختار جبری را از ساقه‌ها به‌وسیلهٔ تعریف‌های نقطه‌ای[1] به ارث می‌برد و نگاشت‌های تحدید $\rho_{U,V}$ صرفاً تحدید s از V به زیرمجموعهٔ U هستند. اولین اصل انسجام برای بافه‌ها به‌روشنی برقرار است، زیرا برش‌ها نگاشت هستند و دومین اصل نیز برقرار است، زیرا $F(U)$ شامل همهٔ نگاشت‌های پیوسته از U به F است که وارون‌های π هستند. حال اگر $\{F,\pi,X\}$ یک بافهٔ ریشه‌ها باشد، بافهٔ مشتق‌شده از (پیش)بافهٔ برش‌ها به‌طور متعارف با F یکریخت است. با این حال، اگر S یک پیش‌بافهٔ برش‌ها باشد، آن‌گاه پیش‌بافهٔ برش‌های S' وابسته به بافهٔ ریشه‌های منتج‌شده از S در حالت کلی با S متفاوت است، زیرا از آنجا که S' یک بافه است، ممکن است (به‌منظور صدق کردن در دومین اصل انسجام)، برش‌های بیشتری نسبت به S داشته باشد در حالی که برخی از برش‌ها که در S متمایز بودند ممکن است (به واسطهٔ اصل اول) در S' یکی شوند. البته اگر

[1] pointwise

S یک بافه باشد، آن‌گاه S' به‌طور طبیعی یکریخت با S است. لذا به این معنی، دو تعریف از یک بافه اساساً هم‌ارزند.

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[dr] & & & & {} \\
& F(W_1) \arrow[rr, "\rho_{U,W_1}"] \arrow[ddr, "\rho_{V_1,W_1}"'] & & F(U) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
{} \arrow[ur] & & & & {} \\
& & F(V_1) \arrow[uur, "\rho_{U,V_1}"'] \arrow[dr, "\rho_{V_1\cap V_2,V_1}"] & & \\
{} \arrow[r] & F(W_2) \arrow[ur, "\rho_{V_1,W_2}"'] \arrow[dr, "\rho_{V_2,W_2}"'] & & F(V_1 \cap V_2) \arrow[r] \arrow[dr] & {} \\
& & F(V_2) \arrow[ur, "\rho_{V_1\cap V_2,V_2}"'] & & {}
\end{tikzcd}
$$

شکل ۱۱

یک راه معمول و مناسبِ دیگر برای ساختن رده‌های هم‌ارزی، استفاده از حدهای مستقیم است. اگر F یک پیش‌بافهٔ برش‌ها روی X بوده و $x \in X$، آن‌گاه تحدید F به همسایگی‌های x تشکیل یک دستگاه مستقیم[۱] $(\{F(U)\}_{x\in U}, \{\rho_{U,V}\}_{x\in U\subset V})$ می‌دهد، زیرا $\rho_{U,V}\circ\rho_{V,W} = \rho_{U,W}$ هرگاه $x \in U \subset V \subset W$. تعداد کمی از عضوهای چنین دستگاهی را می‌توان با نمودار تعویض‌پذیر شکل ۱۱ نمایش داد.

صرف‌نظر از جزئیات، حد مستقیم این دستگاه، اولین شیئی است که می‌تواند در سمت راست این نمودار ظاهر شود. به‌ویژه، یک شئ F_x به همراه نگاشت‌های $\rho_U : F(U) \to F_x$ برای هر $F(U)$ حد مستقیم[۲] دستگاه مستقیم $(\{F(U)\}_{x\in U}, \{\rho_{U,V}\}_{x\in U\subset V})$ نامیده می‌شود هرگاه داشته باشیم:

(الف) اگر $U \subset V$، آن‌گاه نمودار شکل ۱۲ تعویض‌پذیر باشد؛

(ب) F_x نسبت به خاصیت (الف) جهانی باشد، یعنی اگر $(G_x, \{\sigma_U\})$ نیز در خاصیت (الف) صدق

