فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

شماره ۵۹ (پاییز و زمستان ۱۳۹۵) صص. ۷ تا ۲۷

سیر تاریخیِ فلسفهٔ ریاضیات*

سیاوش شهشهانی

چکیده

در این مقاله، تاریخ فلسفهٔ ریاضی را در سه دوره مورد مطالعه قرار می‌دهیم. دورهٔ اول، از ادوار باستانی تا اواخر قرن هفدهم میلادی؛ دورهٔ دوم که با ابداع حساب دیفرانسیل و انتگرال توسط نیوتن و لایب‌نیتس آغاز می‌شود و حدوداً دو قرن به درازا می‌کشد؛ و دورهٔ سوم، از زمان دقیق‌سازیِ مبانی آنالیز ریاضی توسط وایرشتراس و دیگران تا به امروز. همچنین سه مکتب فلسفیِ منطق‌گرایی، صورتگرایی و شهودگرایی در ریاضیات را نقد و نقاط ضعف و قوت آنها را بررسی می‌کنیم. نشان خواهیم داد که این سه مکتبِ غالب در فلسفهٔ ریاضی، هر یک با روی گردانیدن از تجربهٔ عینی ریاضی‌کاران، به مقوله‌ای مستقل از ریاضیات تبدیل شده است که جوابگوی کنجکاوی‌های فلسفی ریاضیدانان حرفه‌ای نیست.

۱. سرآغاز

«... روش توصیف تاریخی ... روش محبوب سخنرانان وحشت‌زده است که محدودیت‌های آن را حربه‌ای برای مهار کردنِ لفّاظی حرص‌آلود خود می‌یابند.»[۱] اما بی‌شک اگر بررسی تاریخی، کمکی به کاهش لفّاظی باشد، باید از آن بهره جُست. ولی در مطالعهٔ فلسفهٔ ریاضیات، دلایل مثبت‌تری نیز برای به‌کارگرفتن بررسی تاریخی وجود دارد. یکی از مضمون‌هایی که سعی خواهم کرد در این سخنرانی بپرورانم،

عبارات و کلمات کلیدی. فلسفهٔ ریاضی، صورتگرایی، منطق گرایی، شهودگرایی، استدلال در ریاضیات.

*این مقاله بر اساس یک سخنرانی در «سمینار فلسفه، منطق و روش‌شناسی ریاضی» که در اردیبهشت‌ماه سال ۱۳۵۹ ایراد شده، تهیه شده است. این مقاله را بیش از ۳۵ سال پیش نوشته‌ام و اکنون نسبت به برخی مطالب آن نظری متفاوت دارم. با این حال بهتر دیدم فقط به چند تصحیح کوچک، اکثراً چاپی، اکتفا کنم (نگارنده).

[۱] داستایوفسکی در رمان **برادران کارامازوف**، کتاب دوازدهم، بخش نهم.

ارتباط مستقیم تمایل‌های فلسفی در هر دوره از تاریخ ریاضیات با چهره و واقعیت ریاضیات آن دوره است. خواهیم دید که گرایش‌های متداول یک دوره، هرچند که از دید معاصران طبیعی و بدیهی به نظر برسد، ممکن است عکس‌العمل یا طغیانی بیش نبوده باشد. به‌عکس، آنچه که امروز در نظر ما نوعی جزمی‌گرایی در بعضی دوره‌های تاریخ ریاضیات به نظر می‌رسد، ممکن است در زمان خود، نقشی مهم در حفظ یکپارچگی و بقای این علم دارا بوده باشد.

به‌طورکلی، فلسفهٔ ریاضیات مشتمل بر مقوله‌های وجود[۱] (هستی‌شناسی)، معرفت[۲] (شناخت‌شناسی) و روش‌شناسی[۳] است. مقولهٔ «وجود» در فلسفهٔ ریاضی، به بررسی اشیاء (مفاهیم) ریاضی و نحوهٔ وجود آنها اختصاص دارد. در مقوله‌های معرفت و روش‌شناسی، مسائلی از قبیل ماهیت اثبات ریاضی، منشأ اعتقاد ما به قضیه‌های ریاضی و فرآیند رشد نظریه‌های ریاضی مورد گفتگو قرار می‌گیرد. البته این مقوله‌ها از یکدیگر تفکیک‌شده نیستند و یک مکتب فلسفی ریاضی باید موضع منسجمی در برابر سؤالاتی که از این مقوله‌ها بر می‌خیزند، اتخاذ کند. بد نیست یکی دو نمونه از سؤال‌هایی را همیشه در فلسفهٔ ریاضی مطرح بوده است و در این سخنرانی نیز مرتباً به آنها اشاره خواهد شد، بیان کنم. یکی از اساسی‌ترین مسائل فلسفهٔ ریاضی، تشریح منشأ یقین[۴] در ریاضیات است. همهٔ ما می‌دانیم که گزاره‌های ریاضی از درجهٔ یقینی بالاتر از درجهٔ یقین احکام سایر علوم برخوردارند. در واقع بسیاری از اوقات، از ریاضیات به‌عنوان تنها رشتهٔ معرفت بشری که در آن، «حقیقت مطلق» معنا دارد، یاد می‌شود. منشأ این درجهٔ یقین چیست؟ آیا احکام ریاضی به درستی بیانگر حقیقت مطلق هستند و یا اینکه در این احکام نیز نوعی نسبیت وجود دارد؟ آیا درستی احکام ریاضی صرفاً وابسته به ماهیت صوری آنها است و یا اینکه این احکام دارای محتوای خبری هستند؟ مسئلهٔ دیگری که از قدیم‌الایام، هم در میان فلاسفه و هم در میان ریاضیدانان جنجال‌برانگیز بوده است، مسئلهٔ دوگانگیِ «پیوسته» و «گسسته» است. این سؤال که در ریاضیات، کمیت‌ها یا مفاهیم متصل، تقدّم دارند و یا کمیت‌ها یا مفاهیم منفصل، احتمالاً قدمتی همردیف با قدمتِ خودِ فلسفه دارد. خواهیم دید که جواب‌های رایج به این سؤال، همواره ارتباط نزدیکی با گرایش‌های ریاضی زمانه و نیز دیدگاه‌های متداول فلسفهٔ ریاضی داشته‌اند.

در سخنرانی‌های گذشته و به‌ویژه بحث‌های متعاقب آنها، پدیده‌ای به چشم می‌خورد که لازم است آن را نیز به‌عنوان یک نکتهٔ مقدماتی در میان بگذارم؛ چه به گمان من، این مطلب رابطه‌ای اساسی با دو واقعیت عینی زیر دارد: یکی اینکه اکثر ریاضیدانان از بحث‌های علنی دربارهٔ فلسفهٔ ریاضی گریزانند؛ اگرچه کمتر ریاضیدانی هست که به‌طور خصوصی تمایل و سلیقهٔ ویژه در این زمینه نداشته باشد. دیگر اینکه موضوع فلسفهٔ ریاضی در دو – سه دههٔ اخیر تحول عمده‌ای به خود ندیده و در مقایسه با بیشتر مقولات فلسفی، رشته‌ای عقیم و عقب‌مانده است. مطلبی که در ذهن دارم این است که علی‌رغم عنوان **سمینار**

[۱]ontology [۲]epistemology [۳]methodology [۴]certainty

فلسفهٔ ریاضی، در بحث‌های جلسات گذشته، صحبت‌های بسیاری از مکانیک کوانتمی و نظریهٔ نسبیت (که از نظریه‌های فیزیک نوین هستند) به میان آمد در حالی که عملاً اشاره‌ای به نظریه‌های ریاضی معاصر نشد؛ البته سوای آنچه دربارهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها و منطق ریاضی (به‌اصطلاح، «مبانی ریاضی») بیان گردید. بی‌شک عده‌ای ایراد مرا نابجا دانسته، دلایلی از این قبیل در رد آن اظهار خواهند کرد:

۱- تمام ریاضیات امروز (به‌استثنای بعضی گوشه‌های نظریهٔ رسته‌ها) بر پایهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها بنا شده است. بنابراین کافی است توجه فلسفهٔ ریاضی را به بررسی فلسفی نظریهٔ مجموعه‌ها و منطق ریاضی (که در ارتباط نزدیک با نظریهٔ مجموعه‌ها است) معطوف کنیم.

۲- بیشتر تحقیقات ریاضی امروز، در جهت رشد درونی ریاضی است و در نتیجه، اثری بر مقولات فلسفی ندارد.

۳- نظریه‌های مکانیک کوانتمی و نسبیت، تأثیری ژرف بر بینش فلسفی انسان از جهان نهاده‌اند؛ در حالی که تنها اکتشاف ریاضی معاصر که بتوان نقشی مشابه برایش قائل شد، قضیهٔ گودل و شاید ظهورِ بی‌نهایت‌های بالفعل در نظریهٔ مجموعه‌ها باشد که این‌ها نیز به مبحث نظریهٔ مجموعه‌ها تعلق دارند.

در مورد ادعای اول، باید بگویم که حتی اگر بنا ساختن ریاضیات بر پایهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها را بپذیریم، تأثیر این نظریه بر بیشترِ پژوهش‌های ریاضی، امری است کاملاً سطحی و از نقش یک زبان تجاوز نمی‌کند. مثلاً حتی نمی‌توان نقش نظریهٔ مجموعه‌ها را در ریاضیات با نقش ریاضیات در فیزیک، مقایسه کرد، زیرا از آغازِ فیزیک به‌عنوان یک علم در قرن هفدهم میلادی تا به امروز، نهادهای ریاضی نقشی عمیق و حیاتی در بیان قوانین فیزیک داشته‌اند؛ در حالی که بیشترِ مطالب ریاضیات امروز، دنبالهٔ طبیعی اکتشافات پیش از ظهور نظریهٔ مجموعه‌ها است. کمتر کشف مهم ریاضی در قرن بیستم است که نتوان بدون جدا کردنِ محتوای اصلی، به زبان ریمان و پوانکاره ترجمه کرد. غور در مبانی نظریهٔ مجموعه‌ها و منطق ریاضی حداکثر همان‌قدر به فلسفه و شناخت ریاضی کمک می‌کند که مطالعهٔ دستور زبان برای بررسی ادبیات. در واقع سعی خواهم کرد ثابت کنم که نقش نظریهٔ مجموعه‌ها از این نیز ناچیزتر است و اتکای متداول امروزی به آن، خود زاییدهٔ دیدگاه‌های خاص در فلسفهٔ ریاضی است.

