

## آموزش معلمان ریاضی: حوزه‌ای نیازمند پژوهش‌هایی عمیق

نرگس مرتاضی مهربانی

### چکیده

در این مقاله، ابتدا توسعه حرفه‌ای و یادگیری حرفه‌ای به‌عنوان دو رویکرد به آموزش معلمان ریاضی معرفی می‌شوند. سپس به دانش‌های مورد نیاز برای تدریس ریاضی پرداخته می‌شود. در بخش آخر، تأثیر انواع دانش‌های مورد نیاز برای تدریس ریاضی بر جهت‌گیری تحقیقات در حوزه آموزش معلمان ریاضی مورد بحث قرار می‌گیرد.

### مقدمه

یادگیری ریاضی به دلایل مختلف، با یادگیری سایر موضوع‌های درسی فرق دارد. ریاضی زبان تبیین طبیعت است و بر استدلال و خلاقیت استوار است. ریاضی علاوه بر ارضای علائق شخصی، برای اهداف گوناگون کاربردی در حوزه‌های علمی دیگر نیز مطالعه می‌شود. برای بعضی آدم‌ها، و نه فقط ریاضی‌دانان حرفه‌ای، ماهیت ریاضی متکی بر زیبایی و چالش فکورانه<sup>۱</sup> آن است. برای بعضی دیگر، از جمله بسیاری از دانشمندان علوم تجربی و مهندسان، ارزش اصلی ریاضی در چگونگی به‌کارگیری آن برای کارهای خودشان است. به سبب نقش اساسی که ریاضی در فرهنگ جدید بازی می‌کند، درک اولیه نسبت به ماهیت ریاضی، برای دستیابی به صلاحیت‌های لازم برای سوادآموزی علمی، ضروری است. برای رسیدن به این فهم و درک، نیاز است دانش‌آموزان، ریاضی را بخشی از تلاش علمی در نظر بگیرند، ماهیت تفکر ریاضی را درک کنند و با ایده‌ها و مهارت‌های کلیدی ریاضی آشنا شوند (پروژه ۲۰۶۱،

(۰۱۹۹۷)

<sup>۱</sup>Intellectual

بَس (۲۰۰۴) با تأکید بر این‌که «یادگیری ریاضی نه‌تنها دیسیپلین کشف و خلق است، بلکه دیسیپلین یادگیری و تدریس نیز هست» (ص. ۴۸)، خاطر نشان می‌کند که «جامعه حرفه‌ای ریاضی، دانش تجمعی ریاضی را جذب، نقد، منتقل و منتشر می‌کند. با این حال، یادگیری ریاضی خارج از حرفه ریاضی، اغلب باعث بروز مشکل، هم برای کودکان و هم برای معلمانی می‌شود که در حال دست و پنجه نرم کردن با درک و استفاده از ایده‌ها و ابزارهای این دیسیپلین هستند؛ ابزارها و ایده‌هایی که حتی در ابتدایی‌ترین سطح نافذ، قدرتمند و ظریف هستند. در نتیجه یادگیری ریاضی برای کسانی که ریاضی را هم یکی از ارکان سواد عمومی و هم یک میراث فرهنگی غنی می‌شناسند، یک دغدغه جدی است» (ص. ۴۸).

به‌گفته زاسلاوسکی<sup>۱</sup> و لیکین<sup>۲</sup> (۲۰۰۴)، هم‌چنان که ریاضی، محتوا یا مفهومی چالش‌برانگیز برای دانش‌آموزان است، تدریس آن نیز، محتوا و مفهومی چالش‌برانگیز برای معلمان ریاضی محسوب می‌شود. معلمان ریاضی برای تدریس ریاضی، نیازمند انواع دانش‌هایی هستند که اطلاعات لازم را در مورد دانش‌آموزان در اختیار آن‌ها قرار دهد و به آنان کمک کند تا نظام‌ها و ساختارهای آموزشی را بشناسند، از انواع روش‌های تدریس و یادگیری ریاضی آگاهی داشته باشند، دانش محتوایی را بدانند و به دانش‌چگونگی مدیریت کلاس درس، استفاده از منابع آموزشی و روش‌های ارزشیابی، مجهز شوند (وایت، یاورسکی، آگودلو والدراما و گوویا<sup>۳</sup> (۲۰۱۳)؛ بال، تامس<sup>۴</sup> و فلیپس<sup>۵</sup> (۲۰۰۸)؛ پرکس<sup>۶</sup> و پرستیج<sup>۷</sup> (۲۰۰۸)؛ فیما و فرانک (۱۹۹۲)؛ شولمن<sup>۸</sup> (۱۹۸۶)). تدریس با کیفیت بالا، به دانش حرفه‌ای پیچیده‌ای نیاز دارد که فراتر از قوانین ساده‌ای مانند این است که معلم بداند چه مدت برای پاسخ دادن دانش‌آموز به سؤالی که طرح کرده منتظر بماند و بعد خودش توضیح دهد (شولمن (۱۹۸۶)). جنبه اصلی کار شولمن (۱۹۸۶) در نظریه‌پردازی راجع به تدریس این بود که دانش محتوایی را به‌عنوان دانش تکنیکی و تدریس را به‌عنوان یک حرفه معرفی کرد. از طرفی، به‌گفته پرکس و پرستیج (۲۰۰۸)، یادگیری یک عمل حرفه‌ای مانند تدریس، به این معنی است که معلمان بتوانند در زمینه کلاس درس خود، جنبه‌های مختلف عمل تدریس‌شان را تفسیر نمایند، توانایی تفسیر کردن خود را ارتقا دهند و بتوانند در مقابل این تفسیرها، پاسخگو باشند. از این‌رو، یادگیری تدریس ریاضی، فرآیندی پیچیده است. کرینر، کِرِن<sup>۹</sup> و شاگنسی<sup>۱۰</sup> (۲۰۱۳) معتقدند که با وجود تلاش‌ها و ادعاهای پی در پی در مورد اهمیت نقش معلم در بهبود فرآیند تدریس و یادگیری، معلمان ریاضی هنوز هم کم و بیش، به‌عنوان استفاده‌کنندگان منفعل نتایج تحقیقات آموزشی و گاهی ابزارهایی برای کمک به تولید دانش، دیده می‌شوند. این در حالی است که غلام آزاد (۱۳۸۶) تأکید دارد که یکی از ارکان اصلی نظام آموزش ریاضی، معلم ریاضی است. به‌گفته او، تجربه

<sup>۱</sup>Zaslavsky <sup>۲</sup>Leikin <sup>۳</sup>White, Jaworski, Agudelo- Valderrama and Gooya <sup>۴</sup>Thames <sup>۵</sup>Phelps

<sup>۶</sup>Perks <sup>۷</sup>Prestage <sup>۸</sup>Shulman <sup>۹</sup>Kieren <sup>۱۰</sup>Shaughnessy

نشان داده است که هر قدر هم که برنامه‌ریزی درسی دقیق و علمی انجام شود و روش‌های پیشنهادی تدریس مبتنی بر تحقیق و یافته‌های پژوهشی باشد، در صورت عدم استقبال معلمان ریاضی از آن‌ها، چه به دلیل باور نداشتن به آن برنامه‌ها و روش‌ها و چه به دلیل نداشتن دانش لازم برای اجرا، آن برنامه‌ریزی محکوم به شکست خواهد بود. از این تجربه‌های پژوهشی می‌توان نتیجه گرفت که شناسایی ظرفیت‌های موجود در جامعه معلمان ریاضی و برنامه‌ریزی برای آموزش‌های مستمر یا به اصطلاح «ضمن خدمت» آن‌ها، جزو قدم‌های اساسی جهت ایجاد تحول در آموزش ریاضی مدرسه‌ای است.

### ۱. توسعه حرفه‌ای معلمان ریاضی

ارتقای کیفیت تدریس و یادگیری ریاضی در مدارس، یکی از مباحثی است که از اولویت بالایی برخوردار است و در دستور کار دولت‌ها، دانشگاه‌ها و خود حرفه تدریس ریاضی، قرار گرفته است (گوس ۲۰۰۹)). به‌گفته تیمپرلی (۲۰۱۱) «معلمان و مدیران، هر روز با چالش‌های جدیدی مانند برنامه‌های درسی جدید، سواد ریاضی برای همه، رویکردهای نوین ارزشیابی، استفاده از تکنولوژی در مدرسه‌ها و کلاس‌های درس و دانش‌آموزانی که با روش‌های متداول تدریس چیزی یاد نمی‌گیرند، رو به رو هستند» (ص. ۱) که این خود، باعث پیچیده‌تر شدن عمل تدریس ریاضی می‌شود. بنابراین معلمان بیشتر از قبل، به دانش و مهارت‌هایی نیاز دارند که آن‌ها را در مواجهه با چنین چالش‌هایی کمک کند. از همین رو، زتمیر و کرینر (۲۰۱۱) اظهار می‌دارند که «در حال حاضر توسعه حرفه‌ای، مؤلفه‌ای حیاتی در سیاست‌گذاری‌های آموزشی، جهت ارتقای کیفیت تدریس و یادگیری مدارس به حساب می‌آید» (ص. ۸۷۶). به این دلیل، راجع به شناخت ویژگی‌ها و عوامل تأثیرگذار بر کارایی برنامه‌های توسعه حرفه‌ای معلمان ریاضی، پژوهش‌های بسیاری صورت گرفته است که نشان می‌دهد این عوامل، پیچیده و چندجانبه‌اند (زتمیر و کرینر ۲۰۱۱)) که از بین آن‌ها، چند تحقیق معروف معرفی می‌شوند.

