فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۷ (پاییز و زمستان ۱۳۹۴) صص. ۸۱ تا ۹۵

بهینه‌سازی معکوس و کاربردهای آن در شبکه جریان و بهینه‌سازی سهام

مجید سلیمانی دامنه و شیدا عموکاظمی

چکیده

هدف اصلی این نوشتار، معرفی مسائل برنامه‌ریزی خطی و مخروطیِ معکوس و کاربرد آن‌ها است. برای مسائل برنامه‌ریزی خطی معکوس، یک روش حل، بر پایه شرایط بهینگی، مطرح می‌کنیم و سپس کاربردهای مسائل خطی معکوس در شبکه‌های جریان را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. همچنین نشان می‌دهیم مسائل مخروطیِ معکوس تحت برخی شرایط مجدداً به‌صورت مسائل مخروطی بیان و حل می‌شوند. در قسمت پایانی، یک کاربرد مهم از مسائل مخروطی معکوس در بهینه‌سازی سهام مورد بررسی قرار گرفته است.

۱. مقدمه

بهینه‌سازی معکوس[۱] از جمله مباحثی است که در دهه‌های اخیر در برنامه‌ریزی ریاضی[۲] مورد توجه قرار گرفته است. این مسائل کاربردهای زیادی در اقتصاد، مدیریت و صنعت دارند. هدف این مقاله، معرفی این مسائل در حالت خطی و مخروطی است.

در مسائل برنامه‌ریزی خطی معکوس، فرض می‌شود نقطه شدنی x° داده شده است به‌طوری که این نقطه بهینه نیست. می‌خواهیم ضرایب تابع هدف را طوری تعدیل کنیم که x° تحت مقادیر جدید پارامترها بهینه شود. این تعدیل می‌تواند توسط نرم‌های مختلفی (مانند نرم ۱، نرم ۲ و نرم بی‌نهایت) اندازه‌گیری

عبارات و کلمات کلیدی. بهینه‌سازی معکوس، برنامه‌ریزی خطی، برنامه‌ریزی مخروطی، شبکه جریان، بهینه‌سازی سهام .

[۱] inverse optimization [۲] mathematical programming

شود. هدف این مسائل تبدیل یک جواب شدنی به یک جواب بهینه با کمترین تغییرات ممکن در ضرایب هزینه است.

مسائل برنامه‌ریزی مخروطی دسته‌ای از مسائل بهینه‌سازی محدب به شمار می‌آیند. این مسائل به‌صورت مینیمم‌سازی یک تابع محدب روی اشتراک یک مجموعه آفین و یک مخروط محدب صورتبندی می‌شوند [۴]. مسائل مخروطی معکوس در بهینه‌سازی سبد سهام[۱] کاربردهای فراوانی دارند که به یکی از آن‌ها خواهیم پرداخت.

۲. برنامه‌ریزی خطی معکوس

شکل کلی مسئله برنامه‌ریزی خطی به‌صورت زیر است:

$$\min\{cx \mid Ax = b, l \le x \le u\} \tag{۱.۲}$$

که در آن $x \in R^n$ بردار متغیرها، A یک ماتریس $m \times n$ و b یک بردار $m \times 1$ است. بردار سطری c، بردار هزینه نامیده می‌شود. بردارهای $l, u \in R^n$ ثابت هستند و بیانگر کران‌های بالا و پایین متغیرهای تصمیم هستند. به‌علاوه، $l < u$. یک جواب شدنی x° را در نظر بگیرید، یعنی $Ax^\circ = b$ و $l \le x^\circ \le u$. می خواهیم بردار c را طوری تعدیل کنیم که x° جواب بهینه مسئله (۱.۲) شود. تعریف می‌کنیم:

$$F(x^\circ) = \{\tilde{c} \in R^n \mid \min\{\tilde{c}x \mid Ax = b, l \le x^\circ \le u\} = \tilde{c}x^\circ\}. \tag{۲.۲}$$

مسئله بهینه‌سازی معکوس متناظر با مسئله (۱.۲) به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\min\{\|c - \tilde{c}\|_p \mid \tilde{c} \in F(x^\circ)\}, \tag{۳.۲}$$

که در آن $\|.\|_p$ یک نرم مناسب مسئله است.

لم زیر از قضیه KKT در برنامه‌ریزی خطی نتیجه می‌شود [۲].

لم ۱.۲. [۱۲] *فرض کنید x° یک نقطه شدنی مسئله (۱.۲) است. x° جواب بهینه این مسئله است اگر و تنها اگر $\pi \in R^m$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $j = 1, \ldots, n$*

$$l_j < x_j^\circ < u_j \Rightarrow \pi P_j = c_j, \tag{۴.۲}$$

$$l_j = x_j^\circ < u_j \Rightarrow \pi P_j \le c_j, \tag{۵.۲}$$

[۱] portfolio optimization

$$l_j < x_j^\circ = u_j \Rightarrow \pi P_j \geq c_j, \tag{۶.۲}$$

که درآن P_j ستون $j-$ ام ماتریس A است.