[۱] directed system [۲] direct limit

کند، آن‌گاه یک نگاشت یکتا مانند $\eta : F_x \to G_x$ وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $\sigma_U : F(U) \to G_x$، $\sigma_U = \eta \circ \rho_U$.

$$\begin{tikzcd}
F(V) \arrow[rr, "\rho_V"] \arrow[dr, "\rho_{U,V}"'] & & F_x \\
& F(U) \arrow[ur, "\rho_U"'] &
\end{tikzcd}$$

شکل ۱۲

شرط (الف)، ایدهٔ «ظاهر شدن در سمت راست نمودار» را روشن می‌سازد و شرط (ب) ادعا می‌کند که F_x اولین شئ این چنینی است. از این شرط‌ها به‌روشنی نتیجه می‌شود که حد مستقیم (تا حد یکریختی) یکتا است. لذا آن را با $\varinjlim_{x\in U} F(U)$ نمایش می‌دهیم. حال ساقهٔ ریشه‌های در x، مشتق‌شده از پیش‌بافهٔ F را در نظر بگیرید. اگر ρ_U نشان‌دهندهٔ نگاشتی از $F(U)$ به ساقهٔ $\pi^{-1}(x)$ با تعریف $\rho_U(s) = (x, [s]_x)$ باشد (که $x \in U$)، آن‌گاه $\pi^{-1}(x) = \varinjlim_{x\in U} F(U)$، زیرا اگر $x \in U \subset V$، آن‌وقت $\rho_V = \rho_U \circ \rho_{U,V}$ و $\pi^{-1}(x)$ نسبت به آن خاصیت، جهانی است. برای اثبات حکم اخیر، فرض می‌کنیم که $(G, \{\sigma_U\})$ یک حد مستقیم دیگر باشد و مشاهده می‌کنیم که اگر هر دوی $t_1 \in F(U_1)$ و $t_2 \in F(U_2)$ در یک ریشهٔ یکسان $[s]_x$ قرار داشته باشند، آن‌گاه $\sigma_{U_1}(t_1) = \sigma_{U_2}(t_2)$، زیرا بنا بر تعریفِ $[s]_x$، یک $V \subset U_1 \cap U_2$ موجود است به‌طوری که $\rho_{V,U_1}(t_1) = \rho_{V,U_2}(t_2)$. در این صورت با توجه به تعویض‌پذیر بودن نمودار شکل ۱۳، داریم

$$\sigma_{U_1}(t_1) = \sigma_V \circ \rho_{V,U_1}(t_1) = \sigma_V \circ \rho_{V,U_2}(t_2) = \rho_{U_2}(t_2).$$

$$\begin{tikzcd}
F(U_1) \arrow[rr, "\sigma_{U_1}"] \arrow[dr, "\rho_{V,U_1}"'] \arrow[ddrr, bend left, "\rho_{U_1}"] & & G \\
& F(V) \arrow[ur, "\sigma_V"] \arrow[dr, "\rho_V"] & \\
F(U_2) \arrow[ur, "\rho_{V,U_2}"] \arrow[uurr, bend right, "\sigma_{U_2}"'] \arrow[rr, "\rho_{U_2}"'] & & \pi^{-1}(x)
\end{tikzcd}$$

شکل ۱۳

بنابراین هر عضو $[s]_x$ از $\pi^{-1}(x)$ به‌وسیلهٔ یک نگاشت مناسب $\sigma_U \circ \rho_U^{-1}$ به یک نقطه از G نگاشته می‌شود. این نقطه را $\eta(x, [s]_x)$ می‌نامیم و بدین وسیله نگاشت یکتای مورد نیاز از $\pi^{-1}(x)$ به G را تعریف می‌کنیم.