«شورای ملی معلمان ریاضی»<sup>۱</sup> (۲۰۱۰)، فراتحلیلی<sup>۲</sup> از نتایج تحقیقات سه دهه اخیر که مرتبط با دانش ریاضی مورد نیاز معلمان برای تدریس ریاضی و چگونگی توسعه آن بوده، انجام داده است. نتیجه این فراتحلیل، تبیین چهار هدف زیر است:

- تولید دانش ریاضی مورد نیاز معلمان و ایجاد ظرفیت برای استفاده از آن در عمل تدریس ریاضی؛
- ایجاد ظرفیت برای معلمان ریاضی به منظور توجه و تجزیه و تحلیل تفکرات دانش‌آموزان و

پاسخ‌گویی در مقابل آن؛

<sup>۲</sup> Meta-analysis - اخیراً از معادل «سنتزپژوهی» نیز برای این نوع تحقیق، استفاده شده است

- کمک به ایجاد عادت‌های ذهنی خلاق در معلمان ریاضی مانند حساس بودن به اشتباهات دانش‌آموزان و بازتاب بر عمل تدریس خود؛
- ایجاد سازوکارهای مناسب برای همکاری معلمان ریاضی با یکدیگر و حمایت از یادگیری مستمر آنان.

این شورا با استناد به تحقیقات انجام شده، اشاره می‌کند که عواملی مانند صرف زمان کافی، حمایت نظام‌مند از یادگیری معلمان ریاضی و فراهم کردن فرصت‌هایی برای یادگیری فعال آن‌ها، می‌توانند در رسیدن به اهداف ذکر شده برای برنامه‌های توسعه حرفه‌ای معلمان ریاضی، تأثیرگذار باشند. در این جمع‌بندی، رد پای حل مسأله به‌عنوان یک فعالیت نظام‌مند و ضروری برای ارتقای تدریس معلمان ریاضی، مشهود است؛ همان بحثی که شونفیلد در سال ۱۹۸۵ مطرح کرد. شونفیلد با تمرکز جدی بر حل مسأله ریاضی و طرح ادعای آموزش‌پذیری آن، بر نقش معلمان ریاضی به‌عنوان بازیگران اصلی در عرصه این آموزش، تأکید نمود. در ادامه همین بحث، شونفیلد طی سال‌ها، به نظریه‌پردازی در حوزه یادگیری حل مسأله‌های ریاضی و ارتباط تنگاتنگ آن با تدریس و آموزش معلمان ریاضی، مشغول شد. او در سال ۲۰۱۰، با دیدگاهی شناختی و از جنبه یادگیری و تدریس، به بررسی نظری توسعه حرفه‌ای معلمان ریاضی پرداخت و رویکرد دانش، اهداف و باورها را تبیین نمود. شونفیلد در نظریه‌پردازی جدید خود، تدریس ریاضی را نوعی حل مسأله می‌داند که چندین هدف مرتبط به هم را به‌طور همزمان، دنبال می‌کند. با تبیین این نظریه، شونفیلد سعی دارد اهداف، دانش، باورها و چگونگی تصمیم‌گیری‌های معلمان ریاضی را شناسایی کند. سپس ماهیت تعامل این مؤلفه‌ها را با یکدیگر، مدل‌سازی نماید. این نظریه، بر پیشرفت فردی معلم و نیز توجه به محتوا و زمینه‌ای که محتوا در آن ارائه می‌شود، تأکید دارد. مدل کرینر (۲۰۰۰) دارای چهار بُعد زیر بود:

عمل: قابلیت معلم در تجربه واقعی تدریس و طرز تلقی او درباره تدریس و یادگیری هدفمند و اثربخش؛

بازتاب: بازتاب‌های منظم معلم بر فعالیت‌های تدریس خویش و افزایش قابلیت خود نقدپذیری او؛

استقلال: افزایش قابلیت‌های معلمان برای انجام کارهایی که خود، آغازگر، سازمان‌دهنده و تنظیم‌کننده‌اش هستند؛

شبکه‌سازی: قابلیت در انجام کارهای ارتباطی و تبادلی که به‌طور فزاینده با نظرات عموم معلمان مرتبط است.

در این مدل اولیه، هر زوج «عمل و بازتاب» و «استقلال و شبکه‌سازی» که نشان‌دهنده «تقابل» و «توافق» هستند، مکمل هم دیده شده بودند و هدف دوره‌های توسعه حرفه‌ای معلمان ریاضی، ایجاد تعادل بین این چهار بُعد بود.

الینارس<sup>۱</sup> و کرینر (۲۰۰۶) با ایجاد تغییراتی در مدل سال ۲۰۰۰ کرینر، به یادگیری معلمان ریاضی به‌عنوان یکی از جنبه‌های حیاتی توسعه حرفه‌ای نگاه کردند و در آن، بر نقش معلمان به‌عنوان زینفعان<sup>۲</sup> و بازیگران اصلی، تأکید نمودند. این مدل، از سه مؤلفه زیر تشکیل شده است:

**محتوا:** مواردی مانند طراحی فعالیت‌های مناسب و چالش‌برانگیز برای دانش‌آموزان، فراهم کردن تجربه‌های یادگیری چالش‌برانگیز، مشاهده و بازتاب بر عمل تدریس معلمان و ابتکارات آنان و بحث‌های سودمند در مدرسه که به تمام افراد دخیل در فرآیند تدریس و یادگیری ریاضی، مربوط است.

**جامعه<sup>۳</sup>:** تیم‌های کوچک، گروه‌های کاری و نظایر آن‌ها که توسط معلمان تشکیل می‌شوند و هدفشان حمایت از مشارکت معلمان با سایر همکاران معلمان با دو هدف ارتقای تدریس همه از طریق هم‌اندیشی و تبادل و نقد تجربه‌های تدریس یکدیگر و تسهیل حرکت هر یک به سمت استقلال یادگیرنده است.

**زمینه<sup>۴</sup>:** برنامه‌های توسعه حرفه‌ای، منابع یادگیری معلمان و گروه‌های آموزشی که در ارتقای حرفه‌ای معلمان ریاضی می‌توانند نقش سازنده‌ای بازی کنند که به دلایل مختلف از جمله نیازمندی به حمایت‌های سازمانی برنامه‌ریزی شده، کمتر مورد توجه قرار می‌گیرد.

زتمیر و کرینر (۲۰۱۱)، به توسعه این مدل پرداختند و شناخت سه عامل اساسی را برای طراحی اثربخش برنامه‌های توسعه حرفه‌ای معلمان ریاضی، معرفی نمودند. در مدل توسعه‌یافته، حدود و ثغور هر یک از سه مؤلفه در مدل اولیه، مشخص‌تر شده است. به‌طور مشخص، مؤلفه «محتوا» به «تعادل بین عمل و بازتاب»، مؤلفه «جامعه» به «تعادل بین فعالیت‌های فردی و اجتماعی» و مؤلفه «زمینه» به «تعادل بین حمایت‌های داخلی و خارجی» محدود شده‌اند. از نظر آنان، چنین آموزش‌هایی می‌توانند بالقوه، خلأهای آموزش‌های حرفه‌ای سنتی را که اغلب غیرتعاملی و یک‌سویه هستند، پر کنند. ادبیات حوزه آموزش معلمان ریاضی نیز مؤید این است که می‌توان آموزش‌هایی طراحی کرد که در آن، معلمان، خود عامل ارتقای دانش حرفه‌ای خویش شوند، بر نحوه تدریس خود نظارت کنند و در بهبود روش تدریس خود سهیم باشند.

<sup>۱</sup>Ilnares <sup>۲</sup>Stakeholders <sup>۳</sup>Community <sup>۴</sup>Context

کلارک<sup>۱</sup> و هالینگس ورث<sup>۲</sup> (۲۰۰۲) برای توسعه حرفه‌ای معلمان ریاضی، یک مدل شناختی از درون به هم پیوسته ارائه دادند که بر فرآیند یادگیری، تغییر و توسعه حرفه‌ای آنان، به صورت فردی متمرکز می‌شود. این مدل، به چهار حوزه می‌پردازد:

حوزه شخصی: دانش، باورها و طرز تلقی معلمان که زیربنای تدریس ریاضی آنان را تشکیل می‌دهد؛

حوزه عمل: تجربه‌های حرفه‌ای معلمان ریاضی که تحت تأثیر حوزه شخصی‌شان شکل می‌گیرد؛  
حوزه نتایج: تغییر در عمل تدریس و نتایج آن است که به حوزه عمل و حوزه شخصی وابسته است؛  
حوزه بیرونی: منابع اطلاعاتی، حمایتی و انگیزشی است.