با توجه به لم فوق، مسئله بهینه‌سازی معکوس (۳.۲) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & \|c - \tilde{c}\|_p \\ s.t. \quad & \pi P_j = \tilde{c}_j, \quad j \in J^\circ, \\ & \pi P_j \leq \tilde{c}_j, \quad j \in J^-, \\ & \pi P_j \geq \tilde{c}_j, \quad j \in J^+ \end{aligned}$$

که در آن $J^\circ = \left\{ j | l_j < x_j^\circ < u_j \right\}$، $J^- = \left\{ j | x_j^\circ = l_j \right\}$ و $J^+ = \left\{ j | x_j^\circ = u_j \right\}$. قرار می‌دهیم $\tilde{c}_j = c_j + \theta_j - \alpha_j$ که در اینجا $\theta_j, \alpha_j \geq ۰$ به‌ازای هر $j = ۱, \ldots, n$. θ_j و α_j به ترتیب میزان افزایش و کاهش در c_j را نشان می‌دهند. به‌سادگی دیده می‌شود که در جواب‌های بهینه این مدل داریم $\theta_j \alpha_j = ۰$.

با توجه به توضیحات فوق، مسئله معکوس به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \min \ & \|\theta - \alpha\|_p \\ s.t. \quad & \pi P_j - \theta_j + \alpha_j = c_j, \quad j \in J^\circ, \\ & \pi P_j - \theta_j + \alpha_j \leq c_j, \quad j \in J^-, \\ & \pi P_j - \theta_j + \alpha_j \geq c_j, \quad j \in J^+, \\ & \theta_j, \alpha_j \geq ۰, \quad j = ۱, \ldots n. \end{aligned} \tag{۷.۲}$$

چون $\theta_j, \alpha_j \geq ۰$ و تابع هدف مینیمم‌سازی $\|\theta - \alpha\|_p$ است، قید دوم را می‌توان با

$$-\pi P_j + \theta_j \geq -c_j$$

جایگزین کرد؛ زیرا داریم $-\pi P_j + \theta_j \geq -c_j + \alpha_j \geq -c_j$. به‌طور مشابه، قید سوم را می‌توان با $\pi P_j + \alpha_j \geq c_j$ جایگزین کرد. از طرفی می‌توان محدودیت اول مسئله بالا را به‌صورت دو نامساوی نوشت و آن‌ها را با قیود زیر جایگزین کرد:

$$\pi P_j + \alpha_j \geq c_j, \qquad -\pi P_j + \theta_j \geq -c_j$$

بنابراین می‌توان مسئله (۷.۲) را به‌صورت زیر نوشت:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \|\theta - \alpha\|_p \\
s.t. \quad & -\pi P_j + \theta_j \geq -c_j, \quad j \in J^- \cup J^\circ, \\
& \pi P_j + \alpha_j \geq c_j, \quad j \in J^+ \cup J^\circ, \\
& \theta_j \geq \circ, \quad j \in J^- \cup J^\circ, \\
& \alpha_j \geq \circ, \quad j \in J^+ \cup J^\circ.
\end{aligned} \tag{۸.۲}
$$

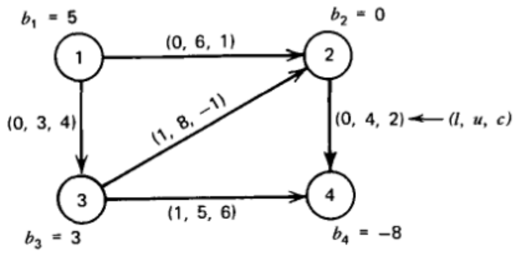
حال به بیان یک کاربرد از مسائل بهینه‌سازی معکوس در شبکه جریان می‌پردازیم.
گراف جهت‌دار $G(V, \mathscr{A})$، را که در آن V و $\mathscr{A}$ به‌ترتیب مجموعه گره‌ها و یال‌های گراف G هستند در نظر بگیرید. متناظر با هر گره i عدد b_i را داریم که می‌تواند مثبت، منفی یا صفر باشد. اگر $b_i > \circ$ $(b_i < \circ)$ باشد، گره i را یک گره مولد (مصرف‌کننده) می‌نامیم و b_i میزان جریانی است که در این گره تولید (مصرف) می‌شود. هزینه انتقال یک واحد جریان در یال (i, j) برابر با c_{ij} است. هدف تعیین جریان در یال‌های گراف G است، به‌طوری‌که میزان تقاضای مصرف‌کنندگان با کمترین هزینه برآورده شود.

شکل کلی مسئله مینیمم هزینه در شبکه جریان، به‌صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{(i,j)\in\mathscr{A}} c_{ij}x_{ij} \\
s.t. \quad & -\sum_{j\in t(i)} x_{ji} + \sum_{j\in f(i)} x_{ij} = b_i, \quad i \in V \\
& l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \quad (i, j) \in \mathscr{A}
\end{aligned} \tag{۹.۲}
$$

(i, j) یک یال از گره i به گره j را نشان می‌دهد. متغیر تصمیم در این مسئله x_{ij} است که میزان جریان در یال (i, j) است. $f(i)$ مجموعه گره‌هایی است که کمانی از گره i به آن‌ها و $t(i)$ مجموعه گره‌هایی است که کمانی از آن‌ها به گره i وارد می‌شود. u_{ij} و l_{ij} به‌ترتیب نشان‌دهنده حداکثر و حداقل جریانی هستند که می‌تواند از گره i به گره j انتقال یابد.