در مورد ادعای دوم، مرز مشخصی میان مسائل درونی و مسائلی که می‌توانند واکنش فلسفی ایجاد کنند وجود ندارد، زیرا سیر پژوهش‌های واقعاً بدیع و اثرات احتمالی آنها، قابل پیش‌بینی نیست. نباید فراموش کرد که نظریهٔ مجموعه‌های کانتور، تا حدود زیادی، زادهٔ پژوهش‌های او در بعضی مسائل کاملاً درونی مربوط به سری‌های مثلثاتی بود. در هر صورت، اگر فلسفهٔ یک علم، تحولات آن علم را نادیده بگیرد، به‌سرعت تبدیل به مجموعه‌ای بی‌ارتباط با موضوع اصلی خود می‌شود. مدعی هستم که این دقیقاً وضعیتی است که در فلسفهٔ ریاضی پدید آمده است. در این سخنرانی، سعی خواهم کرد نشان دهم که سه

مکتب غالب فلسفهٔ ریاضی ، یعنی منطق‌گرایی[۱]، شهودگرایی[۲] و صورتگرایی[۳]، هر یک با روی گردانیدن از تجربهٔ عینی ریاضی‌کاران، به مقوله‌ای مستقل از ریاضیات تبدیل شده است که جوابگوی کنجکاوی‌های فلسفی ریاضیدانان حرفه‌ای نیست.

سرانجام، دربارهٔ نکتهٔ سوم، شکی نیست که نظریه‌های فیزیک نوین، دگرگونی‌های عمیقی در دیدگاه‌های فلسفی ایجاد کرده‌اند، ولی کافی است یادآوری کنم صحبت اصلی ما در اینجا **فلسفهٔ ریاضی** است نه فلسفه به مفهوم عام یا بررسی عواملی که بر دیدگاه‌های فلسفی اثر گذاشته‌اند.

۲. دوران باستان

برای بررسی تاریخ فلسفهٔ ریاضی، به نظر من باید سه دوره را در نظر گرفت. دورهٔ اول، از ادوار باستانی تا اواخر قرن هفدهم میلادی؛ دورهٔ دوم که با ابداع حساب دیفرانسیل و انتگرال توسط نیوتن و لایب‌نیتس آغاز می‌شود و حدوداً دو قرن به درازا می‌کشد؛ و دورهٔ سوم ، از زمان دقیق‌سازی مبانی آنالیز ریاضی توسط وایرشتراس و دیگران تا به امروز.

در دورهٔ اول، مبحث هستی‌شناسی در ریاضی، از بررسی «وجود» در سایر علوم جدا نیست. ریاضیات علم کمیت‌ها و شکل‌ها است و هدف آن بررسی این گونه خواص اشیاء تجربی است. پایهٔ تجربی ریاضی در این دوره، به‌روشنی مشهود است. هندسه از اندازه‌گیری شروع می‌شود و حساب از تدوین جدول‌های نجومی و دفترداریِ امور تجاری و اداری سرچشمه می‌گیرد. کشفِ عدد ثابت **پی** (یعنی اینکه نسبت محیط دایره به قطر آن، عددی مستقل از اندازهٔ دایره است)، یکی از نخستین کشف‌های **علم تجربی** است. یونانیان باستان، برای آنچه ما امروز قضیه مینامیم دو لغت متمایز Theorema و Porisma را به‌کار می‌بُردند. کلمهٔ Theorema به معنی بینش یا شهود، به آن دسته از قضیه‌های ریاضی اطلاق می‌شود که صحتشان قبل از اثبات دقیق ریاضی، تجربه شده است و نوعی واقعیت حائز اهمیت یا مستقل از ذهن را بیان می‌کنند. در حالی که Porisma به معنای «بادآورده»، واقعیتی است که نخست از طریق استنتاج ریاضی ظاهر می‌شود. این تمایز نشان می‌دهد که جنبهٔ صوری ریاضی در نظر یونانیان، نقشی فرعی دارد و محتوای عینی نتایج ریاضی است که در درجهٔ اول، مورد نظر آنها است. باید توجه داشت که حتی توسل به مُثُل افلاطونی در این اعتقاد که قضیه‌های ریاضی علی‌الاصول خواص اشیاء طبیعی را بیان می‌کنند، خللی وارد نمی‌کند. به‌عکس، از آنجا که در دیدگاه افلاطونی، جهان ایده‌ها از عینیتِ پایدارتری برخوردار است و مفاهیم ریاضی، والاترین وسیلهٔ ارتباط انسان با آن جهان می‌باشند، اصولاً عینیت‌های ریاضی مورد سؤال نیست. نیز روش اصل‌موضوعی اقلیدس در این دوره، اثری بر دیدگاه هستی‌شناسی ریاضی ندارد،

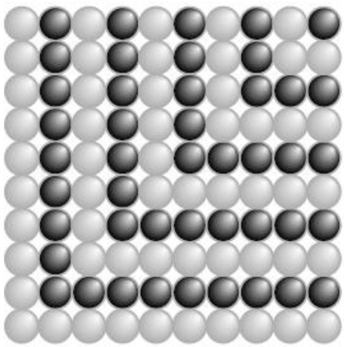
[۱] logicism [۲] intuitionism [۳] formalism

زیرا اصول اقلیدس، از نظر یونانیان بیانگر ابتدایی‌ترین خواص هندسی فضای واقعی محسوب می‌شود و صحت آنها به تجربه، مورد پذیرش عموم است.

در مبحث معرفت و روش‌شناسی در این دوره، آنچه ریاضیات را از سایر علوم متمایز می‌سازد، درجهٔ یقین ریاضی است و یقین در ریاضی، مبتنی بر «برهان» است و برهان نیز وسیله‌ای برای «دیدن» یا «اکتشاف» یک واقعیت است با کنارِ هم قرار دادنِ روابطی که صدقشان مورد تردید نیست. مثلاً برای اثبات اینکه مجموع هر چند عدد فرد متوالی که از یک آغاز شوند، مربع کامل است، یعنی

$$۱ + ۳ + ۵ + \cdots + (۲n + ۱) = k^{۲},$$

فیثاغورسیان شکل زیر را رسم می‌کنند:



حتی در عصر دقت و وسواس کنونی، کمتر کسی با اندک ذوق ریاضی است که با چند لحظه نگاه کردن به این شکل، به حکم مورد نظر یقین نیاورد. البته این حکم را می‌توان به روش استقرا، از اصول پئانو[۱] ثابت نمود. اینکه کدام اثبات ارجح است، به دیدگاه فلسفی ما بستگی دارد. به گمان من، اکثر ریاضی‌کاران، اثبات فیثاغورسی را روشن‌کننده‌تر و زیباتر می‌یابند. البته فراموش نکنیم که روش استقرا، یک وسیلهٔ کشف واقعیت نیست، بلکه حربه‌ای برای تأیید حدس‌هایی است که به روش‌های دیگر به آنها رسیده‌ایم.

در اینجا لازم است چند کلمه‌ای هم دربارهٔ جدال «پیوسته–گسسته» بیان کنم. شواهد تاریخی روشنی هست که حساب و هندسه پیدایش مستقل از یکدیگر دارند [۲۵]. حساب که با اعداد طبیعی سروکار دارد، تجلّی ریاضی مفاهیم گسسته است. در حالی که موضوع هندسه بر پایهٔ پیوستار[۲] صفحه و فضا می‌باشد. اولین برخوردِ این دو علم، در اندازه‌گیری طول‌های هندسی است. در اینجا حساب در هندسه کاربرد می‌یابد؛ به‌ویژه با توسعهٔ مفهوم عدد به اعداد کسری، به نظر می‌رسد که بتوان همهٔ طول‌های هندسی را با علائم حساب نمایش داد. کشف اولین عدد ناگویا (طول قطر مربع واحد) توسط فیثاغورسیان، بحرانی

[۱] G. Peano [۲] continuum

در ریاضی پدید آورد که نتیجهٔ آن، تفوّق هندسه بر حساب است و توسعهٔ مفهوم عدد به نحوی که بتوان به هر طول، عددی نسبت داد. تا زمانِ کشف (یا اختراع) حساب دیفرانسیل و انتگرال، هندسهٔ اقلیدسی، مظهرِ یقین علمی و محک سنجشِ یقین برای سایر مقولات است. حتی ابداع دستگاه مختصات و هندسهٔ تحلیلی توسط دکارت و فرما، که نتیجهٔ آن جبری‌سازیِ هندسه است، از تقدّم فلسفی هندسه نمی‌کاهد، زیرا علم جبر (دنبالهٔ طبیعی حساب)، خود بر پایهٔ پیوستار اعداد حقیقی، یعنی خط اقلیدسی بنا می‌شود.