## ۲. یادگیری حرفه‌ای معلمان ریاضی

طرح مباحث نظری در حوزه توسعه حرفه‌ای معلمان ریاضی و تبیین مدل‌هایی برای آن، زمینه را برای ضرورت ایجاد تمایز بین «توسعه حرفه‌ای» و «یادگیری حرفه‌ای» معلمان ریاضی فراهم نمود (ایون<sup>۳</sup> ۲۰۰۸). برای مثال، یاورسکی (۲۰۰۳) با تأکید بر این‌که تحقیق به خودی خود، ابزار قدرتمندی برای توسعه تدریس یادگیری ریاضی است، چارچوبی با چهار مؤلفه، برای تحقق یادگیری پژوهش مدار معلمان ریاضی ارائه داد که شامل، «دانش و یادگیری»، «بررسی<sup>۴</sup> و بازتاب<sup>۵</sup> درونی و بیرونی» و «فرد و جامعه» بود. یاورسکی (۲۰۰۳) در توضیح این چارچوب، ابراز نمود که «دانش و یادگیری، بُعد معرفت‌شناختی این چارچوب را تشکیل می‌دهد که در آن، شرکت‌کنندگان در تحقیق، باورها، تفکرات و خُبرگی خود را به فرارگاه تحقیق<sup>۶</sup> می‌آورند و بدین ترتیب، یادگیری از طریق تعامل و گفت‌وگو درون‌گروهی صورت می‌گیرد». او همچنین بیان نمود که «بررسی و بازتاب، بُعد تحقیقی این چارچوب را شکل می‌دهد که در آن، سؤال‌هایی که از درون عمل تدریس و بازتاب و نحوه درگیر شدن با آن مطرح می‌شوند، به شیوه‌های جدیدی از انجام دادن و بودن، منجر می‌شوند» (صص. ۲۶۴-۲۶۳). از دیدگاه یاورسکی (۲۰۰۳)، «درونی و بیرونی، نقش معلمان و آموزشگران معلمان را در فرآیندهای توسعه تدریس مشخص می‌کند. این مؤلفه، هم به‌عنوان یک پژوهشگر درونی، فرآیند تدریس را بررسی می‌کند و هم به‌عنوان یک محقق بیرونی، فعالیت‌ها و توسعه‌های تدریس را که مرتبط با دانش بومی و عمومی است، مورد مطالعه قرار می‌دهد» (ص. ۲۶۴). در این دیدگاه، «مؤلفه فرد و جامعه، اهمیت فعالیت‌های مشارکتی را در اقدامات توسعه‌ای نشان می‌دهد. این مؤلفه، بر نقش مشارکت و تعامل گروهی بر رشد و پیشرفت فردی اشاره

<sup>۱</sup>Clark <sup>۲</sup>Hollingsworth <sup>۳</sup>Even <sup>۴</sup>Inquiry <sup>۵</sup>Reflection <sup>۶</sup>Research Setting

می‌کند» (ص. ۲۶۴). یاورسکی (۲۰۰۶) بعداً در تکمیل چارچوب خود و به‌عنوان یکی از نظریه‌پردازان مدافع تمایز بین توسعه حرفه‌ای و یادگیری حرفه‌ای، توضیح داد که در توسعه حرفه‌ای، نوعی از قدرت نهفته است که نشانگر سلطه آموزشی معلمان یا دانشگاهیان یا معلمان با تجربه‌تر، بر معلمان تازه‌کار است. او گفت که باید و الزام، در ذات توسعه حرفه‌ای سنتی است؛ به این معنی که عده‌ای به سبب تأیید صلاحیت‌شان توسط مراجع مورد قبول سیاست‌گذاران و تصمیم‌گیرندگان، اجازه پیدا می‌کنند که به دیگری که به تصور آن‌ها کمتر می‌دانند، آموزش دهند. اما تحقیقات این حوزه نشان می‌دهد که این تصور ناگفته و این ماهیت پنهان، باعث ایجاد واکنش‌های خاموش معلمان شده و تأثیر آموزش‌های یک‌طرفه را به حداقل رسانده است (یاورسکی، ۲۰۰۶). در صورتی که به‌گفته یاورسکی (۲۰۰۸)، یادگیری حرفه‌ای فرآیندی دو طرفه، تعاملی و مشارکتی است که در آن، هیچ‌یک باید وجود ندارد، زیرا مستقیماً با کلاس درس و حرفه معلمی در ارتباط است و از آن منبعث می‌شود. در تأیید تمایز بین توسعه حرفه‌ای و یادگیری حرفه‌ای، روسکن (۲۰۱۱) ضمن اشاره به این‌که «معلمان هر روز، در داخل و خارج کلاس درس، از طریق بازتاب بر عمل تدریس خود یا گفتگو در مورد آن و عملکرد دانش‌آموزان خود، برنامه‌ریزی برای تدریس جلسه بعد و شرکت در کنفرانس‌های درون مدرسه‌ای، درگیر فرآیند توسعه حرفه‌ای هستند» (ص. ۲)، تلاش کرده تا نشان دهد که ماهیت فعالیت‌های خودانگیزه در معلمان ریاضی در بسیاری از مدرسه‌ها، همان است که یاورسکی (۲۰۰۶) از آن با عنوان ویژگی‌های یادگیری حرفه‌ای یاد می‌کند.

در این راستا، تیمپرلی (۲۰۱۱) معتقد است که توسعه حرفه‌ای و یادگیری حرفه‌ای معلمان ریاضی، هر دو فرآیندهایی عامدانه<sup>۱</sup>، مستمر<sup>۲</sup> و نظام‌مند<sup>۳</sup> هستند. ولی در اکثر مواقع، اصطلاح «توسعه حرفه‌ای» به معنای انتقال یک سویه اطلاعات خاص به معلمان به‌کار می‌رود تا بتوانند عمل تدریس خود را بهبود بخشند، در حالی که «یادگیری حرفه‌ای» فرآیندی درونی است که در آن، افراد از طریق تعامل با اطلاعات تولید شده در پیشرفت حرفه‌ای و به چالش کشیدن فرض‌های قبلی و معناسازی‌های جدید، می‌توانند دانش حرفه‌ای مورد نیاز را برای تدریس خود، بسازند. در این فرآیند، «چالش» و «معناسازی»، نقش مهمی بازی می‌کنند. در حقیقت از نظر تیمپرلی (۲۰۱۱)، یکی از تمایزهای اساسی توسعه حرفه‌ای و یادگیری حرفه‌ای این است که در یادگیری حرفه‌ای، معلمان به‌طور جدی در یادگیری خویش سهیم‌اند، در حالی که در توسعه حرفه‌ای، کمتر به مشارکت و درگیری معلم با فرآیند یادگیری توجه می‌شود. به باور او، ماهیت یادگیری حرفه‌ای به گونه‌ای است که مستلزم «جستجوی نظام‌مند<sup>۴</sup>» و «ارزیابی» است. یادگیری حرفه‌ای، فرآیندی فعال برای بررسی نظام‌مند کارایی تدریس است که هدف آن، یادگیری و ارتقای

<sup>۱</sup>Intentional <sup>۲</sup>Ongoing <sup>۳</sup>Delivery <sup>۴</sup>Systematic Inquiry

دانش‌آموزان است. با این حال، همان‌طور که وایت، یاورسکی، والدرا و گویا (۲۰۱۳) تأکید کرده‌اند، در ادبیات آموزشی و پژوهشی حوزه آموزش معلمان ریاضی، هنوز مرز روشنی بین «توسعه حرفه‌ای» و «یادگیری حرفه‌ای»، وجود ندارد و این حوزه نیازمند پژوهش‌های متنوع از ابعاد مختلف است.

### ۳. دانش‌های مورد نیاز برای تدریس ریاضی

در دو دهه اخیر، در ادبیات مربوط به آموزش معلمان ریاضی به دو نوع دانش: یکی «دانش حرفه‌ای» و دیگری «دانش موضوعی»، توجه شده است که با توجه به این دو، می‌توان آموزش‌هایی طراحی کرد که از طریق آن‌ها، معلمان، خود عامل ارتقای دانش حرفه‌ای خویش شوند، بر نحوه تدریس خود نظارت کنند و در بهبود شیوه تدریس، سهم باشند. به‌گفته بال (۲۰۰۸)، با آن‌که دانش محتوایی در ارتقای تدریس و یادگیری ریاضی از اهمیت به‌سزایی برخوردار است، اما به توسعه و مطالعه آن به‌طور منسجم توجه نشده است و پژوهش، نسبت به چگونگی افزایش درک معلمان از موضوعی که تدریس می‌کنند، بی‌توجه بوده است. او علت را پیش‌فرضی می‌داند که مطالعه موضوع درسی را در سطح پیشرفته، در درجه اول اهمیت قرار می‌دهد و طبیعی است که پیامد آن، تمرکز بیشتر بر میزان آمادگی محتوایی معلمان در مقابل نوع محتوای مورد نیاز آنان برای تدریس است.

۱.۳. مقوله‌های اصلی دانش معلمان از دیدگاه شولمن. در اواسط دهه هشتاد میلادی، لی شولمن (۱۹۸۶)، حوزه خاصی از دانش معلمان را به نام «دانش محتوایی پداگوژیکی<sup>۱</sup>» معرفی کرد که با «دانش محتوایی<sup>۲</sup>» تمایز داشت. از نظر او «دانش محتوایی» در موقعیت‌های نظام‌وار، قابل مطالعه و یادگرفتن است. اما از دیدگاه شولمن، «دانش محتوایی پداگوژیکی»، معجون خاصی از محتوا و پداگوژی مورد نیاز برای تدریس یک موضوع درسی است. ایده‌های شولمن و تمایزی که بین انواع دانش‌های مورد نیاز برای معلمان قائل شد، بر جامعه پژوهشی حوزه آموزش معلمان ریاضی تأثیر چشمگیری گذاشت که به‌اختصار، به آن‌ها می‌پردازیم.

**دانش محتوایی:** شامل دانش موضوعی و ساختارهای سازمان‌یافته در ذهن است. برای تفکر در مورد دانش محتوایی یک حوزه، لازم است فراتر از دانش مربوط به مفاهیم یا حقایق<sup>۳</sup> موجود در آن حوزه رفته و ساختارهای موضوعی آن را درک کرد. به‌گفته شولمن (۱۹۸۶)، برای این کار می‌توان از ایده‌های شوآب<sup>۴</sup> (۱۹۷۱) استفاده نمود. از نظر شوآب، ساختارهای یک موضوع، شامل «ساختارهای اسمی<sup>۵</sup>» و «ساختارهای نحوی<sup>۶</sup>» است. شوآب توضیح می‌دهد که ساختارهای اسمی، روش‌هایی است که در آن،

<sup>۱</sup>Pedagogical Content Knowledge: PCK <sup>۲</sup>Content Knowledge <sup>۳</sup>Facts <sup>۴</sup>Schowab <sup>۵</sup>Substantive

<sup>۶</sup>Syntactic



مفاهیم اساسی و اصول موجود در یک نظام موضوعی، سازمان‌دهی می‌شوند تا حقایق آن نظام را یکپارچه کند. در حالی که ساختار نحوی یک نظام، مجموعه‌ای از روش‌ها است که به وسیله آن، صدق<sup>۱</sup> و کذب<sup>۲</sup> و صحت<sup>۳</sup> و بطلان<sup>۴</sup> تعریف می‌شوند. به گفته پترو و گولدینگ (۲۰۱۱)، دانش نحوی در ریاضی، شامل فعالیت‌هایی مانند صورت‌بندی کردن، آزمایش کردن تعمیم‌ها و ساختن اثبات‌ها است و انتظار می‌رود که معلمان را قادر کند تا حقایق پذیرفته‌شده در حوزه مورد نظر را تعریف نمایند و به آنان کمک کند تا بتوانند در مورد چرایی درست بودن قضیه‌ای خاص، توضیح دهند. همچنین ضروری است که معلمان بتوانند دانش‌آموزان را توجیه کنند که چرا یک موضوع ریاضی ارزش یادگیری را دارد و چگونه این موضوع به موضوعات دیگر مرتبط می‌شود.

