فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
شماره ۵۷ (پاییز و زمستان ۱۳۹۴) صص. ۹۷ تا ۱۰۶

مجموعه‌های اندازه‌پذیر به مثابهٔ نقاط حدی

جی. تاناکا و پی. اف. مک لولین

برگردان: رسول کاظمی

۱. مقدمه

دانشجویانِ درس آنالیز حقیقی در دورهٔ کارشناسی ارشد، با قضیهٔ توسیع کاراتئودوری آشنا می‌شوند. این قضیه نشان می‌دهد که چگونه می‌توان یک جبر را به یک σ ـ جبر و یک اندازهٔ متناهیْ‌جمعی روی آن جبر را به اندازه‌ای شماراجمعی روی آن σ ـ جبر، گسترش داد. رویکرد متداول در بیان این قضیه، عبارت است از تعریف اندازهٔ بیرونی وابسته به اندازهٔ متناهیْ‌جمعی اولیه و سپس استفاده از جمعی بودنِ اندازهٔ بیرونی برای تعریف مجموعه‌های اندازه‌پذیر. در این مقاله، رویکرد دیگری به قضیهٔ توسیع کاراتئودوری ارائه می‌کنیم که در آن، مجموعه‌های اندازه‌پذیر به‌عنوان نقاط حدی به‌دست می‌آید. نشان می‌دهیم که σ ـ جبر مجموعه‌های اندازه‌پذیر به‌طور طبیعی به‌عنوان مجموعهٔ تمام نقاط حدی دنباله‌های کوشی در جبر اولیه، به‌وجود می‌آید. این رهیافت را به دانشجویانی پیشنهاد می‌کنیم که ممکن است تعریف مرسوم اندازه‌پذیری را غیرشهودی بدانند.

با مروری مختصر بر قضیهٔ توسیع کاراتئودوری آن‌چنان‌که در [۶]، که نمونه بارز کتاب‌های آنالیز حقیقی است، ارائه می‌شود شروع می‌کنیم. گردایه‌ای ناتهی از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ X یک جبر نامیده می‌شود اگر تحت عمل‌های اجتماع و مکمل‌گیری بسته باشد و یک σ ـ جبر نام دارد اگر نسبت به عمل‌های اجتماع شمارا و مکمل‌گیری، بسته باشد. گیریم Ω یک جبر و $\mathbb{R}^+$ مجموعهٔ اعداد حقیقی نامنفی همراه با $+\infty$ باشد. تابع $\mu : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+$ یک اندازهٔ متناهیْ‌جمعی نامیده

A realization of measurable sets as limit points, J. Tanaka, P. F. McLoughlin, *Amer. Math. Monthly* **117** (2010) 261-266.

می‌شود اگر $\mu(\emptyset) = ۰$ و برای هر تعداد متناهی $E_۱, E_۲. \dots E_n$ از مجموعه‌های دوبه‌دو مجزا داشته باشیم $\mu(\bigcup_{i=۱}^{n} E_i) = \sum_{i=۱}^{n} \mu(E_i)$. اگر Ω یک σ ـ جبر باشد، تابع $\mu : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+$ یک اندازهٔ شماراجمعی (یا به‌طور ساده، یک اندازه) نامیده می‌شود اگر $\mu(\emptyset) = 0$ و برای هر دنبالهٔ $\{E_i\}$ از مجموعه‌های دوبه‌دو مجزا داشته باشیم $\mu(\bigcup_{i=۱}^{\infty} E_i) = \sum_{i=۱}^{\infty} \mu(E_i)$. جفت (Ω, μ) که از یک σ ـ جبر Ω و یک اندازهٔ μ تشکیل شده است، یک فضای اندازه نامیده می‌شود.