۳. دورهٔ دوم

دو قرنی که دورهٔ دوم ریاضیات خوانده‌ایم، از یک سو دوران فتوحات درخشان و شگرف ریاضی است و از سوی دیگر، دوران بحران فلسفی در مبانی ریاضیات است. آنالیز نیوتن و لایب‌نیتس متکی بر مفهوم بی‌نهایت کوچک[۱] است که جای مناسبی در پیوستار اقلیدسی ندارد و فرض وجود آن خالی از تناقض و معما نیست. بینش اتمیِ لایب‌نیتس با فرضِ تقدمِ پیوستار، تضاد دارد. لایب‌نیتس که به‌خوبی از نادقیق بودنِ مبانی حساب دیفرانسیل و انتگرال آگاه بود، هرگز موفق نشد به نظری قاطع و نهایی دربارهٔ ماهیت و درجهٔ یقین این علم دست یابد. او در یک نوشته اظهار می‌کند که صحت نتایج حساب دیفرانسیل و انتگرال، تقریبی است ولی درجهٔ خطا ماهیتاً چنان کوچک است که قابل اندازه‌گیری نیست. در جایی دیگر، اذعان می‌کند که تنها دلیل پذیرشِ بی‌نهایت کوچک‌ها، کارایی آنها است و اینکه در عمل به نتایج درستی منجر می‌شوند [۲۳]. علی‌رغم این معضلات فلسفی، حساب دیفرانسیل و انتگرال حربهٔ چنان نیرومندی در اکتشافات ریاضی است که مشکلات مربوط به مبانی آن، همگی به حاشیه رانده می‌شوند. وضعیت مشابهی همزمان در علم فیزیک پدید می‌آید. قدرت مکانیک نیوتنی در پیش‌بینی پدیده‌های نجومی چنان است که تردیدهای شروع فلسفی نسبت به آن، حل‌نشده به خاموشی سپرده می‌شوند. ریاضیدانان این دوره، به‌خوبی از تزلزل و عدم یقینی که در مبانی آنالیز وجود دارد آگاه هستند و از این‌رو، بحث و مجادله دربارهٔ صحت قضیه‌های ریاضی، بسیار رایج است. با وجود این، تا مدت مدیدی، همت موفقیت‌آمیزی برای دقیق ساختن تعریف‌ها گمارده نمی‌شود. دوم اینکه علی‌رغم روشن نبودن مفاهیم اولیه، اشتباه فاحشی در ریاضیات رخ نمی‌دهد که موجب آشفتگی یا رکود تحقیق در ریاضی شود. در اینجا ممکن است ایراد گرفته شود که ادعای کوشی مبنی بر اینکه «حد یک دنباله از تابع‌های پیوسته، همواره پیوسته است»، نمونه‌ای از اشتباه‌های فاحش در این دوره است (مثال‌های دیگر از این نوع، فراوان است). البته چنین عبارتی در چارچوب دیدگاه‌های فلسفی ریاضی امروزی، یک اشتباه نابخشودنی محسوب می‌شود، ولی باید از دیدگاه دیگری به مسئله نگاه کرد. تعبیر دقیق کوشی از این ادعا هنوز روشن نیست و بحث‌های فراوانی در این زمینه شده است [۱۳].

[۱] infinitesimal به تعبیرِ لایب‌نیتس و fluxion به تعبیرِ نیوتن.

آنچه مسلم است این است که کوشی و ریاضیدانان زمان او، از مثال‌های ناقض این ادعا (به مفهوم امروزیِ تعاریف)، مانند سری فوریه‌ای که به یک تابع ناپیوسته میل می‌کند، کاملاً آگاه بوده‌اند. مثلاً آبل در جایی می‌نویسد که «قضیهٔ کوشی استثناهایی دارد» ولی ادعای کوشی را به نحوی، اساساً درست می‌داند. اگر امروزه این طرز بیان در ریاضی خیلی غریب به نظر می‌رسد به این دلیل است که دیدگاه هستی‌شناسیِ ریاضی در یک قرن اخیر، دگرگونی عظیمی به خود دیده است. در نظر ما، «تابع پیوسته» و «همگرایی»، اشیاء اصیل و اساسی ریاضی هستند که نهایتِ دقت در به‌کار بستنِ آنها رعایت می‌شود. در حالی که حتی در اوایل قرن نوزدهم میلادی، دیدگاه در مورد مقولهٔ وجود، اساساً همان دیدگاه دورهٔ اول است. اشیاء ریاضی یا عینیت فیزیکی دارند و یا مفهوم‌های بسیار مأنوس ریاضی هستند که در اثر تجربهٔ متمادی، عملاً عینیت یافته‌اند (مثلاً عددهای صحیح، شکل‌های هندسی و معادلات جبری). «اشتباه» در ریاضی وقتی رخ می‌دهد که نتیجه‌ای دربارهٔ این مفاهیمِ ملموس به‌دست آید که نادرستی آن قابل تحقیق باشد. در زمینهٔ معرفت نیز اثبات ریاضی هنوز یک حربهٔ اکتشاف است. قضیه‌ها و نظریه‌های کلیِ ریاضی، وسیله‌هایی برای روشن ساختنِ پدیده‌های خاص هستند. به‌قول کانت: «اثبات، یک طریق رسیدن به حقیقت است مانند دیدن و شنیدن.» چون کشف واقعیت‌های جالب، هدف نهایی ریاضیدانان است، برخی مانند اویلر از هیچ وسیله‌ای برای دست یافتن به واقعیت‌های ریاضی فروگذار نمی‌کنند. مثالی را که جورج پولیا گفته است [۱۷] برای کسانی که ندیده‌اند، نقل می‌کنم. اویلر می‌خواهد مجموع سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ را محاسبه کند. او می‌داند که اگر ریشه‌های یک چندجمله‌ای، عددهای α_1، α_2، …، α_n باشند، آن چندجمله‌ای به‌صورت $c(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$ است که در آن، c عددی ثابت است. تابع $\sin x$ یک چندجمله‌ای نیست و معادلهٔ $\sin x = 0$ بی‌نهایت جواب دارد که عبارت‌اند از:

$$0, \quad \pm\pi, \quad \pm 2\pi, \ldots .$$

با وجود این، اویلر به آزمایشی ماجراجویانه دست می‌زند. او حاصل‌ضرب بی‌نهایت عامل خطی را که از این ریشه‌ها به‌دست می‌آیند، در نظر می‌گیرد:

$$c(x^2-\pi^2)(x^2-4\pi^2)\cdots .$$

آیا این حاصل‌ضرب معنا دارد؟ آیا می‌توان با انتخابِ مقدار مناسبی برای c، این حاصل‌ضرب را مساوی با $\sin x$ دانست؟ البته اویلر کاملاً با سری تیلور آشنا است. او می‌داند که

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots .$$

ضریب x در این عبارت برابر با ۱ است و در عبارت قبلی برابر با

$$c(-\pi^2)(-4\pi^2)\cdots .$$

به همین دلیل، اویلر c را به‌طور صوری برابر با

$$\left(\frac{-۱}{\pi^۲}\right)\left(\frac{-۱}{۴\pi^۲}\right)\cdots$$

می‌گیرد و با توزیعِ عوامل آن در حاصل‌ضرب فوق، به فرمول زیر دست می‌یابد:

$$\sin x = x\left(۱-\frac{x^۲}{\pi^۲}\right)\left(۱-\frac{x^۲}{۴\pi^۲}\right)\cdots .$$

البته هنوز چیزی «ثابت نشده است» ولی اویلر می‌داند که ضریب جملهٔ درجهٔ اول، درست است. جملهٔ ناصفر بعدی، جملهٔ درجهٔ سوم است. اگر این فرمول درست باشد، مقایسهٔ ضریب جملهٔ درجهٔ سوم آن با ضریب جملهٔ درجهٔ سه در بسط تیلور تابع $\sin x$، نتیجه می‌دهد

$$-\frac{۱}{۶} = -\frac{۱}{\pi^۲}-\frac{۱}{۴\pi^۲}-\frac{۱}{۹\pi^۲}+\cdots .$$

بنابراین

$$۱+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۱۶}+\cdots=\frac{\pi^۲}{۶}.$$

اویلر آگاه است که «اثبات» او یقینِ اثبات‌های اقلیدسی را ندارد، پس بی‌درنگ به تحقیق دربارهٔ این تساوی می‌پردازد و با محاسبهٔ دو طرف تا تعداد زیادی رقمِ بعد از اعشار، یقین حاصل می‌کند که به واقعیت دست یافته است!

امروزه فیزیکدانان همچنان به چنین ماجراجویی‌هایی می‌پردازند و ریاضیدانان هم در خفای دفترِ کارشان، به این گونه آمایش‌ها دست می‌زنند ولی افشای چنین اعمالی در جامعهٔ ریاضی گناه کبیره محسوب می‌شود. یادآوری می‌کنم که مقصود من از آوردن این مثال‌ها، تأکید بر این مطلب است که در دورهٔ دوم تاریخِ ریاضی نیز، مانند دورهٔ اول، اشیاء ریاضی عینیتی مشابه سایر علوم دارند و اثبات ریاضی تنها، حربه‌ای است برای دست یافتن به روابط این اشیاء یا استحکام بخشیدن به روابطی که صحت آنها به طریق تجربی مشاهده شده است. حتی وایرشتراس که بعداً به‌عنوان نقطهٔ عطف دیدگاه فلسفی ریاضی از او یاد خواهد شد، در نامه‌ای به یک دوست ریاضیدانِ خود می‌نویسد: «اینکه برای یک ریاضیدان به‌عنوان مکتشِف، استفاده از هر روشی مشروع است، امری است بدیهی...»[۱] تفاوت عمدهٔ فلسفه‌های ریاضی در دوره‌های اول و دوم در این است که ریاضیات دورهٔ دوم (عمدتاً حساب دیفرانسیل و انتگرال)، بر پایهٔ متزلزلِ «بی‌نهایت کوچک‌ها» بنا شده است و یقینِ ریاضی که قرن‌ها در هندسهٔ اقلیدسی والاترین تجلی خود را یافته بود، دستخوش بحرانی نگران‌کننده می‌شود تا جایی که بزرگترین ریاضیدانان این دوره، به وجودِ «استثنا» برای قضیه‌های خود، تن در می‌دهند.

[۱] نقل از لاکاتش [۱۳].