**دانش برنامه درسی:** به معنای درک خاصی از برنامه درسی موضوعی و برنامه‌هایی است که برای معلمان هر موضوع درسی، مانند «ابزار کار»<sup>۵</sup> آن‌ها است و همیشه با آن سروکار دارند. تجلی این دانش در برنامه‌های طراحی شده برای تدریس موضوعات خاص درسی در سطح‌های معین، تنوع مواد آموزشی قابل دسترس در رابطه با آن برنامه‌ها و مجموعه‌ای از ویژگی‌ها دیده می‌شود. همسو با این تعبیر، پترو و گولدینگ (۲۰۱۱) نیز دانش برنامه درسی را دانش مواد آموزشی قابل دسترس مانند راهنمای برنامه درسی و کتاب‌های درسی می‌دانند که به خاطر ویژگی‌های آن در هر پایه تحصیلی، شولمن از آن به‌عنوان دانش برنامه درسی افقی یاد کرده است. برای مثال در انگلستان، نظام ارزشیابی محدودیت‌هایی برای معلمان ایجاد کرده بود که این نوع دانش برنامه درسی به معلمان کمک می‌کرد که نه تنها مواد آموزشی و منابع را بشناسند، بلکه بدانند که در چه چارچوبی کار کنند تا در مقابل انتظارات نظام ارزشیابی، پاسخگو باشند. از این‌ها گذشته، شولمن بر جنبه دیگری از دانش برنامه درسی که در بردارنده آگاهی از موضوع‌ها و روش‌های توسعه یک مفهوم طی دوازده سال آموزش مدرسه‌ای است، تأکید کرده و آن را از دانش‌های ضروری برای معلمان دانسته است. شولمن به دلیل ماهیت تسلسلی این بُعد از دانش برنامه درسی، آن را دانش برنامه درسی عمودی نامیده است.

**دانش محتوایی-پداگوژیکی:** تلفیق خاصی از محتوا و پداگوژی است و منحصراً در قلمرو معلمان است و شکل خاصی از درک حرفه‌ای آن‌ها را شامل می‌شود. شولمن این دانش را مفیدترین شکل بازنمایی ایده‌ها و قدرت‌مندترین نوع استنتاج‌ها، مثال‌ها، به تصویرکشیدن‌ها، توضیحات و اثبات‌ها و در یک کلمه، مفیدترین روش بازنمایی و صورت‌بندی برای یک موضوع می‌داند که درک آن را برای یادگیرندگان، قابل فهم می‌کند. دانش محتوایی - پداگوژیکی شامل درک این نکته نیز هست که چه

<sup>۱</sup>Truth <sup>۲</sup>Falsehood <sup>۳</sup>Validity <sup>۴</sup>Invalidity <sup>۵</sup>Tools of the trade

چیزی، یادگیری یک موضوع خاص را سخت یا آسان می‌سازد. این دانش، مفاهیم و تصوراتی را که دانش‌آموزان نسبت به یک موضوع در طول زمان ساخته و توسعه داده‌اند، در برمی‌گیرد.

از نظر شولمن، سه مقولهٔ اخیر یعنی «دانش محتوایی»، «دانش برنامهٔ درسی» و «دانش محتوایی - پداگوژیکی»، ابعاد خاص محتوایی<sup>۱</sup> را تعریف می‌کنند و در واقع، پارادایم گم‌شده در تحقیقات مربوط به تدریس هستند. او اشاره می‌کند که تأکید بر ابعاد محتوایی دانش معلمان، به معنای بی‌اعتنایی به درک و مهارت‌های پداگوژیکی آنان نیست. به عقیده او، دانش محتوایی - پداگوژیکی مانند پلی بین دانش محتوایی و عمل تدریس است و این نشان می‌دهد که همان‌گونه که بحث‌های مربوط به محتوا، به تدریس هم مرتبط هستند، بحث‌های مربوط به تدریس، توجه را به محتوا معطوف می‌سازند. بدین سبب بال و همکاران (۲۰۰۸) «دانش محتوایی - پداگوژیکی» را قلمرو انحصاری معلمان می‌دانند. با این حال و بعد از چند دهه فعالیت، هنوز ماهیت و نقش این نوع دانش به‌عنوان پلی بین دانش محتوایی و عمل تدریس، به اندازه کافی درک نشده است. در حقیقت به نظر بال و همکاران (۲۰۰۸)، اگرچه چارچوب ارائه شده توسط شولمن (۱۹۸۶) به لحاظ نظری انسجام دارد، هنوز در حوزهٔ موضوعی ریاضی، توسعهٔ کافی نیافته است.

**جمع‌بندی:** بال و همکاران (۲۰۰۸) به این نتیجه رسیدند که فقط تعداد معدودی از مطالعات انجام شده در حوزهٔ آموزش معلمان ریاضی که از یافته‌های نظری شولمن استفاده کرده‌اند، به بررسی احتمال وجود دانش‌هایی به غیر از دانش محتوایی که برای تدریس ریاضی مهم هستند، پرداخته‌اند. آنان همچنین دریافته‌اند که در همین محدود پژوهش‌های انجام شده نیز تلاش‌های اندکی برای توسعهٔ معیارهایی<sup>۲</sup> برای سنجش دانش محتوایی - پداگوژیکی و نیز استفاده از آن‌ها در بررسی تعریف، ماهیت و اثرات این نوع دانش بر تدریس و یادگیری ریاضی، صورت گرفته است. سرانجام، آنان مدعی شدند که در اکثر پژوهش‌های مرتبط با حوزهٔ آموزش معلمان ریاضی، دانش محتوایی - پداگوژیکی، اغلب به‌عنوان یک واقعیت مسلم در نظر گرفته شده و یافته‌های پژوهشی قابل توجهی که بتواند راهنمای عمل قرار گیرد، موجود نیست. در نتیجه به دلیل فقدان تعریف مناسب، عدم یافته‌های پژوهشی کافی در مورد ماهیت دانش محتوایی - پداگوژیکی و محدود بودن شواهد تجربی، ایده‌های ارائه شده در این رابطه، نقش محدودی در جرح و تعدیل برنامه‌های آماده‌سازی محتوایی معلمان ریاضی بازی کرده است. لذا این ایده‌ها، در شکل‌گیری سیاست‌گذاری‌های مربوط به توسعهٔ حرفه‌ای یا ایجاد درکی عمیق‌تر از روابط بین دانش معلمان، تدریس آنان و یادگیری دانش‌آموزان، اثرات محدودی داشته است. پیش از این هم فرانک و فیما (۱۹۹۲) نقدشان بر دیدگاه شولمن این بود که در آن، پویایی ماهیت دانش و پیشرفت واقعی دانش

<sup>۱</sup>Content-specific <sup>۲</sup>Measures

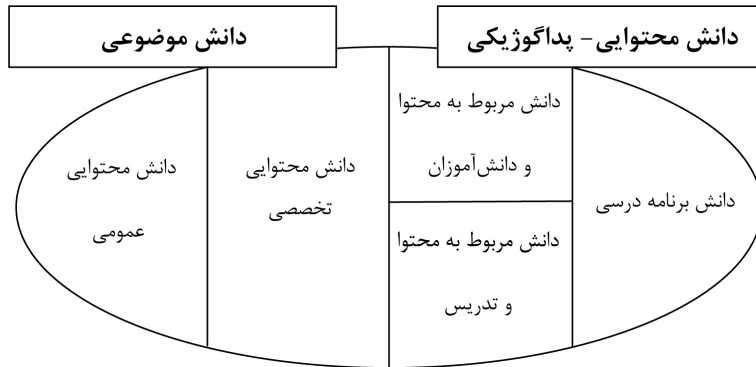
معلمان از طریق تعامل‌های کلاس درس، نادیده گرفته شده است. بالأخره، مردیت (۱۹۹۵) نیز نظریه شولمن را در رابطه با معلمان ریاضی، بدین جهت که نقش باورهای معلمان را در شکل‌گیری و توسعه دانش محتوایی - پداگوژیکی نادیده گرفته است، مورد انتقاد قرار داده است. از نظر او، معلمانی که ریاضی را پویا و چندبعدی می‌بینند و معتقدند که می‌توانند از طریق حل مسأله، در تولید دانش ریاضی سهیم باشند، مسلماً می‌توانند دانش‌های متفاوتی را هم برای تدریس ریاضی تولید کنند و سعی در توسعه آن داشته باشند (نقل شده در پترو و گولدینگ (۲۰۱۱)).