به این ترتیب می‌توانیم هر سه رویکرد را در یک تعمیم جامع خلاصه کنیم: به‌ازای هر $x \in X$، ساقه روی x از بافهٔ ریشه‌ها، حد مستقیم تحدید پیش‌بافه به همسایگی‌های x است.

این بخش را با چهارمین مشخصهٔ بافه‌ها به اتمام می‌رسانیم. این مشخص‌سازی نیز بر اساس خاصیت جهانی است و تا حدی در مثال‌های قبلی به نمایش در آمده است. فرض کنید $\mathfrak{F}$ یک رده از نگاشت‌های تعریف شده روی زیرمجموعه‌های باز از فضای توپولوژیک X باشد. اگر $F(U)$ گردایهٔ تمام $f \in \mathfrak{F}$ باشد که دامنه‌شان U است و $\rho_{U,V}$ نگاشت تحدید باشد (یعنی $\rho_{U,V}(f) = f|_U$ هرگاه $U \subset V$ و $f \in F(V)$)، آن‌گاه گردایهٔ $\{F(U), \rho_{U,V}\}$ یک پیش‌بافه است. اگر این پیش‌بافه یک بافهٔ S باشد (همان‌طور که اگر $\mathfrak{F}$ مجموعهٔ نگاشت‌های تمامریخت روی زیرمجموعه‌های باز $\mathbb{C}^n$ یا مجموعهٔ فرم‌های دیفرانسیلی روی زیرمجموعه‌های باز یک خمینهٔ پیرافشرده X باشد، چنین خواهد شد)، آن‌گاه می‌توانیم یک نگاشت پیوستهٔ جهانی $\Phi : S \to \mathbb{R}$ از نوع $\mathfrak{F}$ تعریف کنیم به‌طوری که هر $f \in F(U)$ به‌طور یکتا از طریق بافهٔ S تجزیه شود؛ یعنی یک نگاشت یکتای $\hat{f} : U \to S$ وجود دارد به‌طوری که $\hat{f} = \Phi \circ f$.

در حالت کلی، هر شئ S و نگاشت $\Phi : S \to \mathbb{R}$ با این خاصیت که هر نگاشت $f : U \to \mathbb{R}$ به‌طور یکتا به واسطهٔ S از طریق Φ تجزیه شود، نسبت به خاصیت‌های مشخص‌کنندهٔ نگاشت‌های f جهانی نامیده می‌شود. زوج (S, Φ) به‌طور یکتا (تا حد یکریختی) با این خاصیت تعیین می‌شود. از این‌رو مثلاً بافهٔ نگاشت‌های تمامریخت، یک شئ جهانیِ یکتا برای یک خانوادهٔ نگاشت‌های تمامریخت تلقی می‌شود.

چون $\hat{f}^{-1}(V(f, U)) = U$، $\hat{f}$ پیوسته است. از این‌رو بافه‌ها یک خاصیت پیچیدهٔ نگاشت‌ها، مانند تحلیلی بودن را به چیزی ساده‌تر از پیوستگی انتقال می‌دهند؛ زیرا توپولوژی روی بافه طوری انتخاب شده است که یک برش پیوسته روی U (یعنی یک عضو از $F(U)$) متناظر با یکی از نگاشت‌های خاص (مثلاً تحلیلی، مشتق‌پذیر) از $F(U)$ است.

کتاب‌نامهٔ تاریخچه

[1933] W. Rückert, Zum Eliminationsproblem der Potenzreihenideale, *Math. Ann.*,**107** (1933) 259-281.

[1940] H. Cartan, Sur les matrices holomorphes de *n* variables complexes, *J. Math. Pures Appl.*, *19* (1940) 1-26.

[1944] H. Cartan , Idéaux de fonctions analytiques de *n* variables complexes, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.*, 3^{e} série,**61** (1944) 149-197.

[1945] J. Leray, Sur la forme des espaces topologiques, *J. Math. Pures Appl.*,**24** (1945) 95-248.

[1946] J. Leray , L'anneau d'homologie d'une repréentation, *C. R. Acad. Sci.*, **222** (1946) 1366- 1368.