گیریم μ یک اندازهٔ متناهیْ‌جمعی روی جبر Ω باشد. به‌علاوه فرض می‌کنیم که اگر $\{E_i\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های دوبه‌دو مجزا در Ω باشد و $\bigcup_{i=۱}^{\infty} E_i \in \Omega$، آنگاه $\mu(\bigcup_{i=۱}^{\infty} E_i) = \sum_{i=۱}^{\infty} \mu(E_i)$. (روشن است که اگر این شرط برقرار نباشد، هیچ توسیعی برای μ به یک اندازهٔ شماراجمعی روی یک σ ـ جبر موجود نیست.) توسیع کاراتئودوری از دو تعریف زیر تشکیل می‌شود:

تعریف ۱.۱. گیریم $\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ با دستور

$$\mu^*(E) = \inf\{\sum_i \mu(A_i) \,|\, E \subseteq \bigcup_i A_i,\ A_i \in \Omega,\ i = ۱, ۲, \dots\}$$

تعریف شده باشد. آن‌وقت μ^* اندازهٔ بیرونی القایی توسط μ نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۱. زیرمجموعهٔ E از X نسبت به μ^* اندازه‌پذیر خوانده می‌شود اگر برای هر $A \in \mathcal{P}(X)$ داشته باشیم $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$.

در حالت کلی، μ^* یک اندازه روی $\mathcal{P}(X)$ نیست. قضیهٔ توسیع کاراتئودوری بیان می‌کند که خانوادهٔ M مرکب از مجموعه‌های اندازه‌پذیر، یک σ ـ جبر است و μ^* نیز یک اندازهٔ شماراجمعی روی M است.

قضیهٔ توسیع کاراتئودوری ابزاری توانمند هم در نظریهٔ اندازه و هم در آمار است (برای مثال، [۴] و [۱] را ببینید.) ساختار جبر بولیِ مربوط به توسیع کاراتئودوری در چندین مقاله بحث شده است ([۵] و [۲]). قضیهٔ توسیع کاراتئودوری روی مجموعه‌های فازی در [۷] مورد بحث قرارگرفته است. در این مقاله، یک ساختار متریکی روی توسیع کاراتئودوری در نظر می‌گیریم که نقاط حدی مورد توجه ویژه است. در مقاله‌ای دیگر [۸]، در مورد چگونگی ساخت یک مشبکه روی فضای کامل شدهٔ یک جبر و یک یکریختی از آن به توسیع کاراتئودوری‌اش، بحث کرده‌ایم. توسیع کاراتئودوری، ساختارهای غنی مختلفی دارد که می‌توانند موضوع خوبی برای پژوهش‌های آینده باشند.

۲. پیشنیازها و نتایج اصلی

رهیافت توپولوژیکی به توسیع کاراتئودوری که در این مقاله بیان می‌کنیم، قابل به‌کارگیری برای هر اندازهٔ σ ـ متناهی است. اندازهٔ μ را σ ـ متناهی می‌نامیم هرگاه دنبالهٔ $\{X_n\}$ از مجموعه‌های اندازه‌پذیر موجود باشد به‌گونه‌ای که $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ و $\mu(X_n) < \infty$. اندازهٔ μ متناهی نامیده می‌شود اگر $\mu(X) < \infty$. کافی است قضیه را برای اندازه‌های متناهی اثبات کنیم، زیرا حالت σ ـ متناهی را می‌توان از حالت متناهی همانند اثبات مرسوم قضیهٔ توسیع کاراتئودوری به‌دست آورد.

گیریم μ یک اندازهٔ متناهی روی جبر Ω باشد و فرض می‌کنیم که اگر $\{E_i\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های دوبه‌دو مجزا در Ω باشد و $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \Omega$، آن‌گاه $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$. گیریم μ^* اندازهٔ بیرونی القایی از μ باشد. برخی از ویژگی‌های مشهور اندازهٔ بیرونی را که در کتاب‌های آنالیز حقیقی (مثلاً [۶]) می‌توان یافت در اینجا گردآوری کرده‌ایم:

- μ^* یکنوا است: برای هر $A, B \in \mathcal{P}(X)$ اگر $A \subseteq B$، آن‌گاه $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$؛
- μ^* شمارا زیرجمعی است: برای هر دنبالهٔ $\{A_i\}$ در $\mathcal{P}(X)$، $\mu^*(\bigcup A_i) \leqslant \sum \mu^*(A_i)$؛
- $\mu^*|_{\Omega} = \mu$ ([۶] صفحهٔ ۲۹۲ را ببینید)؛
- فرض کنید $d : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ با دستور $d(A, B) = \mu^*(A \triangle B)$ تعریف شده است که $A \triangle B$ تفاضل متقارن A و B را نمایش می‌دهد. در این صورت d یک شبه‌متریک است، یعنی d در تعریف یک متر صدق می‌کند به جز این که ممکن است مجموعه‌های $A, B \in \mathcal{P}(X)$ موجود باشند به گونه‌ای که $A \neq B$ و $d(A, B) = 0$. اگر تعریف کنیم $A \sim B$ هرگاه $d(A, B) = 0$، آن‌وقت $\sim$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی $\mathcal{P}(X)$ است و d یک متریک روی $\mathcal{P}(X)/\sim$ القا می‌کند.