**۲.۳. سازمان‌دهی مجدد دانش محتوایی و دانش محتوایی- پداگوژیکی توسط بال و همکاران.**

با توجه به ابهاماتی که در تعریف و تبیین شولمن از دانش محتوایی- پداگوژیکی به‌طور عام و در رابطه با ریاضی به‌طور خاص وجود دارد، در دهه‌های اخیر گرایش‌ات پژوهشی بسیاری نسبت به بررسی ماهیت دانش مورد نیاز معلمان ریاضی، در محققان حوزه آموزش معلمان ریاضی ایجاد شده است. مثلاً بال و همکاران (۲۰۰۸) در پژوهش خود، این سؤال را مطرح کردند که «معلمان چه چیزی را لازم است بدانند تا بتوانند به‌طور مؤثر، ریاضی تدریس کنند». آن‌ها با بدیهی فرض کردن این‌که معلمان باید موضوعات و رویه‌هایی را که تدریس می‌کنند بدانند، تصمیم گرفتند به‌طور خاص، بر این‌که معلمان چگونه باید آن محتوا را بدانند، تمرکز کنند. همچنین محققان علاقه‌مند بودند بدانند که معلمان به دانستن چه چیزهای دیگری از ریاضی نیاز دارند و چگونه و کجا از آن دانش ریاضی در عمل تدریس خود استفاده کنند. در این پژوهش، ایشان به‌جای آن‌که با برنامه درسی یا استانداردهای تعریف شده در یادگیری دانش‌آموزان شروع کنند، بر عمل تدریس معلمان متمرکز شدند و می‌خواستند بدانند که معلمان در حین تدریس ریاضی چه کار می‌کنند و چگونه عمل تدریس‌شان مواردی مانند استدلال، بینش و درک و مهارت ریاضی را می‌طلبد. بال و همکاران (۲۰۰۸)، رویکرد انتخابی خود را نوعی تجزیه و تحلیل حرفه معلمی نامیدند و نتیجه این تجزیه و تحلیل‌ها، مبنایی برای ارائه یک نظریه عمل- مدار در مورد دانش‌های ریاضی مورد نیاز برای تدریس ریاضی شد. برای این کار، ابتدا فیلم‌های ویدیویی تهیه شده از عمل تدریس واقعی تجزیه و تحلیل کیفی شدند. سپس محققان بر پایه مقوله‌های ظاهر شده از این تجزیه و تحلیل‌های کیفی، معیارهایی از دانش‌های ریاضی مورد نیاز برای تدریس ریاضی را طراحی کردند. تجزیه و تحلیل‌ها نشان داد که در حقیقت، دانش مورد نیاز برای تدریس ریاضی، چندبُعدی است. محققان با استفاده از یافته‌های این تحقیق، توانستند مقوله‌های ارائه شده توسط شولمن، یعنی دانش موضوعی و دانش محتوایی- پداگوژیکی را دوباره سازمان‌دهی نمایند. برای این کار، مقوله‌های دانش محتوایی و دانش محتوایی- پداگوژیکی شولمن، به اجزای فرعی «دانش محتوایی عمومی» و «دانش محتوایی تخصصی» از یک سو و «دانش

آموزش معلمان ریاضی: حوزه‌ای نیازمند پژوهش‌هایی عمیق \_\_\_\_\_ ۱۴۶

مربوط به محتوا و دانش‌آموزان» و «دانش مربوط به محتوا و تدریس» از سویی دیگر، تقسیم‌بندی شد (شکل ۱).



شکل ۱. سازمان‌دهی مجدد دانش محتوایی و دانش محتوایی پداگوژیکی توسط بال و همکاران- (۲۰۰۸)

مقوله‌هایی که مجدداً سازماندهی شدند، بدین شرح‌اند:

**دانش محتوایی عمومی:** با محتوای برنامه درسی سروکار داشته و به دانش و مهارت‌های ریاضی اشاره دارد که در هر موقعیتی - نه لزوماً تدریس - مورد استفاده قرار می‌گیرند. این دانش شامل توانایی شخص برای رسیدن به یک راه‌حل درست و یافتن پاسخ درست برای مسائل ریاضی است. این دانش، به دانستن مفاهیم و رویه‌های ریاضی، تشخیص پاسخ‌های نادرست دانش‌آموزان، بازشناختن تعریف‌های نادقیق ارائه شده توسط کتاب‌های درسی و استفاده درست از نمادگذاری‌ها و اصطلاحات شفاهی و مکتوب توسط معلمان ریاضی، اشاره دارد. به عبارت دیگر، «دانش محتوایی عمومی» همان دانش ریاضی است که از یک فرد تحصیل‌کرده انتظار می‌رود. مثلاً انتظار می‌رود که معلم تشخیص دهد آیا دانش‌آموز، تفریق زیر را درست انجام داده است یا خیر:

$$۳۰۷ - ۱۶۷ = ۱۳۹$$

تجزیه و تحلیل فیلم‌های ویدیویی تهیه شده از تدریس‌های کلاسی، اهمیت دانش محتوایی عمومی را نشان داد. برای نمونه، زمانی که معلم یک اصطلاح ریاضی را به درستی تلفظ نمی‌کرد، در محاسبات خطا داشت یا نمی‌توانست مسأله را در کلاس حل کند، به‌وضوح در فرآیند تدریس ریاضی او، خلل ایجاد می‌شد و

زمان زیادی به هدر می‌رفت و این امر، ضرورت توجه به این دانش را در تدریس و یادگیری ریاضی، برجسته نمود.

**دانش محتوایی تخصصی:** فراتر از دانشی است که از فردی که آموزش عمومی را تمام کرده یا در یک حوزه متخصص شده، انتظار می‌رود. مثلاً حسابداران و مهندسان نیز با اعداد سروکار دارند، اما لازم نیست بدانند یا توضیح دهند که چرا وقتی عددی در ۱۰ ضرب می‌شود، یک صفر به سمت راست آن اضافه می‌گردد، یا وقتی که دانش‌آموزان، روش‌های غیراستانداردی برای انجام رویه‌های ریاضی ارائه می‌دهند، لازم است که معلم از خود بپرسد که «چرا این روش، درست است؟»، «آیا با این روش همیشه می‌توان به پاسخ درست رسید؟» و «چگونه می‌توان این روش را برای دانش‌آموزان توضیح داد و از نظر ریاضی، آن را توجیه کرد؟» از طرف دیگر، تدریس ریاضی، با دانستن روابط بین رویه‌ها، معانی گوناگون اصطلاحات و بیان و تشریح مفاهیم، درگیر است. مثلاً معلمان به روش‌های مؤثری برای بازنمایی معنای الگوریتم تقسیم نیاز دارند و لازم است که روابط بین الگوریتم تقسیم و تفریق را بدانند تا بتوانند معنای گام‌های تقسیم را بیان کنند و آن‌ها را برای دانش‌آموزان توضیح دهند. بال و همکاران (۲۰۰۸) اشاره می‌کنند که منظورشان این نیست که «معلمان ریاضی باید چه چیزی را تدریس کنند»، بلکه بحث آن‌ها در مورد دانشی است که لازم است معلمان ریاضی بدانند و قادر به انجام آن باشند تا بتوانند آن را تدریس کنند. به‌طور خلاصه، این دانش به معلمان کمک می‌کند تا دانش ریاضی مورد تدریس را باز کرده<sup>۱</sup> و جنبه‌های مختلف آن را به دانش‌آموزان نشان دهند.

دانش مربوط به محتوا و دانش‌آموز چیزی است که دانش درباره دانش‌آموزان و دانش درباره ریاضی را با هم ترکیب می‌کند. به عبارت دیگر، معلمان باید بتوانند مشکلات و موانع دانش‌آموزان را پیش‌بینی کنند، به حرف دانش‌آموزان گوش دهند و به تفکر دانش‌آموزان به‌طور مناسب، پاسخ دهند و هنگام تدریس، از مثال‌ها و بازنمایی‌های مناسب استفاده نمایند. همچنین لازم است معلمان هنگام طراحی تدریس و اجرای آن، از چگونگی درک مفهوم‌ها و بدفهمی‌های ریاضی دانش‌آموزان درباره موضوعات ریاضی آگاه باشند. مثلاً دانستن الگوریتم تفریق، اگرچه برای تدریس آن لازم است، کافی نیست. برای داشتن یک تدریس کارا، لازم است معلمان سرچشمه‌های خطاهای ریاضی دانش‌آموزان را بررسی کنند و مهم‌تر این‌که این بررسی باید سریع و در لحظه انجام شود. دانش‌آموزان نمی‌توانند ساعت‌ها منتظر بمانند تا معلمان، خطاهایشان را شناسایی کرده و به آن‌ها کمک کنند. در حقیقت، معلمان به نوعی استدلال ریاضی نیاز دارند که بسیاری از افراد دیگر، لازم نیست آن را بدانند. هرچند ریاضی‌دان‌ها نیز با تجزیه و تحلیل خطاها و بررسی اثبات‌ها سروکار دارند، لازم نیست این کار را وقتی دانش‌آموز منتظر راهنمایی

<sup>۱</sup>Unpack

آن‌ها است، به‌سرعت انجام دهند. برای مثال، در تفریق زیر، معلم برای کمک به دانش‌آموز، علاوه بر تشخیص نادرستی جواب، نیاز دارد تا سرچشمه خطای او را نیز مشخص نماید:

$$۱۶۹ = ۱۶۸ - ۳۰۷$$

علاوه بر این، معلمان در انتخاب یک مثال، نیاز دارند تا در مورد میزان جالب بودن و نیز ایجاد انگیزه برای حل آن و میزان سختی یا آسانی‌اش از دید دانش‌آموزان، پیش‌بینی‌هایی مبتنی بر شواهد داشته باشند. معلمان باید بتوانند به ایده‌ها یا اندیشه‌های ناکامل دانش‌آموزان گوش کنند و آن‌ها را تفسیر نمایند. تمام این فعالیت‌ها، به ترکیبی از «دانش محتوایی تخصصی» و «آشنایی با دانش‌آموزان و نوع تفکر آن‌ها» نیاز دارد و به آن، «دانش مربوط به محتوا و دانش‌آموز» گفته می‌شود. این دانش، نوعی از دانش پداگوژیکی است که دانستن در مورد دانش‌آموز و دانستن در مورد ریاضی را با یکدیگر ادغام می‌کند.