برای مثال، گراف زیر را در نظر می‌گیریم:



شکل ۱. یک گراف مربوط به شبکه جریان

مسئله مینیمم هزینه در گراف فوق به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_{۱۲} + ۴x_{۱۳} + ۲x_{۲۴} - x_{۳۲} + ۶x_{۳۴} \\ s.t. \quad & x_{۱۲} + x_{۱۳} = ۵, \\ & x_{۲۴} - x_{۱۲} - x_{۳۲} = ۰, \\ & x_{۳۲} + x_{۳۴} - x_{۱۳} = ۳, \\ & -x_{۲۴} - x_{۳۴} = -۸, \\ & ۰ \leq x_{۱۲} \leq ۶, \\ & ۰ \leq x_{۱۳} \leq ۳, \\ & ۰ \leq x_{۲۴} \leq ۴, \\ & ۱ \leq x_{۳۲} \leq ۸, \\ & ۱ \leq x_{۳۴} \leq ۵. \end{aligned}$$

متغیر دوگان متناظر با قید $i-$ ام را با π_i نشان می‌دهیم. با توجه به مسئله (۸.۲)، مسئله معکوس متناظر با مسئله (۹.۲)، در حالتی که $p = ۱$ به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{(i,j)\in J^-} \theta_{ij} + \sum_{(i,j)\in J^+} \alpha_{ij} + \sum_{(i,j)\in J^\circ} |\beta_{ij}| \\ s.t. \quad & -\pi_j + \pi_i - \theta_{ij} \leq c_{ij}, \quad (i,j) \in J^-, \\ & -\pi_j + \pi_i + \beta_{ij} = c_{ij}, \quad (i,j) \in J^\circ, \\ & -\pi_j + \pi_i + \alpha_{ij} \geq c_{ij}, \quad (i,j) \in J^+, \\ & \theta_{ij}, \alpha_{ij} \geq ۰, \end{aligned} \tag{۱۰.۲}$$

که در آن $J^{+}=\{(i,j)|x^{\circ}_{ij}=u_{ij}\}$، $J^{\circ}=\{(i,j)|l_{ij}<x^{\circ}_{ij}<u_{ij}\}$ و $J^{-}=\{(i,j)|x^{\circ}_{ij}=l_{ij}\}$. در این مسئله، $c_{ij}+\theta_{ij}$، $c_{ij}-\alpha_{ij}$ و $c_{ij}-\beta_{ij}$ به‌ترتیب ضرایب هزینه تعدیل‌یافته برای کمان‌ها در J^{-}، J^{+} و J° است.

چون متغیر β_{ij} در مسئله بالا آزاد است، از تغییر متغیر شاپیرو[1] استفاده می‌کنیم. قرار می‌دهیم $\beta_{ij}=\mu_{ij}-\gamma_{ij}$، که $\mu_{ij},\gamma_{ij}\geq \circ$. بنابراین مسئله بالا به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{array}{ll}
\min & \sum_{(i,j)\in J^{-}}\theta_{ij}+\sum_{(i,j)\in J^{+}}\alpha_{ij}+\sum_{(i,j)\in J^{\circ}}(\mu_{ij}+\gamma_{ij}) \\
s.t. & -\pi_j+\pi_i-\theta_{ij}\leq c_{ij},\ \ (i,j)\in J^{-}, \\
 & -\pi_j+\pi_i+\mu_{ij}-\gamma_{ij}=c_{ij},\ \ (i,j)\in J^{\circ}, \\
 & -\pi_j+\pi_i+\alpha_{ij}\geq c_{ij},\ \ (i,j)\in J^{+}, \\
 & \theta_{ij},\alpha_{ij},\mu_{ij},\gamma_{ij}\geq \circ.
\end{array} \tag{۱۱.۲}$$

اگر $Jf(i)$ را مجموعه گره‌هایی در J که کمانی از i به آن‌ها وارد می‌شود و $Jt(i)$ را مجموعه گره‌هایی در J که کمانی از آن‌ها به گره i وارد می‌شود در نظر بگیریم، یعنی $Jf(i)=\{j\mid(i,j)\in J\}$ و $Jt(i)=\{j\mid(j,i)\in J\}$، آن‌گاه دوگان مسئله بالا به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{array}{ll}
\min & \sum_{(i,j)\in J^{-}}c_{ij}y_{ij}-\sum_{(i,j)\in J^{\circ}}c_{ij}y_{ij}-\sum_{(i,j)\in J^{+}}c_{ij}y_{ij} \\
s.t. & \sum_{j\in J^{-}f(i)}y_{ij}-\sum_{j\in J^{-}t(i)}y_{ji}-\sum_{j\in J^{\circ}f(i)}y_{ij}+\sum_{j\in J^{\circ}t(i)}y_{ji}-\sum_{j\in J^{+}f(i)}y_{ij} \\
 & +\sum_{j\in J^{+}t(i)}y_{ji}=\circ,\quad i\in V \\
 & \circ\leq y_{ij}\leq ۱,\ \ (i,j)\in J^{-}\cup J^{+}, \\
 & -۱\leq y_{ij}\leq ۱,\ \ (i,j)\in J^{\circ}.
\end{array}$$