دنبالهٔ $\{B_n\}$ در Ω را μ ـ کوشی نامیم اگر $d(B_n, B_m) \to 0$ وقتی $m, n \to \infty$. حال $\tilde{\mathbf{S}}$ را گردایهٔ تمام نقاط حدی دنباله‌های μ ـ کوشی تعریف می‌کنیم. به عبارت دیگر، $\tilde{\mathbf{S}}$ خانوادهٔ مجموعه‌های $S \in \mathcal{P}(X)$ است با این ویژگی که دنبالهٔ μ ـ کوشی $\{B_n\}$ وجود دارد که $\lim \mu^*(B_n \triangle S) = 0$. این خانوادهٔ $\tilde{\mathbf{S}}$ جایگزین گردایهٔ مجموعه‌های اندازه‌پذیر در تعریف ۲.۱ مربوط به قضیهٔ توسیع کاراتئودوری خواهد شد. برای $S \in \tilde{\mathbf{S}}$، $\tilde{\mu}(S)$ را برابر با $\lim \mu(B_n)$ تعریف می‌کنیم که $\{B_n\}$ یک دنبالهٔ μ ـ کوشیِ همگرا به S است.

در اینجا به این نکتهٔ کلیدی باید توجه کرد که دنباله‌ای که جملاتش از اجتماع جملات نظیر به نظیر دو دنبالهٔ کوشی حاصل شود، خود یک دنبالهٔ کوشی است و دنباله‌ای که جملاتش مکمل جمله‌های یک دنبالهٔ کوشی است، یک دنبالهٔ کوشی است. از این موضوع نتیجه می‌شود که $\tilde{\mathbf{S}}$ یک جبر است. به‌علاوه اگر $\{S_i\}$ یک دنباله در $\tilde{\mathbf{S}}$ باشد با ساختن یک دنبالهٔ μ ـ کوشی که به $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ همگراست، نشان می‌دهیم که $\tilde{\mathbf{S}}$ یک σ ـ جبر است. همچنین نشان خواهیم داد که $(\tilde{\mathbf{S}}, \tilde{\mu})$ همان فضای اندازه‌ای است که در قضیهٔ توسیع کاراتئودوری به‌دست می‌آید. به این ترتیب، مجموعه‌های اندازه‌پذیر در قضیهٔ توسیع کاراتئودوری را به‌چشم نقاط حدی می‌نگریم.

۳. اثبات قضایای اصلی

لم زیر چندین بار در ادامهٔ این مقاله استفاده خواهد شد.

لم ۱.۳. *برای هر* $A, B, C, D \in \mathcal{P}(X)$، $d(A \cup B, C \cup D) \leqslant d(A, C) + d(B, D)$.

اثبات. چون $(A \cup B) \triangle (C \cup D) \subseteq (A \triangle C) \cup (B \triangle D)$، حکم از یکنوایی و زیرجمعی بودنِ μ^* نتیجه می‌شود. $\square$

دو لم زیر برای اثبات خوش‌تعریفی $\tilde{\mu}$ لازم‌اند.

لم ۲.۳. *اگر* $\{B_n\}$ *یک دنبالهٔ* μ *ـ کوشی باشد، آن‌گاه* $\{\mu(B_n)\}$ *یک دنبالهٔ کوشی از اعداد حقیقی است.*

اثبات. با استفاده از نامساوی مثلثی برای d، داریم

$$|\mu(B_m) - \mu(B_n)| = |d(B_m, \emptyset) - d(B_n, \emptyset)| \leqslant d(B_m, B_n).$$

چون $d(B_m, B_n) \longrightarrow 0$، پس $\{\mu(B_n)\}$ یک دنبالهٔ کوشی در $\mathbb{R}$ است. $\square$

لم ۳.۳. *اگر* $\{A_n\}$ *و* $\{B_n\}$ *دنباله‌های* μ *ـ کوشی باشند که به* $S \in \tilde{\mathbf{S}}$ *همگرایند، آن‌گاه* $\lim \mu(A_n)$ *و* $\lim \mu(B_n)$ *موجودند و* $\lim \mu(A_n) = \lim \mu(B_n)$.