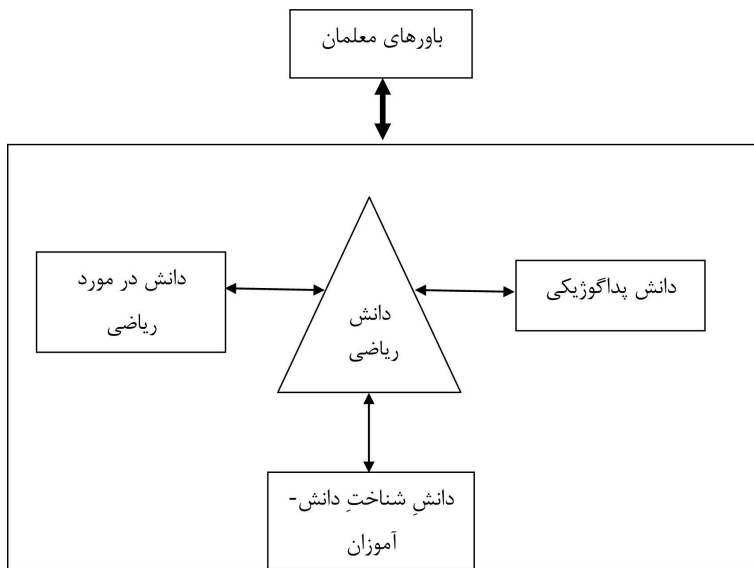
دانش مربوط به محتوا و تدریس، دانش درباره ریاضی را با دانش درباره تدریس ترکیب می‌کند. بسیاری از فعالیت‌های مربوط به تدریس ریاضی، به دانش ریاضی خاصی نیاز دارد که با طراحی آموزشی در تعامل است. معلم نیاز دارد تا با گزینشی مناسب، محتوای ریاضی را برای آموزش، پشت سر هم بچیند، تصمیم بگیرد با چه مثالی شروع کند و از چه مثال‌هایی برای تعمیق مطلب استفاده نماید. بال و همکاران (۲۰۰۸) معتقدند که لازم است معلم، مزایا و معایب آموزشی بازنمایی‌های مورد استفاده را برای تدریس یک ایده خاص ریاضی، ارزیابی کند و از طریق بحث‌های کلاسی، تصمیم بگیرد که کجا، از دانش‌آموزان توضیح بیشتری بخواهد و چه موقع از اظهارنظرهای دانش‌آموزان برای ارائه یک موضوع ریاضی، استفاده نماید. تمام این فعالیت‌ها، به تعامل بین «درک ریاضی تخصصی» و «درک بحث‌های پداگوژیکی» نیاز دارد که بر یادگیری دانش‌آموز، اثر می‌گذارد.

دانش مربوط به محتوا و تدریس، دانستن در مورد تدریس و دانستن در مورد ریاضی را با یکدیگر ترکیب می‌کند.

**جمع‌بندی:** در مدل ارائه شده توسط بال و همکاران (۲۰۰۸)، بر اهمیت تأثیر باور معلمان در تدریس‌شان، تأکید خاصی نشده است. در حالی که برخی از محققان معتقدند که این مؤلفه، در تدریس ریاضی تأثیرگذار است. برای نمونه، گویا (۱۹۹۲) و پترو و گولدینگ (۲۰۱۱) ابراز می‌دارند که اگر معلمان باور داشته باشند که ریاضی به‌طور خاص، مجموعه‌ای از قوانین و رویه‌های معمولی است که باید به خاطر سپرده شود، رویکرد آن‌ها در رویارویی با مسائل ناآشنای ریاضی، محدود خواهد شد و این امر، ممکن است بر تدریس آن‌ها تأثیر بگذارد. باورها ممکن است در توسعه دانش نحوی؛ جایی که حدس

زدن، یافتن شواهد و بیان توضیحات از یافتن قوانین و رویه‌های معمولی در زمینه‌های قابل تشخیص، کاملاً متفاوت است، نقش برجسته‌ای داشته باشند.

۳.۳. جرح و تعدیل دانش معلمان ریاضی در بستر کلاس درس<sup>۱</sup>: نظرات فیما و فرانک. فیما و فرانک (۱۹۹۲) بر تدریس ریاضی و نیز بر اهمیت نقش باور معلمان در تدریس متمرکز شدند. مدل ارائه‌شده توسط آن‌ها، اساساً مبتنی بر چارچوب شولمن است. اما با تأکید بر این‌که دانش مورد نیاز برای تدریس ریاضی دارای ماهیت پویا و تعاملی است، فیما و فرانک (۱۹۹۲) مدل شولمن را جرح و تعدیل نمودند و مدلی برای توصیف دانش‌های مورد نیاز معلمان برای تدریس ریاضی پیشنهاد دادند. مدل آنان شامل چهار مؤلفه «دانش در مورد ریاضی»، «دانش پداگوژیکی»، «دانش شناخت دانش‌آموزان» و «دانش باورهای معلمان» است (شکل ۲).



شکل ۲. دانش معلمان: جرح و تعدیل شده در بستر کلاس درس (فیما و فرانک (۱۹۹۲)، صفحه ۱۶۲)

این مدل، بهای اصلی را برای تولید و توسعه، به بستر کلاس درس می‌دهد. به باور فیما و فرانک (۱۹۹۲)، بستر کلاس درس باعث می‌شود تا دانش محتوایی معلمان به دانش پداگوژی آن‌ها مرتبط شود. همچنین در بستر کلاس درس است که شناخت دانش‌آموزان با باورهای معلم ترکیب می‌شود و دانش

<sup>۱</sup>Context

تولید شده بر اثر این تعامل، عمل‌های تدریس و رفتار معلم را در کلاس شکل می‌دهد. به علاوه، تأکید آن‌ها بر این است که تدریس، فرآیندی است که طی آن، معلم می‌تواند دانش خود را تغییر دهد و دانش جدیدی تولید نماید که این، به معنای پویا بودن دانش مورد نیاز برای تدریس است. برای مشخص‌تر شدن اجزای این مدل، برای هر یک توضیحی اجمالی می‌دهیم.

**دانش دربارهٔ ریاضی:** شامل مفاهیم، رویه‌ها، رویه‌های حل مسأله، دانش مفاهیم زیربنایی و رویه‌ها و ارتباط مفاهیم با یکدیگر است. این مؤلفه، به چگونگی استفاده از مفاهیم و رویه‌ها در انواع مختلف حل مسأله نیز اشاره دارد.

**دانش پداگوژیکی:** به دانش معلمان در مورد رویه‌های تدریس مانند استراتژی‌های مؤثر برای برنامه‌ریزی، رویه‌های معمولی کلاس درس، روش‌های مدیریت رفتار، رویه‌های سازمان‌دهی کلاس درس، روش‌های ایجاد انگیزه و نیز، روش‌های بازنمایی مناسب اشاره می‌کند.

**دانش شناخت دانش‌آموزان:** شامل دانش در مورد تفکر و یادگیری دانش‌آموزان است. این مؤلفه در مورد این‌که چگونه تفکر و یادگیری دانش‌آموزان در محتوای خاص ریاضی آشکار می‌شود، بحث می‌کند. همچنین درک فرآیندهای مورد استفاده توسط دانش‌آموزان و پیش‌بینی موفقیت یا عدم موفقیت آنان، در این مقوله جا می‌گیرد. تفاوت مدل فینما و فرانک با مدل شولمن در این است که «شناخت دانش‌آموزان» در آن، به‌عنوان مؤلفه‌ای مستقل از مؤلفه دانش پداگوژیکی شولمن در نظر گرفته شده است. اما هر دو مدل، بر این ایده که دانش چگونگی تفکر و یادگیری دانش‌آموزان عاملی مهم در تدریس کارآمد است، تأکید کرده‌اند.

**جمع‌بندی:** فینما و فرانک (۱۹۹۲) اظهار می‌دارند که تمام جنبه‌های دانش معلمان و باور آن‌ها، به یکدیگر مرتبط هستند و این مؤلفه‌ها با هم، در یک تدریس کارآمد ریاضی نقش سازنده‌ای ایفا می‌کنند. ایشان بر این باورند که دانش معلمان در زمینه‌های خاص و اغلب از طریق تعامل با موضوع درسی و دانش‌آموزان، توسعه می‌یابد. بنابراین به نظر آن‌ها، چالش‌های موجود در تحقیقات مربوط به حوزه دانش معلمان، باید نوعی از روش‌شناسی را تولید کند که در آن، تمام این مؤلفه‌ها با هم دیده شوند. آن‌ها توصیه می‌کنند که برای پژوهش در زمینه دانش‌های مورد نیاز معلمان برای تدریس، ضروری است که روش‌شناسی‌های مناسبی برای شناخت عمیق‌تر ماهیت تعاملی بین مقوله‌های مختلف دانش معلمان و نقشی که این تعامل در تدریس ریاضی بازی می‌کند، ابداع شوند تا بتوان به‌کمک آن‌ها، شناخت همه‌جانبه‌تری از چگونگی تعامل معلمان با دانش‌آموزان خود در کلاس‌های درس ریاضی، پیدا نمود.