به یک مسئله مینیمم هزینه در شبکه جریان که در آن همه b_i ها صفر هستند، یک مسئله مینیمم هزینه گردشی[2] می‌گوییم. یکی از معروف‌ترین الگوریتم‌ها برای حل این مسائل، الگوریتم حذف دور منفی است [۱]. اگر برای هر کمان در J^{-}، از تغییر متغیر $-y_{ij}$ به جای y_{ij} استفاده کنیم، آن‌گاه مسئله بالا به یک مسئله می‌نیمم هزینه گردشی تبدیل می‌شود. تا این‌جا نشان دادیم که معکوس یک مسئله مینیمم هزینه در شبکه جریان قابل تبدیل به یک مسئله مینیمم هزینه گردشی است. این موضوع علاوه بر اینکه

[1] Shapiro [2] minimum cost circulation problem

از دیدگاه نظری جالب است، نشان می‌دهد با نرم‌افزارهای موجود برای حل مسئله مینیمم هزینه در شبکه جریان، می‌توان مسائل معکوس مینیمم هزینه در شبکه جریان را نیز حل کرد. مثال ساده زیر این موضوع را روشن می‌سازد.

مثال ۲.۲. فرض می‌کنیم شبکه جریان مثال قبل داده شده باشد. نقطه شدنی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\left(x_{۱۲}=۲, x_{۱۳}=۳, x_{۲۴}=۳, x_{۳۲}=۱, x_{۳۴}=۵\right).$$

داریم $J^-=\{(۳,۲)\}$، $J^\circ=\{(۱,۲),(۲,۴)\}$ و $J^+=\{(۱,۳),(۳,۴)\}$. طبق (۱۱.۲) مسئله معکوس به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \theta_{۳۲}+\alpha_{۱۳}+\alpha_{۳۴}+\mu_{۱۲}+\gamma_{۱۲}+\mu_{۲۴}+\gamma_{۲۴}\\
s.t. \quad & \pi_۳-\pi_۲-\theta_{۳۲}\le -۱,\\
& \pi_۱-\pi_۲+\mu_{۱۲}-\gamma_{۱۲}=۱,\\
& \pi_۲-\pi_۴+\mu_{۲۴}-\gamma_{۲۴}=۲,\\
& \pi_۱-\pi_۳+\alpha_{۱۳}\ge ۴,\\
& \pi_۳-\pi_۴+\alpha_{۳۴}\ge ۶,\\
& \theta_{۳۲},\mu_{۱۲},\gamma_{۱۲},\mu_{۲۴},\gamma_{۲۴},\alpha_{۱۳},\alpha_{۳۴}\ge \circ.
\end{aligned}$$

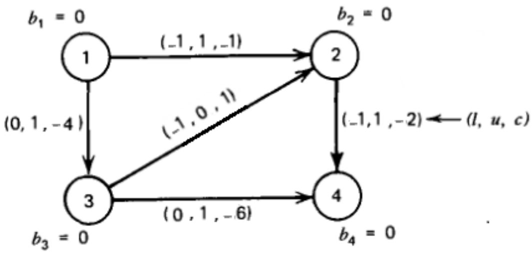
برای حل این مسئله، ابتدا دوگان آن را می‌نویسیم

$$\begin{aligned}
\max \quad & y_{۳۲}+y_{۱۲}+۲y_{۲۴}+۴y_{۱۳}+۶y_{۳۴}\\
s.t. \quad & y_{۱۲}+y_{۱۳}=\circ,\\
& y_{۳۲}-y_{۱۲}+y_{۲۴}=\circ,\\
& -y_{۳۲}-y_{۱۳}+y_{۳۴}=\circ,\\
& -y_{۲۴}-y_{۳۴}=\circ,\\
& \circ\le y_{۱۳},y_{۳۲},y_{۳۴}\le ۱,\\
& -۱\le y_{۱۲},y_{۲۴}\le ۱.
\end{aligned}$$

حال اگر از تغییر متغیر $y_{۳۲}-$ به جای $y_{۳۲}$ استفاده کنیم، مسئله بالا به‌صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\begin{aligned}
\min \quad & y_{۳۲} - y_{۱۲} - ۲y_{۲۴} - ۴y_{۱۳} - ۶y_{۳۴} \\
s.t. \quad & y_{۱۲} + y_{۱۳} = ۰, \\
& -y_{۳۲} - y_{۱۲} + y_{۲۴} = ۰, \\
& y_{۳۲} - y_{۱۳} + y_{۳۴} = ۰, \\
& -y_{۲۴} - y_{۳۴} = ۰, \\
& ۰ \le y_{۱۳}, y_{۳۴} \le ۱, \\
& -۱ \le y_{۱۲}, y_{۲۴} \le ۱, \\
& -۱ \le y_{۳۲} \le ۰.
\end{aligned}$$

ملاحظه می‌کنیم که مسئله حاصل یک مسئله مینیمم هزینه گردشی است. گراف متناظر با این مسئله معکوس به صورت زیر است



شکل ۲. گراف مربوط به مسئله شبکه جریان معکوس

۳. مسائل مخروطیِ معکوس

یک مسئله بهینه‌سازی به شکل زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
\min \quad & f(x;\theta) \\
s.t. \quad & x \in \varphi,
\end{aligned} \qquad (۱.۳)$$

که در آن θ یک (بردار) پارامتر و x یک (بردار) متغیر تصمیم است. هدف این مسئله که یک **مسئله پیشرو**[۱] نامیده می‌شود، محاسبه یک تصمیم بهینه متناظر با تخمینی از $\hat{\theta}$ است، که $\hat{\theta}$ یک پارامتر نامعلوم