پدیدهٔ دیگری از دورهٔ دوم که شایسته است به آن اشاره شود، پیدایش هندسه‌های نااقلیدسی است؛ گرچه به نظر من دربارهٔ اثر واقعیِ آن بر فلسفهٔ ریاضی دورهٔ دوم، غُلُو شده است. لباچفسکی و بویویی[۱] مستقل از یکدیگر درصدد بودند که از طریق برهان خلف، اصل توازی اقلیدس را از سایر اصول هندسهٔ اقلیدسی نتیجه بگیرند. تلاش‌های این دو، مانند کوشش‌های متقدمانشان، به نتیجه‌ای نمی‌رسد ولی هر یک با نقضِ اصل پنجم، به مجموعه‌ای چشمگیر از قضایای یک نوع هندسهٔ نااقلیدسی دست می‌یابد که در آن، تناقضی به چشم نمی‌خورد. هر دو عملاً قانع می‌شوند که نمی‌توان اصل توازی را از اصل‌های بدیهی‌ترِ اقلیدس نتیجه گرفت و انکارِ آن هم تناقضی ایجاد نمی‌کند. بر خلافِ آنچه برخی تاریخ‌نویسان دورهٔ بعدِ تاریخ ریاضی ادعا می‌کنند، عدمِ توجه مراکز عمدهٔ ریاضی به «کشفیات» لباچفسکی و بویویی به‌سببِ عدم شهرت این دو یا عدم تعلق آنها به این مراکز نیست. باید به دیدگاه فلسفی در آن زمان توجه کرد. در اوایل قرن نوزدهم، احتمالاً همهٔ ریاضیدانان بزرگ، به نحوی به استقلال اصل توازی یقین یافته‌اند و نتایج لباچفسکی و بویویی، تنها شواهدی بیشتر در این زمینه هستند. هیچ‌یک از این دو ریاضیدان، مدلی از یک فضای نااقلیدسی ارائه نمی‌کند.[۲] اصولاً آنچه در آن زمان مطرح است، سازگاریِ منطقی نظریه‌های ریاضی نیست، بلکه قدرت این نظریه‌ها در بیان روابط هندسیِ قابل ادراک است. کانت که مدعی است اثبات‌های ریاضی را نمی‌توان به‌طورکامل به استنتاج‌های منطقی محض تبدیل کرد، به شهودهای پیشینی[۳] از فضا و زمان معتقد است و اصول اقلیدس را از جمله شهودهای پیشینی می‌داند.

با این زمینهٔ فلسفی و آنچه قبلاً دربارهٔ دیدگاه‌های فلسفهٔ ریاضی در دورهٔ دوم گفتیم، روشن است که هندسهٔ نااقلیدسی تنها در صورتی در انظار ریاضیدانان این دوره دارای اهمیت است که نااقلیدسی بودنِ فضای قابل ادراک به‌طور جدی مطرح شود و چنین سؤالی در آن دوره مطرح نبود. باید این نکته را هم افزود که در بررسی هندسه‌های نااقلیدسی، گاوس[۴] به‌مراتب از لباچفسکی و بویویی جلوتر است. گاوس که با روش‌های تحلیلی، هندسهٔ دیفرانسیل را پایه‌گذاری می‌کند، موفق می‌شود مدل‌هایی دولبه از هندسه‌های نااقلیدسی ارائه کند که به‌صورت رویه‌هایی در فضای سه بُعدی اقلیدسی ظاهر می‌شوند. به زبان امروزی، گاوس ثابت می‌کند که اگر هندسهٔ اقلیدسی سازگار باشد، نظریه‌های نااقلیدسی نیز سازگارند. ولی جوّ فلسفهٔ ریاضی در آن زمان برای افشای این نتایج مساعد نبود و گاوس هرگز مبادرت به نشر این قضیه‌ها نکرد.

---

[۲] مدلی که گاهی به نام «هندسهٔ لباچفسکی» از آن یاد می‌شود (مثلاً درکتاب **هندسهٔ لباچفسکی** ترجمهٔ احمد بیرشک، انتشارات دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۵۹)، در واقع ساختهٔ پوانکاره است.

[۴] گاوس خود هرگز مطلب را به این صورت بیان نمی‌کند. بعدها بلترامی نشان داد که رویه‌هایی که خمیدگی ثابت منفی دارند، مدل‌هایی برای هندسهٔ لباچفسکی و بویویی هستند.

[۱] J. Bolyai [۳] a priori intuition

اکنون می‌پردازیم به کشمکش میان «گسسته و پیوسته» در دورهٔ دوم. پیوستار اعداد حقیقی و توسعهٔ آن به پیوستار اعداد مختلط که در واقع زمینهٔ نیروی عظیمی است که آنالیز به ریاضیات این دوره بخشیده است، خود ماهیتی معماگونه پیدا می‌کند که سرچشمهٔ اصلی بحران فلسفهٔ ریاضی در این دوره است. اعتقاد به شهود پیشینی از پیوستار اعداد حقیقی (خط راست) با وجودِ بی‌نهایت کوچک‌ها، تناقض مستقیم دارد. اگر نظریهٔ اتمی لایب‌نیتس درست باشد، وجودِ پیوستار، قهراً نقض می‌شود (مقصود از «وجود»، به تعبیر این دوره است). ریاضیدانان دورهٔ دوم به توافقی در این زمینه نمی‌رسند. از یک سو، آنها ناگزیر به استفاده از بی‌نهایت کوچک‌ها هستند و از سوی دیگر، موفق نمی‌شوند نظریه‌ای مدون و منطقی در توجیه این مخلوقات ارائه دهند. در برخی تعبیرهای خط حقیقی (در آنالیز) حضور بی‌نهایت کوچک‌ها واجب به نظر می‌رسد و در بعضی تعبیرهای دیگر (هندسهٔ محض)، بی‌نهایت کوچک‌ها از صحنه محو می‌شوند. خط اقلیدسی، مستحکم‌ترین سنگر یقین در علم، به معماگون‌ترین مفهوم‌ها تبدیل می‌شود.

۴. دورهٔ سوم

برای رفع بحران بنیادی ریاضی، لازم است که ریاضیات بر پایه‌ای مستحکم بازسازی شود و مانند گذشته، یقین، به ریاضیات بازگردد. اگر پیوستار اقلیدسی به‌عنوان شهود پیشینی قابل اعتماد نیست، باید ریاضیات و به ویژه آنالیز را بر مبنای دیگری بنا نهاد. نامزد اصلیِ شهود پیشینیِ خالی از ابهام، مجموعهٔ اعداد طبیعی است. کرونکر اعلام می‌کند که «خداوند اعداد طبیعی را آفرید و بقیه کار انسان است» و ددِکیند برای اولین بار پیشنهاد دقیقی برای تعریف پیوستار یک بُعدی اقلیدسی ارائه می‌کند. این کوشش‌ها وقتی باثمر خواهند بود که بتوان آنالیز را بر مبنایی مستحکم بنا کرد. وایرشتراس وارد صحنه می‌شود. او از یک سو مانند ددِکیند، تعریفی دقیق از اعداد حقیقی پیشنهاد می‌کند (به زبان امروزی، اعداد گویا رده‌های هم‌ارزیِ زوج‌های مرتبِ اعداد صحیح هستند و اعداد حقیقی رده‌های هم‌ارزیِ دنباله‌های کوشی از اعداد گویا) و از سوی دیگر، با دقیق ساختن مفهوم حد (به‌صورت کنونی)، بی‌نهایت کوچک‌ها را از آنالیز می‌راند. به این ترتیب ظاهراً وایرشتراس موفق می‌شود که با حسابی‌ساختن[۱] آنالیز، همهٔ قضیه‌های آنالیز حقیقی و مختلط را بر پایه‌ای استوار سازد که بار دیگر، یقین در ریاضیات احیا شود. این نقطهٔ عطفی است که آن را آغاز دورهٔ سوم فلسفهٔ ریاضیات می‌دانیم.

با اینکه نظریهٔ اتمی لایب‌نیتس و بی‌نهایت کوچک‌های او جایی در نظام وایرشتراس ندارند، سازمانی که وایرشتراس برای پیوستار حقیقی قائل می‌شود، خود دربرگیرندهٔ نوعی اتم‌گرایی است. به این صورت که شهودِ پیوستگی خط حقیقی، تقدم خود را از دست می‌دهد و سازمانِ خاصِ اجزای خط حقیقی است که منشأ ادراک پیوستگی محسوب می‌شود. این که حتی «سازمان» و «ترتیب» هم خود تشریحِ اتمی پیدا

[1] arithmetization

می‌کنند، ثمرهٔ نظریهٔ مجموعه‌های کانتور است که بعداً به آن خواهیم پرداخت. لازم است در اینجا بیفزاییم که تعریف‌های دقیق دورهٔ وایرشتراس، خود منشأ ایجاب مشروعیت برای مخلوقات ریاضی غیرشهودی و حتی ضدشهودی می‌شوند. از این قبیل است «تابع‌های همه‌جا پیوسته و هیچ‌جا مشتق‌پذیر»، «منحنی‌های فضا پُرکُن» و انواع گوناگون تابع‌هایی که در عملکرد روزمرهٔ ریاضی جایی ندارند. اگرچه این «عفریت‌آفرینی» نقشی مثبت در دقیق ساختن اثبات‌های ریاضی دارد و به یقینِ متزلزل شدهٔ ریاضی حیاتی نو می‌بخشد، پذیرش این راه‌حل، به قیمت از دست‌رفتنِ حیثیتِ «وجود» در ریاضیات تمام می‌شود. دیگر نه‌تنها هندسهٔ نااقلیدسی، قبح نیست، موجودات عجیب و غریبی مانند «منحنی فضا پُرکُن» در کنار مفاهیم ریشه دارد و زمان‌آزمودهٔ ریاضی قد علم می‌کنند و ادعای وجود دارند. این وضعیت با پیدایش نظریهٔ مجموعه‌های کانتور و برنامه‌های بعدی فرگه، راسل و هیلبرت به افراطی‌گری‌های خطرناکی کشیده می‌شود ولی در زمان وایرشتراس، معدود عفریت‌های موجود، زنگ خطری به صدا در نیاوردند و تنها مایهٔ کنجکاوی ریاضیدانان شدند.

کارهای وایرشتراس، بولتزانو، ددِکیند و معاصرانشان در مبانی آنالیز، روشن می‌سازد که مفهوم «مجموعه‌ای از اعداد حقیقی» کارایی فوق‌العاده‌ای در روشن ساختن سازمان اعداد حقیقی دارد و قوام و دقت تازه‌ای به قضیه‌های آنالیز می‌بخشد. تعمیم مفهوم انتگرال توسط ریمان و موفقیت‌هایی که در بررسی سری‌های فوریه نصیب او می‌شود، مؤیّد این دیدگاه هستند. کانتور که مجموعهٔ نقاط همگرایی سری‌های فوریه را بررسی می‌کند و در درک ساختمان مجموعه‌های اعداد حقیقی از دیگران پیشی گرفته است، دو گام به جلو برمی‌دارد: یکی در نظر گرفتنِ مجموعه‌ها به‌عنوان مفهوم عام و دیگری، آفریدن اعداد اصلی و ترتیبی نامتناهی به‌عنوان یکی از ویژگی‌های مجموعه‌ها. به این ترتیب، «اتم‌گرایی» وایرشتراس توسط کانتور به بیشترِ بخش‌های ریاضیات سرایت می‌کند. بناکردن ریاضیات بر پایهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها را نوعی «اتم‌گرایی» خوانده‌ایم به این سبب که شرط لازم و کافی برای تساوی دو مجموعه، یکی بودنِ عضوهای آنها است و لذا ماهیت یک مجموعه، از ترکیب اعضای آن، کاملاً مشخص می‌شود.