اثبات. وجود حدود از لم ۲.۳ نتیجه می‌شود. برای باقیماندهٔ اثبات از این حقیقت استفاده می‌کنیم که

$$|\mu(A_n) - \mu(B_n)| \leqslant d(A_n, B_n) \leqslant d(A_n, S) + d(S, B_n) \longrightarrow 0.$$

همان‌طور که در بخش ۲ بیان شد، یک نکتهٔ مهم این است که دنباله‌های μ ـ کوشی نسبت به اجتماع و مکمل‌گیری جملاتشان بسته هستند. به‌طور دقیق‌تر:

لم ۴.۳. *گیریم $\{A_n\}$، $\{B_n\}$ و $\{C_n\}$ دنباله‌های μ ـ کوشی باشند. آن‌وقت $\{A_n \cup B_n\}$ و $\{(C_n)^c\}$ نیز دنباله‌های μ ـ کوشی هستند.*

اثبات. ادعای نخست از لم ۱.۳ آشکار است. دومی از این حقیقت که $(C_n)^c \triangle (C_m)^c = C_n \triangle C_m$ به‌دست می‌آید. $\square$

حال با استفاده از لم قبل، نشان می‌دهیم که گردایهٔ $\tilde{\mathbf{S}}$ از نقاط حدی دنباله‌های μ ـ کوشی یک جبر است.

لم ۵.۳. *$\tilde{\mathbf{S}}$ یک جبر است.*

اثبات. گیریم $S, H \in \tilde{\mathbf{S}}$. دنباله‌های μ ـ کوشی $\{A_n\}$ و $\{B_n\}$ به‌ترتیب متناظر با S و H موجودند. بنابر لم ۱.۳،

$$d(S \cup H, A_n \cup B_n) \leqslant d(S, A_n) + d(H, B_n).$$

طبق لم ۴.۳، $\{A_n \cup B_n\}$ یک دنبالهٔ μ ـ کشی است، بنابراین با حدگیری از دو طرف، نتیجه می‌گیریم $S \cup H \in \tilde{\mathbf{S}}$. توجه کنید که نشان داده‌ایم $\{A_n \cup B_n\}$ یک دنبالهٔ μ ـ کوشی متناظر با $S \cup H$ است. به‌طور مشابه $S^c \in \tilde{\mathbf{S}}$ و بنابراین $\tilde{\mathbf{S}}$ یک جبر است. $\square$

گیریم $S \in \tilde{\mathbf{S}}$. همانند بخش ۲، $\tilde{\mu}(S)$ را برابر با $\lim \mu(B_n)$ تعریف می‌کنیم که $\{B_n\}$ یک دنبالهٔ μ ـ کوشی است که به S همگراست. با لم زیرخود را برای تعریف یک اندازه روی $\tilde{\mathbf{S}}$ آماده می‌کنیم.

لم ۶.۳. *$\tilde{\mu}$ تابعی خوش‌تعریف است و $\tilde{\mu} = \mu^*|_{\tilde{\mathbf{S}}}$.*

اثبات. گیریم $S \in \tilde{\mathbf{S}}$. لم ۳.۳ نشان می‌دهد که $\tilde{\mu}(S)$ خوش‌تعریف است. اگر $\{B_n\}$ یک دنبالهٔ μ ـ کوشی همگرا به S باشد، آن‌گاه

$$|\mu^*(S) - \mu(B_n)| = |d(S, \emptyset) - d(B_n, \emptyset)| \leqslant d(S, B_n) \longrightarrow ۰.$$

بنابراین $\tilde{\mu}(S) = \lim \mu(B_n) = \mu^*(S)$ و از این‌رو $\tilde{\mu} = \mu^*|_{\tilde{\mathbf{S}}}$. $\square$

لم‌های ۸.۳ و ۹.۳ نشان خواهند داد که $(\tilde{\mathbf{S}}, \tilde{\mu})$ یک فضای اندازه است. قبل از بیان این لم‌ها، نشان می‌دهیم که $\tilde{\mu}$ یک اندازهٔ متناهیْ‌جمعی است. به‌طور دقیق‌تر:

لم ۷.۳. *اگر* $S, H \in \tilde{\mathbf{S}}$ *جدا از هم باشند، آن‌گاه* $\tilde{\mu}(S \cup H) = \tilde{\mu}(S) + \tilde{\mu}(H)$.