۴.۳. مقوله‌های دانش معلمان: دیدگاه وایت و همکاران. وایت، یاورسکی، آگودلو- والدراما و گویا (۲۰۱۳) به دو نوع دانش عملی و نظری اشاره می‌کنند و معتقدند که بین دانش نظری و دانش برخاسته از عمل تدریس، تفاوت‌هایی وجود دارد. دانش برخاسته از عمل که در ادبیات آموزشی به «دانش پیشه‌وری<sup>۱</sup>» به معنای هنر و مهارت ویژه آن پیشه و برخاسته از آن معروف است، به دانشی اطلاق می‌شود که معلمان آن را طی فرآیندهای بازتاب و حل عملی مسأله و برای پاسخگویی به نیازهای حرفه‌ای خود می‌سازند و توسعه می‌دهند. در مقابل، «دانش نظری» قرار دارد که شامل اصول و چارچوب‌هایی است که از مطالعات پژوهشی حاصل شده است و قابل تعمیم به زمینه‌ها و حوزه‌های دیگر است و کمتر بر شخص معلم و جزئیات عملی برای تدریس، متمرکز است. این در حالی است که دیویس و اسمیت (۲۰۰۶)، نقل شده در زازکیس (۲۰۱۰) معتقدند که لزومی به جدا کردن محتوا و پداگوژی نیست. به نظر آن‌ها، «ریاضی برای تدریس» را می‌توان به‌عنوان شاخه‌ای از نظام ریاضی در نظر گرفت که در آن، جنبه‌های درهم‌تنیده‌ای مانند اشیاء ریاضی، ساختارهای برنامه درسی، جامعیت<sup>۲</sup> کلاس درس و درک ذهنی، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند.

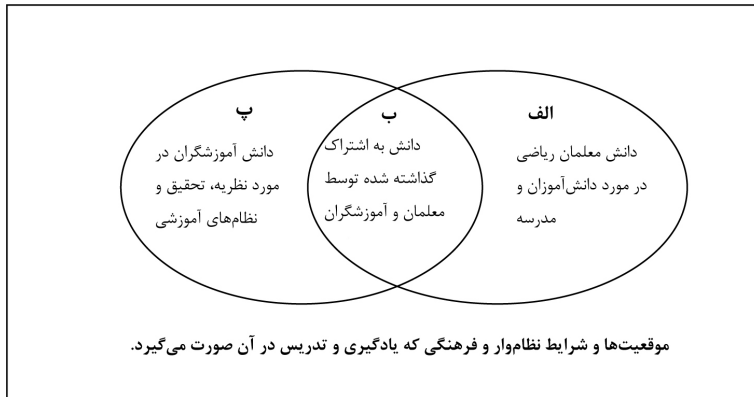
#### ۴. تأثیر انواع دانش‌های مورد نیاز برای تدریس ریاضی، بر جهت‌گیری پژوهش در حوزه آموزش معلمان ریاضی

مقوله‌بندی‌های ارائه شده در رابطه با جنبه‌های مختلف دانش ریاضی مورد نیاز برای تدریس، موضوع‌های پژوهشی مختلفی برای محققان ایجاد کرده است. مثلاً بال و همکاران (۲۰۰۸) بر ارزیابی مؤلفه‌های متفاوت دانش معلمان ریاضی تمرکز کرده‌اند. در صورتی که دیویس و اسمیت (۲۰۰۶) تلاش کرده‌اند تا از طریق پژوهش‌های خود دریابند که معلمان ریاضی «چه می‌دانند» و «چه باید بدانند». علاوه بر این‌ها، بال (۲۰۰۸) تلاش کرد تا رابطه بین انواع مختلف دانش مورد نیاز را برای تدریس ریاضی، مشخص کند. در مقابل، همان‌طور که زازکیس (۲۰۱۰) توضیح داده است، بعضی دیگر از محققان مانند واتسون (۲۰۰۸)، از مقوله‌بندی دانش معلمان ریاضی خودداری کرده و در عوض، دانش ریاضی مورد نیاز را برای تدریس، «مشارکت در عمل‌های ریاضی کلاس درس و نیز هنگام آماده شدن برای تدریس» دانسته‌اند. اما به هر تقدیر، او ابراز می‌کند که این دیدگاه‌های مختلف، همگی در این واقعیت که ماهیت دانش ریاضی معلمان حوزه‌ای پیچیده است، توافق دارند و به همین جهت، برای تحقیق در مورد دانش‌های ریاضی مورد نیاز معلمان ریاضی، جنبه‌های مختلفی را در نظر گرفته و بر آن تمرکز کرده‌اند.

<sup>۱</sup>Craft Knowledge <sup>۲</sup>Collectivity

علاوه بر این، لی‌پینگ ما<sup>۱</sup> (۱۹۹۹)، ایده «درک عمیق مفاهیم بنیادین ریاضی<sup>۲</sup>» را ارائه نمود. او طی مصاحبه با ۷۲ معلم دوره ابتدایی در چین، مفهوم «بسته‌های دانش<sup>۳</sup> را معرفی کرد. این بسته‌های دانش، به سازمان‌دهی و توسعه مجموعه‌ای از ایده‌های مرتبط با هم در یک حوزه خاص حساب<sup>۴</sup> اشاره دارند. از نظر لی‌پینگ ما (۱۹۹۹)، برای این‌که معلمان بتوانند از دانش ریاضی خود در تدریس استفاده کنند، باید قادر باشند تا روابط بین مجموعه‌ای از ایده‌ها را ساختار بندی کنند و یک خط سیر افقی از فرآیند توسعه مفاهیم را ترسیم نمایند که ماهیت این دانش، «محتوایی-پداگوژیکی» است. در مجموع، پژوهش‌های انجام شده در چند دهه گذشته نشان می‌دهند که دانش ریاضی مورد نیاز برای یک معلم کارآمد ریاضی، با دانش مورد نیاز برای یک ریاضی‌دان با صلاحیت، یا دانش ریاضی مورد نیاز برای کاربرد ریاضی در حوزه‌های دیگر مانند مهندسی و علوم، متفاوت است. بال (۲۰۰۳) با تأکید بر این‌که در تدریس ریاضی، به نوع خاصی از دانش ریاضی نیازمندیم، معتقد بود که شواهد و توصیفات تجربی کافی در مورد دانش ریاضی مورد نیاز برای تدریس کارآمد، وجود ندارد. وی با اشاره به توسعه قابل توجه بنیان‌های نظری این حوزه که می‌تواند پشتوانه مناسبی برای انجام پژوهش‌های میدانی و یافته‌های تجربی با توصیفات دقیق از کلاس درس باشد، پژوهش‌های متعددی را طراحی و اجرا نمود که نتایج آن‌ها، راهگشای پژوهش‌های بیشتری در این زمینه شد.

برای نمونه، یاورسکی (۲۰۰۸، ص ۲۰). جنبه‌های مختلف دانش معلمان ریاضی و آموزشگران ریاضی را در ارتباط با یکدیگر نشان داده است (شکل ۳).



شکل ۳. توصیف جنبه‌های مختلف دانش معلمان ریاضی و آموزشگران ریاضی در ارتباط با یکدیگر

<sup>۱</sup> محقق به‌طور عامدانه به نام و نام خانوادگی ارجاع داده است تا با کلمه «ما» در فارسی اشتباه نشود.

به‌گفته‌ی یاورسکی (۲۰۰۸)، با وجود این‌که این نوع دانش، ممکن است برای معلمان و آموزشگران تعبیرهای متفاوتی داشته باشد، می‌تواند پایه‌ای مناسب برای برقراری ارتباط بین آن‌ها در حوزه‌ها، تجربه‌ها و علایق مشترک باشد. علاوه بر این، همان‌طور که در قسمت‌های (الف) و (پ) (شکل ۳) دیده می‌شود، معلمان و آموزشگران، دانش تخصصی خاص خود را دارند. به‌طور مثال، آموزشگران الزاماً دانشی غنی در زمینه‌ی مدرسه و دانش‌آموزان ندارند. معلمان نیز ضرورتاً در زمینه‌ی دانش نظری و پژوهشی، قوی نیستند. شکل (۳) نشان‌دهنده پیچیدگی موجود در محیط‌های آموزشی است که تدریس و توسعه‌ی تدریس در آن‌ها صورت می‌گیرد. به هر حال، تعامل مناسب بین معلمان و آموزشگران معلمان، می‌تواند در ارتقای یادگیری حرفه‌ای هر دو گروه تأثیرگذار باشد.

علاوه بر این، زاسلاوسکی (۲۰۰۹) با توجه به نظریه‌ی تعامل اجتماعی ویگوتسکی که به ماهیت اجتماعی فرآیند یادگیری می‌پردازد، برنامه‌های یادگیری حرفه‌ای را به گونه‌ای طراحی کرد که در آن، معلمان و آموزشگران معلمان، یادگیرندگانی در نظر گرفته شدند که به‌طور مستمر بر کار خودشان بازتاب دارند. در این دیدگاه، معلمان ریاضی و آموزشگران معلمان ریاضی، اغلب به‌چشم دو جامعه درهم‌تنیده دیده می‌شوند که باعث توسعه یکدیگر می‌گردند.

در حالی که پژوهش‌های انجام شده در حوزه‌ی آموزش معلمان ریاضی به درجه‌ای از بلوغ رسیده است، اما در سال‌های اخیر، تنها دانش موضوعی مورد نیاز برای تدریس به‌طور فزاینده‌ای مورد توجه سیاست‌گذاران آموزشی در ایالات متحده قرار گرفته است. مثلاً برای آن‌که دانش‌آموزان در برنامه «هیچ کودکی عقب نماند»<sup>۱</sup> (راویچ، ۲۰۰۹)، با «معلمان با صلاحیت‌های سطح بالا»<sup>۲</sup> سر و کار داشته باشند، دولت فدرال اعلام کرده که معلمان باید صلاحیت‌های موضوعی خود را از طریق گواهینامه‌ها<sup>۳</sup>، رشته تحصیلی<sup>۴</sup> و نظایر آن به اثبات برسانند. همچنین هدف برنامه‌هایی مانند «مشارکت علوم- ریاضی»<sup>۵</sup> که به ابتکار مؤسسات «توسعه حرفه‌ای کالیفرنیا»<sup>۶</sup> و «بنیاد ملی علوم»<sup>۷</sup> تدوین و اجرا شده، فراهم کردن برنامه‌های توسعه حرفه‌ای محتوا - مدار است تا بدین ترتیب، دانش محتوایی معلمان ارتقا یابد.