[۱] forward problem

است. φ مجموعه جواب‌های شدنی این مسئله است. مسئله بهینه‌سازی معکوس متناظر با (۱.۳)، یک مسئله دو مرحله‌ای به صورت زیر است:

(i) یک تصمیم مشاهده‌شده $\hat{x}$ داده‌شده است. مجموعه $\Theta(\hat{x})$ را مجموعه مقادیر پارامتر θ که به‌ازای آن‌ها $\hat{x}$ بهینه است، تعریف می‌کنیم . (ii) اگر $\Theta(\hat{x})$ ناتهی بود، مسئله بهینه‌سازی زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \min \quad & \|\theta - \bar{\theta}\| \\ s.t. \quad & \theta \in \Theta(\hat{x}), \end{aligned} \tag{۲.۳}$$

که در آن $\bar{\theta}$ یک مقدار پارامتر اسمی (داده شده) و $\|.\|$ یک نرم مناسب است.

فرض کنید مسئله پیشرو (۱.۳) به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x;\theta) \\ s.t. \quad & g(x) \geq_{\mathscr{K}} \circ, \\ & Ax = b, \end{aligned} \tag{۳.۳}$$

که در آن $x \in R^n$ متغیر تصمیم است، $A \in R^{l\times n}$، $b \in R^l$ و همچنین $\theta \in \Theta$ یک پارامتر است. برای دو بردار x و y، نماد $x \geq_{\mathscr{K}} y$ یعنی $x - y \in \mathscr{K}$. فرض می‌کنیم، برای $\theta \in \Theta$ ثابت، تابع $f(x;\theta) : R^n \mapsto R$ محدب و مشتق‌پذیر (نسبت به x) و $\nabla_x f(x;\theta)$ تابعی آفین از θ است. برخی توابع $f(x;\theta)$ که می‌توانند این شرایط را برآورده سازند، به صورت زیر هستند:

$$f(x;\theta) = \theta^T x, \qquad \nabla_x f(x;\theta) = \theta$$
$$f(x;\theta) = \|Ax + \theta\|_۲^۲, \qquad \nabla_x f(x;\theta) = ۲(A^T Ax + A^T\theta).$$

نماد $\geq_{\mathscr{K}}$ $(>_{\mathscr{K}})$ به معنی ترتیب جزئی[۱] (اکید) در R^m است که توسط مخروط سره[۲] $\mathscr{K} \subset R^m$ ایجاد می‌شود، یعنی

$$x \geq_{\mathscr{K}} y \ \ (x >_{\mathscr{K}} y) \Longleftrightarrow x - y \in \mathscr{K} \ \ (x - y \in int \ \ \mathscr{K})$$

فرض می‌کنیم $\mathscr{K} = \mathscr{K}_۱ \times \mathscr{K}_۲ \times \ldots \times \mathscr{K}_k$ که مخروط‌های $\mathscr{K}_j$ متعلق به یکی از سه دسته زیر هستند:

(۱) مخروط خطی: $\mathscr{K}_l = \{x \in R^n : x_i \geq \circ, i = ۱, \ldots, n\}$

(۲) مخروط مرتبه دوم: $\mathscr{K}_{so} = \{x = (x_\circ; \bar{x}) \in R^{n+۱} : x_\circ \geq \sqrt{\bar{x}^T \bar{x}}\}$

(۳) مخروط نیمه معین: $\mathscr{K}_{sd} = \{x \in R^{n^۲} : mat(x) \succeq \circ\}$

---

[۱] partial order [۲] proper cone

که در آن $mat(x) \in R^{n\times n}$ و $mat(x)_{ij} = x_{n(i-1)+j}$.

فرض کنید تابع g مشتق‌پذیر است و نسبت به ترتیب جزئی $\succeq_{\mathscr{K}}$، مقعر باشد. مقعر بودن یعنی، برای هر $x_1, x_2 \in R^n$ و $\lambda \in [0,1]$ داریم

$$g(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \succeq_{\mathscr{K}} \lambda g(x_1) + (1-\lambda)g(x_2)$$

$g(x)$ را به این صورت نمایش می‌دهیم: $g(x) = [g_1(x), \dots g_k(x)]^T$. تابع g به پارامتر θ وابسته نیست. مسائل به شکل (۳.۳) را مسائل مخروطی می‌نامیم. به‌عبارت‌دیگر، مینیمم‌سازی یک تابع محدب روی اشتراک یک مجموعه آفین با یک مخروط را یک مسئله برنامه‌ریزی مخروطی می‌نامیم.

حال یک شرط صلاحیت قیدی(CQ)[1] را بیان می‌کنیم.

فرض ۱:

$$\exists\, x_0 \in R^n; \quad (Ax_0 = b, \ \ g(x_0) \succ_{\mathscr{K}} 0)$$

از اینجا به بعد فرض می‌کنیم این CQ برقرار است.

لم ۱.۳. *[۶] فرض کنید $\Theta(\hat{x})$ مجموعه همه پارامترهای θ است که به ازای آن‌ها $\hat{x}$ برای مسئله (۳.۳) بهینه است. آن‌گاه مسئله بهینه سازی معکوس متناظر، یعنی*

$$\begin{aligned} \min \quad & \|\theta - \bar{\theta}\| \\ s.t. \quad & \theta \in \Theta(\hat{x}) \end{aligned} \tag{۴.۳}$$

یک مسئله برنامه‌ریزی مخروطی است.