اثبات. گیریم $S, H \in \tilde{\mathbf{S}}$ جدا از هم باشند. دنباله‌های μ ـ کوشی $\{A_n\}$ و $\{B_n\}$ به‌ترتیب متناظر با S و H وجود دارند. چنان‌که در اثبات لم ۵.۳ دیدیم، $\{A_n \cup B_n\}$ یک دنبالهٔ μ ـ کوشی متناظر با $S \cup H$ است. چون μ متناهیْ‌جمعی است، $\mu(A_n \cup B_n) = \mu(A_n) + \mu(B_n) - \mu(A_n \cap B_n)$. حال چون S و H جدا از هم هستند، $A_n \cap B_n \subseteq (A_n \triangle S) \cup (B_n \triangle H)$ و لذا

$$\begin{aligned} \mu(A_n, B_n) &\leqslant \mu^*[(A_n \triangle S) \cup (B_n \triangle H)] \\ &\leqslant \mu^*(A_n \triangle S) + \mu^*(B_n \triangle H) \\ &= d(A_n, S) + d(B_n, H) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

این، نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(S \cup H) &= \lim \mu(A_n \cup B_n) \\ &= \lim \mu(A_n) + \lim \mu(B_n) - \lim \mu(A_n \cap B_n) \\ &= \tilde{\mu}(S) + \tilde{\mu}(H). \end{aligned}$$

□

لم ۸.۳. $\tilde{\mathbf{S}}$ *یک* σ *ـ جبر است.*

اثبات. گیریم $\{S_i\}$ یک دنباله از مجموعه‌های دوبه‌دو مجزا در $\tilde{\mathbf{S}}$ باشد. با استفاده از لم‌های ۶.۳ و ۷.۳، به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n داریم

$$\sum_{i=1}^{n} \mu^*(S_i) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\mu}(S_i) = \tilde{\mu}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\Big) = \mu^*\Big(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\Big) \leqslant \mu(X) < \infty,$$

و بنابراین سری $\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(S_i)$ همگراست. پس بنابر زیرجمعی بودنِ μ^*،

$$d\Big(\bigcup_{i=1}^{n} S_i, \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\Big) = \mu^*\Big(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} S_i\Big) \leqslant \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu^*(S_i) \longrightarrow 0 \qquad (1.3)$$

وقتی $n \longrightarrow 0$. $\square$

اکنون یک دنبالهٔ μ ـ کوشی می‌سازیم که نسبت به شبه‌متریک d به $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ همگرا باشد. به‌ازای هر عدد صحیح مثبت i گیریم $\{B_n^i\}$ یک دنبالهٔ μ ـ کوشی همگرا به S_i باشد. پس با استفاده از اثبات لم ۵.۳، دنباله‌های همگرای زیر را داریم:

$$\begin{array}{ccccc} B_1^1 & B_2^1 & \cdots & \longrightarrow & S_1 \\ B_1^1 \cup B_1^2 & B_2^1 \cup B_2^2 & \cdots & \longrightarrow & S_1 \cup S_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \cup_{i=1}^m B_1^i & \cup_{i=1}^m B_2^i & \cdots & \longrightarrow & \cup_{i=1}^m S_i \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{array}$$

برای هر عدد صحیح مثبت L، رابطهٔ (۱.۳) نتیجه می‌دهد عدد صحیح N_L چنان موجود است که

$$d\Big(\bigcup_{i=1}^{N_L} S_i, \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\Big) < \frac{1}{2L}.$$

علاوه بر این، برای هر N_L، عدد صحیح K_L یافت می‌شود به‌طوری که

$$d\Big(\bigcup_{i=1}^{N_L} B_{K_L}^i, \bigcup_{i=1}^{N_L} S_i\Big) < \frac{1}{2L}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} d\Big(\bigcup_{i=1}^{N_L} B_{K_L}^i, \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\Big) &\leqslant d\Big(\bigcup_{i=1}^{N_L} B_{K_L}^i, \bigcup_{i=1}^{N_L} S_i\Big) + d\Big(\bigcup_{i=1}^{N_L} S_i, \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\Big) \\ &\leqslant \frac{1}{2L} + \frac{1}{2L} = \frac{1}{L}. \end{aligned}$$

قرار می‌دهیم $Y_L = \bigcup_{i=1}^{N_L} B_{K_L}^i$. در این صورت $\{Y_L\}$ یک دنبالهٔ μ ـ کوشی است که به $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ همگراست. پس $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \in \tilde{\mathbf{S}}$ و لذا $\tilde{\mathbf{S}}$ یک σ ـ جبر است.