کانتور حتی «پیوستار» را برای همیشه به‌عنوان یک شهود پیشینی از میان برمی‌دارد. او پیوستار به معنای عام را یک مجموعهٔ همبند و کامل[۱] تعریف می‌کند.[۲] مفهوم ترتیب نیز با در نظر گرفتنِ زیرمجموعه‌های حاصل‌ضرب دکارتی یک مجموعه در خودش، تعریفی در چارچوب نظریهٔ مجموعه‌ها می‌یابد. سرانجام، تسرملو با اثبات قضیهٔ خوش‌ترتیبی (معادل با اصل انتخاب)، استقلال کاملِ ترتیب از ترکیبِ یک مجموعه را اعلام می‌کند.

---

[۲] این تعریفِ کانتور برای زیرمجموعه‌های فضای اقلیدسی است ولی می‌توان آن را در هر فضای توپولوژیک به‌کار بست.

[۱] perfect

آنچه که بحران جدیدی در فلسفهٔ ریاضی به‌وجود می‌آورد، یکی به‌کار بستنِ جسورانهٔ بی‌نهایتِ بالفعل توسط کانتور است و دیگری، ظهور تناقض‌های گوناگون در مورد مجموعه‌های بینهایت بزرگ. ریاضیدانان که از دوران پیشین به ظهور تناقض‌های ناشی از به‌کار بردنِ بی‌نهایت بزرگ و بی‌نهایت کوچک، آشنا بوده و پس از سالیان دراز کوشش، موفق شده‌اند به‌کمک تعریف‌های وایرشتراس، همهٔ بی‌نهایت‌ها را به بینهایت‌های بالقوه کاهش دهند، این بار، مقاومت زیادی در برابر نظریهٔ کانتور از خود نشان می‌دهند. آنچه واقعاً نگران‌کننده است، این است که مفهوم ظاهراً بی‌آزاری مانند «مجموعه» می‌تواند منشأ پارادکس‌هایی مانند پارادکس بورالی–فورتی[1] و پارادکس راسل باشد. جهان ریاضی که مدت کوتاهی است از یقینِ بازیافتهٔ این علم، سرمست شده است، ناگهان دستخوش تزلزل تازه‌ای می‌شود. ریاضیدانان بزرگ آن زمان، نظرهای گوناگونی در این زمینه دارند. بعضی مانند پوانکاره بر این عقیده‌اند که نظریهٔ مجموعه‌ها «مرضی است که سرانجام ریاضیات از آن رهایی خواهد یافت» و برخی دیگر مانند هیلبرت معتقدند که «کسی هرگز ما را از بهشتی که کانتور برایمان آفریده است، بیرون نخواهد راند». در هر صورت، موقعیت نظریهٔ مجموعه‌ها و بحرانِ بی‌نهایت نمی‌تواند مورد توجه مکتب‌های فلسفهٔ ریاضی که در همان زمان پایه‌گذاری می‌شدند، قرار نگیرد.

۵. مکتب‌های فلسفهٔ ریاضی

با توجه به صحبت‌هایی که دربارهٔ جوّ ریاضی حاکم در قرن نوزدهم کردیم، زمینهٔ پیدایش سه مکتب منطق‌گرایی، شهودگرایی و صورتگرایی باید روشن باشد. این سه مکتب، هر یک به‌نحوی خواستار حل دو مسئلهٔ «وجود» و «یقین» هستند و کوشش‌هایی که در راه حسابی‌ساختنِ ریاضیات توسط وایرشتراس و دیگرن انجام گرفته است، اثری عمیق بر دیدگاه آنها دارد. منطق‌گرایی که اعلام ایجاد آن را باید کتاب **مبانی حساب**[2] فرگه به سال ۱۸۸۴ دانست، ریاضیات را جزئی از منطق و قضیه‌های ریاضی را گزاره‌هایی در منطق می‌داند. فرگه در کتاب خود، اشتقاق اعداد طبیعی از مفاهیم منطقی را توصیف می‌کند. پس از فرگه، راسل نیز در اوایل قرن بیستم، با انتشار کتاب **اصول ریاضی** [۲۰]، تز منطق‌گرایی و چگونگی بازسازی ریاضیات بر مبنای منطق را پیشنهاد کرده و در اثر عظیمِ خود با وایتهد [۲۱]، به پیاده کردنِ این برنامه همت می‌گمارد. کار راسل و وایتهد، نظریهٔ مجموعه‌های کانتور را نیز دربر می‌گیرد و این دو با ابداع نظریهٔ انواع[3]، بر تضادهای نظریهٔ مجموعه‌ها فائق می‌آیند. به این ترتیب، راه‌حلی که منطق‌گرایان برای مسائل وجود و یقین پیشنهاد می‌کنند، این است که «وجود» در ریاضی، همان وجود در منطق است و منشأ «یقین» نیز یقین در منطق. بعداً که به توصیف صورتگرایی می‌پردازیم، خواهیم دید که این دیدگاه با مشکلات بزرگی روبه‌رو است و در واقع، نه تنها کلیهٔ ایرادهایی که به صورتگرایی وارد است، به منطق‌گرایی

[1] Burali-Forti paradox [2] Die Grundlagen der Arithmetik [3] type theory

نیز منتقل می‌شود، بلکه چنانچه ریاضیات را جزئی از منطق بپنداریم، این مسائل در سطحی گسترده‌تر، همهٔ منطق را دچار تزلزل خواهند کرد. فرگه و راسل در اواخر کار، کوشش‌های خود را شکست خورده محسوب می‌کردند و علی‌رغم کمک بزرگی که پیدایش این مکتب به توسعهٔ منطق ریاضی کرد، امروز می‌توان گفت که منطق‌گرایی به‌عنوان فلسفهٔ ریاضی، طرفداران زیادی ندارد.

در دههٔ سوم قرن بیستم، هیلبرت، برنامهٔ فرگه و راسل را از دیدگاه واقع‌بینانه‌تری از سر می‌گیرد: دیدگاهی که به صورتگرایی معروف است. هیلبرت، نخست مسئلهٔ وجود را با انکار کاملِ آن، حل می‌کند به این شکل که از دیدگاه هیلبرت، اشیاء ریاضی، نمادهای وضع‌شده‌ای بیش نیستند که حدود کارکرد و ویژگی‌های آنها توسط اصول موضوعه مشخص می‌شود. روش رسیدن به گزاره‌های درستِ ریاضی، استنتاج متناهی‌وار[۱] است. این در واقع تعمیم کاری است که پئانو در مورد علم حساب شروع کرده بود. تفاوت اصلی آن با دستگاه اقلیدسی این است که تعبیر معنایی نمادهای هیلبرت منحصر به فرد نیست؛ در حالی که در دستگاه اقلیدسی، نمادها، نشان‌دهندهٔ اشیاء خارجی مشخصی هستند. البته روش استنتاج منطقی نیز در برنامهٔ هیلبرت، تعریف دقیق دارد و با پیشرفت‌هایی که در اثرِ رواج منطق‌گرایی نصیب منطق ریاضی شده است، اکنون می‌توان مسائل ظریف‌تری را در نظر قرار داد. شرایطی که هیلبرت برای قابل قبول بودنِ یک نظریهٔ ریاضی قائل است، این است که اصول موضوعه منجر به تناقض نشوند (اصل سازگاری) و گزاره‌های درست نظریه همه در درون آن نظریه، اثبات‌پذیر باشند (اصل تمامیت). بنابراین برنامهٔ هیلبرت، اصل‌موضوعی ساختنِ همهٔ نظریه‌های ریاضی و اثبات سازگاری و تمامیت آنها است با این هدف که برای همیشه، پارادکس‌هایی که استقرارِ یقین در ریاضیات را به مخاطره انداخته‌اند، از صحنه پاک شوند. اینکه آرزوی هیلبرت با کشف غیرمنتظرهٔ گودل دربارهٔ ناتمامیت حساب نقش بر آب می‌شود، داستان آشنایی است. گودل ثابت می‌کند که تمامیت و سازگاریِ اصول موضوعهٔ پئانو یا هر مجموعهٔ متناهی دیگری که شامل آن شود، نمی‌توانند توأماً برقرار باشند. به عبارت دیگر، اگر نظریهٔ اعداد از نظر منطقی سازگار باشد، همواره در آن گزاره‌های درست ولی غیر قابل اثبات (به مفهومِ برنامهٔ هیلبرت، یعنی در چارچوب اصول و به روشِ استنتاج متناهی) وجود خواهند داشت. در اینکه قضیهٔ گودل، ادعای صورتگرایی و منطق‌گرایی را به‌عنوان فلسفه‌های جامع علم ریاضی، برای همیشه مردود می‌سازد، شکی نیست. در آینده سعی خواهم کرد نشان دهم که این اشکال درونیِ دو مکتب نامبرده، ممکن است تنها یک اشکال «موضعی» باشد و در واقع ناتوانی‌های اساسی‌تری متوجه این دو مکتب است.

قبل از پرداختن به بررسی انتقادی، لازم است مختصری نیز از مکتب عمدهٔ دیگر این دوره، یعنی شهودگرایی بگوییم. این دیدگاه که به ابتکار براوئر پایه‌گذاری می‌شود، تفاوت‌هایی اساسی با دو مکتب صورتگرایی و منطق‌گرایی دارد. مبنای فلسفهٔ ریاضی براوئر را می‌توان در دو اصل زیر خلاصه کرد:

۱– اشیاء ریاضی، ساختمان‌های ذهنی هستند؛

[۱] finitary deduction

۲- این اشیاء بر مبنای شهود پیشینی از اعداد طبیعی (به‌عنوان اشیاء اولیه) و به طریق منطق شهودی ساخته می‌شوند. منطق شهودی مانند منطق غیرصوری، عادی است با این تفاوت عمده که در آن، اصل طرد شق ثالث[۱] انکار می‌شود.