در ادامه یک کاربرد مهم از این مسائل را بیان می‌کنیم.

انتخاب سهام. مسئله خرید سهام یکی از مهم‌ترین مسائل مالی کشورهای پیشرفته و یا در حال توسعه است. سرمایه‌گذاری در خرید سهام توسط مردم، باعث رونق گرفتن تولید و جلوگیری از رشد نقدینگی در جامعه می‌شود. ثروت صاحبان سهام به دو عامل ریسک و بازده بستگی دارد. افزایش ثروت سهامداران، یعنی بازده مثبت سهام، به دو روش صورت می‌گیرد: ۱) دریافت سود سهام، ۲) افزایش قیمت (ارزش) سهام. از طرف دیگر، کاهش قیمت سهام در بازار به معنی بازدهی منفی (برای سهام) است. از آن جا که تعیین بازده آینده سهام امکان‌پذیر نیست صاحبان سهام هنگام خرید مجبور به قبول ریسک هستند. برای مدیریت این ریسک، معمولاً سرمایه‌گذاران ترجیح می‌دهند که به جای سرمایه‌گذاری

[1] constraint qualification

در یک قلم دارایی، صاحب مجموعه گوناگونی از سهام مختلف (پرتفوی سهام یا سبد سهام) باشند، چرا که می‌توان مجموعه‌ای از سهام را تهیه کرد که ترکیب ریسک و بازده آن‌ها از ریسک و بازده یک قلم دارایی (مثلاً سهام یک شرکت) بهتر باشد.

سرمایه‌گذاران باید از نرخ بازده و شاخص ریسک سهام یک شرکت اطلاع داشته باشند تا بتوانند نسبت به خرید اقدام کنند. ریسک بازار از احتمال متفاوت بودن نرخ واقعی بازده با نرخ مورد انتظار سرمایه‌گذار ناشی می‌شود.

یکی از شاخص‌های سرمایه‌گذاران برای انتخاب سهام، متوسط بازده است که برابر است با میانگین بازده سهام یک شرکت در سال‌های پیشین (در یک دوره زمانی). از طرفی اگر این اعداد در سال‌های مختلف تفاوت‌های زیادی داشته باشند، این نشان‌دهنده ناپایداری شرکت است و ریسک سرمایه‌گذاری را موجب می‌شود. این ناپایداری را با انحراف معیار بازده‌های سهام در سال‌های اخیر محاسبه می‌نماییم. یکی از شاخص‌های بسیار مهم در انتخاب اجزای یک سبد سهام این است که همبستگی بین بازده آن‌ها زیاد نباشد. این غیرهمسو بودن بازده‌ها، ریسک سبد سهام انتخاب شده توسط سرمایه‌گذار را کاهش می‌دهد، زیرا اگر همبستگی بین بازده‌های انتخابی زیاد باشد احتمال کاهش ارزش همه سهام سبد و در نتیجه ورشکست شدن سرمایه‌گذار وجود دارد. برای محاسبه این همبستگی از ماتریس کوواریانس استفاده می‌کنند؛ نگاه کنید به [۵]، [۷]، [۱۱]. با توجه به آنچه در بالا گفته شد، دو شاخص در انتخاب سهام بسیار اساسی هستند: نرخ بازده سهام و ماتریس کوواریانس بازده‌های سهام مختلف. این دو مورد باید به ترتیب حداکثر و حداقل گردند.

با μ بازده مورد انتظار[۱] را نمایش می‌دهیم، یعنی بازدهی که انتظار می‌رود در مدت یک‌سال عاید صاحب سهام شود. با Σ ماتریس کوواریانس[۲] را نشان می‌دهیم که معین مثبت است.

اگر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ متغیرهای تصادفی مستقل باشند، تعاریف زیر را داریم [۸]:

$$\mu_i = \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} x_{ri}$$
$$\sigma_{ii} = \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}(x_{ri}-\mu_i)^2 = \sigma_i^2 \quad i = 1, \ldots, p$$
$$\sigma_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}(x_{ri}-\mu_i)(x_{rj}-\mu_j).$$

که بردار μ بردار میانگین و ماتریس $\Sigma_{p\times p} \equiv (\sigma_{ij})$، با عناصر داده شده در بالا ماتریس کوواریانس است.

[۱] expected return [۲] covariance matrix

هر یک از سهام در یک سبد، وزن ویژه خود را از ثروت سرمایه‌گذار دارد. فرض کنیم ϕ_i وزن مربوط به سهم i باشد. بازده مورد انتظار سبد سهام برابر است با مجموع بازده‌های مورد انتظار برای تک‌تک سهام. به‌عنوان مثال، برای سبد سهام متشکل از شرکت‌های A، B و C داریم $\mu = \phi_A\mu_A+\phi_B\mu_B+\phi_C\mu_C$. واریانس بازده سبد سهام متشکل از شرکت‌های A، B و C به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma^2 = \sum_{i=A}^{C}\sum_{j=A}^{C}\phi_i\phi_j\sigma_{ij}$$