[1950] K. Oka, Sur quelques notions arithmétiques, *Bull. Soc. Math. France*,**78** (1950) 1-27.

[1950] H. Cartan, Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes, *Bull. Soc. Math. France*,**78** (1950) 29-64.

[1950] *Siminaire Cartan*. 1950-51, vol. 1, Benjamin, New York, 1967.

[1951] K. Oka, Lemme fondamental, *J. Math. Soc. Japan*,**3** (1951) 204-214, 259-278.

[1952] A. Weil, Sur les théorémes de deRham, *Comment. Math. Helv*, (1952) 119-146.

[1953] H. Cartan, Variétés analytiques complexes et cohomologie, *Collogue de Bruxelles*, (1953) 41-55.

[1953] K. Kodaira and D. C. Spencer, On arithmetic genera of algebraic varieties, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*,**39** (1953) 641-649.

[1953] K. Kodaira and D. C. Spencer , Groups of complex line bundles over compact Kähler varieties, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **39** (1953) 868-877.

[1953] J.-P. Serre, Quelques problémes globaux relatifs aux variétés de Stein, *Colloque de Bruxelles*, (1953) 57-68.

[1954] F. Hirzebruch, Arithmetic genera and the theorem of Riemann-Roch for algebraic varieties, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*,**40** (1954) 110-114.

[1955] J.-P. Serre, Faisceaux algébriques cohérents, *Ann. of Math.*,**61** (1955) 197-278.

[1956] F. Hirzebruch, *Topological methods in algebraic geometry*, 3rd ed., Springer, Berlin, 1966.

[1956] S.-S. Chern, Scientific report of the second summer institute; 11, Complex manifolds, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **62** (1956) 102-117.

[1956] O. Zariski, Scientific report of the second summer institute; 111, Algebraic sheaf theory, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **62** (1956) 117-141.

[1957] A. Grothendieck, Sur quelques points d'algébre homologique, *Tôhoku Math. J.* , **9** (1957) 119-221.

[1958] R. Godement, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, Paris, 1958.

[1961] K. Oka, *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables*, Iwanami Shoten, Tokyo, 1961.

کتابنامه عمومی

[1] L. Bers,*Introduction to several complex variables* , Courant Institute, New York, 1964.

[2] G. Bredon,*Sheaf theory* , McGraw-Hill, New York, 1967.

[3] C. H. Dowker, *Lectures on sheaf theory*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1956.

[4] J. W. Gray, Sheaves with values in a category,*Topology* ,**3** (1965) 1-18.

[5] A. Grothendieck and J. Dieudonné, *Éléments de géométrie algébrique*, Publications Mathematiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques, Nos. 4, 7, 11, 17, 20, 24, 28, 32.

[6] R. Gunning and H. Rossi,*Analytic functions of several complex variables* , Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1965.

[7] M. Hervé, *Several complex variables*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1963.

[8] N. J. Hicks,*Notes on differential geometry* , Van Nostrand, Princeton, N. J., 1965.

[9] L. Hörmander, *Complex analysis in several variables*, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1966.

[10] I. Macdonald, *Algebraic geometry, Introduction to schemes*, Benjamin, New York, 1968.

[11] R. Swan, *The Theory of sheaves*, University of Chicago Press, Chicago, 1964.

[12] O. Zariski and P. Samuel,*Commutative algebra* I, Van Nostrand, 1958.

[13] O. Zariski and P. Samuel, *Commutative algebra* II, Van Nostrand, 1960.

داود حسن‌زاده للکامی: اراک، دانشگاه صنعتی اراک، صندوق پستی ۱۱۷۷-۳۸۱۳۵

رایانامه: dhmath@arakut.ac.ir

هاجر روشن شکالگورابی: اراک، دانشگاه صنعتی اراک، صندوق پستی ۱۱۷۷-۳۸۱۳۵

رایانامه: hrsmath@gmail.com