کنارگذاشتن اصل طرد شق ثالث، نقش اساسی در دیدگاه فلسفهٔ شهودگرایی نسبت به «وجود» دارد. از آنجا که اشیاء ریاضی در نظر براوئر ساختهٔ ذهنی انسان هستند، تنها به وجودِ آن اشیائی می‌توان حکم کرد که بشود آنها را در تعداد متناهی گام ساخت. استدلال‌های وجودی که مبتنی بر برهان خلف هستند، طریقه‌ای برای دست یافتن به شیء ریاضی مورد نظر ارائه نمی‌کنند، بلکه تنها وجود را به‌عنوان یک استلزام منطقی (مبتنی بر اصل طرد شق ثالث) حکم می‌نمایند. هر گونه اثبات وجود که روشی برای ساختن، دست‌کم به‌طور نظری، همراه نداشته باشد، از دیدگاه شهودگرایی مردود است. از همین قبیل است اصل انتخاب و همهٔ مطالب نظریهٔ مجموعه‌ها که به بی‌نهایتِ بالفعل مربوط می‌شوند. از این دیدگاه، تنها بی‌نهایت‌های بالقوه در ریاضیات معنا دارند و اعداد اصلی و ترتیبیِ بی‌نهایت بزرگ، در چارچوب وجودی این فلسفه نمی‌گنجند. نمونه‌ای از بی‌نهایتِ بالقوه، تعداد اعداد طبیعی است، بدین معنی که می‌توان هر عدد طبیعی را ساخت و فرآیند ساختن این اعداد، هیچ‌جا ختم نمی‌شود. **بنابراین انکار اصل طرد شق ثالث، وسیله‌ای است که به‌کمک آن، براوئر استقلال اشیاء ریاضی از ذهن سازنده را سلب می‌کند.**

به همین روال، یک گزارهٔ ریاضی تنها در صورتی صادق است که بتوان صدق آن را با استدلال شهودگرایانه (بدون استفاده از اصل طرد شق ثالث) اثبات کرد و در صورتی کاذب است که بتوان به همین روش، از آن تناقضی نتیجه گرفت. یک گزارهٔ ریاضی تا وقتی که صدق یا کذب آن به این طریق ثابت نشده باشد، بی‌معنی است. برای مثال، از دید شهودگرایان، گزارهٔ «سیاوش پسر کیکاووس، خالی بر شانه دارد» بی‌معنی است، زیرا «سیاوش پسر کیکاووس» ساختهٔ ذهن فردوسی (یا حماسه‌سرایان پیش از او) است و تنها آن احکامی دربارهٔ وی صادق یا کاذب‌اند که بتوان آنها را از اساطیر مربوط، استنتاج کرد یا رد نمود. چون ظاهراً هیچ‌جا در افسانه‌های باستانی ایران، اشاره‌ای به «خالِ روی شانهٔ» سیاوش نشده است، این گزاره نه صادق است و نه کاذب، بلکه بی‌معنی است. به همین ترتیب، گزاره‌های درست و غیرقابل اثباتِ گودل از دیدگاه شهودگرایی بی‌معنی هستند.

با این دیدگاه براوئر، پس از او افراد دیگری مانند هیتینگ[۲] و بیشاپ[۳] به بازسازی ریاضیات می‌پردازند. مقدار قابل‌ملاحظه‌ای از ریاضیات سنتی (عملاً همه چیز دربارهٔ اعداد حقیقی و مختلط) را می‌توان به این طریق بنا کرد ولی آنچه نیاز به اصل انتخاب یا استفاده از بی‌نهایت‌های بالفعل دارد، از ریاضیات طرد می‌شود. در این کوشش، بخش بزرگی از منطق شهودگرایی به‌دست می‌آید که استدلال‌های منطقی قابل استفاده در این مکتب را توصیف می‌کنند. مقایسهٔ روش ساختن اعداد حقیقی به طریق

[۱] principle of excluded middle [۲] A. Heyting [۳] E. Bishop

شهودگرایانه و صوری-منطقی، هر ریاضیدان را قانع می‌سازد که در این زمینه، اشیاء مورد نظر عملاً یکی هستند و تفاوت، تنها در دو چیز است: یکی تعبیر فلسفی و دیگری، اینکه بعضی استدلال‌های شهودگرایانه، به‌دلیلِ محدود بودنِ زمینهٔ وجود، طولانی‌تر از اثبات‌های سنتی هستند.

۶. نقد مکاتب سه‌گانه

نقد سه مکتب معروف فلسفهٔ ریاضی را از شهودگرایی آغاز می‌کنیم. نخستین انتقادی که به شهودگرایی وارد است، تکیهٔ آن بر اعداد طبیعی به‌عنوان شهود پیشینی است. در واقع شهودگرایی و در عصر حاضر، ساخت‌گرایی[۱] بیشاپ دنبالهٔ طبیعی کوشش‌های حسابی‌سازیِ ریاضیات هستند. در توجیه این گرایش، گفته می‌شود که از شهود پیشینی فضا و زمان که کانت به آن اعتقاد داشت، شهود فضا با پیدایش هندسه‌های نااقلیدسی، ثبات خود را از دست می‌دهد ولی شهود زمان، یا به‌طور دقیق‌تر، شهودِ توالی زمان، سرچشمهٔ اعداد طبیعی است. در این زمینه می‌توان ایراد گرفت که همچنان که هندسه‌های نااقلیدسی، شهود پیشینی فضا را متزلزل ساخته است، نظریهٔ نسبیت نیز مطلق بودنِ زمان را برای همیشه برانداخته است.[۲] در دیدگاه فیزیک امروزی از جهان طبیعی، زمان و فضا اساساً در هم آمیخته‌اند و قابل تفکیک نیستند. به‌علاوه، واقعاً بعید به نظر می‌رسد که از نظر تاریخی یا روانی، شهود زمان، منشأ اعداد طبیعی باشد. پژوهش‌های پیاژه دربارهٔ درک مفاهیم ریاضی توسط کودکان، مؤیّد این است که کودکان، مفاهیم مجردی همچون اعداد طبیعی را در بازی کردن و تجربه با اشیاء و شرکت فعال در محیط، کسب می‌کنند نه از طریقِ انفعالیِ ادراک گذشت زمان (مثلاً [۱۰] را ببینید). البته در اینجا انتقاد ما به حسابی‌سازیِ ریاضیات نیست، بلکه به توجیه حسابی‌سازی بر اساس شهود زمان است. در زمینهٔ استفاده از شهود فضا و زمان، به نظر ما رنه توم[۳] دیدگاه واقع بینانه‌تری دارد [۱۰، ۲۴]. به نظرِ توم، آنچه ما به‌عنوان شهود پیشینی از ادراک فضا و زمان کسب می‌کنیم، پیوستگی موضعی است. این فرض، با نظریهٔ نسبیت و نااقلیدسی بودنِ فضا مغایرتی ندارد، بلکه تنها پیشنهادی است برای اتخاذ پیوستار موضعی به‌عنوان شهود پیشینی. جالب خواهد بود اگر بتوان یک دستگاه شهودی بر مبنای این شهود پیشینی، بنا نهاد. چنین مجموعه‌ای انعکاس دقیق‌ترِ دیدگاه کانت خواهد بود تا شهودگرایی براوئر که در واقع تحت تأثیرِ **تز تقدّم گسسته** کرونکر است. حتی اگر زمانی، کوانتمی بودنِ فضا و زمان به‌مثابهٔ یک اصل فیزیکی مورد قبول قرار گیرد، شکی نیست که ادراک ما از پیوستار، تقریب بسیار قابل اعتمادی از جهان طبیعی است که واقعیت عملی خود را در قلمرو ادراک و کارکرد انسان‌ها از دست نخواهد داد.

[۲] به نظر می‌رسد این ایراد را اول بار K. Popper در [۱۸] مطرح کرده است.

[۱] constructivism [۳] R. Thom

شاید عمده‌ترین اشکال شهودگرایی این باشد که به‌سبب محدودیت‌هایی که در مقولهٔ «وجود» قائل می‌شود، نمی‌توان آن را در جایگاه یک فلسفهٔ جامع ریاضی پذیرفت. امروزه، بی‌نهایتِ بالفعل، جای خود را در ریاضیات باز کرده است و بیمی واقعی دربارهٔ ناسازگار بودنِ آن احساس نمی‌شود. اصل طرد شق ثالث همچنان که از دورهٔ یونان باستان مرسوم بوده است، هنوز مورد قبول و استفادهٔ ریاضیدانان است و اشیاء ریاضی در دیدگاه ریاضی‌کاران، استقلالی مشابه استقلال اشیاء فیزیکی دارند. رشد چشمگیر منطق ریاضی آن را به شاخه‌ای غنی در ریاضیات تبدیل کرده است و یکی از ثمرات آن ریاضیات نااستاندهٔ[1] است. آنالیز نااستانده به ما نشان می‌دهد که بی‌نهایت کوچک‌های لایب‌نیتس را طوری می‌توان توجیه کرد که دقت مورد انتظار ریاضی را داشته باشند. شاید مهیج‌تر از این، دیدگاه‌های کاملاً نوینی است که حساب نااستانده در این رشته گشوده است. تجربهٔ ریاضی نیم قرن اخیر، نه‌تنها مفاهیم ریاضی را آن‌طور که براوئر طالب بود، در بند نکشیده است، بلکه روش‌هایی که براوئر کاملاً غیر قابل قبول می‌دانست، مانند گذشته، به غنی ساختن ریاضی کمک شایانی می‌کنند. امروز شاید بیش از گذشته انتقاد هیلبرت بجا به نظر می‌رسد که شهودگرایان را به نوعی کوته‌فکری مشابه تمایلات عده‌ای که روزگاری مخالفِ استفاده از اعداد «موهومی» بودند، متهم می‌کرد. البته این انتقاد تا وقتی وارد است که شهودگرایی ادعای دربرگرفتنِ همهٔ ریاضیات را داشته باشد؛ ولی نمی‌توان منکر شد که شهودگرایی **به‌عنوان یک رشته از ریاضی** ارزش فراوانی دارد. همچنان که پژوهش‌های بیشاپ نشان می‌دهد، بررسی «ساخت‌پذیریِ» مفاهیم ریاضی، خود مقوله‌ای جذاب است که ممکن است حتی در خارجِ ریاضیات هم به‌کار گرفته شود.