که در آن σ_{ij} کوواریانس بین سهام i و j را نشان می‌دهد. بنابراین داریم

$$\sigma^2 = \phi^T\Sigma\phi$$

لذا به‌طور خلاصه دو تابع هدف زیر را داریم

$$\max\ \mu^T\phi$$

$$\min \phi^T\Sigma\phi$$

حال به‌جای در نظر گرفتن دو تابع بالا، تابع زیر را در نظر می‌گیریم

$$\max \frac{\mu^T\phi}{\sqrt{\phi^T\Sigma\phi}}$$

بنابراین مسئله زیر را داریم

$$\max_{\{\phi:\,A\phi\le b,e^T\phi=1\}} \frac{\mu^T\phi}{\sqrt{\phi^T\Sigma\phi}} \tag{۵.۳}$$

که در آن $A\phi \le b$ محدودیت‌های جانبی مانند محدودیت نامنفی، قیود مربوط به ارجحیت‌های سرمایه‌گذار و غیره را اعمال می‌کند و e برداری است که همه مولفه‌های آن یک هستند. جواب بهینه مسئله (۵.۳) را با ϕ_s نشان می‌دهیم و سهام بهینه شارپ[۱] می‌نامیم. مقدار بهینه مسئله بالا که آن را با $s(\mu)$ نشان می‌دهیم، نسبت شارپ[۲] نامیده می‌شود. سهام بهینه ψ^* به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\psi^* = W(\beta e_f + (1-\beta)\mu^T\phi_s)$$

[۱] sharpe optimal portfolio [۲] sharpe ratio

که در آن e_f متناظر با امکان سرمایه‌گذاری بدون ریسک و W ثروت سرمایه‌گذار هستند. اسکالر $\beta \in [۰, ۱]$ با توجه به تابع مطلوبیت سرمایه‌گذار مشخص می‌شود. معمولاً در بازارهای سهام ماتریس کوواریانس Σ به طور نسبی پایدار است [۹] ، درحالی‌که بردار بازده مورد انتظار (μ) چنین نیست. $\hat{\mu}$ را تخمین جاری از μ و $\hat{\phi}$ را وزن سهم بهینه شارپ متناظر با آن در نظر بگیرید. بنابراین $\psi^* = W(\beta e_f + (۱ - \beta)\hat{\mu}^T \hat{\phi})$. حال فرض کنید اطلاعات جدیدی، برای مثال مشاهده جدیدی از بازده‌های روزانه، در دسترس است و تخمین جدید μ، $\bar{\mu}(\neq \hat{\mu})$ است. اکنون $\bar{\psi}$ جدید به صورت $\bar{\psi} = W(\beta e_f + (۱ - \beta)\bar{\mu}^T \bar{\phi})$ است که $\bar{\phi}$ بهینه شارپ برای $\bar{\mu}$ است. حال سرمایه‌گذار باید تصمیم بگیرد که آیا می‌خواهد ترکیب سهام خود را به منظور رسیدن به $\bar{\psi}$ تغییر دهد یا خیر؟ در این میان هزینه معامله یعنی هزینه خرید یا فروش سهام نیز مد نظر قرار می‌گیرد. این هزینه‌ها بازده خالص را کاهش می‌دهند، بنابراین رسیدن به مقدار جدید $\bar{\psi}$ می‌تواند منجر به زیان شود. به‌عبارت‌دیگر، $\bar{\psi}$ جدید، بازده تعدیل شده[۱] با ریسک بالاتری می‌خواهد. بنابراین برای ماکزیمم کردن بازده کل، سرمایه‌گذار باید هزینه معامله را با بازده مورد انتظار بالاتر تنظیم کند.

فرض کنید $C_\alpha = \{\mu \in R^n : (\mu - \bar{\mu})^T \Sigma^{-۱}(\mu - \bar{\mu}) \leq c_\alpha^۲\}$ یک بازه $\alpha-$ اطمینان برای μ را نشان دهد. دقت کنید در تعریف C_α، $(\mu - \bar{\mu})^T \Sigma^{-۱}(\mu - \bar{\mu})$ همان $\|\mu - \bar{\mu}\|^۲$ با نرم ماتریسی $\|x\|_{\Sigma^{-۱}}$ است. یعنی $C_\alpha = \{\mu : \|\mu - \bar{\mu}\|_{\Sigma^{-۱}} \leq c_\alpha\}$. معمولاً همه $\mu \in C_\alpha$ها، قابل تشخیص یا محاسبه نیستند، لذا یک استراتژی بر پایه بهینه‌سازی معکوس که توازن بین هزینه‌ها و بازده را کنترل می‌کند، به صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
&\min \quad \sqrt{(\mu - \bar{\mu})^T \Sigma^{-۱}(\mu - \bar{\mu})} \\
&s.t. \quad \mu \in \Theta(\hat{\phi}) = \{s(\mu) \geq ۰ \text{ و } \hat{\phi} \text{ جواب بهینه برای (۵.۳) است}\}
\end{aligned} \tag{۶.۳}
$$

با این شرط که اگر مقدار بهینه (۶.۳) کوچکتر یا مساوی c_α بود، سبد سهام را تغییر نباید داد. تنها در صورتی سبد سهام را تغییر بده که c_α کوچکتر از مقدار بهینه (۶.۳) باشد (مرجع [۶] را برای جزئیات بیشتر ببینید).