## ۵. جمع‌بندی

یونسکو دهه‌ی اخیر را «دهه‌ی آموزش برای توسعه پایدار»<sup>۸</sup> نامگذاری کرده است و به‌دنبال آن، پروژه‌های با عنوان «چالش‌های آموزش ریاضی پایه»<sup>۹</sup> با پنج هدف تعریف نموده است که از بین آن‌ها دو مورد

<sup>۱</sup>No Child Left Behind    <sup>۲</sup>Highly qualified teachers    <sup>۳</sup>Certification    <sup>۴</sup>Subject matter major

<sup>۵</sup>Math-Science Partnership    <sup>۶</sup>California's Professional Development    <sup>۷</sup>National Science Found-

ation: NSF    <sup>۸</sup>Education for Sustainable Development: ESD    <sup>۹</sup>Challenges in Basic Mathematics

به‌طور خاص مربوط به آموزش معلمان ریاضی و تدریس ریاضی است. این دو مورد، یکی «آماده‌سازی و توسعه حرفه‌ای معلمان ریاضی» و دیگری، «دانش ریاضی مورد نیاز برای تدریس ریاضی و در حین تدریس» است. این پروژه معتقد است که «تمام این مباحث اگر در بسترهای بومی عرضه شوند، در مقایسه با دیگر کشورها، معنای متفاوتی خواهند داشت». اما در ادامه آورده است که «همین تفاوت است که اتخاذ رویکردهای مرتبط با تدریس و یادگیری ریاضی را ایجاب می‌کند و ما را از مفروض گرفتن یک زبان جهانی برای ریاضی و ویژگی‌های فرهنگی آن در این عصر و نسل، برحذر می‌دارد». علاوه بر این، یونسکو تأکید دارد که «لازم است مراقب مباحث اساسی و بحران‌هایی که در این راه ممکن است پیش آید، باشیم تا هم از خطر نقض فرهنگی توسط نوآوری‌ها، هم از خطر از «خودبیگانگی فرهنگی»<sup>۱</sup> و هم از خطر از دست‌دادن غنای فرهنگی موجود در مناطق مختلف جهان، اجتناب کنیم». این دغدغه‌ها و تأکیدها، انجام پژوهش‌هایی در حوزه تدریس ریاضی و آموزش معلمان ریاضی را از منظرهایی که هم مستند به یافته‌های جهانی بوده و هم به‌طور عمیق، متأثر از شرایط بومی/ فرهنگی کشورهای گوناگون باشد، ضروری کرده است.

این برنامه‌ها، مورد انتقاد شدید محافل آموزشی در آمریکا قرار گرفته که از موضوع بحث ما خارج است.

## مراجع

- [۱] پروژه ۲۰۶۱. (۱۹۹۷). ماهیت ریاضی. ترجمه زهرا گویا و نرگس مرتاضی مهربانی. رشد آموزش ریاضی. شماره ۷۶. صص. ۴ تا ۱۱. دفتر انتشارات کمک آموزشی. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش.
- [۲] غلام‌آزاد، سهیلا. (۱۳۸۶). موضوعات مطالعاتی در آموزش ریاضی ایران. رشد آموزش ریاضی. شماره ۸۹. دفتر انتشارات کمک آموزشی. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی. وزارت آموزش و پرورش. صفحات ۲۸-۳۳.
- [3] Ball, D. (2003). Teachers' Mathematical Knowledge: Its Development and Use in Teaching. *Mathematical Proficiency for all Students: Toward a Strategic research and development Program in Mathematics education/ RAND Mathematics study Panel*. Deborah Ball, Chair. pp. 15-27. RAND
- [4] Ball, D. L., & Bass, H. (2000). Making believe: The collective construction of public mathematical knowledge in the elementary classroom. In D. Phillips (Ed.), *Yearbook of the National Society for the Study of Education, Constructivism in Education*, (pp. 193-224). Chicago: University of Chicago Press.

- [5] Ball, D., Thames, M., Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes it Special. *Math Teacher Education*. pp. 389-407.
- [6] Bass, H. (2004). Mathematics, Mathematicians, and Mathematics Education. *First Plenary Lecture of the 10th International Congress on Mathematical Education*. 4-11 July, 2004, Denmark.
- [7] Clarke, D., & Hollingsworth, H. (2002). Elaborating a model of teacher professional growth. *Teaching and Teacher Education*, 18, pp. 947-967.
- [8] Even, R. (2008). Facing the challenge of educators to work with practicing mathematics teachers. In T. Wood, B. Jaworsky, K. Krainer, D. Tirosh, P. Sullivan (Eds.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education*. Vol.4. Pp. 57-74.
- [9] Fennema, E., & Franke, L.M. (1992). Teachers' Knowledge and its impact. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. Pp. 147-164. New York: Macmillan.
- [10] Goos, M. (2009). Investigating the professional Learning and Development of Mathematics Teacher Educators: A theoretical Discussion and Research Agenda. In R. Hunter, B. Bicknell, & T. Burgess (Eds.), *Crossing divides: Proceedings of the 32nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol.1). Palmerston North, NZ: MERGA.
- [11] Goodchild, S. (2008). A Quest for 'Good' Research. . In T. Wood, B., Jaworski (Eds.), *The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional*. pp. 201-220.
- [12] Hill, H.; Ball, D. & Shilling, S. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and measuring Teachers' Topic-Specific Knowledge of Students. *Research in Mathematics Education*. Vol.39. PP.372-400.
- [13] Hill, C.; Rowan, B., & Ball, D. (2005). Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement. *American Educational Research Journal*. PP.371-406.
- [14] Jaworski, B. (2003). Research Practice into/Influencing Mathematics Teaching and Learning Development: Towards A Theoretical Framework Based on Co-Learning Partnership. *Educational Studies in Mathematics* 54: 249-282, 2003. 2003 Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.
- [15] Jaworski, B. (2006). Theory and practice in mathematics teaching development: critical inquiry as a mode of learning in teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*.
- [16] Jaworski, B. (2008). Development of Mathematics Teacher Educator and its relation to teaching development. In T. Wood, B., Jaworski, K., Krainer, D., Tirosh, P., Sullivan (Eds.) *The*

- International Handbook of Mathematics Teacher Education*. Vol. 1, pp.17-36. Bergen, Norway: international group for the Psychology of Mathematics.
- [17] Krainer, K. (2000). Teacher Education as Research – A Trend in European Mathematics Teachers Education. University of Klagenfurt. Lecture at ICME 9, WGA 7, Tokyo, August 2000.
- [18] Krainer, K; Kieran, C; & Shaughnessy, J.M. (2013). Linking Research to Practice: Teachers Education Research. In M. A. (Ken) Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. Leung. (Eds.). *Third International Handbook of Mathematics Education*. Springer.
- [19] Llinares, S., & Krainer, K (2006). Professional aspects of teaching mathematics. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, present and future*, (pp. 429–459). Rotterdam: Sense Publishers.
- [20] National council of Teachers of Mathematics. (2010). *Professional Development Research Brief: Mathematics Professional Development*. The Author.
- [21] Ma, L. P. (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States*. Mahwah, N J: Lawrence Erlbaum Associates.
- [22] Perks, P.; & Prestage, S. (2008). Tools for learning about teaching and learning. In B. Jaworski and T. Wood (Eds.). *The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional*. Pp. 265-280. Sense Publishers.
- [23] Petrou, M; Goulding, M.(2011). Conceptualising Teachers' Mathematical Knowledge in Teaching. In T.Rowland & K.Ruthven (Eds.) *Mathematical Knowledge in Teaching*. Springer. Pp. 9-25.
- [24] Ravitch, D. (2009). Time to Kill 'No Child Left Behind'. From Education Week [American Education's Newspaper of Record], Wednesday, June 10, 2009, Volume 28, Issue 33, pp. 30-36. [http://www.edweek.org/ew/articles/2009/06/04/33ravitch\\_ep.h28.html?tkn](http://www.edweek.org/ew/articles/2009/06/04/33ravitch_ep.h28.html?tkn)
- [25] Roesken. B. (2011). Hidden Dimensions in the Professional Development of Mathematics Teachers: In-Service Education for and with Teachers. Sense Publisher. Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press.
- [26] Schoenfeld, A. H. (2010). *How We Think: A Theory of Goal-Oriented Decision Making and its Educational Applications (Studies in Mathematical Thinking and Learning Series)*. Taylor and Francis Press.
- [27] Shulman, L.S. (1986). Those who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*. Vol 15, No. 2. Pp. 4-14. American Educational Research Association.

- [28] Timperley, H. (2011). *Realized the Power of Professional Learning*. Open University Press.
- [29] White, A.; Jaworski, B.; Agudelo- Valderrama, C.; & Gooya, Z. (2013). Teachers learning from teachers. In M. A. (Ken) Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. Leung. (Eds.). *Third International Handbook of Mathematics Education*. Springer.
- [30] Zazkis, R; Zazkis, D.(2010). The significance of Mathematical Knowledge in Teaching Elementary Methods Courses: Perspectives of Mathematics Teacher Educators. Published Online. Springer
- [31] Zaslavsky, O.; & Leikin, R. (2004). Professional development of mathematics teacher educator: Growth through practice. *Journal of Mathematics Teacher Education*. Kluwer Academic Publishers.
- [32] Zaslavsky, O. (2009). Mathematics Educators' Knowledge and Development. In Even, D.L. Ball (Eds.). *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics*. pp. 105-11.
- [33] Zehetmeier, S., Krainer, k. (2011). Ways of promoting the sustainability of mathematics teachers' professional development. *ZDM Mathematics Education*. pp. 875-887.