اکنون می‌پردازیم به صورتگرایی. همان‌طور که قبلاً گفتیم، آنچه به‌عنوان انتقاد از صورتگرایی گفته خواهد شد، به منطق‌گرایی نیز وارد است. به اشکال درونی صورتگرایی که با کشف قضیهٔ ناتمامیت گودل برملا شد، اشاره کردیم. بی‌شک قضیهٔ گودل نارسا بودنِ دستگاه‌های اصل‌موضوعی و مکانیسم اثبات در آن را به نحوی که صورتگرایان پیشنهاد کرده‌اند، به وجهی قاطع نشان داده است. در چند دههٔ اخیر، صورتگرایی چنان غلبه‌ای بر چهرهٔ ریاضیات داشته است که در نتیجهٔ آن، بعضی افراد، قضیهٔ گودل را یک نقصان درونیِ ریاضیات تلقی کرده‌اند. ولی نباید اثبات به معنای عرفی را با اثبات به طریق صورتگرایانه، یکی گرفت. چه بسا استدلال‌هایی که در چارچوب صوری یک نظریهٔ اصل‌موضوعی، نمی‌گنجند ولی از نظر هر ریاضیدانی به‌عنوان اثبات (استدلال قانع‌کننده) مورد قبول هستند. مثلاً درستی گزاره‌هایی که گودل اثبات‌ناپذیر بودنِ آنها را ثابت می‌کند، به‌راحتی مورد پذیرش است. مثالی با همین ماهیت را که برای من جالب است، نقل می‌کنم.[2] فرض کنید روزی ثابت شود که حدس گلدباخ[3] (اینکه هر عدد زوج بزرگتر از ۲ مجموع دو عدد اول است) در چارچوب اصول پئانو اثبات‌پذیر نیست. در نتیجه نمی‌توان مثالی نقض

[2] مرجع [۷] بسیار روشن‌کننده بوده است.

[1] non-standard mathematics [3] Goldbach conjecture

در مجموعهٔ استانده اعداد طبیعی برای آن یافت و مطلب اخیر نشان می‌دهد که حدس گلدباخ برای اعداد طبیعی درست است. کدام ریاضیدان است که این استدلال را مردود بداند؟ اگر $G(۲n)$ حدس گلدباخ باشد که می‌گوید عدد زوج $۲n$ را می‌توان به‌صورت مجموع دو عدد اول نوشت و PA مجموعهٔ اصول پئانو باشد، ما نشان داده‌ایم که

$$\forall n \in \mathbb{N}:\ PA \vdash G(۲n)$$

در حالی که اثبات قابل قبول از دیدگاه صورتگرایی باید به شکل زیر باشد:

$$PA \vdash (\forall n \in \mathbb{N}:\ G(۲n)).$$

در دیدگاه صورتگرایی، اثبات ریاضی دیگر آن وسیلهٔ کشف مانند دیدن و شنیدن نیست، بلکه یک فرآیند ماشینی است که یک رایانهٔ به‌اندازهٔ کافی نیرومند نیز قادر به انجام آن است. اگر توجه کنیم که گزاره‌های جالب ریاضی، عموماً در تعداد نامتناهی موردِ خاص صادق هستند، آیا معقول است انتظار داشته باشیم که بتوان با روش‌های متناهیِ ماشینیِ صورتگرایانه به آنها دست یافت؟ اینکه اثبات ریاضی، به مفهوم فرعی، ما را قادر می‌سازد در تعداد متناهی گام، به واقعیتی که در تعداد نامتناهی مورد صادق است، دست بیابیم، اعجازی است که باید ریشهٔ آن را در روانشناسی اثبات و مدل‌سازی ریاضی از تجربه[۱] جستجو کرد. رنه توم به تشابهی میان صوری‌سازیِ نظریه‌های ریاضی و وضع کردنِ دستگاه مختصات اشاره می‌کند. همان‌طور که معمولاً نمی‌توان یک خمینه را با دستگاه مختصات واحدی توصیف کرد و استفاده از دستگاه مختصات تنها یک حربهٔ موضعی است، نباید انتظار داشت که بتوان همهٔ ویژگی‌های یک دسته اشیاء ریاضی را با وضعِ یک دستگاه صوری واحد، بیان کرد. البته کارایی موضعی دستگاه‌های صوری را قرن‌ها تجربهٔ ریاضی تأیید می‌کند. بی‌دلیل نیست که علی‌رغم قضیهٔ گودل، صورتگرایی بیش از دو مکتب دیگر، مورد قبول ریاضیدانان حرفه‌ای واقع شده است.

در همین زمینه، به رویدادی در سال‌های اخیر اشاره می‌کنم که تا حد زیادی گویای واقعیت است. چند سال پیش اعلام شد که حدس چهار رنگ، بالأخره ثابت شده است. آنچه تازگی داشت استفادهٔ غیرعادی (ده‌ها ساعت) از رایانه در اثبات این حدس بود. به‌طور خلاصه می‌توان گفت اثبات این حدس منجر به تحقیق تعداد زیادی از موارد خاص شده و کاربرد رایانه، در تحقیق صحت حدس در این موردها بود. حجم عمل رایانه در تحقیق این حالت‌های خاص چنان عظیم بود که تنها راه تأیید صحت آن، به جریان انداختنِ مجدد برنامهٔ رایانه‌ای یا نوشتن برنامه‌ای دیگر با همین منظور بود. جالب اینجاست که با وجودِ قدمت مسئله، حل آن هیجان چندانی در محافل ریاضی ایجاد نکرد. علت سردی استقبال را باید در این یافت که هنوز هم از نظر یک ریاضیدان حرفه‌ای، مهم‌ترین نقش اثبات روشن ساختنِ روابط است نه انباشتن

[۱] در اینجا مقصود، تجربه به معنای عام است که شامل تجربه با اشیاء ریاضی هم می‌شود.

پی در پی و بدون تبعیضِ حقایق منطقی. آنچه در مسئلهٔ چهار رنگ واقعاً مطلوب است درک کامل مسئلهٔ رنگ کردن است (که هنوز حل نشده است) نه اینکه چه عدد به‌خصوصی برای این کار کفایت می‌کند. آزمایش‌های ماشینی با مفاهیم ریاضی می‌تواند نقش مهمی در ریاضی ایفا کند البته نه در زمینهٔ اثبات، بلکه در زمینهٔ تولید مثال و شاهد برای دنبال کردن مطالب.

دیدگاه آزادمنشانهٔ صورتگرایان و منطق‌گرایان دربارهٔ «وجود» در ریاضیات («هر چه منجر به تناقض نشود، وجود دارد»)، اثر مختلطی بر تجربهٔ ریاضی داشته است که بی‌شباهت به اثر آزاد شدنِ سبک‌های هنری در عصر حاضر نیست. از یک سو این دیدگاه، رهایی‌آفرین است و ریاضیدان را از قید الزاماتی که در قرن‌های پیشین، پیشرفت موضوع‌هایی مانند هندسهٔ نااقلیدسی را دشوار ساخته بود، آزاد می‌سازد و از سوی دیگر، همچنان که قبلاً اشاره کردیم، این آزادی، منجر به پیدایش موجودات عجیب و غریبی در ریاضیات شده است که بدون حاکمیت یک دستگاه ارزشی در ریاضی، علم ما را به هرج و مرج می‌کشاند. در هر حال، اگر «وجود» در ریاضی مطابق نظر هیلبرت و راسل مستقر شود، دیگر مقولهٔ «وجود» اهمیت بیش از اندازه‌ای در کار ریاضی نخواهد داشت. در واقع آنچه به‌جای «وجود»، اهمیت عملی و فلسفی در ریاضیات پیدا خواهد کرد، ارزشمندیِ موجودات ریاضی است. تحوّلات دو دههٔ اخیر در ریاضی، در جهتی است که می‌توان تبلور نوعی اجماعِ نظر در این زمینه را احساس کرد. تعریف‌ها و مباحثی در ریاضی قابل توجه‌اند که مبتنی بر تجربه (به مفهوم عام) باشند و نظریه‌های نو وقتی ارزش پیگیریِ علمی دارند که مشکل‌گشای مسائل ریشه‌دار باشند.

خلاصهٔ آنچه در باب نقد مکتب‌های سه‌گانهٔ فلسفهٔ ریاضی گفتیم این است که این مکتب‌ها به‌علت اشتغال بیش از اندازه به بازگردانیدنِ یقین به ریاضیات، از تجربهٔ عینی این علم روی گردانیدند و کوشش کردند ریاضیات را بر پایه‌های غیرتاریخی و حتی ضد تاریخی بازسازی کنند. در مورد شهودگرایی، موفقیت این کوشش به قیمت طردِ بخش بزرگی از علم ریاضی تمام می‌شود و در منطق‌گرایی و صورتگرایی، قضیهٔ گودل، این کوشش‌ها را از درون به شکست محکوم می‌کند. این مکتب‌ها را از این‌رو غیرتاریخی و ضد تاریخی خوانده‌ایم که هرکدام به نحوی، تحت تأثیر نهضت حسابی‌سازیِ ریاضیات در قرن نوزدهم، مفاهیم اولیه و متعارف ریاضی را طوری نقض کردند که تعریف‌ها دیگر جنبهٔ معرفی ندارند و حتی اگر به‌لحاظ منطقی، بازگویِ کلیهٔ ویژگی‌های شناخته شدهٔ مفهوم‌ها باشند، از نظر عملی بر شهود ریاضیدانان منطبق نیستند. کدام ریاضیدان است که در تفکر ریاضی خود، زوج مرتب (a,b) را به‌صورت $\{\{a\},\{a,b\}\}$ و یا عدد حقیقی را یک ردهٔ هم‌ارزی از دنباله‌های کوشیِ رده‌های هم‌ارزیِ زوج مرتب‌های اعداد صحیح تجسم کند؟! گمانم بر این است که به اندازهٔ کافی علت‌های عدم استقبالِ ریاضیدانان از مکتب‌های فلسفی سه‌گانه را توصیف کرده باشم.