گام اول برای حل مسئله (۶.۳)، تبدیل مسئله (۵.۳) به یک مسئله بهینه‌سازی به صورت (۳.۳) است.

چون Σ معین مثبت است، به‌صورت $\Sigma = L^T L$ تجزیه می‌شود.

---
[۱] risk-adjusted

قضیه ۲.۳. [۶] *فرض کنید نرخ شارپ $s(\mu) \geq \circ$. آن‌گاه مسئله (۵.۳) معادل است با*

$$\begin{aligned} \max \quad & \mu^T x \\ s.t. \quad & e^T x - \xi = \circ, \\ & -Ax + b\xi \geq \circ, \\ & \xi \geq \circ, \\ & [\text{۱}; Lx] \geq_{\mathscr{K}} \circ, \end{aligned} \tag{۷.۳}$$

که در آن ξ یک متغیر همگن‌ساز[۱]، $\Sigma = L^T L$ و $\mathscr{K} = \mathscr{K}_{so} \subset R^{n+\text{۱}}$ است.

برای این که بتوان از مسئله (۶.۳) استفاده نمود باید بتوان آن را به صورت یک مسئله بهینه‌سازی نوشت. قضیه زیر به این موضوع می‌پردازد .

قضیه ۳.۳. [۶] *فرض کنید $\phi_\circ$ وجود دارد به‌طوری‌که $A\phi_\circ < b$ و $e^T\phi_\circ = \text{۱}$. $\bar{\mu}$ را تخمین جدید μ و $\hat{\phi}$ را یک جواب شدنی دلخواه برای (۵.۳) در نظر بگیرید. قرار دهید $(\hat{x}, \hat{\xi}) = \dfrac{(\hat{\phi}, \text{۱})}{\sqrt{\hat{\phi}^T \Sigma \hat{\phi}}}$. آن‌گاه مسئله (۶.۳) با مسئله زیر معادل است*

$$\begin{aligned} \min \quad & \left((A_I^T - eb_I^T)u_I + v_\circ \Sigma\hat{x} - \bar{\mu}\right)^T \Sigma^{-\text{۱}} \left((A_I^T - eb_I^T)u_I + v_\circ \Sigma\hat{x} - \bar{\mu}\right) \\ s.t. \quad & u_I \geq \circ, \\ & v_\circ \geq \circ, \end{aligned} \tag{۸.۳}$$

که در آن $I = \{i \;:\; a_i^T \hat{x} = b_i \hat{\xi}\}$، $u_I \in R^{|I|}$ و A_I و b_I به ترتیب زیر ماتریس A و زیربردار b متناظر با سطرهای متعلق به I هستند.

مسئله (۷.۳) یک مسئله بهینه‌سازی مخروطی است و به کمک تکنیک‌های بهینه‌سازی مخروطی قابل حل است (به عنوان مثال، مرجع [۱۰] را ببینید). محدودیت‌های مسئله (۶.۳) حل این مسئله را مشکل می‌سازد، ولی به‌جای آن، مسئله (۸.۳) یک مسئله بهینه‌سازی درجه دوم است که با تکنیک‌های متعددی قابل حل است.

[۱] homogenizing variable

مراجع

[1] R. K. Ahuja, T. L. Magnanti, J. B. Orlin, *Network flows*, Prentice-Hall, New York,1993.

[2] M. S. Bazaraa, J. J. Jarvis, *Linear programming and network flows*, Wiley, New York, 1977.

[3] M. S. Bazaraa, H. D. Sherali, C. M. Shetty, *Nonlinear programming: theory and algorithms*, Wiley, New York, 2006.

[4] A. Ben-Tal, A. Nemirovski, *Lectures on modern convex optimization: analysis, algorithms, and engineering applications*, MPS-SIAM Series in Optimization, SIAM, Philadelphia, 2001.

[5] Z. Bodie, R. C. Merton, D. L. Cleeton, *Financial economics*, Prentice-Hall, New York, 2009.

[6] G. Iyengar, W. Kang , Inverse conic programming with applications, *Oper. Res. Lett.* **33** (2005) 319 – 330.

[7] R. A. Maller, R. B. Durand, H. Jafarpour, Optimal portfolio choice using the maximum sharpe ratio, *J. Risk* **12** (2010) 49–73.

[8] K. V. Mardia, J. T. Kent, J. M. Bibby, *Multivariate analysis*, Academic press, New York, 1995.

[9] R. O. Michaud, *Efficient asset management: a practical guide to stock portfolio management and asset allocation*, Oxford University Press, Oxford, 1998.

[10] Y. Nesterov, A. Nemirovskii, *Interior-point polynomial algorithms in convex programming*, SIAM, Philadelphia, 1993.

[11] J. L. Prigent, *Portfolio optimization and performance analysis*, Chapman-Hall/CRC, New York, 1958.

[12] J. Zhang, Z. Liu, Calculating some inverse linear programming problem, *J. Comput. Appl. Math.* **72** (1996) 261-273.

مجید سلیمانی دامنه: دانشگاه تهران، پردیس علوم، دانشکده ریاضی آمار و علوم کامپیوتر
رایانامه: `soleimani@khayam.ut.ac.ir`

شیدا عموکاظمی: دانشگاه تهران، پردیس علوم، دانشکده ریاضی آمار و علوم کامپیوتر
رایانامه: `sh.kazemi@alumni.ut.ac.ir`