لم ۹.۳. *$\tilde{\mu}$ یک اندازهٔ شمارا جمعی روی $\tilde{\mathbf{S}}$ است.*

اثبات. با همان نمادهای اثبات لم ۸.۳، برای هر $\varepsilon > ۰$ عدد طبیعی M موجود است که به‌ازای هر $n \geqslant M$

$$\tilde{\mu}\Big(\bigcup_{i=n+۱}^{\infty} S_i\Big) = \mu^*\Big(\bigcup_{i=n+۱}^{\infty} S_i\Big) \leqslant \sum_{i=n+۱}^{\infty} \mu^*(S_i) < \varepsilon.$$

علاوه بر این، با استفاده از لم‌های ۷.۳ و ۸.۳ برای هر $n \in \mathbb{N}$

$$\tilde{\mu}\Big(\bigcup_{i=۱}^{\infty} S_i\Big) = \tilde{\mu}\Big(\bigcup_{i=۱}^{n} S_i\Big) + \tilde{\mu}\Big(\bigcup_{i=n+۱}^{\infty} S_i\Big) = \sum_{i=۱}^{n} \tilde{\mu}(S_i) + \tilde{\mu}\Big(\bigcup_{i=n+۱}^{\infty} S_i\Big).$$

پس $\tilde{\mu}(\bigcup_{i=۱}^{\infty} S_i) = \sum_{i=۱}^{\infty} \tilde{\mu}(S_i)$ که نشان می‌دهد $\tilde{\mu}$ یک اندازهٔ شماراجمعی روی $\widetilde{S}$ است. □

جمع‌بندی نتایج در قضیهٔ اصلی ۱۰.۳ بیان می‌کند که $\tilde{\mathbf{S}}$ یک توسیع از جبر Ω به یک σ ـ جبر است و $\tilde{\mu}$ یک توسیع از اندازهٔ متناهی‌ْجمعی μ روی Ω به یک اندازه روی $\tilde{\mathbf{S}}$ است. علاوه‌براین، طبق قضیهٔ اصلی ۱۱.۳، این توسیع همان توسیع مرسوم کاراتئودوری است.

قضیه ۱۰.۳. $(\widetilde{S}, \tilde{\mu})$ *یک فضای اندازه است.*

اثبات. حکم از لم‌های ۸.۳ و ۹.۳ نتیجه می‌شود. □

قضیه ۱۱.۳. *برای هر* $E \in \mathcal{P}(X)$ *داریم* $E \in \tilde{\mathbf{S}}$ *اگر و فقط اگر* E *مطابق با تعریفِ مرسومِ اندازه‌پذیری در تعریف ۲.۱، اندازه‌پذیر باشد.*

اثبات. $(\Longrightarrow)$ تمرینی معمولی در کتاب‌های درسی آنالیز حقیقی است.
$(\Longleftarrow)$ فرض کنیم $E \in \tilde{\mathbf{S}}$ و $A \in \mathcal{P}(X)$ دلخواه باشد. با استفاده از زیرجمعی بودنِ μ^*، داریم

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).$$

بنابراین برای اثبات اینکه E اندازه‌پذیر است لازم است که عکس نامساوی اخیر را بررسی کنیم. گیریم $\{B_n\}$ یک دنبالهٔ μ ـ کشی باشد به‌قسمی که $\lim \mu^*(E \triangle B_n) = ۰$. بنابراین داریم $\lim \mu^*(E \cap B_n^c) = ۰$ و $\lim \mu^*(E^c \cap B_n) = ۰$. به‌علاوه، برای هر $n \in \mathbb{N}$ چون $\{B_n\}$ اندازه‌پذیر است،

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B_n) + \mu^*(A \cap B_n^c); \tag{۲.۳}$$

$$\mu^*(A\cap E)=\mu^*(A\cap E\cap B_n)+\mu^*(A\cap E\cap B_n^c); \tag{۳.۳}$$

$$\mu^*(A\cap E^c)=\mu^*(A\cap E^c\cap B_n)+\mu^*(A\cap E^c\cap B_n^c). \tag{۴.۳}$$