۷. ریاضیات به‌مثابهٔ یک علم طبیعی

معمولاً گفته می‌شود که ریاضیدانان حرفه‌ای اکثراً افلاطون‌گرا[۱] هستند. این گفته اگر به این معنی تلقی شود که امروزه نوعی مکتب مدوّن متأثر از افلاطون‌گرایی در ریاضیات وجود دارد، چنین ادعایی درست نیست. امروز مکتب افلاطونیِ مشخص و شناخته‌شده‌ای در ریاضیات وجود ندارد و شاید اکثر ریاضیدانان، مُثُل افلاطونی را در زُمرهٔ خرافاتِ ماقبل علم بپندارند.[۲] آنچه می‌توان تمایل افلاطون‌گرایی در میان ریاضیدانان نامید، این احساس ذهنی هر شخص ریاضی‌کار است که مفاهیم ریاضی، نوعی عینیت مستقل از ذهن ریاضیدان دارند و پژوهش ریاضی، مانند پژوهش در علوم طبیعی، نوعی اکتشاف است. مفهوم‌های عمدهٔ ریاضی، هیچ‌یک قراردادِ دلخواه یک ریاضیدان نیستند، بلکه همه در طول زمان، پس از آزمایش با پیشنهادهای گوناگون، تحقق یافته‌اند. دامنهٔ جهان ریاضی در طول قرن‌ها پژوهش چنان گستره‌ای پیدا کرده است که ریشهٔ بسیاری از مفاهیم برای تازه‌کارها، روشن نیست و پایه‌های تجربی این علم نیز از نظر بسیاری افراد مکتوم است. با اینکه بعضی مفهوم‌های ریاضی با چند درجه تجرید از جهان فیزیکی ملموس فاصله دارند، تجربه و اُنس ریاضی‌کاران با آنها، احساسی عینیتی ایجاد می‌کند که عملاً همردیف عینیتی است که فیزیکدان نظری با آن سروکار دارد. فراموش نشود که در فیزیک هم مفهوم‌هایی مانند انرژی پتانسیل، نمودار فاینمن و حتی الکترون، مجردات و مدل‌هایی هستند که برای هماهنگ ساختنِ مشاهدات فیزیکی ابداع شده‌اند و نمی‌توان ادعا کرد هیچ‌یک از آنها عینیتی بیش از عینیت عدد حقیقی، مثلث، گروه یا انتگرال دارد. اگر امکان ترسیم یا مشاهدهٔ یک مثلثِ کاملاً دقیق در جهان وجود ندارد، هیچ دستگاه مکانیکی بدون اصطکاک نیز هرگز یافت نمی‌شود. چنانچه این واقعیت را که هم از نظر ریشهٔ تاریخی و هم از نظر عملکرد روزمره، ریاضیات یک علم طبیعی است (به مفهوم عام، یعنی با شامل دانستن برخی مفاهیم مأنوس ذهنی در میان اشیاء طبیعی) در دیدگاه یک مکتب فلسفی ریاضی منظور نشود، آن دیدگاه اعتبار چندانی در دید ریاضی‌کاران نخواهد داشت. در واقع آنچه ریاضیدانان حرفه‌ای در سال‌های اخیر در زمینهٔ فلسفهٔ ریاضی نوشته‌اند، در جهت احیای این دیدگاه معتبر تاریخی است و می‌توان پیدایش تدریجی جنبش‌هایی در این مسیر را کم کم احساس کرد.

برای اینکه صحبت خود را با نوای امیدبخشی به پایان برسانم، اشاره‌ای کوتاه به کارهای ایمره لاکاتش می‌کنم که شاید سرآغاز یک جنبش ثمربخش در فلسفهٔ ریاضی باشد. اولین و مشهورترین اثر لاکاتش، کتاب **اثبات و ابطال** [۱۲] است که مبتنی بر رسالهٔ سال ۱۹۶۱ وی در دانشگاه کمبریج است. در این اثر و درکارهای متعاقب آن[۳]، لاکاتش به بررسی رشد نظریه‌های ریاضی از دیدگاه شناخت‌شناسی پرداخته است

[۲] تنها استثنای جدی در این مورد، شاید ریاضیدان روسی، شافارویچ، باشد. به گفتاری از او که در [۴] نقل شده است، مراجعه کنید.
[۳] رجوع کنید به [۱۳] و فهرست مراجع آن.

[۱] Platonist

و تصویری رسم می‌کند که با تجربهٔ تاریخی ریاضی بسیار سازگارتر از سه مکتب یادشده است. او رشد نظریه‌های ریاضی را محصول فعل و انفعالی میان حدس‌های معقول و کوشش برای اثبات (غیرضروری) این حدس‌ها می‌داند. به نظر لاکاتش، قضیه‌ها و حتی تعریف‌های ریاضی، تاریخچهٔ تحوّلی دارند که در طی آن، در اثر برخورد با مثال‌های ناقض موضعی و کلی[۱]، شکل می‌گیرند. مقصود از مثال ناقض موضعی، مثالی است که یک گام از استدلال اکتشافی[۲] را نقض کند و مثال ناقض کلی، مثالی است که حکم اصلی را باطل سازد. نمونه‌ای که لاکاتش در کتاب **اثبات و ابطال** به سبک مناظره‌های افلاطونی می‌پروراند، تحول مفهوم شاخص اویلر[۳] است که با حدس اولیهٔ دکارت ــ اویلر در مورد چندوجهی‌ها شروع می‌شود و پس از کوشش‌های متمادی و اثبات‌های ناقص، به‌تدریج به صورت دقیقی درمی‌آید که پوانکاره عرضه کرده است. لاکاتش معتقد است که نظریه‌های زنده و متحرک ریاضی هیچ‌کدام، اقلیدسی نیستند، یعنی جریان انتقال «درستی»، از اصول به نتایج نیست، بلکه این نظریات، «شبه‌تجربی»[۴] هستند، یعنی نادرستیِ نتایج موجب ترمیم و تحول اصول می‌شود. این دیدگاه طبعاً تحت تأثیرِ نظرات کارل پوپر در زمینهٔ فلسفهٔ علوم طبیعی است و نیز تأکیدهای پولیا دربارهٔ نقش اساسی استدلال‌های اکتشافی را به یاد می‌آورد.

در مقولهٔ «وجود»، لاکاتش چیزی از خود بجا نگذاشته است. این ممکن است به‌سبب مرگ نابهنگام وی در سال ۱۹۷۴ باشد یا به این دلیل که او اساساً اهمیتی برای مسئلهٔ وجود قائل نبوده است (سوای آنچه دربارهٔ تحول تعریف‌ها در ریاضی اظهار می‌کند). در هر صورت، چون قرار است یک سخنرانی کامل از این سمینار به بحث دربارهٔ آثار لاکاتش اختصاص داده شود، در اینجا سخن را کوتاه می‌کنم. باشد که ریاضی‌کاران و فلاسفهٔ ریاضی بیش از گذشته به یکدیگر نزدیک شوند تا فلسفهٔ ریاضی سیاقی دوباره بیابد.

مراجع

[1] Ayer, A. J., *Language, Truth and Logic*, Dover, New York, 1952.

[2] Benacerraf, P., and Putnam, H. (editors), *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, Prentice-Hall, Inc., 1964.

[3] Boyer, C. B., *The History of Calculus and Its Conceptual Development*, Dover, New York, 1959.

[4] Davis, P. J., and Hersch, R., *The Mathematical Experience*, Birkhäuser, Boston, 1981.

[5] Dawson, J., The Godel incompleteness theorem from length-of-proof perspective, *Amer. Math. Monthly*, **86** (1979), 740-747.

[6] Dummett, M., *Elements of Intuitionism*, Oxford University Press, Oxford, New York, 1977.

[7] Goodman, N. D., Mathematics as an objective science, *Amer. Math. Monthly*, **86** (1979), 540-551.

[۱] local and global counterexamples [۲] heuristic argument [۳] Euler characteristic [۴] quasi-empirical

[8] Hersch, R., Some proposals for reviving the philosophy of mathematics, *Adv. in Math.*, **31** (1979), 31-50.

[9] Heyting A., *Intuitionism: An Introduction*, North-Holand, Amsterdam, 1956.

[10] Howson, A. G. (editor), *Developments in Mathematical Education*, Cambridge University Press, Cambridge, 1973.

[11] Kant, I., *Critique of Pure Reason*, St. Martin's Press, New York, 1965.

[12] Lakatos, I., *Proofs and Reputations: The Logic of Mathematical Discovery*, Cambridge University Press, Cambridge, 1976.

[13] Lakatos, I., *Mathematics, Science and Epistemology*, Cambridge University Press, Cambridge, 1978.

[14] Manin, Yu., *A Course in mathematical Logic*, Springer-Verlag, New York, 1977.

[15] Manin, Yu., *Mathematics and Physics*, Birkhäuser, Boston, 1981.

[16] Poincare, H., *Science and Hypothesis*, Dover, New York, 1938.

[17] Polya, G., *Patterns of Plausible Reasoning* (2 Vols.), Princeton University Press, 1954.

[18] Popper, K., *Objective Knowledge: An Evolutionary Approach*, Oxford University Press, 1972.

[19] Renyi, A., *Dialogues on Mathematics*, Holden-Day, 1967.

[20] Russell, B., *The Principles of Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1903.

[21] Russell, B., Whitehead A. N., *Principia Mathematica*, Cambridge University Press, Cambridge, 1910.

[22] Snapper, E., Are mathematical theorems analytic or synthetic? *Math. Intelligencer*, **3** (1981), 85-88.

[23] Struik, D. J., *A Source Book in Mathematics*: 1200-1800, Harvard University Press, 1969.

[24] Thom, R., Modern mathematics: an educational and philosophical error, *Am. Sci.*, **59** (1971), 695-699.

[25] van der Waerden, L., *Science Awakening*, Noordhoff, Netherlands, 1975.

[26] Weyl, H., *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, Princeton University Press, 1949.

[27] Wilder, R., *The Foundations of Mathematics*, John-Wiley & Sons, New York, 1965.

سیاوش شهشهانی: دانشگاه صنعتی شریف، دانشکدهٔ علوم ریاضی
رایانامه: shahshah@sharif.ir