با جمع کردن معادلات (۳.۳) و (۴.۳) و به‌کارگیری یکنوایی و معادلهٔ (۲.۳)، داریم

$$\begin{aligned}\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E^c) &= \mu^*(A\cap E\cap B_n)+\mu^*(A\cap E\cap B_n^c)\\ &+ \mu^*(A\cap E^c\cap B_n)+\mu^*(A\cap E^c\cap B_n^c)\\ &\leqslant \mu^*(A\cap B_n)+\mu^*(E\cap B_n^c)\\ &+ \mu^*(E^c\cap B_n)+\mu^*(A\cap B_n^c)\\ &= \mu^*(A)+\mu^*(E\cap B_n^c)+\mu^*(E^c\cap B_n).\end{aligned}$$

سرانجام با حدگیری وقتی $n\longrightarrow\infty$ نتیجه می‌گیریم

$$\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E^c)\leqslant\mu^*(A).$$

بنابراین $\mu^*(A)=\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E^c)$ و E اندازه‌پذیر است. □

۴. جمع‌بندی

قضیه‌های ۱۰.۳ و ۱۱.۳ نشان می‌دهند که وقتی μ یک اندازهٔ متناهی است، فضای اندازهٔ $(\tilde{\mathrm{S}},\tilde{\mu})$ با توسیع کاراتئودوری مطابقت دارد. علاوه بر این، قضیهٔ ۱۱.۳ نشان می‌دهد که مجموعه‌های اندازه‌پذیر دقیقاً نقاط حدی دنباله‌های μ ـ کوشی‌اند و اندازهٔ توسیع‌یافته در اثبات مرسوم قضیهٔ کاراتئودوری، همان اندازهٔ حدی روی دنباله‌های μ ـ کوشی است. حالت σ ـ متناهی از حالت متناهی نتیجه می‌شود.

تشکر و قدردانی

نویسندهٔ اول علاقه‌مند است از پدر بزرگش ویچی تاناکا[۱] به خاطر الهام‌بخش بودنش وکمک‌های مالی و از آندریو آمِس [۲] برای تشویق او در پیش بردن تحصیلاتش تشکر نماید. با حمایت‌های مهربانانه این دو، نویسندهٔ اول توانست به پیشرفت‌هائی ورای آنچه که تصورش را می‌کرد نائل شود. ضمناً هر دو نویسنده علاقه‌مندند از پروفسور میشل لاپیدوس [۳] و پروفسور جیمز استافنی [۴] و داوران

[۱]Waichi Tanaka [۲]Andrew Aames [۳]Michel L. Lapidus [۴]James D. Stafney

ناشناس برای توصیه‌های تخصصی آنها در مورد این مقاله و از آنه هانسن [۱] و الیجا دپالما [۲] برای کمک‌های ویرایشی تشکر نمایند.

مراجع

[1] R. N. Bhattacharya and E. C. Waymire, *Stochastic processes with applications*, Wiley InterScience, New York, 1990.

[2] T. Coquand and E. Palmgren, Metric boolean algebras and constructive measure theory, *Arch. Math. Logic*, **41** (2002) 687-704.

[3] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear operators, general theory (Part 1)*, Wiley InterScience, New York, 1988.

[4] T. R. Fleming and D. P. Harrington, *Counting Processes and Survival Analysis*, Wiley InterScience, New York, 1991.

[5] A. N. Kolmogorov, Complete metric boolean algebras, *Stud.,* **77** (1995) 57-66.

[6] H. L. Royden, *Real analysis*, 3rd ed., Prentice Hall. Englewood Cliffs, NJ, 1988.

[7] M. Sahin, On Carathéodory extension theorem on fuzzy measure space, *Far East J. Math. Sci.*, **26** (2007) 311-317.

[8] J. Tanaka and P. F. Mcloughlin, Construction of a lattice on the completion of an algebra and an isomorphism to its Carathéodory extension, (to appear).

رسول کاظمی: دانشکدهٔ علوم ریاضی، دانشگاه کاشان
رایانامه: r.kazemi@kashanu.ac.ir

[۱] Anne Hansen [۲] Elijah Depalma